第二章　极限,连续,导数,积分

§2.1　极限

高中的学习内容中没有极限, 只是在学习导数时体现过极限的思想. 因此, 我们以语言描述的形式以及简单的例子开始.

§2.1.1　数列极限

§2.1.1.1　基本定义

高中学过: 按照一定顺序排列着的一列数称为数列, 一般形式写为

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

简记为$\{a_n\}$. 事实上, 如果把每个数中的下标n 看做自变量, 这个数的取值看做函数值, 则数列便可以看做是定义域为离散点集的函数.

定义 2.1.1 我们将函数$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 称为实数列(suite réelle), 并将$u(n)$ 记为u_n, 将该实数列记为u 或$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 所有实数列的集合记为$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

定义 2.1.2 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

1) 称u 为常数列(constante), 如果$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$.

2) 称u 有上界(majorée), 如果存在实数M, 使得$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \le M$.

3) 称u 有下界(minorée), 如果存在实数m, 使得$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \ge m$.

4) 称u 有界(bornée), 如果它既有上界又有下界.

5) 称u 单调递增(croissante), 如果$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \ge u_n$; 称u 严格单调递增(strictement croissante), 如果$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

6) 称u 单调递减(décroissante), 如果$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \le u_n$; 称u 严格单调递减(strictement décroissante), 如果$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

7) 称u 单调(monotone), 如果它单调递增或单调递减; 称u 严格单调(strictement monotone), 如果它严格单调递增或严格单调递减.

例子 2.1.1 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, $u_n = n$, $u_n = a^n$, $a \in \mathbb{R}_+$, $u_n = (-1)^n$, $u_n = \sin \dfrac{\theta}{2^n}$, $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

§2.1.1.2 有限极限(数列收敛suite convergente)

定义 2.1.3 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. 若$\exists l \in \mathbb{R}$, 使得当$n$ 无限增大时, u_n 无限趋近于l, 即$|u_n - l|$ 无限趋近于0, 则称数列u 以l 为极限(limite), 或者称数列u 收敛到l, 记为$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ 或$\lim u = l$, 其中∞ 读作"无穷大" (infini).

不收敛的数列称为发散数列(suite divergente).
$*$ $\epsilon - N$ 语言. (**建议不讲, 先做大量计算**)

例子 2.1.2

1) $\dfrac{1}{n} \to 0$; $a^n \to 0$ $(0 < a < 1)$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$, $u_n = 2^n$, $u_n = a^n$ $(a > 1)$ 发散.

定理 2.1.1 (唯一性) 若实数列u 收敛, 则它的极限唯一.

定理 2.1.2 (有界性) 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 收敛, 则u 有界, 即存在正实数M, 使得$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \le M$.

定理 2.1.3 设$u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 收敛.

1) 保号性: 若$\lim u > 0$ (< 0), 则存在$n_0 \in \mathbb{N}$, 当$n \ge n_0$ 时, $u_n > 0$ (< 0).

2) 保序性: 若$\lim u > (<) \lim v$, 则存在$n_0 \in \mathbb{N}$, 当$n \ge n_0$ 时, $u_n > (<) v_n$.

推论 2.1.1 设$u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 收敛.

1) 若存在$n_0 \in \mathbb{N}$, 使得$\forall n \ge n_0$, $u_n \ge 0$ (≤ 0), 则$\lim u \ge 0$ (≤ 0);

2) 若存在$n_0 \in \mathbb{N}$, 使得$\forall n \ge n_0$, $u_n \ge v_n$ (≤ 0), 则$\lim u \ge \lim v$ $(\le)$.

注 2.1.1 上面推论中的结果对严格不等号不成立, 如: $u_n = \dfrac{2}{n}$, $v_n = \dfrac{1}{n}$.

推论 2.1.2 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 收敛到实数l, 则$|u| = (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ 也收敛且收敛到$|l|$. 反之不一定成立.

推论 2.1.3 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{R}$ 且$\lim u = l \neq 0$, 则存在$n_0 \in \mathbb{N}$, 使得数列$(1/u_n)_{n \geq n_0}$ 收敛到$1/l$.

命题 2.1.1 (四则运算) 设$u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 是两个收敛数列, 则$u + v$ 和$u \cdot v$ 都收敛且

1) $\lim(u + v) = \lim u + \lim v$;

2) $\lim u \cdot v = \lim u \cdot \lim v$;

3) 若$\lim v \neq 0$, 则存在$n_0 \in \mathbb{N}$, 使得数列$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ 收敛, 且

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n}{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n}$$

注 2.1.2

1) 收敛数列与发散数列的和是发散数列; 积的敛散性不能确定, 如$u_n = 1/n$, $v_n = n$ 和$v_n = n^2$;

2) 发散数列与发散数列的和与积的敛散性不能确定, 如$u_n = 1 + (-1)^n$, $v_n = 1 - (-1)^n$ 和$v_n = (-1)^n$; 再如$u_n = (n + \frac{1}{n})^2 - n^2$.

推论 2.1.4 (数列收敛的线性性质) 设$u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 收敛, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. 则$\lambda u + \mu v$ 收敛且

$$\lim(\lambda u + \mu v) = \lambda \lim u + \mu \lim v.$$

特别地, 考虑收敛到0 的数列:

定义 2.1.4 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, 若$\lim u = 0$, 则称$u$ 为无穷小数列.

