第一章　复数

§1.1　复数域中的基本概念

§1.1.1　复数域

将实数域$\mathbb{R}$ 上的运算记为$+$ 和$\times$.

设$\mathbb{R}^2=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$, 且$(x,y)=(x',y')\iff x=x',y=y'$, 则$\mathbb{R}^2$ 的元素与平面直角坐标系中的点一一对应. 赋予$\mathbb{R}^2$ 两种运算$\oplus$ 和$\otimes$ 如下: $\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}$,

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)\otimes(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

可以验证这两个运算满足交换律, 结合律和分配律, 并且有单位元$(1,0)$, 零元$(0,0)$. $\forall x,y\in\mathbb{R}$, 有

$$(x,0)\oplus(y,0)=(x+y,0),\quad (x,0)\otimes(y,0)=(xy,0).$$

故横轴上的点在这两个运算下与实数相同, 故将横轴称为实轴, 单位记为1. 对于另一个轴,

$$(0,x)\oplus(0,y)=(0,x+y),\quad (0,x)\otimes(0,y)=(-xy,0),$$

故这个轴与实轴不同, 我们将其称为虚轴, 单位记为i. 那么此时可以将复数用代数形式表示出来, 即$\forall x,y\in\mathbb{R}$, 有

$$(x,y)=(x,0)\oplus(0,y)=x(1,0)\oplus y(0,1)=x\oplus iy.$$

特别地,

$$i^2=(0,1)^2=(-1,0)=-1.$$

定义 1.1.1 将$\mathbb{R}^2$ 连同它上面的两种运算$\oplus$ 和$\otimes$ 称为复数域, 记为$\mathbb{C}$, 其中$\oplus$ 和$\otimes$ 定义如下: $\forall z=(x,y)$, $z'=(x',y')\in\mathbb{C}$,

$$z\oplus z'=(x+x',y+y'),\ \ z\otimes z'=(x\times x'-y\times y',x\times y'+x'\times y).$$

方便起见, 仍将$\oplus$ 记为$+$, $\otimes$ 记为$\times$.

命题 1.1.1 令i 表示虚数单位, 即$i=(0,1)\in\mathbb{C}$, 则$i^2=-1$.

定义 1.1.2 $\forall z=(x,y)\in\mathbb{C}$, 则

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=x(1,0)+y(0,1)=x+iy.$$

称$z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$ 为复数z 的代数形式, 其中x 和y 分别称为复数z 的实部(partie réelle) 和虚部(partie imaginaire), 记为

$$x=\mathrm{Re}(z),\quad y=\mathrm{Im}(z).$$

特别地, 若$x=0$, 则称z 为纯虚数(imaginaire pur). 所有纯虚数组成的集合记为$i\mathbb{R}$.

在以上定义下, 我们给出一个复数的倒数: 设$z=x+iy\in\mathbb{C}$, $\frac{1}{z}=x'+iy'$, 其中$x,y,x',y'\in\mathbb{R}$ 且$(x,y)\neq(0,0)$. 根据$\frac{1}{z}\times z=1$ 得

$$xx'-yy'=1,\quad xy'+x'y=0.$$

解得

$$x'=\frac{x}{x^2+y^2},\quad y'=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

即

$$\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

§1.1.2 共轭

定义 1.1.3 设$z=x+iy\in\mathbb{C}$, 其中$x,y\in\mathbb{R}$. 称$x-iy$ 为z 的共轭(conjugué), 记为$\bar{z}$, 即

$$\bar{z}=x-iy.$$

命题 1.1.2 设$z\in\mathbb{C}$, 则

1) $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$;

2) $\overline{(\bar{z})}=z$;

3) $z\in\mathbb{R}$ 当且仅当$z=\bar{z}$;

4) z 是纯虚数当且仅当$z=-\bar{z}$.

命题 1.1.3 (共轭复数的四则运算) 设$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, 则

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

2) $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$;

3) 若$z_2 \neq 0$, 则$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

继续回到复平面上来. 设$z = (x, y) \in \mathbb{C}$, 则该复数对应点$M(x, y)$. 连接$OM$ 的到向量$\overrightarrow{OM}$. 下面用向量$\overrightarrow{OM}$ 的长度和实轴到它的角度来刻画一下复数z 的其他两个量: 模和幅角.

