

## 第三章 常用函数

本章主要介绍五类常用的函数: 对数函数, 指数函数, 幂函数, 反三角函数, 双曲函数, 其中前三类函数已经在高中学过, 包括函数的定义, 图像和性质. 在此我们首先对这三类函数的相关知识做一下回顾, 然后学习后两种新的函数.

### §3.1 对数, 指数函数

以前的学习是从函数的定义域, 值域和对应法则三个方面入手, 这里我们从函数的原始定义出发.

#### §3.1.1 自然对数函数

由上一章的学习可知, 函数  $x \mapsto 1/x$  在  $\mathbb{R}_+^*$  上是连续的, 所以存在原函数, 并且在1处为0的原函数唯一.

**定义 3.1.1** 在  $\mathbb{R}_+^*$  上, 函数  $x \mapsto 1/x$  在1处为0的唯一原函数称为自然对数函数, 记为  $\ln$ , 即

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x = \int_1^x \frac{du}{u}.$$

**命题 3.1.1** 自然对数函数  $\ln$  满足  $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ ,

- 1)  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ .
- 2)  $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ .
- 3)  $\forall n \in \mathbb{Z}, \ln(x^n) = n \ln x$ .
- 4)  $\ln \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ , 且  $\ln' x = \frac{1}{x}$ .
- 5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .

**定理 3.1.1** 自然对数函数  $\ln$  是  $\mathbb{R}_+^*$  到  $\mathbb{R}$  的严格单调递增的双射.

### §3.1.2 自然指数函数

由定理3.1.1可知, 自然对数函数 $\ln$ 有反函数.

**定义 3.1.2** 自然对数函数的反函数称为自然指数函数, 记为 $\exp$ , 即

$$\begin{aligned}\exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto \ln^{-1}(x)\end{aligned}$$

也就是说,  $\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+^*, y = \exp(x) \iff x = \ln y$ , 即 $\exp \circ \ln = \text{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$ ,  $\ln \circ \exp = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ . 方便起见, 记 $\exp(x) = e^x$ .

**注 3.1.1** 令 $e = \exp(1)$ , 则 $\ln e = 1$ , 这是唯一使得自然对数函数取值为1的点. 它是一个无理数, 保留五位小数为2.71828.

**命题 3.1.2** 自然指数函数 $\exp$ 满足:

- 1)  $\exp 0 = 1$ .
- 2)  $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ .
- 3)  $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ .
- 4)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \exp(nx) = (\exp(x))^n$ .
- 5)  $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$ , 且 $\exp'(x) = \exp(x)$ .
- 6)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ .

**定理 3.1.2** 自然指数函数 $\exp$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}_+^*$ 的严格单调递增的双射.

### §3.1.3 以任意给定实数为底的对数函数

**定义 3.1.3** 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ , 将定义在 $\mathbb{R}_+^*$ 上的函数 $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ 称为以 $a$ 为底的对数函数, 记为 $\log_a$ , 即

$$\begin{aligned}\log_a : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\ln x}{\ln a}\end{aligned}$$

**命题 3.1.3** 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ , 则以 $a$ 为底的对数函数 $\log_a$ 满足:

- 1)  $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1.$
- 2)  $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$
- 3)  $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$
- 4)  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \log_a(x^n) = n \log_a x.$
- 5)  $\log_a \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*),$  且  $\log'_a x = \frac{1}{x \ln a}.$
- 6)  $0 < a < 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty;$   
 $a > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty.$

**定理 3.1.3** 设  $a > 0$  且  $a \neq 1.$

- 1)  $0 < a < 1$  时,  $\log_a$  是  $\mathbb{R}_+^*$  到  $\mathbb{R}$  上严格单调递减的双射.
- 2)  $a > 1$  时,  $\log_a$  是  $\mathbb{R}_+^*$  到  $\mathbb{R}$  上严格单调递增的双射.

### §3.1.4 以任意给定实数为底的指数函数

由定理3.1.3 可知,  $\log_a$  有反函数.

