

Applications de la dimension finie — Corrigé

Exercice : Polynômes de Chebyshev

On rappelle que dans le deuxième DS, vous avez montré que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos x) = \cos nx$$

T_n est appelé le n -ème polynôme de Chebyshev de première espèce. Et vous avez montré qu'il vérifie l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

Autrement dit, $T_n \in \text{Ker } f_{-n^2}$. Ceci sera utilisé dans la question 4.

1 Le fait que f est linéaire ne pose aucune difficulté : on utilise simplement le fait que la dérivation est linéaire dans $\mathbb{R}[X]$, et la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Il reste à vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_N[X]$; on a

$$\deg P' \leq N - 1 \quad \deg P'' \leq N - 2$$

donc

$$\deg(1 - X^2)P'' \leq N \quad \deg XP' \leq N$$

et finalement

$$\deg f(P) \leq N$$

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$.

2 On note $\mathcal{B} = (X^k)_{0 \leq k \leq N}$ la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$. Les images des vecteurs de \mathcal{B} par f engendrent $\text{Im } f$. Par calcul, on voit que

$$\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket \quad f(X^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ -X & \text{si } k = 1 \\ -k^2X^k + k(k-1)X^{k-2} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall k \in \llbracket 1; N \rrbracket \quad \deg f(X^k) = k$$

La famille $(f(X^k))_{1 \leq k \leq N}$ est donc libre, parce qu'elle est étagée en degrés. De plus, elle engendre $\text{Im } f$ parce que $f(1) = 0$ et

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(X^k))_{0 \leq k \leq N} = \text{Vect}(f(X^k))_{1 \leq k \leq N}$$

Une base de $\text{Im } f$ est $(f(X^k))_{1 \leq k \leq N}$ et le rang de f est N .

D'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{R}_N[X] - \text{rg } f = 1$$

Comme $1 \in \text{Ker } f$, il engendre un sous-espace de dimension 1 de $\text{Ker } f$. Donc

Une base de $\text{Ker } f$ est (1) .

3 Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus A$. C'est-à-dire que

$$\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket \quad \lambda \neq -k^2$$

ou encore $\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket \quad \lambda + k^2 \neq 0$

À l'aide des calculs faits à la question précédente,

$$\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket \quad f_\lambda(X^k) = f(X^k) - \lambda X^k = \begin{cases} -\lambda & \text{si } k = 0 \\ -(\lambda + 1)X & \text{si } k = 1 \\ -(k^2 + \lambda)X^k + k(k-1)X^{k-2} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

En particulier, $\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket \quad \deg f_\lambda(X^k) = k$

La famille $(f_\lambda(X^k))_{0 \leq k \leq N}$ est donc libre. D'après le cours, f_λ est injective (elle transforme une base en famille libre). Comme f_λ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$, c'est une bijection (théorème du rang).

$$\boxed{f_\lambda \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_N[X].}$$

4 Soit $\lambda \in A$, non nul. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = -n^2$. En reprenant les calculs précédents,

$$\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket \setminus \{n\} \quad \deg f_\lambda(X^k) = k$$

et $\deg f_\lambda(X^n) \leq n - 1$

On en déduit que $(f_\lambda(X^k))_{\substack{0 \leq k \leq N \\ k \neq n}}$ est libre. Comme cette famille est dans $\text{Im } f_\lambda$ et contient N vecteurs,

$$\dim \text{Im } f_\lambda \geq N$$

D'autre part, on a vu dans le DS2 que $T_n \in \text{Ker } f_\lambda$ et $T_n \neq 0$. Donc

$$\dim \text{Ker } f_\lambda \geq 1$$

D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } f_\lambda + \dim \text{Im } f_\lambda = N + 1$

donc $\dim \text{Ker } f_\lambda = 1$ et $\dim \text{Im } f_\lambda = N$

En particulier, $\text{Ker } f_\lambda$ est de dimension 1, contient T_n donc

$$\boxed{\text{Ker } f_\lambda = \text{Vect } T_n}$$

5 On définit

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto (1 - X^2)P'' - XP' \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \forall P \in \mathbb{R}[X] \quad (P \text{ est solution de } (\mathbf{E}_\lambda) \text{ sur } \mathbb{R}) &\iff (\forall x \in \mathbb{R} \quad (1 - x^2)P''(x) - xP'(x) - \lambda P(x) = 0) \\ &\iff (1 - X^2)P'' - XP' - \lambda P = 0 \\ &\iff (g - \lambda)(P) = 0 \end{aligned}$$

Remarquer que la deuxième équivalence vient du fait que \mathbb{R} est infini, ce qui permet d'identifier polynômes et fonctions polynomiales. Le problème est donc de trouver $\text{Ker}(g - \lambda)$.