§1.1.3 模

设$z \in \mathbb{C}$, 简单计算可得$z\bar{z}$ 为非负实数, 记为$z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$.

定义 1.1.4 设$z \in \mathbb{C}$, 称$\sqrt{z\bar{z}}$ 为z 的模(module), 记为$|z|$, 即

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

事实上, 设$z = x + iy$, 则$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

命题 1.1.4 $\forall z \in \mathbb{C}$, 有

1) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

2) $|z| = |\bar{z}|$;

3) $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$;

4) $\mathrm{Im}(z) \leq |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

命题 1.1.5 $\forall z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, 有

1) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$;

2) $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \bar{z}$.

命题 1.1.6 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, 有

1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$;

2) 若$z_2\neq 0$, 则$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$;

3) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$;

4) $||z_1|-|z_2||\leq|z_1-z_2|$,

其中3), 4) 称为复数的三角不等式.

证明 3) 若$z_2=0$, 则不等式显然成立, 下设$z_2\neq 0$. 令$u=\frac{u_1}{u_2}$, 则

$$\begin{aligned}(1+|u|)^2-|1+u|^2 &= 1+|u|^2+2|u|-(1+u)(1+\bar{u})\\ &= 1+|u|^2+2|u|-1-u-\bar{u}-|u|^2\\ &= 2(|u|-\mathrm{Re}(u))\\ &\geq 0,\end{aligned}$$

所以, $(1+|u|)^2-|1+u|^2\geq 0$, 即$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.
4) $z_1=z_1+z_2-z_2$, 则

$$|z_1|\leq|z_2|+|z_1-z_2|,$$

故

$$|z_1|-|z_2|\leq|z_1-z_2|.$$

同理可得

$$|z_2|-|z_1|\leq|z_2-z_1|.$$

所以

$$-|z_1-z_2|\leq|z_1|-|z_2|\leq|z_1-z_2|.$$

□

§1.1.4 模为1 的复数

记$U=\{z\in\mathbb{C}||z|=1\}$. 事实上, U 是复平面上的一个以原点O 为圆心, 1 为半径的圆. 设$\theta\in\mathbb{R}$, 记$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 则

命题 1.1.7 设$\theta\in\mathbb{R}$, 则$e^{i\theta}\in\mathbb{C}$ 且

1) $|e^{i\theta}|=1$;

2) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;

3) $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$, $k \in \mathbb{Z}$.

命题 1.1.8 $z \in U \Leftrightarrow$ 存在$\theta \in \mathbb{R}$, 使得$z = e^{i\theta}$.

由以上易得下列命题:

定理 1.1.1 (欧拉(Euler) 公式) 设$\theta \in \mathbb{R}$, 则

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

例子 1.1.1 将$\sin^6\theta$ 线性化.

证明 利用欧拉公式可得

$$\sin^6\theta = \Big(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\Big)^6,$$

则

$$\sin^6\theta = -\frac{1}{64}(e^{6i\theta} - 6e^{4i\theta} + 15e^{2i\theta} - 20 + 15e^{-2i\theta} - 6e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta}).$$

然后将$e^{ik\theta}$ 和$e^{-ik\theta}$ 组合可得

$$\begin{aligned}\sin^6\theta &= -\frac{1}{64}(e^{6i\theta} + e^{-6i\theta} - 6(e^{4i\theta} - e^{-4i\theta}) + 15(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) - 20) \\ &= -\frac{1}{32}(\cos 6\theta - 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta - 10).\end{aligned}$$

□

例子 1.1.2 设$\theta \in]0, 2\pi[$, 化简$S = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta$.

要求: 会利用欧拉公式将$\cos^m\theta$, $\sin^n\theta$, $\cos^m\theta\sin^n\theta$ 等线性化.

