§2.3 导数

本节仍以函数极限为基础来学习函数的另一个重要性质: 可导性. 与上一节相同, I 表示$\mathbb{R}$ 上的至少包含两个点的区间, f 在I 上有定义, $a \in I$.

§2.3.1 在一点可导

事实上, 学生在高中学习过导数, 当时由切线斜率和瞬时速率这些简单直观的内容引入, 这里留出时间让学生回顾.

§2.3.1.1 导数定义

设f 是定义在I 上的函数, $a \in I$. 定义

$$\begin{array}{rccl} \tau_a: & I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array},$$

下面利用τ_a 在a 处的极限给出导数的定义.

定义 2.3.1 (导数) 若函数$\tau_a : x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 在a 处有有限极限, 则称函数f 在a 点可导. 该有限极限称为f 在a 点的导数, 记为$f'(a)$ 或$\dfrac{df}{dx}(a)$, 即

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ 或 } \frac{df}{dx}(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

若极限不存在, 或者存在无穷极限, 则f 在a 点不可导.
求函数f 在a 点导数的步骤: 先求改变量$f(x)-f(a)$, 再求平均变化率$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, 最后求当$x \to a$ 时平均变化率的极限; 或者用$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, 求当$h \to 0$ 的极限.

例子 2.3.1

1) 设$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 研究$f : x \longmapsto \alpha x + \beta$ 在任意$a \in \mathbb{R}$ 处的可导性;

2) 三角函数, 对数函数, 指数函数在其定义域上的每一点都是可导的;

3) 研究$f : x \longmapsto \sqrt{x}$ 在$[0, +\infty[$ 上每一点的可导性; 函数$x \longmapsto |x|$ 在0 点的可导性;

4) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在0 处的可导性;

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在± 1 处的可导性.

几何解释: 曲线在一点的切线.

§2.3.1.2 基本性质

从导数定义和极限的运算法则可以得到函数在某点可导与连续的关系.

定理 2.3.1 若f 在a 点可导, 则f 在a 点连续. 反之不一定成立.

注 2.3.1 此处需要多举例子来说明, 尽管从定义来看很显然, 但鉴于学生刚开始学习连续性和可导性, 一切都比较抽象, 所以一定要花时间让学生很直观的去理解“可导一定连续, 但连续不一定可导”.

例子 2.3.2 $f: x \longmapsto |x|$, 在0 点连续, 但不可导.
由此可以简单的理解: 可导函数的函数图象比较平缓, 没有“尖点”; 而连续函数的图象可以有“尖点”, 只要没有间断即可.

命题 2.3.1 设$f, g: I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. 若f, g 在a 点可导, 则

1) $f+g$ 在a 点可导, 且$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$;

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf 在a 点可导, 且$(\lambda f)'(a)=\lambda f'(a)$;

3) fg 在a 点可导, 且$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$;

4) 若g 在I 上无零点, $\dfrac{1}{g}$ 在a 点可导且

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

进一步, $\dfrac{f}{g}$ 在a 点可导且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

5) 若$f(I) \subset J$, $h: J \to \mathbb{R}$ 在$f(a)$ 点可导, 则$h \circ f$ 在a 点可导且

$$(h \circ f)'(a)=h'(f(a))f'(a);$$

6) 若f 在区间I 上连续且严格单调, $a \in I$, f 在a 点可导. 则f^{-1} 在$b = f(a)$ 点可导当且仅当$f'(a) \neq 0$. 此时,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

例子 2.3.3

1) 设$f : x \longmapsto x^2 + 1$, $g : x \longmapsto \sqrt{x}$, 则$\forall x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)'(x) =?$;

2) 设$\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$, 则$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$;

2) 设$a > 0$, 求函数$f : x \longmapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ 在a 点的导数;

3) 设$n \geq 1$, $x > 0$. 证明: $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$;

4) 已知$\sin :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to] - 1, 1[$ 是双射, 则它的反函数arcsin 的导数为

$$\forall x \in] - 1, 1[, \ \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

§2.3.1.3 可导性判定

定义 2.3.2 (单侧导数) 若函数$\tau_a : x \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 在a 处有有限右(左) 极限, 则称函数f 在a 点右(左) 可导. 该有限极限称为f 在a 点的右(左) 导数, 记为$f'_d(a)$ ($f'_g(a)$), 即

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ (f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}).$$

推论 2.3.1 若f 在a 点右(左) 可导, 则f 在a 点右(左) 连续. 反之不一定成立.

