

Sujets d'étude : Applications de la dimension finie

Exercice : Polynômes de Chebyshev

Dans le deuxième devoir surveillé, on a défini la suite des polynômes de Chebyshev de première espèce $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

Dans ce problème, on étudie une réciproque à ce résultat : pour quels $\lambda \in \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' - \lambda y = 0 \tag{E_\lambda}$$

a-t-elle des solutions polynomiales non nulles sur \mathbb{R} ? Et s'il y en a, quelles sont-elles?

Pour les questions 1 à 4, on fixe $N \in \mathbb{N}^*$. On note $A = \{-n^2 \mid n \in \llbracket 0; N \rrbracket\}$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$ défini par

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_N[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_N[X] \\ P &\longmapsto (1 - X^2)P'' - XP' \end{aligned}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on notera $f_\lambda = f - \lambda \text{id}$.

Pour répondre aux questions suivantes, vous devez faire le moins de calculs possibles, en utilisant les théorèmes sur les espaces de dimension finie.

- Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_N[X])$.
- Déterminer des bases de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$, et calculer le rang de f .
- Montrer que si $\lambda \notin A$, f_λ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$.
- Pour cette question, on suppose que $\lambda \in A$ et $\lambda \neq 0$, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = -n^2$. Montrer que $\text{Ker } f_\lambda = \text{Vect } T_n$.
- Conclure : si $\lambda \in \mathbb{R}$, quelles sont les solutions de (E_λ) dans $\mathbb{R}[X]$?

Attention : Maintenant, on vous demande un résultat dans $\mathbb{R}[X]$, qui n'est pas de dimension finie. Il y a donc quelque chose à expliquer si vous voulez utiliser les résultats des questions précédentes.

Problème : le lemme de Hochschild

Si f est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{C} et si a est un nombre réel, on appelle *translatée à gauche par a de f* (f 以向 a 的左平移) la fonction $\tau_a(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tau_a(f)(x) = f(a + x)$$

Il suffit de faire un dessin pour constater, en effet, que le graphe de $\tau_a(f)$ est le même que le graphe de f , déplacé à gauche par a .

Le but de ce problème est de prouver le très beau résultat suivant :

Théorème (Hochschild) : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application dérivable. Si le sous-espace F de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ engendré par les translatées à gauche de f est de dimension finie p , alors f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre p à coefficients constants.

Partie I : Espaces de fonctions de dimension finie

Dans cette partie, on fixe un ensemble quelconque X , non vide. On considère un \mathbb{C} -sous-espace V , de dimension finie $p \neq 0$, de l'espace vectoriel \mathbb{C}^X (l'ensemble des applications de X dans \mathbb{C}). On note

$$X_0 = \{x \in X \mid \forall f \in V \quad f(x) = 0\}$$

et

$$\text{Supp } V = X \setminus X_0$$

$\text{Supp } V$ est appelé *support de V* . Enfin, pour tous entiers i et j , on notera

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

- Dans cette question seulement, on suppose que X est fini, de cardinal k . Montrer que \mathbb{C}^X est de dimension finie, trouver une base et donner sa dimension.
- Montrer que l'application $V \longrightarrow \mathbb{C}^{\text{Supp } V}$ est linéaire, injective.

$$f \longmapsto f|_{\text{Supp } V}$$

- (a) Montrer qu'il existe $x_1 \in X$ et une base (a_1, \dots, a_p) de V , tels que

$$\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad a_j(x_1) = \delta_{1,j}$$

- (b) Soit $k < p$ un entier. On suppose avoir trouvé $x_1, \dots, x_k \in X$ et une base (u_1, \dots, u_p) de V , tels que

$$\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket \quad \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad u_j(x_i) = \delta_{i,j}$$

Montrer qu'il existe $x_{k+1} \in X$ et une base (v_1, \dots, v_p) de V , tels que

$$\forall i \in \llbracket 1; k+1 \rrbracket \quad \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad v_j(x_i) = \delta_{i,j}$$

(c) Ceci prouve, par récurrence, qu'il existe $x_1, \dots, x_p \in X$ et une base (w_1, \dots, w_p) de V , tels que

$$\forall i, j \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad w_j(x_i) = \delta_{i,j}$$

Si $f \in V$, trouver la décomposition de f dans la base (w_1, \dots, w_p) .

Partie II : Le lemme de Hochschild

On prouve le lemme de Hochschild. Soit $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, dérivable. On note V le sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, engendré par les translatées à gauche de f :

$$V = \text{Vect} \{ \tau_a(f) \mid a \in \mathbb{R} \}$$

et on suppose que V est dimension finie $p \neq 0$.

1. Montrer que, si $g \in V$, alors g est dérivable et $\tau_a(g)$ est aussi dans V pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe des réels x_1, \dots, x_p et une base (v_1, \dots, v_p) de V , tels que pour tout $g \in V$:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad g(a+b) = \sum_{k=1}^p g(a+x_k) v_k(b)$$

3. En déduire que, si $g \in V$, alors $g' \in V$. Montrer alors que g est infiniment dérivable.
4. Conclure : montrer qu'il existe $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{C}$, tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^p a_k f^{(k)}(x) = 0$$