**定义 3.1.4** 设  $a > 0$  且  $a \neq 1,$   $\log_a$  的反函数称为以  $a$  为底的指数函数, 记为  $\exp_a.$

即  $\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+^*,$

$$y = \exp_a x \iff x = \log_a y.$$

方便起见, 记  $a^x = \exp_a x, \forall x \in \mathbb{R}.$

#### 命题 3.1.4

- 1)  $\forall a \in \mathbb{R}_+, a^0 = 1$  (规定  $0^0 = 1$ ).
- 2)  $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in \mathbb{R}, a^{x+y} = a^x a^y.$
- 3)  $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in \mathbb{R}, a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}.$
- 4)  $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, a^{nx} = (a^x)^n.$
- 5)  $\exp_a \in C^\infty(\mathbb{R}),$  且  $(a^x)' = \ln a \cdot a^x.$

- 6)  $0 < a < 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ ;  
 $a > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ .

**定理 3.1.4** 设  $a > 0$  且  $a \neq 1$ .

- 1)  $0 < a < 1$  时,  $\exp_a$  是  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}_+^*$  上严格单调递减的双射.
- 2)  $a > 1$  时,  $\exp_a$  是  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}_+^*$  上严格单调递增的双射.

## §3.2 幂函数

### §3.2.1 基本定义

以上定义了  $\exp$  和  $\ln$  两个函数, 下面用他们定义幂函数.

**定义 3.2.1** 形如

$$\begin{aligned} \varphi_a : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto \exp(a \ln x) \end{aligned}$$

的函数都称为幂函数, 其中  $a \in \mathbb{R}$ . 方便起见, 记  $x^a = \exp(a \ln x), x \in \mathbb{R}_+^*$ .

**命题 3.2.1** 设  $a, b \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0$ . 则

- 1)  $x^a y^a = (xy)^a, x^a x^b = x^{a+b}, (x^a)^b = x^{ab}$ .
- 2)  $1^a = 1, x^0 = 1$ .
- 3)  $\ln(x^a) = a \ln x$ .
- 4)  $(x^a)' = ax^{a-1}$ .

**定理 3.2.1**

- 1)  $a > 0$  时, 幂函数  $x \mapsto x^a$  是  $\mathbb{R}_+^*$  到  $\mathbb{R}_+^*$  的严格单调递增的双射.
- 2)  $a < 0$  时, 幂函数  $x \mapsto x^a$  是  $\mathbb{R}_+^*$  到  $\mathbb{R}_+^*$  的严格单调递减的双射.

### §3.2.2 函数之间的比较

在第一章中已经提及过, 此处再次回顾.

#### 命题 3.2.2

1) 幂幂: 设  $\alpha < \beta$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\beta}{x^\alpha} = 0$ .

2) 对幂: 设  $\alpha, \beta > 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$ .

3) 幂指: 设  $\alpha, \beta > 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$ .

证明 2) 首先证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

因为  $\forall t \geq 1$ , 都有  $t \geq \sqrt{t}$ . 故  $\forall x \geq 1$ , 有

$$0 \leq \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}.$$

故

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

由夹挤定理即得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

下面证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ .

设  $x > 1$ , 则

$$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left( \frac{\ln x}{x^{\alpha/\beta}} \right)^\beta = \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^\beta \left( \frac{\ln(x^{\alpha/\beta})}{x^{\alpha/\beta}} \right)^\beta.$$

因为  $x > 1$  且  $\alpha, \beta > 0$ , 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha/\beta} = +\infty$ . 根据复合函数的极限,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ . 对于第二个极限, 只需做变换  $x \rightarrow 1/x$  即可.

3) 在2) 中用  $\exp x$  代替  $x$  即得. □

## §3.3 反三角函数

学生已经学过三角函数, 并且掌握了三角函数在定义域内各个区间的单调性. 本节要讲的反三角函数便是三角函数在特定区间上的反函数.

### §3.3.1 反正弦函数

**定义 3.3.1** 正弦函数 $\sin$  在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上连续且严格单调递增, 故 $\sin$  是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  到 $[-1, 1]$  上的双射, 存在反函数. 其反函数称为反正弦函数, 记为 $\arcsin$ .

**命题 3.3.1** 由反正弦函数的定义可得:

- 1)  $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin x) = x.$
- 2)  $\forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin \theta) = \theta.$
- 3) 奇函数:  $\forall x \in [-1, 1], \arcsin(-x) = -\arcsin x.$
- 4)  $\forall x \in ]-1, 1[, \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

问题:  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \arcsin(\sin \theta) = ?$

**例子 3.3.1** 计算 $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6})$ .

**定理 3.3.1**  $\arcsin$  是 $[-1, 1]$  到 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  的严格单调递增的双射.

### §3.3.2 反余弦函数

**定义 3.3.2** 余弦函数 $\cos$  在区间 $[0, \pi]$  上连续且严格单调递减, 故 $\cos$  是 $[0, \pi]$  到 $[-1, 1]$  上的双射, 存在反函数. 其反函数称为反余弦函数, 记为 $\arccos$ .

