§2.2 连续

本节以上一节的函数极限为基础, 不同之处在于, 本节研究的函数在实数a 的邻域内有定义, 即$a \in D(f)$. 主要考虑函数f 在a 处的极限与该点函数值$f(a)$ 的关系.

§2.2.1 一点处连续

§2.2.1.1 基本定义

定义 2.2.1 (连续) 设$a \in \mathbb{R}$, 函数f 在a 的某个邻域内有定义, 若f 在a 点的极限存在且等于$f(a)$, 则称f 在a 点连续(continue). 也就是说, f 在a 点连续当且仅当

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in D(f), |x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon.$$

例子 2.2.1 利用定义证明: $f : x \longmapsto |x|$ 在其定义域内每一点都连续.

注 2.2.1 有上述定义可知, 函数f 在a 点连续必须具备两个条件;

1) $a \in D_f$;

2) f 在a 点的极限存在且等于$f(a)$.

因此, 若$a \notin D(f)$, 则f 不连续. 对于这种情况, 若$\lim\limits_{a} f$ 存在且有限, 此时可以定义新的函数, 将a 包括在这个新函数的定义域内.

定义 2.2.2 (连续延拓) 设$\lim\limits_{a} f = l \in \mathbb{R}$ 但$a \notin D(f)$, 定义$\tilde{f} : D(f) \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ 为

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} l, & x = a, \\ f(x), & \text{其他点.} \end{cases}$$

显然, 函数$\tilde{f}$ 在a 点连续. 称函数$\bar{f}$ 为f 在a 点的连续延拓(prolongment par continuité), 或者说函数f 可连续延拓到a 点.

注 2.2.2 除了$\lim\limits_{a} f$ 之外, 对于$\lim\limits_{a^+} f$ 和$\lim\limits_{a^-} f$ 类型的极限也可连续延拓.

例子 2.2.2

1) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. 由于$\lim\limits_{x \to 0} = 1$, 故$f$ 可连续延拓到0 点. 设$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ f(x), & x \neq 0 \end{cases}$, 则$\tilde{f}$ 是f 在0 点的连续延拓.

2) $\forall x > 0,\ f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} = 0$, 故$f$ 可连续延拓到0 点. 设$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ f(x), & x>0. \end{cases}$ 则$\tilde{f}$ 是f 在0 点的连续延拓.

§2.2.1.2 局部性质

由定义?? 便可根据上一节有关函数极限的结论做出相应推广.

定理 2.2.1

1) 局部有界性: 若f 在a 点连续, 则f 在a 的某个邻域内有界;

2) 局部保号性: 若f 在a 点连续且$f(a) > 0\ (< 0)$, 则存在a 的某个邻域$U(a)$, 使得在$U(a)$ 内$f > 0\ (< 0)$;

3) 局部保序性: 若f, g 在a 点连续且$f(a) > (<) g(a)$, 则存在a 的某个邻域$U(a)$, 使得在$U(a)$ 内$f > (<) g$.

命题 2.2.1 设函数f 和g 在a 点连续,则

1) $|f|$ 在a 也连续;

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf 在a 点连续;

3) $f + g$ 在a 点连续;

4) $f \times g$ 在a 点连续;

5) 若$g(a) \neq 0$, 则g 在a 的某个邻域内无零点, 并且$\dfrac{1}{g}$ 在a 点连续. 从而$\dfrac{f}{g}$ 在a 点连续;

6) 若函数h 在b 点连续, 且$f(a) = b$, 则$h \circ f$ 在a 点连续, 即

$$\lim_{x\to a}(h\circ f)(x) = (h\circ f)(a).$$

注 2.2.3 该命题的6) 说明: 连续函数与极限运算可以交换, 即

$$\lim_{x\to a} h(f(x)) = h(\lim_{x\to a} f(x)).$$

例如: $\lim\limits_{x\to 1}\sin(1-x^2)=\sin(\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2))=\sin 0=0$.
除了极限之外, 对于单侧极限也成立, 即连续函数与单侧极限也可交换.
例如: $\lim\limits_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x}}=0$.

§2.2.1.3 判定方法

定义 2.2.3 (单侧连续) 设$a\in\mathbb{R}$, f 在a 的某个左(右) 邻域有定义. 若f 在a 点的左极限存在且等于$f(a)$, 则称f 在a 点左(右) 连续(continue à gauche (droite)).

