

第四章 常微分方程

令 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} . 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个区间, $y: I \rightarrow \mathbb{K}$ 是一元未知函数, 其自变量可用任意符号, 方便起见, 此处我们用 t 表示.

定义 4.0.1 包含自变量 t , 未知函数 y 及其某阶或几阶导数的等式称为常微分方程.

例子 4.0.1

1 . $y + ty' = 0,$

2 . $y + ty' = e^t,$

3 . $ty + (1 - t)y' = \ln t,$

4 . $2y - yy' = t,$

5 . $y + 2y' - 3y'' = 0.$

6 . $y + 2y' - 3y'' = 3t^2.$

观察上面的例子:

- 1-4 中只含有未知函数 y 和一阶导数 y' ; 而5-6 中含有未知函数 y , 一阶导数 y' 和二阶导数 y'' .
- 1-3 中, 方程关于 y 和 y' 都是一次的, 且不含交叉项 yy' ; 5-6 中, 方程关于 y , y' 和 y'' 都是一次的, 且不含交叉项 yy' , yy'' , $y'y''$ 和 $yy'y''$. 相应地, 方程4 中含有交叉项 yy' .

定义 4.0.2 在常微分方程中,

- 未知函数的最高阶数称为方程的阶. 例1-4 称为一阶常微分方程, 例5-6 称为二阶常微方程.
- 关于未知函数及其包含的各阶导数整体而言是一次的, 称为线性常微分方程. 不是线性的, 都称为非线性常微分方程. 例1-3 是一阶线性常微分方程, 例5-6 是二阶线性常微分方程, 而例4 则是非线性的.

明确了概念之后, 接下来的首要任务就是方程的求解. 与以往学习的代数方程不同, 这里的未知量是函数, 所以我们求得的方程的解应该是函数.

定义 4.0.3 所有满足常微分方程的函数都称为该方程的解.

本章我们主要学习一阶线性常微分方程和二阶线性常微分方程及其解法.

§4.1 一阶线性常微分方程

§4.1.1 基本理论

设 $p: I \rightarrow \mathbb{K}$, $a: I \rightarrow \mathbb{K}$, $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ 为 I 上的三个函数, 则

定义 4.1.1 形如

$$p(t)y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \quad (4.1.1)$$

的方程称为一阶线性非齐次常微分方程. 若常数项为零, 即

$$p(t)y'(t) + a(t)y(t) = 0, \quad (4.1.2)$$

称为一阶线性齐次常微分方程, 或称为与(4.1.1) 对应的齐次方程.

定义 4.1.2 若函数 $y: I \rightarrow \mathbb{K}$ 连续可导且满足方程(4.1.1), 则称之为该方程的解.

下面讨论方程(4.1.1) 和(4.1.2) 的解法. 但在此之前, 需要首先解决这两类方程解的存在性问题, 这是微分方程的基本理论. 但鉴于本阶段的学习要求, 我们只需默认以下结论.

定理 4.1.1 设 p , a 和 f 是 I 上的连续函数, 则方程(4.1.1) 和(4.1.2) 的解存在.

也就是说, 只要方程中的系数函数都是连续函数, 那么方程的解就存在.

§4.1.2 y' 系数为1 的一阶线性齐次方程的解法

本小节主要学习方程(4.1.2) 的解法. 首先学习 y' 系数为1 的情况, 即

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0, \quad (4.1.3)$$

由于微分方程中含有未知函数的导数, 要将未知函数求出, 需要将导数去掉, 实际上就是一个积分的过程. 因此, 这里需要学生熟练运用前面学过的函数积分的知识.

因为函数 a 在 I 上连续,则在 I 上存在原函数,不妨设 $A: I \rightarrow \mathbb{K}$ 是它的一个原函数.在方程(4.1.3)两侧同乘 $\exp(A(t))$,则

$$\exp(A(t))y'(t) + \exp(A(t))a(t)y(t) = 0.$$

简单计算可知,函数 $t \rightarrow e^{A(t)}y(t)$ 恰好是上式等号左边函数的一个原函数,即

$$\frac{d}{dt}(\exp(A(t))y(t)) = 0.$$

故存在 $C \in \mathbb{K}$,使得

$$\exp(A(t))y(t) = C,$$

即

$$y(t) = C \exp(-A(t)).$$

命题 4.1.1 设 $a: I \rightarrow \mathbb{K}$ 连续, $A: I \rightarrow \mathbb{K}$ 是 a 在 I 上的一个原函数,则方程

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0,$$

的解为

$$y(t) = C \exp(-A(t)), \quad (4.1.4)$$

其中 C 为任意数.