**命题 3.3.2** 由反余弦函数的定义可得:

- 1)  $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos x) = x.$
- 2)  $\forall \theta \in [0, \pi], \arccos(\cos \theta) = \theta.$
- 3)  $\forall x \in ]-1, 1[, \arcsin' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

问题:  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \arccos(\cos \theta) = ?$

**例子 3.3.2** 计算 $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3}))$ .

### 例子 3.3.3

- 1) 化简 $y = \cos(\arcsin x)$  和 $y = \sin(\arccos x), x \in [-1, 1]$ .
- 2) 证明:  $\forall x \in [-1, 1], \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$

**定理 3.3.2**  $\arccos$  是 $[-1, 1]$  到 $[0, \pi]$  的严格单调递增的双射.

### §3.3.3 反正切函数

**定义 3.3.3** 正切函数  $\tan$  在区间  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  上连续且严格单调递增, 故  $\tan$  是  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  到  $\mathbb{R}$  上的双射, 存在反函数. 其反函数称为反正切函数, 记为  $\arctan$ .

**命题 3.3.3** 由反正切函数的定义可得:

- 1)  $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x.$
- 2)  $\forall \alpha \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan \alpha) = \alpha.$
- 3)  $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$

**注 3.3.1** 根据命题 3.3.3-1) 可得:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

进而,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \tan(\arctan x) \cos(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

**定理 3.3.3**  $\arctan$  是  $\mathbb{R}$  到  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  的严格单调递增的双射.

## §3.4 双曲函数

### §3.4.1 双曲正弦函数和双曲余弦函数

**定义 3.4.1** 如下定义在  $\mathbb{R}$  上的两个函数分别称为反双曲正弦函数, 记为  $\text{sh}$ , 和反双曲余弦函数, 记为  $\text{ch}$

$$\text{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

**命题 3.4.1**  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 有

- 1)  $e^x = \text{ch} x + \text{sh} x, e^{-x} = \text{ch} x - \text{sh} x.$
- 2)  $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1.$
- 3)  $\text{ch}, \text{sh} \in C^\infty(\mathbb{R})$ , 且  $\text{ch}' = \text{sh}, \text{sh}' = \text{ch}.$

### 定理 3.4.1

- 1)  $\text{sh}$  是  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}$  的严格单调递增的双射.
- 2)  $\text{ch}|_{\mathbb{R}_+}$  是  $\mathbb{R}_+$  到  $[1, +\infty[$  的严格单调递增的双射,  $\text{ch}|_{\mathbb{R}_-}$  是  $\mathbb{R}_-$  到  $[1, +\infty[$  的严格单调递减的双射.

### §3.4.2 双曲正切函数

由双曲正弦和双曲余弦函数的定义可知:  $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}x > 0$ , 故  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}$  都有意义;  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{sh}x \neq 0$ , 故  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\text{ch}x}{\text{sh}x}$  都有意义. 由此定义双曲正切函数和双曲余切函数.

**定义 3.4.2** 如下定义在  $\mathbb{R}$  上的函数称为双曲正切函数, 记为  $\text{th}$

$$\text{th} : x \mapsto \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

如下定义在  $\mathbb{R}^*$  上的函数称为双曲余切函数, 记为  $\text{coth}$

$$\text{coth} : x \mapsto \frac{\text{ch}x}{\text{sh}x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

**命题 3.4.2**  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 有

- 1)  $\text{th} \in C^\infty(\mathbb{R})$ , 且  $\text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2} = 1 - \text{th}^2$ .
- 2)  $\text{coth} \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$ , 且  $\text{coth}' = -\frac{1}{\text{sh}^2} = 1 - \text{coth}^2$ .

### 定理 3.4.2

- 1)  $\text{th}$  是  $\mathbb{R}$  到  $] -1, 1[$  的严格单调递增的双射.
- 2)  $\text{coth}|_{\mathbb{R}_+^*}$  是  $\mathbb{R}_+^*$  到  $]1, +\infty[$  的严格单调递减的双射,  $\text{coth}|_{\mathbb{R}_-^*}$  是  $\mathbb{R}_-^*$  到  $] -\infty, -1[$  的严格单调递减的双射.