定理 2.2.2 (左右连续定理) 设$a\in\mathbb{R}$, 则f 在a 点连续当且仅当f 在a 点既左连续又右连续.

证明 ($\Longrightarrow$) 由于f 在a 处连续, 故$\lim\limits_{a} f=f(a)$. 由左右极限定理可知, $\lim\limits_{a-} f=\lim\limits_{a_+} f=f(a)$, 故$f$ 在a 处既左连续又右连续.
($\Longrightarrow$) 设f 在a 处既左连续又右连续, 则$\lim\limits_{a-} f=f(a)=\lim\limits_{a_+} f$. 再有左右极限定理得: $\lim\limits_{a} f=f(a)$, 故f 在a 处连续. □

例子 2.2.3

1) 研究$f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0\\ x-2, & x<0\end{cases}$ 在$x=0$ 处的连续性.

2) 研究$f(x)=[x]$ 在整数点的连续性.

§2.2.2 区间上连续

在本小节, I 表示$\mathbb{R}$ 上至少包含两个点的区间, 且f 在I 上有定义.

定义 2.2.4 若f 在I 上的每一点都连续, 则称f 在I 上连续, 或称f 是I 上的连续函数. I 上所有连续实函数的集合记为$C(I,\mathbb{R})$, 简记为$C(I)$ 或$C^0(I)$.

注 2.2.4 若I 是闭区间, 则区间端点的连续性是指单侧连续, 即左端点右连续, 右端点左连续.

命题 2.2.2 设函数$f,g:I\to\mathbb{R}$ 在I 上连续, 则

1) $|f|$ 在I 上也连续;

2) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, λf 在I 上连续;

3) $f+g$ 在I 上连续;

4) $f\times g$ 在I 上连续;

5) 若g 在I 上无零点, 则$\dfrac{1}{g}$ 在I 上连续. 从而$\dfrac{f}{g}$ 在I 上连续;

6) 若$h:J\to\mathbb{R}$ 在J 上连续, 且$f(I)\subset J$, 则$h\circ f$ 在I 上连续.

例子 2.2.4

1) 设f,g 在I 上连续, 则$\sup(f,g)$ 和$\inf(f,g)$ 在I 上连续;

2) 设$f:x\longmapsto\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 利用连续函数的四则运算以及复合函数的连续性得: f 在$\mathbb{R}^*$ 上连续. 对于$x=0$ 点, 由于

$$\forall x\in\mathbb{R}, |f(x)|\leq x^2,$$

故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, 所以$f$ 在$x=0$ 点连续. 综上, $f\in C(\mathbb{R})$.

设$J\subset I$, 定义

$$\begin{array}{rccc} f_{|J}: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array},$$

称为f 在J 上的限制.

命题 2.2.3 设$I\subset\mathbb{R}$, $a\in\dot{I}$.

1) 若f 在I 上连续, 则$\forall J\subset I$, $f_{|J}$ 在J 上连续;

2) 若$f_{|I\cap[a,+\infty[}$ 和$f_{|I\cap]-\infty,a]}$ 连续, 则f 在I 上连续.

例子 2.2.5

1) 设$f:x\longmapsto\begin{cases}x, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$, 则$f$ 在$]-\infty,0]$ 和$[0,+\infty[$ 上连续, 故f 在$\mathbb{R}$ 上连续;

2) 设$g : x \longmapsto \begin{cases} \ln|x|, & |x| \geq 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$, 则$g$ 在$]-\infty,-1]$, $[-1,1]$ 和$[1,+\infty[$ 上连续, 故g 在$\mathbb{R}$ 上连续;

定义 2.2.5 基本初等函数包括六类: 常函数, 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数.
基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数称为初等函数.

定理 2.2.3 (初等函数的连续性) 基本初等函数和初等函数都是其定义域上的连续函数.

例子 2.2.6 求$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos x}$.

例子 2.2.7 设$\lim\limits_{a} f = l \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{a} g = m \in \mathbb{R}$. 则$\lim\limits_{a} f^g = l^m$.