命题 2.1.2 设$u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, 若$\lim u = 0$, v 有界, 则$\lim uv = 0$, 即无穷小数列与有界数列的乘积仍为无穷小数列.

例子 2.1.3

1) $u_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$;

2) $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos n + \dfrac{1}{n^2}}$.

§2.1.1.3 无穷极限(数列不收敛)

定义 2.1.5 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1) 若当n 无限增大时, $u_n > 0$ 且无限增大, 则称u 的极限是$+\infty$, 记为$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ 或$\lim u = +\infty$;

2) 若当n 无限增大时, $u_n < 0$ 且$|u_n|$ 无限增大, 则称u 的极限是$-\infty$, 记为$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ 或$\lim u = -\infty$.

注 2.1.3 u 收敛当且仅当$\lim u$ 存在且有限. 故若$\lim u = +\infty$ 或$-\infty$, 则u 的极限存在, 但不收敛.

定理 2.1.4 (自然保号性) 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

1) 若$\lim u = +\infty$, 则$\forall M > 0$, 总存在$n_0 \in \mathbb{N}$, 使得当$n \geq n_0$ 时, $u_n > M$;

2) 若$\lim u = -\infty$, 则$\forall m < 0$, 总存在$n_0 \in \mathbb{N}$, 使得当$n \leq n_0$ 时, $u_n < m$.

命题 2.1.3 (四则运算) 设$u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\lim u = +\infty$, 则

1) 若v 有下界, 则$\lim(u + v) = +\infty$;

2) 若存在$n_0 \in \mathbb{N}$ 和$m > 0$ 使得$\forall n \geq n_0$, $v_n \geq m$, 即数列$(v_n)_{n\geq n_0}$ 有正的下界, 则$\lim uv = +\infty$.

例子 2.1.4 $u_n = \sqrt{n}$, $v_n = \dfrac{1}{n}$. 虽然$u \to +\infty$, v 有下界, 但$uv \not\to +\infty$, 因为找不到这样的n_0, 使得自此之后的v 有正的下界.

§2.1.1.4 0 与∞ 的倒数关系

命题 2.1.4 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 收敛, 若$\lim u = 0$, 则

1) 若存在$n_0 \in \mathbb{N}$ 使得$\forall n \geq n_0$, $u_n > 0$, 则数列$(1/u_n)_{n\geq n_0}$ 趋于$+\infty$;

2) 若存在$n_0 \in \mathbb{N}$ 使得$\forall n \geq n_0$, $u_n < 0$, 则数列$(1/u_n)_{n\geq n_0}$ 趋于$-\infty$.

例子 2.1.5 $\dfrac{(-1)^n}{n}$, 振动.

命题 2.1.5 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 且$\lim u = +\infty\ (-\infty)$, 则存在$n_0 \in \mathbb{N}$ 使得$\forall n \geq n_0$, $u_n > (<) 0$ 且数列$(1/u_n)_{n \geq n_0}$ 收敛到0.

注 2.1.4 设$u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 分别以l, m 为极限, 其中$l, m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. 只要$l + m$ 和lm 能确定, 则有$\lim(u+v) = l+m$, $\lim uv = lm$. 如$l = +\infty$, $m \neq -\infty$, 则$l+m = +\infty$, 能确定; 再如$l = +\infty$, $m = 0$, 则lm 不能确定. 下面列出四则运算的表格....

交待符号: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
几个常用极限:

1) $\lim c = c$, c 为任意常数;

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$;

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, $|q| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$, $q > 1$;

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$;

5) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin \frac{1}{n} / \frac{1}{n} = 1$;

6) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^\beta} = 0$, α, $\beta > 0$;

7) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{e^{\beta n}} = 0$, α, $\beta > 0$;

8) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

§2.1.1.5 数列收敛的判定

定理 2.1.5 (夹挤定理(encadrement)) 设$u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 收敛, 且$\lim u = \lim v = l$. 若数列w 满足

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq w_n \leq v_n,$$

则w 收敛, 且$\lim w = l$.

例子 2.1.6 $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}$.

推论 2.1.5 设$u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, 且$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, 使得$\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$, 则

1) 若$\lim u = +\infty$, 则$\lim v = +\infty$;

2) 若$\lim v = -\infty$, 则$\lim u = -\infty$.

例子 2.1.7 $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

下面研究单调数列的极限, 为此, 先介绍一下确界原理的相关内容.

命题 2.1.6 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1) 若u 有上界, 则它有无穷多个上界.

2) 若u 有下界, 则它有无穷多个下界.

定义 2.1.6 (上, 下确界) 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1) 若u 有上界, 则将最小的上界称为u 的上确界(borne supérieure), 记为$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ 或$\sup u$.

2) 若u 有下界, 则将最大的下界称为u 的下确界(borne inférieure), 记为$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ 或$\inf u$.

注 2.1.5 上下确界一定是有限实数.

例子 2.1.8 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sin \frac{\pi}{n}$.