### §3.4.3 反双曲正弦函数和反双曲余弦函数

由上节可知, 双曲正弦函数是 $\mathbb{R}$  到 $\mathbb{R}$  的严格单调递增的连续双射, 故存在反函数. 同理, 双曲余弦函数限制到 $\mathbb{R}_+$  上是从 $\mathbb{R}_+$  到 $[1, +\infty[$  的严格单调递增的双射, 故也存在反函数.

#### 定义 3.4.3

1) 双曲正弦函数在 $\mathbb{R}$  上的反函数称为反双曲正弦函数, 记为 $\operatorname{argsh}$ , 且

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

2) 双曲余弦函数在 $\mathbb{R}_+$  上的反函数称为反双曲余弦函数, 记为 $\operatorname{argch}$ , 且

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

#### 命题 3.4.3

1)  $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) = x$ .

2)  $\forall x \geq 1, \operatorname{ch}(\operatorname{argch} x) = x, \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argch}(\operatorname{ch} x) = |x|$ .

3)  $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1 + x^2}, \forall x \geq 1, \operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{x^2 - 1}$ .

3)  $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}; \forall x \in ]1, +\infty[, \operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .

#### 定理 3.4.3

1)  $\operatorname{argsh}$  是 $\mathbb{R}$  到 $\mathbb{R}$  上严格单调递增的双射.

2)  $\operatorname{argch}$  是 $[1, +\infty[$  到 $\mathbb{R}_+$  上严格单调递增的双射.

### §3.4.4 反双曲正切函数

双曲正切函数是 $\mathbb{R}$  到 $] - 1, 1[$  的严格单调递增的连续双射, 故存在反函数;  $\operatorname{coth}$  限制在 $\mathbb{R}_+^*$  上是 $\mathbb{R}_+^*$  到 $]1, +\infty[$  的严格单调递减的双射, 故也存在反函数.

#### 定义 3.4.4

1) 双曲正切函数在 $\mathbb{R}$ 上的反函数称为反双曲正切函数, 记为 $\operatorname{argth}x$ , 且

$$\forall x \in ]-1, 1[, \operatorname{argth}x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right).$$

2)  $\operatorname{coth}$  限制在 $\mathbb{R}_+^*$ 上的反函数称为反双曲余切函数, 记为 $\operatorname{argcoth}x$ , 且

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \operatorname{argcoth}x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

#### 命题 3.4.4

- 1)  $\forall x \in ]-1, 1[, \operatorname{argth}'x = \frac{1}{1-x^2}$ .
- 2)  $\forall x \in ]1, +\infty[, \operatorname{argcoth}'x = -\frac{1}{x^2-1}$ .

#### 定理 3.4.4

- 1)  $\operatorname{argth}$  是 $] - 1, 1[$ 到 $\mathbb{R}$ 的严格单调递增的双射.
- 2)  $\operatorname{argcoth}$  是 $]1, +\infty[$ 到 $\mathbb{R}_+^*$ 的严格单调递减的双射.

### §3.5 复指数函数

设 $I \subset \mathbb{R}$ ,  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ , 则 $e^{\varphi}$ 是定义在 $I$ 上取值于 $\mathbb{C}$ 的指数函数. 根据前面学习的复函数的可导性可得:

**命题 3.5.1** 设 $I \subset \mathbb{R}$ ,  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ . 若 $\varphi$ 在 $I$ 上可导, 则 $e^{\varphi}$ 在 $I$ 上可导, 且

$$(e^{\varphi})' = \varphi' e^{\varphi}.$$

#### 例子 3.5.1

1) 设 $\alpha \in \mathbb{C}$ , 定义 $\varphi_{\alpha} : t \mapsto e^{\alpha t}$ , 则 $\varphi_{\alpha}$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_{\alpha}'(t) = \alpha \varphi_{\alpha}(t).$$

2) 设 $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $I$ 上可导, 定义 $f : t \mapsto r(t)e^{i\theta(t)}$ , 则 $f$ 在 $I$ 上可导, 且

$$\forall t \in I, f'(t) = r'(t)e^{i\theta(t)} + ir(t)\theta'(t)e^{i\theta(t)}$$