

Sujets d'étude : Matrices et applications linéaire

Problème 1

Ce problème permet d'étudier, sur des exemples simples, le lien entre matrices et applications linéaires.

- Soient u et v dans \mathbb{R} . Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2)$ est

$$A = \begin{bmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{bmatrix}$$

Trouver des bases de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.

- Soit $w \in \mathbb{R}$. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ est

$$B = \begin{bmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Montrer qu'il existe une unique valeur de w pour laquelle g n'est pas bijective. Lorsque w prend cette valeur, trouver une base de $\text{Ker } g$.

- Soit $n \geq 2$ un entier. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, de degré 2. On pose

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto 2P'Q - nPQ' \end{aligned}$$

- Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Soient u et v deux réels. On suppose pour cette question que $n = 2$ et $Q = X^2 + uX + v$. Trouver la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et exprimer $\text{Ker } \varphi$ en fonction de Q .
- Soit $w \in \mathbb{R}$. On suppose pour cette question que $n = 3$ et $Q = X^2 + 2X + w$. Trouver la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, et trouver $\text{Ker } \varphi$.
- On suppose que Q n'a pas de racine multiple dans \mathbb{R} .
 - Que dire du PGCD de Q et Q' ?
 - Soit $P \in \text{Ker } \varphi$, non nul. Montrer que $Q|P$.

On note alors k la plus grande puissance de Q qui divise P , c'est-à-dire que $k \in \mathbb{N}^*$, $Q^k|P$ et Q^{k+1} ne divise pas P .

- Montrer que si $\text{Ker } \varphi \neq \{0\}$, alors n est pair.

- Déterminer $\text{Ker } \varphi$ en fonction de n .

- On suppose que Q a une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Soit $P \in \text{Ker } \varphi$, non nul. Montrer que α est racine de P .

- Déterminer $\text{Ker } \varphi$.

- On suppose n impair. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = (X^2 + 1)R' - nXR$.

Deuxième problème

Dans ce problème, on s'intéresse à la recherche de sous-espaces stables par certains endomorphismes particuliers. On rappelle que :

Définition : Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E , on dit qu'il est stable par f si, et seulement si,

$$\forall x \in F \quad f(x) \in F$$

Première partie : Préliminaires

Soient $n \in \mathbb{N}$, $\{a_0, \dots, a_n\}$ un ensemble de $n+1$ nombres complexes distincts deux-à-deux. Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on définit le polynôme L_i par :

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

- Montrer que $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
- Trouver la matrice de passage de $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ vers $(X^i)_{0 \leq i \leq n}$. On note M cette matrice.
- Pour cette question, on suppose que $a_i = i$ pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Déterminer :

- la première ligne de M^{-1} ;
- la somme des éléments de chaque ligne de M^{-1} .
- la somme des éléments de chaque colonne de M^{-1} .

Deuxième partie

Dans cette partie, on note k un entier naturel fixé et $E = \mathbb{C}_k[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à k . Pour $a \in \mathbb{C}^*$, on définit

$$\begin{aligned} t_a : E &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto P(X+a) \end{aligned}$$

On note d la dérivation :

$$\begin{aligned} d: E &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto P' \end{aligned}$$

Il est trivial que t_a et d sont des endomorphismes de E . Enfin, on note

$$\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket \quad e_i = X^i$$

et $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_k)$ la base canonique de E .

1. Écrire les matrices, notées respectivement T_a et D , des endomorphismes t_a et d dans la base \mathcal{B} .

2. Calculer les dimensions de $\text{Ker}(t_a - \text{id})$ et $\text{Ker}(d)$.

3. Quels sont les sous-espaces de E qui sont stables par d ? Combien y en a-t-il?

Indication : Si F est un sous-espace de E stable par d , on pourra considérer un polynôme de F de degré maximal.

4. Soit $P = \sum_{i=0}^k p_i X^i$ un polynôme fixé de degré k ($p_k \neq 0$). Montrer que

$$\mathcal{B}_1 = \left(P, \frac{d(P)}{1!}, \dots, \frac{d^k(P)}{k!} \right)$$

est une base de E . Donner la matrice de passage R de \mathcal{B} vers \mathcal{B}_1 .

5. Pour $a \in \mathbb{C}^*$, exprimer les coordonnées des vecteurs de la famille

$$\mathcal{S} = (P, P(X+a), \dots, P(X+ka))$$

dans la base \mathcal{B}_1 . On note U la matrice de cette famille dans la base \mathcal{B}_1 . En déduire que \mathcal{S} est une base de E .

6. On note Q la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{S} . Exprimer Q en fonction de R et U .

7. Pour $a \in \mathbb{C}^*$, trouver les sous-espaces de E qui sont stables par t_a .