定理 2.1.6 (确界原理)

1) 有上界的数列一定有上确界;

2) 有下界的数列一定有下确界;

3) 有界数列既有上确界又有下确界.

由此便可对单调数列得到如下结论:

命题 2.1.7 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1) 设u 单调递增, 则

- 若u 有上界, 则当n 充分大时, u 无限趋近于$\sup u$;
- 若u 无上界, 则当n 充分大时, u 无限趋近于$+\infty$.

2) 设u 单调递减, 则

- 若u 有下界, 则当n 充分大时, u 无限趋近于$\inf u$;
- 若u 无下界, 则当n 充分大时, u 无限趋近于$-\infty$.

定理 2.1.7 (单调极限定理)

1) 单调数列一定有极限;

2) 单调有界数列一定收敛.

例子 2.1.9 $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

定义 2.1.7 (毗邻数列) 设$u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, 称$u$ 和v 是毗邻数列(suites adjacentes), 如果满足以下条件:

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$;

2) u 单调递增, v 单调递减;

3) $v - u$ 收敛到0.

定理 2.1.8 (毗邻数列收敛定理) 设u, v 是毗邻数列, 则它们收敛到同一值. 若将该极限值记为l, 则$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l \leq v_n$.

设$a \in \mathbb{R}$, 用$[a]$ 表示小于等于a 的最大整数, 即$a - 1 < [a] \leq a$. 由此考虑一下例子.

例子 2.1.10 设$x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{[10^n x]}{10^n}$, $v_n = \dfrac{1 + [10^n x]}{10^n}$, 则$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 和$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是毗邻数列且$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = x$.

证明　设$x \in \mathbb{R}$, 由于$[10^n x] \leq 10^n x$, 故

$$10[10^n x] \leq 10^{n+1} x.$$

又因为$10[10^n x]$ 是整数, 故

$$10[10^n x] \le [10^{n+1}x],$$

从而

$$u_{n+1} - u_n = \frac{[10^{n+1}x]}{10^{n+1}} - \frac{[10^n x]}{10^n} \ge 0.$$

$\square$

例子 2.1.11 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p+1}$. 证明: $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ 和$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ 是毗邻数列.

下面介绍子列定理.

定义 2.1.8 称函数$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 严格单调递增, 如果$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$,

$$n_1 > n_2 \Longrightarrow \phi(n_1) > \phi(n_2).$$

定义 2.1.9 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, 函数$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 严格单调递增, 则数列$(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ 称为数列$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的子数列, 简称子列(suite extraite).

注 2.1.6 函数ϕ 一定满足: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \ge n$.

例子 2.1.12

1) $(u_{n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ 是$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列;

2) $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ 和$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ 是$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列, 分别称为奇数列和偶数列;

3) 有限数列$1, 3, 9, 13$ 不是数列$(n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列.

定理 2.1.9 (Bolzano-Weierstrass 定理) 有界数列至少有一个收敛子列. 更确切地说, 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 有界, 则存在$l \in \mathbb{R}$ 和严格单调递增函数$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 使得$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = l$.

定理 2.1.10 (子列定理) 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, 则$\lim u = l$ 当且仅当任给u 的子列v, 则$\lim v = l$.

推论 2.1.6 设$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{R}$.

1) 若$(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ 和$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ 都收敛到l, 则u 收敛到l;

2) 若存在不收敛的子列, 则u 不收敛;

3) 若存在两个收敛的子列, 但不收敛到同一值, 则u 不收敛.

注 2.1.7 子列定理一般用来判定数列发散, 特别对于具有周期性的数列, 如$\cos(\frac{n\pi}{5})_{n\in\mathbb{N}}$.

例子 2.1.13 $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{p+1}$. 证明: u 收敛.

§2.1.1.6 递归数列的极限

定义 2.1.10 (递归数列) 设$I\subset\mathbb{R}$, 函数f 满足$f(I)\subset I$. 令

$$u_0\in I,\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n),$$

则称u 为由函数f 定义的递归数列.

例子 2.1.14 设$a\in[-1,+\infty[$.

$$u_0=a,\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\sqrt{1+u_n},$$

则u 是由函数$f:x\longmapsto\sqrt{1+x}$ 定义的递归数列.

此处先利用作图法讲解如何求递归数列的极限, 后面学习了函数的连续性之后再做理论证明.
求递归数列极限的步骤:

1. 确定区间I, 使得$u_0\in I$ 且$f(I)\subset I$;

2. 作图:

   - 在直角坐标系xoy 下画出区间I 上的曲线$y=f(x)$;
   - 画出一三象限的角平分线$y=x$;
   - 标出以$(u_0,0)$ 为坐标的点, 记为M_0;
   - 过M_0 作x 轴的垂线, 与曲线$y=f(x)$ 交于点(u_0,u_1), 记为M_0';
   - 过M_0' 作y 轴的垂线, 与直线$y=x$ 交于点(u_1,u_1), 记为M_0'';
   - 过M_0'' 作x 轴的垂线, 与x 轴交于点$(u_1,0)$, 记为M_1;

- 在从点M_1 重复上面的过程.