命题 1.1.9 设$\theta, \phi \in \mathbb{R}$, 则

1) $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$, $e^{i\theta}/e^{i\phi} = e^{i(\theta-\phi)}$;

2) $e^{i\theta} = e^{i\phi} \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[2\pi]$.

证明 1)

$$
\begin{aligned}
e^{i(\theta+\phi)} &= \cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)\\
&= \cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi+i\sin\theta\cos\phi+i\cos\theta\sin\phi\\
&= \cos\theta(\cos\phi+i\sin\phi)+i\sin\theta(\cos\phi+i\sin\phi)\\
&= (\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)\\
&= e^{i\theta}e^{i\phi}.
\end{aligned}
$$

2) $e^{i\theta}=e^{i\phi}\Leftrightarrow(\cos\theta,\sin\theta)=(\cos\phi,\sin\phi)$, 即

$$\cos\theta=\cos\phi,\ \sin\theta=\sin\phi.$$

所以θ 和ϕ 相差2π 的整数倍.
注意: 1) 说明当指数是纯虚数时, “同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加”. □

注 1.1.1 $\theta\equiv\phi[2\pi]$ 称为“θ 等于ϕ 模2π”. 事实上, $\theta\equiv\phi[2\pi]\iff\theta=\phi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, 即θ 与ϕ 相差2π 的整数倍. 这是有关等价类的问题, 将在下一年中学习, 学生需知道类似$\theta\equiv\phi[2\pi]$ 的这种写法和叫法.

推论 1.1.1 设$\theta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, 则$(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$.

定理 1.1.2 (棣莫佛(Moivre) 公式) 设$\theta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}$, 则

$$(e^{i\theta})^n=e^{in\theta},$$

或写为

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

例子 1.1.3 设$\theta\in]0,2\pi[$, 化简$S=\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta$.

例子 1.1.4 将$\sin 5\theta$ 和$\cos 5\theta$ 表示成$\cos\theta$ 和$\sin\theta$ 的函数.

证明 利用Moivre 公式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^5=\cos 5\theta+i\sin 5\theta,$$

将左边利用二项式展开并将实虚部分离, 则

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta, \tag{1.1.1}$$

$$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta.$$

□

注 1.1.2 在(1.1.1) 中用$1-\cos^2\theta$ 代替$\sin^2\theta$ 可得$\cos 5\theta$ 关于$\cos\theta$ 的多项式

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.$$

一般地, 设$n \in \mathbb{N}$, 利用Moivre 公式可得

$$e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cos^{n-k}\theta (i\sin\theta)^k.$$

利用k 的奇偶性将实虚部分离得

$$\cos n\theta = \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \begin{pmatrix} n \\ 2p \end{pmatrix} (-1)^p \cos^{n-2p}\theta\sin^{2p}\theta, \tag{1.1.2}$$

$$\sin n\theta = \sum_{p=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \begin{pmatrix} n \\ 2p+1 \end{pmatrix} (-1)^p \cos^{n-(2p+1)}\theta\sin^{2p+1}\theta. \tag{1.1.3}$$

在(1.1.2) 中, 用$1-\cos^2\theta$ 代替$\sin^2\theta$ 可得$\cos n\theta$ 关于$\cos\theta$ 的多项式. 而在(1.1.3) 中, 用$1-\cos^2\theta$ 代替$\sin^2\theta$ 则可将$\sin n\theta$ 写成$\cos\theta$ 的多项式与$\sin\theta$ 的乘积.

例子 1.1.5 将$\tan 5\theta$ 表示成$\tan\theta$ 的函数.

证明 由上例得:

$$\begin{aligned} \tan 5\theta &= \frac{5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta}{\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta} \\ &= \frac{5\tan\theta - 10\tan^3\theta + \tan^5\theta}{1 - 10\tan^2\theta + 5\tan^4\theta}. \end{aligned}$$

□

要求: 会利用棣莫佛公式将$\cos m\theta$, $\sin n\theta$ 表示成$\cos\theta$ 和$\sin\theta$ 的函数, 将$\tan n\theta$ 表示成$\tan\theta$ 的函数.

