

§2.4 积分

有简单问题入手: 实函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且非负, 求由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$ 和 x 轴围成的图形的面积, 交待“分割-近似代替-求和-取极限”的思想.

§2.4.1 黎曼和

定义 2.4.1 (闭区间的分割) 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 闭区间 $[a, b]$ 内有 $n - 1$ 个点, 依次为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

它们把 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in [1, n]$. 我们把 $u = (x_i)_{i \in [0, n]}$ 称为区间 $[a, b]$ 的一个分割, 称 $\delta(u) = \max_{i \in [1, n]} (x_i - x_{i-1})$ 为分割 u 的步长或模.

例子 2.4.1 将区间 $[a, b]$ n 等分, 即

$$u = \left(a + \frac{b-a}{n}i \right)_{i \in [0, n]}.$$

此时, $\delta(u) = \frac{1}{n}$. n 越大 $\delta(u)$ 越小, 即随着 n 的增大, 分割越来越细.

注 2.4.1 $\delta(u)$ 反应了分割的细密程度. 给出一个分割 u , $\delta(u)$ 就随之确定; 反过来, 具有同一细度的分割却有无限多个.

定义 2.4.2 设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的函数, $u = (x_i)_{i \in [0, n]}$ 是 $[a, b]$ 的一个分割, 任取点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in [1, n]$, 称和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{2.4.1}$$

为 f 在 $[a, b]$ 上的一个积分和或黎曼和.

例子 2.4.2 设 $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, 则

1) $\sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2}$ 是 f 在 $[0, 1]$ 上的一个黎曼和.

2) $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + i^2}$ 也是 f 在 $[0, 1]$ 上的一个黎曼和.

3) $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{4n}{4n^2 + (2i+1)^2}$ 也是 f 在 $[0, 1]$ 上的一个黎曼和.

注 2.4.2 显然, 黎曼和(2.4.1) 既与分割 u 有关, 也与 ξ_i 的选取有关. 随着 $\delta(u)$ 的无限变小, 我们关心黎曼和(2.4.1) 的最终趋势.

定义 2.4.3 设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的函数, J 是一个确定的实数. 对于 $[a, b]$ 的任意分割 u 及在上面任意选取的点集 $\{\xi_i\}_{i \in [1, n]}$, 当 $\delta(u) \rightarrow 0$ 时, 和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \rightarrow J$, 则称 f 在 $[a, b]$ 上可积, J 称为 f 在 $[a, b]$ 上的积分, 记作

$$J = \int_a^b f(x)dx \text{ 或 } \int_{[a,b]} f.$$

若当 $\delta(u) \rightarrow 0$ 时没有极限, 则称 f 在 $[a, b]$ 上不可积.

注 2.4.3 规定: $\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

§2.4.2 积分的性质

命题 2.4.1 设 f 是 $[a, b]$ 上的常值函数: $\forall x \in [a, b], f(x) = c$, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b cdx = c(b-a).$$

命题 2.4.2 设 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, $\lambda \in \mathbb{R}$, 则 $f+g, \lambda f$ 和 $|f|$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且

$$1) \int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

$$2) \int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx;$$

$$3) \left| \int_a^b f(x)dx \right| = \int_a^b |f|(x)dx$$

命题 2.4.3 (积分区间可加性) 设 $c \in]a, b[$, 若函数 f 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上都可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f_{|[a,c]}(x)dx + \int_c^b f_{|[c,b]}(x)dx.$$

定理 2.4.1

1) 保号性: 设 f 在 $[a, b]$ 上可积, 若 $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

2) 保序性: 设 f 和 g 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

定理 2.4.2 (有界性) 若函数 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上有界.

注 2.4.4 也就是说, 可积函数必有界, 但有界函数不一定可积, 例如Dirichlet 函数:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

推论 2.4.1 若函数 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则存在 $M > 0$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

注 2.4.5 并不是所有的函数都可积, 这涉及函数的可积性条件, 在这里不展开讨论. 下面我们只讨论连续函数.

§2.4.3 连续函数的积分

定理 2.4.3 设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.

例子 2.4.3

1) 求 $\int_0^1 x^2 dx$;

2) $\int_{-1}^2 x|x| dx$.

推论 2.4.2 若 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 不变号, 且 $\int_{[a,b]} f = 0$, 则 $f = 0$.

定理 2.4.4 (积分中值定理) 设 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在一点 $c \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

积分中值定理的几何意义: 若 f 在 $[a, b]$ 上非负连续, 则 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的曲边梯形的面积等于以 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ 为高, $[a, b]$ 为底的矩形的面积. 其中 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ 可理解为 f 在 $[a, b]$ 上所有函数值的平均值.

例子 2.4.4 求 \sin 在 $[0, \pi]$ 上的平均值.

§2.4.4 分段连续函数的积分

定义 2.4.4 (分段连续函数) 设 $n \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \in [a, b]$. 若 f 限制在 $]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1, \dots, n\}$ 上连续, 且 $f|_{]x_{i-1}, x_i[}$ 在 x_{i-1} 和 x_i 点有有限极限, 则称 f 在 $[a, b]$ 上分段连续.

由定义?? 可知, f 限制在 $]x_{i-1}, x_i[$ 上可连续延拓到闭区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上得到 \tilde{f} , 即 \tilde{f} 是闭区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的连续函数, 从而可积. 由积分区间的可加性便可得

定理 2.4.5 设 f 是 $[a, b]$ 上的分段连续函数, 即存在 $n \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, f 限制在 $]x_{i-1}, x_i[$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tilde{f}(x)dx,$$

其中 \tilde{f} 是 $f|_{]x_{i-1}, x_i[}$ 在 x_{i-1} 和 x_i 上的连续延拓.