3 . 求出曲线$y = f(x)$ 与直线$y = x$ 的交点, 记为(x_0, x_0);

4 . 通过曲线走向判断数列的单调性, 由此判断极限是否存在;

5 . 若极限存在, 在$\pm\infty$ 和x_0 中寻找数列的极限.

§2.1.1.7 复数列

定义 2.1.11 称复值函数$u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ 为复数列, 并将$u(n)$ 记为u_n, 将该数列记为u 或$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 所有复数列组成的集合记为$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

$\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, 定义如下几个与之相关的数列:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}u = \{\mathrm{Re}(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}, &&\mathrm{Im}u = \{\mathrm{Im}(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \\ &|u| = \{|u_n|\}_{n\in\mathbb{N}} &&\bar{u} = \{|\overline{u_n}|\}_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

本小节出现的$|\cdot|$ 指复数的模, 不是绝对值.
鉴于复数之间无法比较大小, 故不能定义其上下界和单调性, 但可利用模定义其有界性.

定义 2.1.12 称u 为有界数列, 如果存在$M \in \mathbb{R}_+$, 使得$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

定义 2.1.13 设$u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{C}$. 若当n 无限增大时, $|u_n - l|$ 无限趋近于0, 则称u 收敛到l, 记为$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ 或$\lim u = l$.

注 2.1.8 $l \in \mathbb{C}$, 不存在$\pm\infty$ 的情况.

对复数列而言, 当$|z| < 1$ 时, $z^n \to 0$ 也成立.

定理 2.1.11 设$u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{C}$, 则下面结论等价

1) u 收敛到l;

2) $\mathrm{Re}u$ 和$\mathrm{Im}u$ 分别收敛到$\mathrm{Re}l$ 和$\mathrm{Im}l$.

例子 2.1.15

1) $u_n = (1 + \frac{1}{2^n}) + (2 + \frac{1}{2^n})i$, 收敛到$1 + 2i$.

2) $u_n = 1 + ni$, 不收敛.

3) $u_n = r_n e^{i\theta_n}$, 其中$\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 分别收敛到r 和θ, 则

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = re^{i\theta}.$$

4) 设$\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{3}(z_n + 2\overline{z_n})$, 证明: $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛且求其极限.

5) 设$z_n = x_n + iy_n$, 其中$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n - y_n}{2}$, $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$. 证明$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和$(y_n)_{n\in}$ 收敛且求其极限.

§2.1.2 函数极限

本节中f 是定义在$\mathbb{R}$ 的子集上的实函数, $D(f)$ 表示其定义域. 为了研究f 在点$a \in \mathbb{R}$ 和$\pm\infty$ 处的极限, 首先要求f 在"a 和$\pm\infty$ 的附近" 有定义. 为此, 先介绍区间和邻域.

§2.1.2.1 区间(intervale) 和邻域(voisinage)

定义 2.1.14 设$a, b \in \mathbb{R}$, 不妨设$a < b$.

1) 称实数集$\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ 为开区间, 记为$]a, b[$;

2) 称实数集$\{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$ 为闭区间, 记为$[a, b]$;

3) 称实数集$\{x \in \mathbb{R} | a \le x < b\}$ 和$\{x | a < x \le b\}$ 为半开半闭区间, 分别记为$[a, b[$ 和$]a, b]$.

这几类区间统称为有限区间.

定义 2.1.15 设$a \in \mathbb{R}$.

1) 将实数集$\{x | x \le a\}$ 记为$] - \infty, a]$, $\{x | x < a\}$ 记为$] - \infty, a[$;

2) 将实数集$\{x | x \ge a\}$ 记为$[a, +\infty[$, $\{x | x > a\}$ 记为$]a, +\infty[$;

3) 将实数集$\{x | -\infty < x < +\infty\}$ 记为$] - \infty, +\infty[$, 即$\mathbb{R} =] - \infty, +\infty[$.

这几类区间统称为无限区间.

注 2.1.9 由区间的定义可知, 区间没有间断点, 例如$[1,2]\cup]-3,0]$ 就不是区间.

定义 2.1.16 设$a\in\mathbb{R}$, $\delta>0$.

1) 称闭区间$[a-\delta,a+\delta]$ 为a 的δ-邻域, 记为$U(a,\delta)$;

2) 称闭区间$[a-\delta,a]$ 为a 的δ-左邻域, 记为$U_-(a,\delta)$;

3) 称闭区间$[a,a+\delta]$ 为a 的δ-右邻域, 记为$U_+(a,\delta)$.

注 2.1.10 一般地, 若只需要a 的某个邻域, 则不需要指明δ. 故用$U(a)$ 表示a 的某个邻域, $U_-(a)$ 表示a 的某个左邻域, $U_+(a)$ 表示a 的某个右邻域.

定义 2.1.17 设$a\in\mathbb{R}$, $\delta>0$.

1) 称实数集$[a-\delta,a+\delta]\setminus\{a\}$ 为a 的空心δ-邻域, 记为$U^\circ(a,\delta)$;

2) 称左闭右开区间$[a-\delta,a[$ 为a 的空心δ-左邻域, 记为$U^\circ_-(a,\delta)$;

3) 称左开右闭区间$]a,a+\delta]$ 为a 的空心δ-右邻域, 记为$U^\circ_+(a,\delta)$.