注 4.1.1

- 1) 由上面的命题可知,常数 C 是任意的,故方程解随常数 C 的变化而变化.由此可见,一阶线性齐次方程(4.1.3)的解有无穷多个,不唯一.
- 2) (4.1.4)称为一阶齐次线性常微分方程(4.1.3)的通解,或者说一阶齐次线性常微分方程的解集为

$$S_0(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{array}{l} y: I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto C \exp(-A(t)) \end{array} \middle| C \in \mathbb{K} \right\} \quad (4.1.5)$$

若 C 是某一取定的值,则称为方程的特解.

§4.1.3 y' 系数为1 的一阶线性非齐次常微分方程的解法

继上一小节, 本小节我们讨论 y' 系数为1 的为非齐次方程

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \quad (4.1.6)$$

首先看一下它的解与齐次方程的解之间的关系.

设 $y \in S_0(\mathbb{K})$, 即

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0,$$

y_0 是非齐次方程的某个特解, 即

$$y_0'(t) + a(t)y_0(t) = f(t),$$

则

$$(y + y_0)'(t) + a(t)(y + y_0)(t) = f(t),$$

故 $y + y_0$ 也是非齐次方程的解. 由此给出如下结论:

命题 4.1.2 设 y_1 是一阶线性非齐次常微分方程(4.1.6) 的一个特解, 则它的解集为

$$S(\mathbb{K}) = \{y + y_1 | y \in S_0(\mathbb{K})\},$$

其中 $S_0(\mathbb{K})$ 是一阶线性齐次常微分方程(4.1.3) 的解集. 换言之, 一阶线性非齐次常微分方程的通解=它的一个特解+与它对应的齐次方程的通解.

那么如何去求非齐次方程的一个特解呢? 这里我们先介绍微分方程中一个最基本最经典的方法——常数变易法.

将(4.1.4) 中的常数 C 变为关于自变量 t 的函数 $t \mapsto C(t)$

$$y(t) = C(t) \exp(-A(t)),$$

然后将上式中定义的 y 代入方程(4.1.6), 得

$$C'(t) \exp(-A(t)) + C(t) \exp(-A(t))(-a(t)) + a(t)C(t) \exp(-A(t)) = b(t),$$

即

$$C'(t) \exp(-A(t)) = b(t),$$

从而

$$C'(t) = b(t) \exp(A(t)),$$

由此可见, 取函数 C 为 $t \mapsto b(t) \exp(A(t))$ 的一个原函数即可得到方程的一个特解. 下面通过实例来体会该方法.

例子 4.1.1 在 $]1, +\infty[$ 上求解 $y'(t) - \frac{1}{1-t}y(t) = e^t$.

在以上的求解过程中可以发现, 解中都含有一个任意常数. 当常数变化时, 解也随着变化, 因此解是不唯一的. 那么方程的解能否唯一确定下来呢? 或者说解中所包含的常数能否具体求出呢? 为解决这个问题, 简单介绍一下微分方程的初值问题.

§4.1.4 一阶线性常微分方程的初值问题

设 $t_0 \in I$ 和 $y_0 \in \mathbb{K}$ 给定.

定义 4.1.3 设 $p: I \rightarrow \mathbb{K}$, $a: I \rightarrow \mathbb{K}$, $f: I \rightarrow \mathbb{K}$,

$$\begin{cases} p(t)y'(t) + a(t)y(t) = f(t), & t > t_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (4.1.7)$$

称为一阶线性常微分方程的初值问题, 其中 $y(t_0) = y_0$ 称为初值条件.

定理 4.1.2 设 p , a 和 f 是 I 上的连续函数, 则初值问题(4.1.7) 的解存在且唯一.

下面我们通过例子来具体体会这个初值条件是如何来确定通解中的常数 C 的.

例子 4.1.2 在 $] -1, +\infty[$ 上求解 $\begin{cases} (x+1)y'(x) - xy(x) + 1 = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$

注 4.1.2 在以上的学习中, 我们是在给定的区间 I 上研究一阶齐次线性常微分方程的. 那么在具体的问题中, 区间 I 如何确定呢? 事实上, 方程中 y 是未知函数, 对确定 I 没有帮助, 那么剩下的就只有 y 的系数项 a 和非齐次项 f 了. 因此, 首先分析函数 a 和 f 的定义域, 并且由上面的分析可知, 我们要求 a 和 f 连续, 因此, 在函数 a 和 f 的定义域内寻找使得它们都连续区间便可确定区间 I . 当然, 这样的区间不一定只有一个, 为求解完整, 需要对每个区间都进行求解.