例子 2.4.5

1. $\int_m^n [x]dx$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \geq m$.

2. $f: x \mapsto \begin{cases} 2x - 1, & -1 \leq x < 0, \\ e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$, 求 $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

对于分段连续函数积分的相关性质均可根据上一节平行推导.

目前我们已经知道: 连续函数和分段连续函数是可积的. 对于其它函数, 大二再学习.

§2.4.5 积分的计算

定义 2.4.5 设 f 在 $[a, b]$ 上可积, 定义

$$\begin{aligned} F: [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

将 F 称为变上限积分函数.

命题 2.4.4 设 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则

1) 变上限积分函数

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

在 $[a, b]$ 上连续.

2) 进一步, 若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 F 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $F' = f$.

定义 2.4.6 设函数 f 和 F 都在区间 I 上有定义. 若 $F' = f$, 则称 F 为 f 的一个原函数.

例子 2.4.6 $\forall x \in \mathbb{R}, \sin' x = \cos x$, 故 \sin 是 \cos 的一个原函数. $x \mapsto \sin x + 3$ 也是 \cos 的一个原函数.

命题 2.4.5

1) 设 f 在 I 上可积, $a \in I$, 则变上限积分函数 $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ 是 f 在 I 上的一个原函数, 且是满足 $F(a) = 0$ 的唯一原函数;

2) 设 G 是 f 在区间 I 上的一个原函数, 则 $\forall C \in \mathbb{R}, G + C$ 都是 f 的原函数.

定理 2.4.6 设 f 是 I 上的连续函数, F 是 f 的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

例子 2.4.7 $\int_a^b e^{2x} dx, \int_0^\pi \sin x dx, \int_a^b (\alpha x + \beta) dx, \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx, \int_1^2 \frac{1}{x} dx.$

定理 2.4.7 (分部积分) 设 $u, v \in C^1([a, b])$, 则

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

注 2.4.6 一般地, 为了方便看出 u 和 v , 利用下面的形式

$$\int_a^b u(t)dv(t) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

例子 2.4.8 $\int_1^2 \ln x dx; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, n \in \mathbb{N}; \int_0^1 x^2 e^x dx.$

注 2.4.7

1) 一般地, 下列函数比较适合用分部积分法:

$x \mapsto x^k \sin bx, x \mapsto x^k \cos bx, x \mapsto x^k e^{ax}, x \mapsto x^k \ln x, x \mapsto x^k \arcsin x, x \mapsto x^k \arctan x, x \mapsto e^{ax} \sin bx, x \mapsto e^{ax} \cos bx$ 等.

2) 当被积函数是 $x \mapsto x^k \sin bx, x \mapsto x^k \cos bx, x \mapsto x^k e^{ax}$ 时, 一般将 $x \mapsto x^k$ 看做 u ;

3) 当被积函数是 $x \mapsto x^k \ln x, x \mapsto x^k \arcsin x, x \mapsto x^k \arctan x$ 时, 一般将 $x \mapsto x^k$ 看做 v ;

3) 当被积函数是 $x \mapsto e^{ax} \sin bx, x \mapsto e^{ax} \cos bx$ 时, 一般将 $x \mapsto e^{ax}$ 看做 u .

另外, 有些积分在利用分部积分时会出现原来的积分, 这时便可通过移项解出, 例如: $\int_0^1 e^x \sin x dx$.

定理 2.4.8 (换元法) 设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $\phi: J \rightarrow I$ 是 C^1 函数, 若 $\alpha, \beta \in J$, 则

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x)) \phi'(x) dx.$$

注 2.4.8

1) 事实上, 换元法就是反过来利用复合函数求导公式;

2) 在做变量替换时, 令 $t = \phi(x)$, 然后用 t 去替换 $\phi(x)$, 用 dt 去替换 $\phi'(x) dx$;

3) 不要忘记变量替换后要改变积分上下限.

例子 2.4.9 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx, \int_0^a \frac{1}{a^2 + x^2} dx.$

以上两个例子是从右往左利用换元法, 即发现被积函数是 $f(\phi)\phi'$ 的形式. 另一种情况是, 如果被积函数比较复杂, 看不出是否具有 $f(\phi)\phi'$ 的形式, 则需将其化简, 这时便可从左往右利用换元法.

例子 2.4.10 $\int_{-1}^2 \sqrt{4-x^2} dx, \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx.$

注 2.4.9 设 $a > 0$.

- 1) 若含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 形式的, 则令 $x = a \sin t$ 或 $a \cos t$;
- 2) 若含有 $\sqrt{a^2 + x^2}$ 形式的, 则令 $x = a \tan t$;
- 3) 若含有 $\sqrt{x^2 - a^2}$ 形式的, 则令 $x = a \sec t$.

当然, 有时也需要灵活处理, 例如: $\int_0^a \sqrt{a^2 + x^2} dx$.

另外, 对于某些特殊函数, 有些很显然的特点:

- 1) 若 f 是 T -周期函数, 则令 $t = x + T$, 得

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+T}^{b+T} f(t - T) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt;$$

- 2) 若 f 是偶函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$$

- 3) 若 f 是奇函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

§2.4.6 复函数的积分

定理 2.4.9 设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, 则以下两个结论等价

- 1) f 在 $[a, b]$ 上可积;
- 2) $\operatorname{Re} f$ 和 $\operatorname{Im} f$ 在 $[a, b]$ 上可积.

并且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re}(f(x)) dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(x)) dx.$$

命题 2.4.6 设 $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ 连续, 则 $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ 是 f 在 I 上的原函数当且仅当 $\operatorname{Re} F$ 和 $\operatorname{Im} F$ 分别是 $\operatorname{Re} f$ 和 $\operatorname{Im} f$ 在 I 上的原函数.