注 2.1.11

1) 类似地, 用$U^\circ(a)$ 表示a 的某个空心邻域, $U^\circ_-(a)$ 表示a 的某个空心左邻域, $U^\circ_+(a)$ 表示a 的某个空心右邻域.

2) $U(a)$ 与$U^\circ(a)$ 的区别在于是否包含a.

3) 对于$\pm\infty$, 只谈邻域, 不提左右或是否空心.

定义 2.1.18

1) $[A,+\infty[$ 称为$+\infty$ 的邻域, 记为$U(+\infty)$, 其中$A>0$ 充分大;

2) $]-\infty,B]$ 称为$-\infty$ 的邻域, 记为$U(-\infty)$, 其中$B<0$, $|B|$ 充分大.

例子 2.1.16

1) $\begin{array}{rccc} f: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array}$ 在0 的邻域有定义;

2) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$ 在0 的空心邻域有定义;

3) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$ 在0 的空心右邻域有定义.

下面主要研究函数f 在a 的空心邻域内的性质, 即a 不一定属于$D(f)$.

§2.1.2.2　有限点处的有限极限

定义 2.1.19 设$a \in \mathbb{R}$, f 在a 的某个空心邻域内有定义. 如果当x 无限趋近于a 但不等于a 时, $f(x)$ 无限趋近于某个实数l, 则称f 在a 处以l 为极限, 记为$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ 或$\lim\limits_{a} f = l$.

$*$ $\epsilon - \eta$ 语言: 设$a, l \in \mathbb{R}$, 则$\lim\limits_{a} f = l$ 可用数学语言描述为:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0:\ \forall x \in D(f),\ 0 < |x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

例子 2.1.17

1) 设$l \in \mathbb{R}$, 若$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = l$, 则$\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{a} f = l$.

2) 设$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, 则$\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{a} f = a$. f 称为$\mathbb{R}$ 上的恒同映射, 记为$Id_{\mathbb{R}}$.

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{1-x^2}$, $|a| < 1$.

定理 2.1.12 (唯一性) 若函数f 在a 处有极限, 则极限唯一.

定理 2.1.13 (局部有界性) 设$a \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, 若$\lim\limits_{a} f = l$, 则存在a 的某个空心邻域$U^\circ(a)$, 使得f 在$U^\circ(a)$ 上有界.

定理 2.1.14 设$a \in \mathbb{R}$, f, g 在a 的某个邻域内有定义.

1) 局部保号性: 若$\lim\limits_{a} f > (<)0$, 则存在a 的某个空心邻域$U^\circ(a)$, 使得在$U^\circ(a)$ 内$f > 0$ (< 0).

2) 局部保序性: 若$\lim\limits_{a} f > (<) \lim\limits_{a} g$, 则存在$a$ 的某个空心邻域$U^{\circ}(a)$, 使得在$U^{\circ}(a)$ 内$f > (<) g$.

注 2.1.12 以上定理对$\leq$ 和$\geq$ 不一定成立. 如$f : x \longmapsto x\cos x$, 则$\lim\limits_{0} f = 0$, 但在0 的任何空心邻域内$f$ 都变号.

推论 2.1.7 设$a \in \mathbb{R}$, f, g 在a 的某个邻域内有定义.

1) 若存在a 的某个空心邻域$U^{\circ}(a)$, 使得在$U^{\circ}(a)$ 内$f \geq (\leq) 0$, 则$\lim\limits_{a} f \geq (\leq) 0$;

2) 若存在a 的某个空心邻域$U^{\circ}(a)$, 使得在$U^{\circ}(a)$ 内$f \geq (\leq) g$, 则$\lim\limits_{a} f \geq (\leq) \lim\limits_{a} g$.

注 2.1.13 以上推论对严格不等号不一定成立, 即若在a 的某个空心邻域内$f < g$, 不一定有$\lim f < \lim g$. 如$f : x \longmapsto x\sin x$, $g : x \longmapsto x\tan x$. 换句话说, 如果有$f > g$, 那么取极限后只能得到$\lim\limits_{a} \geq \lim\limits_{a} g$.

推论 2.1.8 设$a, l \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{a} f = l$, 则$\lim\limits_{a} |f| = |l|$.

推论 2.1.9 设$a \in \mathbb{R}$, 若$\lim\limits_{a} f = l \neq 0$, 则$\lim\limits_{a} \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{l}$.

命题 2.1.8 (四则运算($\mathbb{R}$ 上)) 设$a \in \mathbb{R}$, 函数f 和g 在a 的某个空心邻域内有定义, 在a 处的极限存在且有限, 则$f \pm g$ 和$f \times g$ 在a 处的极限也存在有限且

1) $\lim\limits_{a}(f \pm g) = \lim\limits_{a} f \pm \lim\limits_{a} g$;

2) $\lim\limits_{a}(f \times g) = \lim\limits_{a} f \times \lim\limits_{a} g$;

3) 若$\lim\limits_{a} g \neq 0$, 则$\lim\limits_{a}(\dfrac{f}{g}) = \dfrac{\lim\limits_{a} f}{\lim\limits_{a} g}$.