例子 4.1.3 求解 $y'(t) - \frac{1}{1-t}y(t) = e^t$.

与上面例子不同, 该例没有指明区间, 则需对所有满足条件的区间一一求解.

§4.1.5 y' 项的系数不为1 的情况

以上只处理了 y' 项的系数是1 的情况, 那么对于一般的情况如何处理呢? 例如

$$2y' - t^2y = \ln t,$$

我们可以将该方程的所有项都除以2, 即

$$y' - \frac{t^2}{2}y = \frac{\ln t}{2},$$

这样就归结为上面所学的, 并且此时的区间 I 就是 \mathbb{R} . 但若 y' 项的系数不是常数是函数, 那么为了将该系数化为1, 则必须注意函数的零点.

例子 4.1.4 求解 $ty' - 2y = t^3$.

证明 首先, 函数 $t \mapsto t$, $t \mapsto -2$ 和 $t \mapsto t^3$ 在 \mathbb{R} 上有定义且连续. 除 $t = 0$ 外, 函数 $t \mapsto t$ 都不为零, 因此, 需在区间 $]0, +\infty[$ 和 $]-\infty, 0[$ 上分别求解. 令 $I_1 =]0, +\infty[$, $I_2 =]-\infty, 0[$.

• 设 $t \in I_1$, 则原方程变为

$$y' - \frac{2}{t}y = t^2.$$

由前面的学习, 函数 $t \mapsto -\frac{1}{t}$ 在 I_1 上的一个原函数为 $t \mapsto -2 \ln t$, 故该方程对应齐次方程在 I_1 上的解集为

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto C_1 t^2 \end{array} \middle| C_1 \in \mathbb{K} \right\}.$$

利用常数变易法, 将 $y_1(t) = C_1(t)t^2$ 代入原方程, 得

$$C_1'(t) = 1,$$

故取 $C_1(t) = t$, $t \in I_1$, 则该方程在 I_1 上的解集为

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto C_1 t^2 + t^3 \end{array} \middle| C_1 \in \mathbb{K} \right\}.$$

• 设 $t \in I_2$, 函数 $t \mapsto -\frac{2}{t}$ 在 I_2 上的一个原函数为 $t \mapsto -2 \ln(-t)$, 故该方程对应的齐次方程在 I_2 上的解集为

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto C_2 t^2 \end{array} \middle| C_2 \in \mathbb{K} \right\}.$$

与上类似, 该方程在 I_2 上的解集为

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto C_2 t^2 + t^3 \end{array} \middle| C_2 \in \mathbb{K} \right\}.$$

□

分析上例的求解过程, 该方程中的系数函数在整个 \mathbb{R} 上有定义, 因此我们希望能得到该方程在整个 \mathbb{R} 上解的情况, 但我们只是分别求得了 I_1 和 I_2 上的解, 对于 0 点没有分析. 同学们可以形象的去思考, 上面得到的这两个解在 0 点是是否有关系? 有何关系? 这就是接下来要讲的解的连接.

§4.1.6 解的连接

继续上例的求解:

假设该方程在整个 \mathbb{R} 上有解 y , 则 y 在 \mathbb{R} 上连续可导, 并且一定存在 C_1 和 C_2 使得

$$y(t) = C_1 t^2 + t^3, t > 0,$$

$$y(t) = C_2 t^2 + t^3, t < 0.$$

根据 y 的连续性和可导性得:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = y(0),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{y(t) - y(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t) - y(0)}{t}.$$

计算可知, 以上两等式对任意 $C_1, C_2 \in \mathbb{K}$ 都成立, 因此, 该方程在整个 \mathbb{R} 上的解集为

$$\left\{ \begin{array}{l} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto \begin{cases} C_1 t^2 + t^3, & t > 0 \\ C_2 t^2 + t^3, & t \leq 0, \end{cases} \end{array} \middle| C_1, C_2 \in \mathbb{K} \right\}.$$

例子 4.1.5 求解 $(1-t)y'(t) - y(t) = t$.