§1.1.5 幅角

由命题1.1.8 可知, 若$z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, 则$\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$. 故存在$\theta \in \mathbb{R}$ 使得$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, 从而

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

定义 1.1.5 设$z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, 若$\theta \in \mathbb{R}$ 满足$z = |z|e^{i\theta}$, 则称θ 为z 的一个幅角(argument).

例子 1.1.6 设$z = 1 + i$, 则$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, 即$\frac{\pi}{4}$ 是$1 + i$ 的一个幅角. 另外, $\theta = \dfrac{9\pi}{4}$ 也是它的一个幅角, 故一个复数的幅角不唯一. 事实上, 每一个复数都有无穷多个幅角, 见以下命题.

命题 1.1.10 设$z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, θ_0 是z 的一个幅角. 则z 的所有幅角为

$$\theta_0 + 2\pi\mathbb{Z} = \{\theta_0 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\},$$

记为

$$\arg(z) \equiv \theta_0[2\pi],$$

表示z 的任一幅角与θ_0 相差2π 的整数倍.

例子 1.1.7 设$\theta \in [0, 2\pi]$, 求$z = 1 + e^{i\theta}$ 的幅角.

命题 1.1.11 $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 均可表示成如下三角函数的形式:

$$z = a(\cos\theta + i\sin\theta), \quad a, \theta \in \mathbb{R}, \tag{1.1.4}$$

该式就称为复数z 的三角形式(forme trigonométique), 其中不必要求$a = |z|$, 但

- 若$a > 0$, 则$|z| = a$, $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$;
- 若$a < 0$, 则$|z| = -a$, $\arg(z) \equiv (\theta + \pi)[2\pi]$.

注 1.1.3 设$z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, 由命题1.1.10 知, z 的幅角有无穷多个, 但在$]-\pi, \pi]$ 内只有一个.

定义 1.1.6 设$z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, 存在唯一的$\theta \in]-\pi, \pi]$, 满足$z = |z|e^{i\theta}$. 该$\theta$ 称为z 的幅角主值(argument principal), 记为$\mathrm{Arg}(z)$.

§1.1.6　三角形式

上一节中(1.1.4) 给出了复数的三角形式, 本小节我们看一下两个复数的三角形式之间的关系.

命题 1.1.12 设$z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, 且

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}.$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

证明

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2\Big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\Big) \\
&= r_1 r_2\Big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\Big) \\
&= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.
\end{aligned}$$

□

注 1.1.4 不必要求r_1, r_2 非负.

推论 1.1.2 设$z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, 则

$$\begin{aligned}
\arg(z_1 z_2) &\equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi], \\
\arg(\frac{z_1}{z_2}) &\equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi].
\end{aligned}$$

证明　令$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$.

• 若$r_1 > 0$, $r_2 > 0$, 则

$$\arg(z_1) \equiv \theta_1[2\pi], \quad \arg(z_2) \equiv \theta_2[2\pi].$$

而$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, 故

$$\arg(z_1 z_2) \equiv (\theta_1+\theta_2)[2\pi] \equiv \theta_1[2\pi] + \theta_2[2\pi] \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi].$$

• 若$r_1 > 0$, $r_2 < 0$, 则

$$\arg(z_1) \equiv \theta_1[2\pi], \quad \arg(z_2) \equiv (\theta_2+\pi)[2\pi].$$

而$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, 故

$$\arg(z_1 z_2) \equiv (\theta_1+\theta_2+\pi)[2\pi] \equiv \theta_1[2\pi] + (\theta_2+\pi)[2\pi] \equiv \arg(z_1)+\arg(z_2)\ [2\pi].$$

• 其他情况类似. □

推论 1.1.3 设$n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, 则

$$\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi].$$

证明 $n \in \mathbb{Z}^+$ 时, 利用数学归纳法; $n \in \mathbb{Z}^-$ 时, $-n \in \mathbb{Z}^+$, 利用$\arg\left(\frac{1}{z^{-n}}\right)$. □

§1.1.7 复指数函数

默认学生已熟悉实指数函数$x \mapsto e^x$ 的相关概念和性质, 下面利用实指数函数来定义复指数函数.