证明 由极限的保号性和$\lim\limits_{a} f = l > 0$ 可知, 存在a 的空心邻域$U^\circ(a)$ 使得$\forall x \in U^\circ(a)$, $f(x) > 0$. 故

$$\forall x \in U^\circ(a),\ f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\ln f(x)).$$

由于指数函数和对数函数在定义域内都是连续函数, 所以

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to a} \exp(g(x)\ln f(x)) \\
&= \exp\Big(\lim_{x\to a}(g(x)\ln f(x))\Big) \\
&= \exp\Big(\lim_{x\to a} g(x) \lim_{x\to a} \ln f(x)\Big) \\
&= \exp\Big(\lim_{x\to a} g(x) \ln(\lim_{x\to a} f(x))\Big) \\
&= \exp(m\ln l) = l^m.
\end{aligned}$$

□

§2.2.3 ∗ 区间上连续函数的性质

定义 2.2.6 设$f : I \to \mathbb{R}$. 若$a \in I$ 满足$f(a) = 0$, 则称a 为f 的零点.

定理 2.2.4 (零点定理) 设f 在区间I 上连续, 若$a, b \in I$ 满足$f(a)f(b) \leq 0$, 则

$$\exists c \in [a, b] : f(c) = 0.$$

注 2.2.5 事实上, 零点定理给出了闭区间$[a, b]$ 上连续函数的性质, 即, 闭区间上的连续函数若变号, 则一定有零点; 若无零点, 则一定不变号.

例子 2.2.8 设f 在$[a, b]$ 上连续, 满足$f([a, b]) \subset [a, b]$. 证明: 存在$x_0 \in [a, b]$, 使得$f(x_0) = x_0$.

定义 2.2.7 设$f : I \to \mathbb{R}$. 若$a \in I$ 满足$f(a) = a$, 则称a 为f 的不动点.

注 2.2.6 要寻找函数f 的不动点, 一般通过利用零点定理来寻在函数$f - Id$ 的零点得到.

例子 2.2.9 设$f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ 连续且$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l < 1$. 证明: 存在$x_0 \in [0, +\infty[$, 使得$f(x_0) = x_0$.

注 2.2.7 零点定理在区间I 上有更一般的结论: 若f 在I 上连续, 且在I 的两个端点有非零极限. 若这两个极限异号, 则f 在I 上至少有一个零点.

例子 2.2.10 证明: 若$r > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则存在唯一的正数x_0, 使得$x_0^n = r$.

定理 2.2.5 (介值定理) 设f 在区间I 上连续, $a, b \in I$, 若$\gamma \in [f(a), f(b)]$ (或$[f(b), f(a)]$), 则

$$\exists c \in [a, b] : f(c) = \gamma.$$

注 2.2.8 这个定理说明, 若f 在$[a, b]$ 上连续, 则f 在$[a, b]$ 上能取到$f(a)$ 和$f(b)$ 之间的所有值.

推论 2.2.1 连续函数将区间映为区间, 即若I 是一个区间, 则

$$\forall y_1, y_2 \in f(I), [y_1, y_2] \subset f(I).$$

列出区间在单调函数映射下的象区间: 表格......

例子 2.2.11

1) 设 $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$, 则$f$ 在$\mathbb{R}$ 上连续, 且$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, 故$f(\mathbb{R}) =]0,1]$.

2) 设$I \subset \mathbb{R}$ 至少包含两个点, $f: I \to \mathbb{R}$ 连续. 证明: 若$f(I)$ 是有限集, 则f 是常函数.

引理 2.2.1 设$f: I \to \mathbb{R}$ 单调且$f(I)$ 是一个区间, 则f 在I 上连续.

定义 2.2.8 设$f: I \to J$.

1) $\forall x_1, x_2 \in I$, 若$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$, 则称$f$ 是单射;

2) 若$\forall y \in J$, 存在$x \in I$, 使得$f(x) = y$, 则称f 是满射;

3) 若f 既是单射又是满射, 则称f 是双射;

4) 若$f: I \to J$ 是双射, 则$\forall y \in J$, $\exists! x \in I$, 使得$f(x) = y$. 由此定义映射

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & J & \longrightarrow & I \\ & y & \longmapsto & x \end{array}$$

称为f 的反函数或者逆映射, 记为f^{-1}.

注 2.2.9 一般利用单射定义的逆否命题来证明单射, 即$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

例子 2.2.12 复指数映射是满射, 不是单射.

定理 2.2.6 (反函数连续定理) 设f 在区间I 上连续且严格单调, 则$f: I \longrightarrow J = f(I)$ 是一个双射, 从而其反函数f^{-1} 存在, 且$f^{-1}: J \longrightarrow I$ 是J 上的连续函数.