到此我们总结一下求解一阶线性常微分方程的步骤:

1. 首先写出 y 和 y' 的系数函数及常数项的定义域.
2. 其次在定于域内找出 y 和 y' 的系数函数及常数项都连续的所有区间.
3. 然后在这些连续区间内找出使 y' 的系数函数无零点的所有区间.
4. 再在这些使 y' 的系数函数无零点的区间上, 将方程转化为 y' 系数为 1 的方程.
5. 然后在每个这样的区间上求解.
6. 最后将相邻区间上的解进行连接分析(并非所有的解都可以连接).

§4.2 二阶常系数线性常微分方程

§4.2.1 基本理论

定义 4.2.1 设 $a, b, c \in \mathbb{K}$, 其中 $a \neq 0$. f 是具有某种形式的函数. 形如

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \quad (4.2.8)$$

的方程称为二阶常系数线性常微分方程. 若 $f = 0$, 即

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad (4.2.9)$$

则称为与方程(4.2.8) 对应的齐次方程.

定义 4.2.2 设 $y: I \rightarrow \mathbb{K}$ 连续, 二阶可导, 且满足方程(4.2.8), 则称之为该方程的解.

对于解的存在性, 因为 a, b, c 都是常数, 故只需考虑函数 f 的连续性即可. 因此, 二阶常系数齐次线性常微分方程的解在整个 \mathbb{R} 上存在, 而非齐次的, 则在函数 f 的连续区间上存在.

§4.2.2 二阶常系数齐次线性常微分方程的解法

先从齐次方程入手.

定义 4.2.3 将关于 λ 的二次方程

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (4.2.10)$$

称为二阶齐次线性常微分方程的特征方程, 它的根称为这个微分方程的特征根.

注 4.2.1

- 1) 只针对常系数线性微分方程, 变系数的不适用, 例如

$$(x^2 - 1)y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 0,$$

不存在特征方程的概念.

- 2) 对某些变系数的二阶线性常微分方程, 可通过某些变量代换将其转化为常系数的情形, 我们将在习题中熟悉一下这类问题.

例子 4.2.1

1 . $y''(t) + 4y'(t) - 5y(t) = 0.$

2 . $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0.$

3 . $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0.$

记 $\Delta = b^2 - 4ac$ 为方程(4.2.10) 的判别式, 则

命题 4.2.1 (实值解)

- 1) 若 $\Delta > 0$, 则特征方程有两个不同的实根, 记为 λ_1, λ_2 , 且方程(4.2.10) 的实值解集为

$$S_0(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \end{array} \middle| C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 2) 若 $\Delta = 0$, 则特征方程有一个二重根, 记为 λ_0 , 且方程(4.2.10) 的实值解集为

$$S_0(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} \end{array} \middle| C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 3) 若 $\Delta < 0$, 则特征方程有一对共轭复根, 记为 $\alpha \pm i\beta$, 且方程(4.2.10) 的实值解集为

$$S_0(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) \end{array} \middle| C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

命题 4.2.2 (复值解)

- 1) 若 $\Delta \neq 0$, 则特征方程有两个不同的复根, 记为 λ_1, λ_2 , 且方程(4.2.10) 的复值解集为

$$S_0(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{l} y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \end{array} \middle| C_1, C_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

- 2) 若 $\Delta = 0$, 则特征方程有一个二重根, 记为 λ_0 , 且方程(4.2.10) 的复值解集为

$$S_0(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{l} y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} \end{array} \middle| C_1, C_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

注 4.2.2 设 $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = u + iv$ 是方程

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

的解, 则代入后将实虚部分离后可得:

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0,$$

$$av''(t) + bv'(t) + cv(t) = 0,$$

即 u 和 v 是原方程的实值解. 故复值解的实虚部都是实值解.

§4.2.3 二阶常系数线性常微分方程的解法

与一阶类似, 非齐次方程都具有性质: 通解=特解+相应齐次方程的通解.

命题 4.2.3 设 y_1 是方程(4.2.8) 的特解, 则

$$S(\mathbb{K}) = \{y_1 + y | y \in S_0(\mathbb{K})\}.$$

因此只需求非齐次方程的特解.

§4.2.3.1 非齐次项为 $e^{\alpha t} P_n(t)$ 的情形

命题 4.2.4 设 $a, b, c \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, P_n 为关于 t 的 n 次多项式函数, 则

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e^{\alpha t} P_n(t)$$

的特解有如下几种情况

1) 若 α 不是特征根, 则具有

$$y : t \mapsto e^{\alpha t} Q_n(t)$$

的形式.