- Supposons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda \neq -n^2$

Soit $P \in \text{Ker}(g - \lambda)$. On prend $N \in \mathbb{N}$ tel que $\deg P \leq N$. De cette manière, $P \in \mathbb{R}_N[X]$.

D'après la question 3, $g - \lambda$ est injective sur $\mathbb{R}_N[X]$. Donc $P = 0$, ce qui prouve $\text{Ker}(g - \lambda) = \{0\}$: la seule solution polynomiale de (E_λ) sur \mathbb{R} est la fonction nulle.

- Réciproquement, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = -n^2$. On sait déjà que T_n est solution de (E_{-n^2}) sur \mathbb{R} . Voyons quelles sont les autres solutions.
Soit $P \in \text{Ker}(g - \lambda)$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\deg P \leq N$ et $n \leq N$, de manière à avoir $T_n, P \in \mathbb{R}_N[X]$. D'après la question 4,

$$\text{Ker}(g - \lambda) \cap \mathbb{R}_N[X] = \text{Vect } T_n$$

Donc P est proportionnel à T_n . Ceci prouve que $\text{Ker}(g - \lambda) = \text{Vect } T_n$.

Conclusion : (E_λ) a des solutions polynomiales **non nulles** si, et seulement si, $\lambda \in \{-n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions polynomiales de (E_λ) est $\text{Vect } T_n$.

Problème : Le lemme de Hochschildt

Première partie

I.1 On note x_1, \dots, x_k les k éléments, distincts deux-à-deux, de X . Une fonction f est entièrement déterminée par ses valeurs en ces points. Ceci nous amène à définir

$$\forall j \in \llbracket 1; k \rrbracket \quad f_j: X \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq x_j \\ 1 & \text{si } x = x_j \end{cases}$$

Soit $f \in \mathbb{C}^X$. On définit la fonction $g = \sum_{j=1}^k f(x_j) f_j$ et on a alors

$$\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket \quad g(x_i) = \sum_{j=1}^k f(x_j) \underbrace{f_j(x_i)}_{=0 \text{ si } x_j \neq x_i} = f(x_i) \underbrace{f_i(x_i)}_{=1} = f(x_i)$$

donc $\forall x \in X \quad f(x) = g(x)$ c'est-à-dire que $f = g$

Ceci montre que (f_1, \dots, f_k) engendre \mathbb{C}^X .

Montrons que cette famille est libre : soient a_1, \dots, a_k des complexes tels que

$$\sum_{j=1}^k a_j f_j = 0$$

Ceci veut dire que $\forall x \in X \quad \sum_{j=1}^k a_j f_j(x) = 0$

En évaluant en x_1, \dots, x_k , on obtient que a_1, \dots, a_k sont nuls. Donc (f_1, \dots, f_k) est libre.

Si X est fini de cardinal k , \mathbb{C}^X est de dimension k .

I.2 On note φ l'application donnée dans l'énoncé. La linéarité de φ est évidente. Et si $f \in \text{Ker } \varphi$, cela signifie que f est nulle sur $\text{Supp } V$. Mais f est aussi nulle sur $X_0 = X \setminus \text{Supp } V$ donc f est nulle sur X : f est la fonction nulle.

φ est une application linéaire injective.

I.3.a Observons que, d'après la question **I.2**, $\text{Supp } V$ ne peut pas être vide puisque

$$0 < \dim V \leq \dim \mathbb{C}^{\text{Supp } V} = |\text{Supp } V|$$

On prend donc $x_1 \in \text{Supp } V$ et on considère la forme linéaire φ définie par

$$\forall v \in V \quad \varphi(v) = v(x_1)$$

φ n'est pas nulle, puisque $x_1 \in \text{Supp } V$. D'après le cours, il existe $a_1 \in V$ tel que $a_1(x_1) = 1$ et $\text{Ker } \varphi \oplus \text{Vect } a_1 = V$. On prend une base (a_2, \dots, a_p) de $\text{Ker } \varphi$; alors (a_1, a_2, \dots, a_p) est une base de V et l'on a

$$\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad a_j(x) = \delta_{1,j}$$

I.3.b Soit $k < p$ un entier non nul. On suppose avoir trouvé $x_1, \dots, x_k \in X$ et une base (u_1, \dots, u_p) de V , tels que

$$\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket \quad \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad u_j(x_i) = \delta_{i,j}$$

La fonction u_{k+1} n'est pas nulle. Donc il existe $x_{k+1} \in X$ tel que $u_{k+1}(x_{k+1}) \neq 0$. On pose alors $v_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{u_{k+1}(x_{k+1})}$ de sorte que

$$\forall i \in \llbracket 1; k+1 \rrbracket \quad v_{k+1}(x_i) = \delta_{i,k+1} \tag{1}$$

Ensuite, on définit

$$\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket \setminus \{k+1\} \quad v_j = u_j - u_j(x_{k+1}) v_{k+1}$$

On observe déjà que la famille (v_1, \dots, v_p) est obtenue à partir de (u_1, \dots, u_p) par des opérations élémentaires : elle est donc libre et c'est une base de V .