推论 2.1.10 (函数极限的线性性质) 设$a \in \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. 函数$f$ 和g 在a 的某个空心邻域内有定义且极限存在, 则$\lambda f + \mu g$ 在a 处的极限也存在且

$$\lim_{a}(\lambda f + \mu g) = \lambda \lim_{a} f + \mu \lim_{a} g.$$

例子 2.1.18 $\lim\limits_{x \to -1}(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{3}{x^3+1})$.

定义 2.1.20 设$a \in \mathbb{R}$, 函数f 在a 的某个空心邻域内有定义. 若$\lim\limits_a f = 0$, 则称f 为当$x \to a$ 时的无穷小量.

命题 2.1.9 设$a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_a f = 0$, g 在a 的某个空心邻域内有界, 则$\lim\limits_a (f \times g) = 0$, 即无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量.

例子 2.1.19 $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x}$.

命题 2.1.10 (函数极限与数列极限的关系($\mathbb{R}$ 上)) 设$a, l \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_a f = l$, u 是取值于$D(f)$ 的实数列. 若$\lim u = a$, 则$\lim f(u) = l$.

例子 2.1.20

1) $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \cos \dfrac{1}{n+k}$;

2) 若已知$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, 证明: $\lim\limits_{n \to +\infty} n \sin \dfrac{1}{n} = 1$.

重要极限: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

命题 2.1.11 (复合函数的极限($\mathbb{R}$ 上)) 设$a, l \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_a g = l$, f 取值于$D(g)$. 若$\lim\limits_r f = a$, 则

$$\lim_r g \circ f = l.$$

例子 2.1.21 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{x - \pi}$.

§2.1.2.3 有限点处的无穷极限

定义 2.1.21 设$a \in \mathbb{R}$, f 在a 的某个空心邻域有定义.

1) 若当x 无限趋近于a 时, $f(x) > 0$ 且无限增大, 则称函数f 在a 点以$+\infty$ 为极限, 记为$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ 或$\lim\limits_a f = +\infty$;

2) 若当x 无限趋近于a 时, $f(x) < 0$ 且$|f(x)|$ 无限增大, 则称函数f 在a 点以$-\infty$ 为极限, 记为$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ 或$\lim\limits_a f = -\infty$.

$*$ $A-\eta$ 语言: 设$a\in\mathbb{R}$. 则$\lim\limits_{a} f=+\infty$ 可用数学语言描述为:

$$\forall A>0,\ \exists \eta>0:\ \forall x\in D(f),\ 0<|x-a|\leq\eta\Longrightarrow f(x)\geq A.$$

例子 2.1.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$.

注 2.1.14 局部无界, 自然保号.

定义 2.1.22 设$a\in\mathbb{R}$, 函数f 在a 的某个空心邻域内有定义. 若$\lim\limits_{a} f=+\infty$ 或$-\infty$, 则称f 为$x\to a$ 时的无穷大量.

命题 2.1.12 (四则运算(∞ 时)) 设$a\in\mathbb{R}$, 函数f 和g 在a 的某个邻域内有定义且$\lim\limits_{a} f=+\infty$, 则

1) 若g 在a 的某个邻域内有下界, 则$\lim\limits_{a}(f+g)=+\infty$;

2) 若g 在a 的某个邻域内有正的下界, 则$\lim\limits_{a}(f\times g)=+\infty$.

例子 2.1.23 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x)$.

命题 2.1.13 设$a\in\mathbb{R}$, 函数f 在a 的某个空心邻域内有定义且$\lim\limits_{a} f=+\infty$, 则$\lim\limits_{a}\dfrac{1}{f}=0$.

§2.1.2.4　$\pm\infty$ 处的有限极限

定义 2.1.23

1) 设f 在$+\infty$ 的某个邻域有定义, 若当x 取正值且无限增大时, $f(x)$ 无限趋近于某个常数l, 则称f 在$+\infty$ 处以l 为极限, 记为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ 或$\lim\limits_{+\infty} f=l$;

2) 设f 在$-\infty$ 的某个邻域有定义. 若当x 取负值且$|x|$ 无限增大时, $f(x)$ 无限趋近于某个常数l, 则称f 在$-\infty$ 处以l 为极限, 记为$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ 或$\lim\limits_{-\infty} f=l$.

$*$ $\epsilon-M$ 语言: 设$l\in\mathbb{R}$. 则$\lim\limits_{+\infty} f=l$ 可用数学语言描述为:

$$\forall\epsilon>0,\ \exists M>0:\ \forall x\in D(f),\ x\geq M\Longrightarrow|f(x)-l|\leq\epsilon.$$

例子 2.1.24 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$

其他性质类似: 唯一性, 局部有界性, 局部保号性, 四则运算等.
重要极限: $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$.
利用复合函数的极限理解下面数列的极限:

例子 2.1.25 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n^2})^{n^2}=e$.

§2.1.2.5　$\pm\infty$ 处的无穷极限

定义 2.1.24　设f 在∞ 的某个邻域内有定义.