定义 1.1.7 设$z = x+iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, 定义$e^z = e^x e^{iy}$, 则称函数

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$$

为复指数函数.

显然这是一个2π 周期函数.

命题 1.1.13 设$z \in \mathbb{C}$, 则

1) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$;

2) $\arg(z) \equiv \mathrm{Im}(z)[2\pi]$.

特别地, $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$.

定理 1.1.3 (复指数函数的运算规则)

1) $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$;

2) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

学完单满映射后再讲本小节剩下的这块内容.

命题 1.1.14 设$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则在复指数映射

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$$

下, 至少存在一个$z_0 \in \mathbb{C}$ 满足$e^{z_0} = a$. 并且a 在该映射下的所有原像为$z_0 + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

证明 由于$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 存在$\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ 使得$a = \rho e^{i\theta}$. 下面求解方程$e^z = a$. □

注 1.1.5 由以上命题可知: 复指数映射

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$$

是满射.

§1.2 在 $\mathbb{C}$ 中求解代数方程

§1.2.1 复数的平方根

定义 1.2.1 设$a \in \mathbb{C}$, 若复数z 满足$z^2 = a$, 则称z 为a 的平方根(racine carrée).

命题 1.2.1 任何非零复数都有两个互为相反数的平方根.

例子 1.2.1

1) 设$a > 0$, 它的两个平方根是$\sqrt{a}$ 和$-\sqrt{a}$.

2) 设$a < 0$, 它的两个平方根是$i\sqrt{-a}$ 和$-i\sqrt{-a}$.

3) 0 的平方根只有它自身.

注 1.2.1 只有$a \in \mathbb{R}_+$ 时, 符号$\sqrt{a}$ 才有意义.

求复数z 的平方根: 设$Z = X + iY$, $X, Y \in \mathbb{R}$, 满足$Z^2 = z$, 则

$$X^2 - Y^2 = \mathrm{Re}(z), \quad 2XY = \mathrm{Im}(z),$$

然后求出X, Y 的几种可能.

例子 1.2.2 求$1 + i$ 的平方根.

§1.2.2 求解二次方程

定理 1.2.1 (复系数二次方程的根) 设$a,b,c\in\mathbb{C}$ 且$a\neq 0$, 考虑方程

$$az^2+bz+c=0, \tag{1.2.5}$$

其判别式(discriminant)为$\Delta=b^2-4ac$.

- 若$\Delta\neq 0$, 则方程(1.2.6) 有两个不同的根. 若将Δ 的一个平方根设为δ, 则这两个不同的根为
$$z=\frac{-b\pm\delta}{2a}.$$
- 若$\Delta=0$, 则方程(1.2.6) 有一个二重根$z_0=-\frac{b}{2a}$.

注 1.2.2 此处: δ 是Δ 的平方根, 不能记为$\sqrt{\Delta}$, 除非$\Delta\geq 0$.

推论 1.2.1 (实系数二次方程的根) 设$a,b,c\in\mathbb{R}$ 且$a\neq 0$, 考虑方程

$$az^2+bz+c=0, \tag{1.2.6}$$

其判别式为$\Delta=b^2-4ac$.

- 若$\Delta>0$, 则方程(1.2.6) 有两个不同的实根.
- 若$\Delta=0$, 则方程(1.2.6) 有一个二重根.
- 若$\Delta<0$, 则方程(1.2.6) 有一对共轭复根.

例子 1.2.3

1) 设$t\in\mathbb{R}$, 求解关于x 的方程
$$x^2+4(t-1)x+3t^2-10t+3=0.$$

2) 求解方程
$$2x^2-(9i+1)x-7+11i=0.$$

3) 求$\tan\frac{\pi}{12}$.

定理 1.2.2 (复系数二次方程根与系数的关系) 设$a, b, c \in \mathbb{C}$ 且$a \neq 0$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, 则

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

当且仅当z_1, z_2 是方程$az^2 + bz + c = 0$ 的两个根.