由定理**??** 可得下面结论.

定理 2.3.2 (左右可导定理) 设a 不是区间I 的端点, 则f 在a 点可导当且仅当f 在a 点既左可导又右可导, 且$f'_d(a) = f'_g(a)$.

例子 2.3.4

1) $f : x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 在0 处的可导性;

2) $f : x \longmapsto [x]$ 在整数点处的可导性;

3) $f : x \longmapsto |x^2 - 1|$ 在± 1 处的可导性.

§2.3.2 区间上可导

定义 2.3.3 若f 在I 上的每一点都可导, 则称f 在I 上可导. 函数$x \longmapsto f'(x)$ 称为f 的导函数, 记为f' 或$\dfrac{df}{dx}$. I 上的所有可导函数组成的集合记为$D(I)$.

以下结论便可由单点处可导的相关性质直接推得.

推论 2.3.2 设$f, g : I \to \mathbb{R}$ 在I 上可导. 则

1) f, g 在I 上连续.

2) $f+g$ 和$f \times g$ 在I 上可导, 且

$$(f+g)' = f' + g',\ (fg)' = f'g + fg'.$$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf 在I 上可导, 且$(\lambda f)' = \lambda f'$.

4) 若g 在I 上可导且无零点, 则$\dfrac{1}{g}$ 在I 上可导, 且

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

进而, $\dfrac{f}{g}$ 在I 上可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

5) 设$h : J \to \mathbb{R}$ 在J 上可导, 且$f(I) \subset J$, 则$h \circ f$ 在I 上可导, 且

$$(h \circ f)' = (h' \circ f)f'.$$

6) 若f 在区间I 上严格单调且f' 在I 上无零点, 则f^{-1} 在区间$J = f(I)$ 上可导, 且

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

例子 2.3.5

1) 利用数学归纳法证明: $\forall n \geq 1$, 函数$f_n : x \mapsto x^n$ 在$\mathbb{R}$ 上可导, 且

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = nx^{n-1};$$

并由此推断所有多项式函数$f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ 在$\mathbb{R}$ 上可导且导函数为

$$f' : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1};$$

2) 证明: $\forall n \in Z_-$, 函数$f_n : x \mapsto x^n$ 在$\mathbb{R}^*$ 上可导, 且

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_n'(x) = n x^{n-1};$$

3) 研究在$\mathbb{R}$ 上如下定义的函数$f(x) = \begin{cases} x^2(x-1)^2, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[\end{cases}$ 的可导性.

4) 求函数$f : x \longmapsto x \tan x^2$ 可导点的集合, 并求导数.

5) 求函数$f : x \longmapsto 1 - \cos\sqrt{x}$ 可导点的集合, 并求导数.

基本初等函数的导函数:

1) $c' = 0$, c 为常数(常函数的导数总为零);

2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

3) $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $(e^x)' = e^x$;

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

5) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \sec^2 x$, $(\cot x)' = -csc^2 x$.

注 2.3.2 对于复合函数, 不能直接对函数表示式求导, 例如$(x^2(x-1)^2)'$, $(\frac{1}{x})'$ 是错误的写法. 应该写为: 令$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, 然后用$f'(x)$ 表示该函数在x 点的导数.

§2.3.3 $*$ 可导函数的基本定理

下面看一下关于可导函数的几个基本定理. 首先看一下函数在某些特殊点处的性质.

定义 2.3.4 设$f: I \to \mathbb{R}$, $a \in \dot{I}$. 若f 在a 的某个邻域$U(a)$ 上满足

$$\forall x \in U(a),\ f(x) \leq f(a) \text{ 或 } f(x) \geq f(a),$$

则称a 为f 的极大值点或极小值点, $f(a)$ 称为极大值或极小值. 极大值点和极小值点统称为极值点, 极大值和极小值统称为极值.

命题 2.3.2 设$f: I \to \mathbb{R}$ 可导, $a \in \dot{I}$. 若f 在a 处取得极值, 则$f'(a) = 0$.

注 2.3.3 该命题说明可导函数在极值点处导数为零, 但反之不一定成立, 例如: $f: x \longmapsto x^3$, $f'(0) = 0$, 但0 不是f 的极值点.