2) 若 α 是单根, 则具有

$$y : t \mapsto te^{\alpha t} Q_n(t)$$

的形式.

3) 若 α 是重根, 则具有

$$y : t \mapsto t^2 e^{\alpha t} Q_n(t)$$

的形式.

其中 Q_n 是关于 t 的 n 次多项式函数, 通过将该形式的解代入原方程得到.

例子 4.2.2

1) $y''(t) - 3y' = e^{5x}$.

2) $y''(t) + 3y' + 2y = e^{-x}$.

3) $y''(t) - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$.

4) $y''(t) + 4y' + 4y = (16x^2 + 16x - 14)e^{2x}$.

§4.2.3.2 非齐次项为 $e^{\alpha_1 t} P_n(t) + e^{\alpha_2 t} Q_n(t)$ 的情形

为求解此类问题, 我们首先介绍非齐次方程的一个性质: 叠加原理.

命题 4.2.5 设 y_1 和 y_2 分别是非齐次方程

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f_1(t)$$

和

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f_2(t)$$

的解, 则 $y_1 + y_2$ 是

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

的解.

根据这个结论, 我们只需利用上一节的方法将非齐次项为 $e^{\alpha_1 t} P_n(t)$ 和 $e^{\alpha_2 t} Q_n(t)$ 的方程分别求特解, 然后两解相加便可得到原方程的特解.

推论 4.2.1 设 $k \in [1, n]$, y_k 是非齐次方程

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e^{\alpha_k t} P_{m_k}^k(t)$$

的特解, 则 $\sum_{k=1}^n y_k$ 是非齐次方程

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k t} P_{m_k}^k(t)$$

的特解.

§4.2.3.3 非齐次项中含有三角函数

设 $\beta \in \mathbb{R}$, 根据欧拉公式, 得

$$\cos \beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2}, \sin \beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}.$$

故当非齐次项形如 $e^{\alpha t} P_n(t) \cos \beta t$ 时, 则可转化为

$$\frac{1}{2} \left(e^{(\alpha+i\beta)t} P_n(t) + e^{(\alpha-i\beta)t} P_n(t) \right),$$

这便归结为上节的情形. 另外, 对此类非齐次项, 有比较简单的方法来求特解.

命题 4.2.6 设 $a, b, c, \alpha \in \mathbb{K}$, $\beta \in \mathbb{R}$, P_m^1, P_n^2 分别为关于 t 的 m 和 n 次多项式函数, $m \leq n$, 则

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e^{\alpha t} (P_m^1(t) \cos \beta t + P_n^2(t) \sin \beta t)$$

的特解有如下几种情况

1) 若 $\alpha \pm i\beta$ 不是特征根, 则具有

$$y : t \mapsto e^{\alpha t} \left(Q_n(t) \cos \beta t + R_n(t) \sin \beta t \right)$$

的形式.

2) 若 $\alpha \pm i\beta$ 是特征根, 则具有

$$y : t \mapsto t e^{\alpha t} \left(Q_n(t) \cos \beta t + R_n(t) \sin \beta t \right)$$

的形式.

其中 Q_n, R_n 是关于 t 的 n 次多项式函数, 通过将该形式的解代入原方程得到.

例子 4.2.3

- 1) $y''(t) + y' = 2 \sin x$.
- 2) $y''(t) + 9y = 18 \cos x - 30 \sin x$.
- 3) $y''(t) + y' - 2y = e^x(\cos x - 7 \sin x)$.

§4.2.4 二阶常系数线性常微分方程的初值问题

与一阶相比, 通解中含有两个任意常数, 因此, 这里的初值条件需要两个. 设 $t_0 \in \mathbb{R}$ 和 $y_0 \in \mathbb{K}$ 给定.

定义 4.2.4 设 $a, b, c \in \mathbb{K}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$,

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), & t > t_0, \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \quad (4.2.11)$$

称为二阶常系数线性常微分方程的初值问题, 其中 $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$ 称为初值条件.

命题 4.2.7 设 $a, b, c \in \mathbb{K}$, $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ 连续, 则初值问题(4.2.11) 在 I 上的解存在唯一.

例子 4.2.4 求初值问题

$$\begin{cases} y'' + y' + \frac{1}{2}y = \sin x, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

的实值解.