De plus, par construction, on a

$$\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket \quad \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket \setminus \{k+1\} \quad v_j(x_i) = \underbrace{u_j(x_i)}_{=\delta_{i,j}} - u_j(x_{k+1}) \underbrace{v_{k+1}(x_i)}_{=0} = \delta_{i,j} \tag{2}$$

et $\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket \setminus \{k+1\} \quad v_j(x_{k+1}) = u_j(x_{k+1}) - u_j(x_{k+1}) \underbrace{v_{k+1}(x_{k+1})}_{=1} = 0 \tag{3}$

Les relations (1), (2) et (3) peuvent être résumées en

$$\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket \quad \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad v_j(x_i) = \delta_{i,j}$$

I.3.c Si $f \in V$, il peut se décomposer dans la base (w_1, \dots, w_p) construite précédemment : il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$, tels que $f = \sum_{j=1}^p \lambda_j v_j$. Par suite,

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad f(x_i) = \sum_{j=1}^p \lambda_j \underbrace{v_j(x_i)}_{=\delta_{i,j}} = \lambda_i$$

Donc

$$\forall f \in V \quad f = \sum_{j=1}^p f(x_j) v_j$$

Deuxième partie

II.1 Soit $g \in V$; c'est une combinaison linéaire finie de translatées de f donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$, des réels a_1, \dots, a_n et des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \tau_{a_k}(f)(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(a_k + x)$$

Donc g est dérivable, puisque c'est une somme de fonctions dérivables.

De plus, si $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tau_a(g)(x) = g(a+x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(a_k + a+x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \tau_{a_k+a}(f)(x)$$

donc $\tau_a(g)$ est aussi dans V .

Si $g \in V$, alors g est dérivable est toutes ses translatées sont dans V .

II.2 D'après la question **I.3.c**, il existe $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ et une base (v_1, \dots, v_p) de V , tels que

$$\forall i, j \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad v_j(x_i) = \delta_{i,j}$$

Soient $g \in V$ et $a, b \in \mathbb{R}$. D'après la question **II.1**, $\tau_a(g)$ est dans V ; et d'après la question **I.3.d**,

$$\tau_a(g) = \sum_{k=1}^p \tau_a(g)(x_k) v_k = \sum_{k=1}^p g(a+x_k) v_k$$

donc

$$g(a+b) = \tau_a(g)(b) = \sum_{k=1}^p g(a+x_k) v_k(b)$$

$$\forall g \in V \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad g(a+b) = \sum_{k=1}^p g(a+x_k) v_k(b)$$

II.3 Soit $g \in V$. On sait déjà que g est dérivable, d'après la question **II.1**. Montrons que $g' \in V$. Soient a et h deux réels, avec $h \neq 0$. D'après la question **II.2**,

$$g(a+h) = g(h+a) = \sum_{k=1}^p g(x_k+h) v_k(a)$$

et

$$g(a) = g(0+a) = \sum_{k=1}^p g(x_k) v_k(a)$$

donc

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \sum_{k=1}^p \frac{g(x_k+h) - g(x_k)}{h} v_k(a)$$

Or,

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_k+h) - g(x_k)}{h} = g'(x_k)$$

donc

$$g'(a) = \sum_{k=1}^p g'(x_k) v_k(a)$$

Autrement dit,

$$g' = \sum_{k=1}^p g'(x_k) v_k \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_p) = V$$

Si g est dans V , sa dérivée est aussi dans V .

Et par une récurrence immédiate,

Si g est dans V , elle est infiniment dérivable.

II.4 En particulier, f est dans V , elle est infiniment dérivable et toutes ses dérivées sont dans V . Comme V est de dimension p , la famille $(f, f', \dots, f^{(p)})$ est liée puisqu'elle contient $p + 1$ vecteurs. Donc il existe des complexes a_0, \dots, a_p tels que

$$\sum_{k=0}^p a_k f^{(k)} = 0$$

f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.