根据导数与极值的关系, 我们来证明以下重要定理.

定理 2.3.3 (Rolle 定理) 设$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 满足以下条件:

1) 在$[a, b]$ 上连续;

2) 在$]a, b[$ 上可导;

3) $f(a) = f(b)$,

则存在$c \in]a, b[$ 使得$f'(c) = 0$.

几何解释: 两端在同一高度的一条平滑曲线上一定有一条水平切线.

注 2.3.4

1. 该定理中三个条件缺一不可, 举反例:

2. c 存在, 但没说是否唯一. c 称为中值.

例子 2.3.6 设$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可导, 有n 个不同的零点, 则f' 至少有$n-1$ 个不同的零点.

当然, 定理2.3.3 中的条件可以减弱, 此时得到的结论也相应减弱, 这就是另一个重要的定理—拉格朗日中值定理.

定理 2.3.4 (Larange 定理) 设$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 满足以下条件:

1) 在$[a, b]$ 上连续;

2) 在$]a,b[$ 上可导,

则存在$c\in]a,b[$ 使得$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

几何解释: 一条平滑曲线上, 一定有一点处的切线与曲线两端点连线平行.

推论 2.3.3 设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在$[a,b]$ 上连续, 在$]a,b[$ 上可导,

1) 若$\exists m,M\in\mathbb{R}$ 使得$\forall x\in]a,b[$, $m\le f'(x)\le M$, 则

$$m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a).$$

2) 若$\exists M>0$ 使得$\forall x\in]a,b[$, $|f'(x)|\le M$, 则

$$|f(b)-f(a)|\le M(b-a).$$

例子 2.3.7

1) 证明: $\forall x>0$, $\dfrac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln(x)<\dfrac{1}{x}$;

2) 证明: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}=1$;

3) 证明: $\forall x,y\ge 1$, $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le\dfrac{1}{2}|x-y|$.

推论 2.3.4 设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在$[a,b]$ 上连续, 在$[a,b[$ 上可导, 且$\displaystyle\lim_{x\to b^-}f'(x)=l$. 则

1) 若$l\in\mathbb{R}$, 则f 在b 点可导, 且$f'(b)=l$;

2) 若$l=\pm\infty$, 则f 在b 点不可导. 此时, 曲线$y=f(x)$ 在b 点有一个垂直于x 轴的切线.

例子 2.3.8 $\arcsin' x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

§2.3.4 导数的应用

命题 2.3.3 (函数单调的充要条件) 设函数f 在I 上可导, 则

1) f 在I 上单调递增当且仅当$\forall x \in \dot{I},\ f'(x) \geq 0$;

2) f 在I 上单调递减当且仅当$\forall x \in \dot{I},\ f'(x) \leq 0$.

例子 2.3.9

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ 的单调性;

2) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ g(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3}$ 的单调性;

3) $\forall x \geq 1,\ f(x) = (x-2)\sqrt{x-1}$ 的单调性;

4) $\forall x \in [0, \pi],\ \sin^2 x \leq \dfrac{4}{\pi^2} x(\pi - x)$;

6) $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \dfrac{x}{1+x} \leq \ln(x+1) \leq x$.

推论 2.3.5

1) 设$f : I \to \mathbb{R}$ 可导, 则f 是I 上的常函数当且仅当$\forall x \in \dot{I},\ f'(x) = 0$;

2) 设$f, g : I \to \mathbb{R}$ 可导, 则$f = g + C$ 当且仅当$\forall x \in \dot{I},\ f'(x) = g'(x)$, 其中$C \in \mathbb{R}$ 为任意常数.

命题 2.3.4 (函数严格单调的充分条件) 设函数f 在I 上可导, 则

1) 若$\forall x \in \dot{I},\ f'(x) > 0$, 则$f$ 严格单调递增;

2) 若$\forall x \in \dot{I},\ f'(x) < 0$, 则$f$ 严格单调递减.

例子 2.3.10 $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ 3x < 2\sin x + \tan x$;

注 2.3.5 注意命题2.3.3 和2.3.4 的区别, 前者是充要条件, 后者只是充分条件. 例如: $f : x \mapsto x^3$ 严格单调递增, 但$f'(0) = 0$. 为此, 给出以下判断函数严格单调性的充要条件.