1) 若当x 取正值且无限增大时, $f(x)>0$ 且无限增大, 则称函数f 在$+\infty$ 处以$+\infty$ 为极限, 记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 或$\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$;

2) 若当x 取正值且无限增大时, $f(x)<0$ 且$|f(x)|$ 无限增大, 则称函数f 在$+\infty$ 处以$-\infty$ 为极限, 记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ 或$\lim\limits_{+\infty}f=-\infty$;

3) 若当x 取负值且$|x|$ 无限增大时, $f(x)>0$ 且无限增大, 则称函数f 在$-\infty$ 处以$+\infty$ 为极限, 记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ 或$\lim\limits_{-\infty}f=+\infty$;

4) 若当x 取负值且$|x|$ 无限增大时, $f(x)<0$ 且$|f(x)|$ 无限增大, 则称函数f 在$-\infty$ 处以$-\infty$ 为极限, 记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 或$\lim\limits_{-\infty}f=-\infty$.

$*$ $A-M$ 语言: $\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$ 可用数学语言描述为:

$$\forall A>0,\ \exists M>0:\ \forall x\in D(f),\ x\geq M\Longrightarrow f(x)\geq A.$$

例子 2.1.26 $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n$.

其他性质类似. 下面对以上四种极限给出统一的两个命题:

命题 2.1.14 (函数极限与数列极限的关系($\overline{\mathbb{R}}$ 上)) 设$a,l\in\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{a}f=l$, u 是取值于$D(f)$ 的实数列. 若$\lim u=a$, 则$\lim f(u)=l$.

命题 2.1.15 (复合函数的极限($\overline{\mathbb{R}}$ 上)) 设$a,l\in\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{a}g=l$, f 取值于$D(g)$. 若$\lim\limits_{r}f=a$, 则

$$\lim_{r}g\circ f=l.$$

例子 2.1.27 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\dfrac{1}{x}$.

§2.1.2.6 单侧极限

这里只考虑有限点处的单侧极限, 因为$\pm\infty$ 处的极限就是单侧极限.

定义 2.1.25 设$a \in \mathbb{R}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1) 函数f 在a 的某个空心右邻域有定义, 如果当x 从a 的右侧无限趋近于a 时, $f(x)$ 无限趋近于l, 则称f 在a 处有右极限(limite à droite) l, 记为 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ 或$\lim\limits_{a^+} f = l$;
2) 函数f 在a 的某个空心左邻域有定义, 如果当x 从a 的左侧无限趋近于a 时, $f(x)$ 无限趋近于l, 则称f 在a 处有左极限(limite à gauche) l, 记为 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ 或$\lim\limits_{a^-} f = l$.

* $\epsilon - \eta$ 语言: $\lim\limits_{a^+} f = l \in \mathbb{R}$ 可用数学语言描述为:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0:\ \forall x \in D(f),\ 0 < x - a \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

注 2.1.15 单侧极限主要用来考虑某些特殊点和端点的极限.

例子 2.1.28

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =?$
2) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 在$x = \pm 1$ 处的极限;
3) $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ 在$x = 0$ 处的极限是.

注 2.1.16 设f, g 在a 处分别以l, m 为极限, 其中$l, m \in \overline{\mathbb{R}}$. 只要$l+m$ 和lm 能确定, 则有$\lim(f+g) = l+m$, $\lim fg = lm$. 事实上, 对于加法, 若$l = +\infty$, 则只要$m \neq -\infty$, $l+m$ 就能确定; 对于乘法, 不能确定的情况较多, 需具体分析, 例如: $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$. 则列出以上几种情况下四则运算的表格.....

几个常用极限:

1) 常函数在任意点处的极限都是其本身.
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0;\ 0 < a < 1,\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0,\ a > 1;\ \lim\limits_{x\to 0} a^x = 1,\ a > 0;$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1;$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\dfrac{1}{x})^x = e,\ \lim\limits_{x\to-\infty} (1+\dfrac{1}{x})^x = e;$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0,\ \alpha,\ \beta > 0;$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0,\ \beta > 0;$

8) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0;\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^\beta \ln^\alpha x = 0,\ \alpha,\ \beta > 0.$

§2.1.2.7　函数极限的判定

定理 2.1.15 (夹挤定理) 设$a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = l \in \mathbb{R}$. 若在$a$ 的某个空心邻域$U^\circ(a)$ 内, 函数h 满足$f \le h \le g$, 则h 在a 处的极限存在, 且$\lim\limits_a h = l$.

推论 2.1.11 设$f \le g$,

1) 若$\lim\limits_a f = +\infty$, 则$\lim\limits_a g = +\infty$;

2) 若$\lim\limits_a g = -\infty$, 则$\lim\limits_a f = -\infty$.

例子 2.1.29 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos e^x}{x^2+1}$.

下面介绍左右极限定理, 这也是判断函数在一点是否有极限的重要工具.

定理 2.1.16 (左右极限定理) 设$a \in \mathbb{R}$, 函数f 在a 的某个空心邻域内有定义, 则f 在a 处有极限当且仅当f 在a 处的左极限和右极限存在且相等. 也就是说,

$$\lim_a f = l \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{a^+} f = l, \\ \lim\limits_{a^-} f = l. \end{cases}$$

注 2.1.17 有上述命题可知, 函数f 在a 点有极限必须具备两个条件:

1) f 在a 点的左右极限都存在;

2) 左右极限相等.