例子 1.2.4

1) 求解方程$z^2 - (1 + a + a^2)z + a(1 + a^2) = 0$.

3) 设z_1, z_2 是方程$(7 - 6i)z^2 - 2(7 - 6i)z - 85 = 0$ 的两个根, 不具体求解z_1 和z_2, 直接计算$z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2$.

§1.2.3 1 的n 次根

设$n \in \mathbb{N}^*$.

定义 1.2.2 若$z \in \mathbb{C}$ 满足$z^n = 1$, 则称z 为1 的n 次根(racine $n^{\text{ème}}$), 简称为n 次单位根.

命题 1.2.2 n 次单位根恰好有n 个, 它们是

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \omega_1^k, \quad k \in [|0, n-1|].$$

证明 设$z \in \mathbb{C}$, $z^n = 1$,则$|z^n| = |z|^n = 1$, 从而$|z| = 1$. 由复数的三角形式可得, 存在$\theta \in \mathbb{R}$ 使得

$$z = e^{i\theta}.$$

所以

$$e^{in\theta} = 1.$$

有前面的学习得: $n\theta \equiv 0[2\pi]$, 即

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

由于$e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2(k+n)\pi}{n}}$, 故只需取$k \in [|0, n-1|]$ 即可得到所有的单位根. 另外, 由$\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ 易得, $\forall k \in [|0, n-1|]$, $\omega_k = \omega_1^k$. □

记$U_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} | k \in [|0, n-1|]\}$, 则

命题 1.2.3 U_n 相对于乘法和除法是封闭的, 即$\forall z_1, z_2 \in U_n$, 有

$$z_1 z_2 \in U_n, \quad \frac{z_1}{z_2} \in U_n.$$

定理 1.2.3 设$n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

1) 若ω 是n 次单位根且$\omega \neq 1$, 则

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0.$$

2) 所有n 次单位根的和为0.

证明 1) 利用等比数列前n 项和. 2) 直接求和. □

例子 1.2.5 求1 的3 次根.

证明 由公式可得: $z_0 = 1$, $z_1 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $z_2 = e^{\frac{4\pi}{3}i}$. 特别地, 记$j = e^{\frac{2\pi}{3}i}$. 则1 的3 次根便可记为$1, j, j^2$. □

§1.2.4 z 的n 次根

定义 1.2.3 设$z \in \mathbb{C}$, 若$Z \in \mathbb{C}$ 满足$Z^n = z$, 则称Z 是z 的n 次根.

命题 1.2.4 设$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. 若$u$ 是z 的一个n 次根, 则z 的n 次根的集合为

$$\{u\omega | \omega \in U_n\}.$$

推论 1.2.2 设$n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 模为r, 幅角为θ, 则z 有n 个n 次根, 它们是

$$Z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, \quad k \in [|0, n-1|].$$

例子 1.2.6 求i 的5 次根.

§1.2.5 求解n 次方程

例子 1.2.7

1) $z^3-(5+3i)z^2+(7+16i)z+3-21i=0.$

2) $z^6-(3+2i)z^3+2+2i=0.$

定理 1.2.4 (降次法求解高次方程) 设$n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$, $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\in\mathbb{C}^n$. 考虑$n$ 次复系数方程

$$(E_n)\qquad z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0.$$

1) 若方程有一个显而易见的根, 不妨记为α, 则可将方程写为

$$(z-\alpha)(z^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+\cdots+b_1z+b_0)=0,$$

然后根据系数对应相等求得$(b_0,b_1,\cdots,b_{n-2})$, 从而得到$n-1$ 次方程

$$(E_{n-1})\qquad z^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+\cdots+b_1z+b_0=0.$$

这样, 方程(E_{n-1}) 的根和α 就是方程(E_n) 的根. 然后对方程(E_{n-1}) 用上面的方法继续降次到可以求解为止.

2) 也可假设方程有一个实根或者纯虚根, 不妨设为$z=x$ 或$z=ix$, $x\in\mathbb{R}$. 然后将其带入, 分离实虚部得到两个方程. 通过这两个方程解出x, 然后与1) 类似.