命题 2.3.5 (函数严格单调的充要条件) 设函数f 在I 上可导, 则f 在I 上严格单调当且仅当下面两个条件同时成立:

1) $\forall x \in \dot{I}$, $f'(x)$ 不变号;

2) 不存在包含于I 且至少包含两个点的区间, 使得f' 在其上恒为零.

§2.3.5 高阶导数

定义 2.3.5 若f 的导函数f' 在a 处可导, 则将f' 在a 处的导数称为f 在a 处的二阶导数, 记为$f''(a)$, 即

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a},$$

此时称f 在a 处二阶可导.

定义 2.3.6 若f 在I 上的每一点都二阶可导, 则称f 在I 上二阶可导, 且称f'' 为f 在I 上的二阶导函数. I 上所有二阶可导函数组成的集合记为$D^2(I)$.

例子 2.3.11 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2(x-1)^2, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\end{cases}$ 在0 和1 的二阶导数.

定义 2.3.7 若f 在I 上可导且f' 在I 上连续, 则称f 是C^1 的, 且记

$$C^1(I) = \{f : I \to \mathbb{R} | f \text{ 可导且 } f' \text{ 连续}\}.$$

故

$$D^2(I) \subset C^1(I) \subset D(I) \subset C(I).$$

例子 2.3.12 函数$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 属于$C^1(\mathbb{R})$ 吗?

规定$f^{(0)} = f$.

定义 2.3.8 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f 的n 阶导函数记为$f^{(n)}$, 且$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

例子 2.3.13 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$.

前面有关一阶导函数的相关性质都可以推导到n 阶导函数上来, 这里, 我们只记以下公式.

命题 2.3.6 设f 和g 在I 上n 次可导, 则

1) $f \pm g$ 在I 上n 次可导, 且$(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$;

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f)' = \lambda f'$;

3) fg 在I 上n 次可导, 且$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$. (莱布尼兹公式)

§2.3.6 可导函数的低阶近似

定义 2.3.9 设$f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ 或为I 端点. 称f 在a 的邻域内相对于g 可以忽略不计, 如果存在a 的邻域$U(a)$ 和函数$\epsilon : U(a) \to \mathbb{R}$ 满足

$$\forall x \in U(a) \cap I,\ f(x) = g(x)\epsilon(x) \text{ 且 } \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0,$$

记作$f(x) = o(g(x))$ 或$f = o(g)$, 读作f 是当$x \to a$ 时g 的高阶无穷小.

命题 2.3.7 设$f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ 或为I 端点. 若$\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 0$, 则$f = o(g)$.

例子 2.3.14 $x^\alpha =_{+\infty} o(e^{\beta x})$, $\alpha, \beta > 0$.

命题 2.3.8 设f 在a 点可导, 则

$$f(x) =_{x \to a} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a),$$

称为f 在a 点的一阶极限展开.

例子 2.3.15 力场中质点的平衡问题.

注 2.3.6 一阶多项式函数$x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ 是f 在a 点的一次近似, 误差为$(x-a)$ 的高阶无穷小. 当然, 多项式函数阶数越高近似程度越好, 误差越小.

命题 2.3.9 设f 在a 点二阶可导, 则

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2),$$

称为f 在a 点的二阶极限展开.

注 2.3.7 二阶多项式函数$x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ 是f 在a 点的二次近似, 误差为$(x-a)^2$ 的高阶无穷小.

§2.3.7 复函数的导数

定理 2.3.5 (复函数一点处可导定理) 设$f : I \to \mathbb{C}$, $a \in I$, 则下面结论等价

1) f 在a 点可导;

2) $\mathrm{Re}f$ 和$\mathrm{Im}f$ 在a 点可导.

并且

$$(\mathrm{Re}f)'(a) = \mathrm{Re}(f'(a)), \quad (\mathrm{Im}f)'(a) = \mathrm{Im}(f'(a))$$

定理 2.3.6 (复函数区间上可导定理) 设$f : I \to \mathbb{C}$, 则下面结论等价

1) f 在I 上可导;

2) $\mathrm{Re}f$ 和$\mathrm{Im}f$ 在I 上可导.

并且

$$(\mathrm{Re}f)' = \mathrm{Re}f', \quad (\mathrm{Im}f)' = \mathrm{Im}f'$$