例子 2.1.30 $f: x \longmapsto e^{-\frac{1}{x}}$ 和$g: x \longmapsto \operatorname{sgn}(x)$ 在0 处都无极限; $h(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$ 在0 处有极限.

注 2.1.18 左右极限定理主要用来判断某些特殊点处的极限是否存在, 它也是判断某点处极限不存在的重要方法.

下面叙述单调极限定理, 为此, 先给出单调函数的定义.

定义 2.1.26 设$I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$.

1) 称f 单调递增, 若$\forall x_1, x_2 \in I$,

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

   称f 严格单调递增, 若$\forall x_1, x_2 \in I$,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

2) 称f 单调递减, 若$\forall x_1, x_2 \in I$,

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$

   称f 严格单调递减, 若$\forall x_1, x_2 \in I$,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

3) 称f 单调, 如果它单调递增或单调递减; 称f 严格单调, 如果它严格单调递增或严格单调递减.

其中I 称为单调区间.

注 2.1.19 函数的单调性是针对某个区间而言的.

定义 2.1.27 设$I \subset \mathbb{R}$ 是一个区间, $f: I \to \mathbb{R}$.

1) 若f 有上界, 则将其最小的上界称为上确界, 记为$\sup\limits_I f$ 或$\sup\limits_{x\in I} f(x)$;

2) 若f 有下界, 则将其最大的下界称为下确界, 记为$\inf\limits_I f$ 或$\inf\limits_{x\in I} f(x)$.

定理 2.1.17 (单调极限定理: 区间端点) 设$a, b \in \mathbb{R}$ 且$a < b$, f 在$]a, b[$ 上单调, 则$\lim\limits_{a^+} f$ 和$\lim\limits_{b^-} f$ 存在. 进一步,

1) 若f 单调递增有上界, 则$\lim\limits_{b^-} f = \sup\limits_{]a,b[} f$;

2) 若f 单调递增无上界, 则$\lim\limits_{b^-} f = +\infty$;

3) 若f 单调递增有下界, 则$\lim\limits_{a^+} f = \inf\limits_{]a,b[} f$;

4) 若f 单调递增无下界, 则$\lim\limits_{a^+} f = -\infty$.

下面给出函数在单调区间内部点上极限的存在性. 为此, 给出记号$\dot{I}$, 表示区间I 的内部.

定理 2.1.18 (单调极限定理: 区间内点) 设$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ 单调, $c \in \dot{I}$, 则$\lim\limits_{c^-} f$ 和$\lim\limits_{c^+} f$ 都存在且有限. 进一步,

1) 若f 单调递增, 则$\lim\limits_{c^-} f \le f(c) \le \lim\limits_{c^+} f$.

2) 若f 单调递减, 则$\lim\limits_{c^-} f \ge f(c) \ge \lim\limits_{c^+} f$.

定理 2.1.19 (归结原则) 设$a, l \in \mathbb{R}$, f 在a 的某个空心邻域$U^\circ(a)$ 内有定义, 则$\lim\limits_a f = l$ 当且仅当$U^\circ(a)$ 内所有以a 为极限的实数列$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.

注 2.1.20

1) 结合数列极限与函数极限的关系来理解该定理;

2) 归结原则一般用来判断极限不存在, 例如: $\sin\dfrac{1}{x}$ 在0 点极限不存在.

§2.1.2.8 复函数的极限

定义 2.1.28 取值于复数域$\mathbb{C}$ 的函数称为复函数.

设$f : D(f) \to \mathbb{C}$, 定义如下几个与之相关的函数:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Re}f: & D(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array}, \qquad \begin{array}{rccc} \mathrm{Im}f: & D(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array},$$

$$\begin{array}{rccc} |f|: & D(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |f(x)| \end{array}, \qquad \begin{array}{rccc} \bar{f}: & D(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \overline{f(x)} \end{array}.$$

对复函数而言, 我们只考虑$a \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \mathbb{C}$ 的情况, 不考虑$l = \pm\infty$ 的情况.

定义 2.1.29 设$a \in \overline{\mathbb{R}}$, 复函数$f$ 在a 的某个空心邻域有定义, 若存在$l \in \mathbb{C}$ 使得当x 无限趋近于a 时, $|f - l|$ 无限趋近于0, 则称f 在a 点以l 为极限, 记为$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ 或$\lim\limits_{a} f = l$.

定理 2.1.20 (复函数极限存在定理) 设复函数f 在a 的某个空心邻域内有定义, $l \in \mathbb{C}$, 则下面结论等价

1) $\lim\limits_{a} f = l$;

2) $\lim\limits_{a} \mathrm{Re}f = \mathrm{Re}l$ 且$\lim\limits_{a} \mathrm{Im}f = \mathrm{Im}l$.

注 2.1.21 局部有界性, 四则运算, 函数极限与数列极限的关系, 复合函数的运算, 可逆函数的运算, 单侧极限的定义都成立. 其它涉及比较大小的, 如局部保号性, 局部保序性, 夹挤定理, 单调有极限定理等都不成立.

推论 2.1.12 设复函数f 在a 点有极限, 则$|f|$ 和$\bar{f}$ 都在a 点有极限.