例子 2.2.13

1) 设$n \in \mathbb{N}^*$, 则幂函数$f: x \longmapsto x^n$ 在$\mathbb{R}_+$ 上连续, 且严格单调递增. 由于$f(0) = 0$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, 故$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 是双射, 从而其反函数 $\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$ 在$\mathbb{R}_+$ 上连续;

2) 正弦函数$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$ 连续且严格单调递增, 故其反函数是$[-1,1]$ 到$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的连续函数, 将该函数记为arcsin, 称为反正弦函数前面提到的反三角函数就是三角函数在它们的双射区间上的反函数, 我们将在后面学到.

定义 2.2.9 设f 定义在集合D 上, 若存在$x_0 \in D$ 使得

$$\forall x \in D, f(x) \leq f(x_0)\ (\forall x \in D, f(x) \leq f(x_0)),$$

则称f 在D 上有最大(最小) 值, 其中$f(x_0)$ 称为f 在D 上的最大(最小) 值, x_0 称为f 在D 上的最大(最小) 值点. 最大值和最小值统称为最值, 最大值点和最小值点统称为最值点.

注 2.2.10 注意最值与确界的区别: 最值能取到, 确界不一定能取到.

定理 2.2.7 (最值定理) 闭区间上的连续函数有最大值和最小值.

例子 2.2.14

1) 设f 在闭区间I 上连续且严格大于零, 则

$$\exists \alpha > 0 :\ \forall x \in I,\ f(x) \geq \alpha.$$

2) 设$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是$\mathbb{R}$ 上连续的周期函数, 证明: f 在$\mathbb{R}$ 上有界.

注 2.2.11 该定理中的"闭区间" 和"连续" 这两个条件缺一不可. 如

1) f 定义在区间$[0,1]$ 上且

$$f(0) = 1, \quad \forall x \in]0,1], f(x) = x,$$

则f 在0 处不连续. 该函数在$[0,1]$ 上无最小值.

2) 指数函数在$\mathbb{R}$ 上连续, 但既无最大值也无最小值.

注 2.2.12 最值定理说明: 闭区间上的连续函数是有界的. 除了闭区间, 对于一般的区间I 也有更一般的结论: 设f 在区间I 上连续, 若f 在区间两端点处的极限存在且有限, 则f 在I 上有界.

例子 2.2.15 设f 在$]a,b[$ 上连续, 且$\lim\limits_{a^+} f$ 和$\lim\limits_{b^-} f$ 有限. 证明: f 在$]a,b[$ 上有界.

§2.2.4 应用：研究递归序列$u_{n+1} = f(u_n)$

引理 2.2.2 设f 单调, 则$f \circ f$ 单调递增.

命题 2.2.4 设u 是由函数f 定义的递归数列, 则

1) 若f 单调递增, 则u 单调;

2) 若f 单调递减, 则$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ 和$(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ 单调且单调性相反.

定理 2.2.8 设u 是由连续函数f 定义的递归数列, 若u 收敛, 则收敛到f 的不动点, 即

$$\lim u = f(\lim u).$$

例子 2.2.16 设$a \in [-1, +\infty[$.

$$u_0 = a,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n},$$

则u 是由函数$f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ 定义的递归数列. 证明: u 收敛并求极限.

例子 2.2.17 研究递归数列$u_0 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos u_n$.

证明 1. 显然, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$, 且$\cos([0,1]) \subset [0,1]$. 故设$I = [0,1]$.
2. cos 在区间I 上单调递减, 故$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ 和$(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ 都单调, 且单调性相反. 另外这两个数列都有界, 根据数列的单调有界定理, 它们都收敛, 且都收敛到$\cos\circ\cos$ 的一个不动点.
3. $\cos\circ\cos$ 在I 上只有一个不动点. 事实上, 考虑函数$\cos\circ\cos - Id_I$. 因为$\cos\circ\cos 0 = \cos 1 > 0$, $\cos\circ\cos 1 - 1 < 0$, 故存在$c \in [0,1]$ 使得$\cos\circ\cos c = c$. 另一方面, cos 在I 上严格单调递减, $\cos\circ\cos$ 在I 上严格单调递增, 从而有唯一的不动点.
4. 由上面分析可知, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ 和$(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到同一值. 根据子列定理, 数列u 收敛. □

§2.2.5 复函数的连续性

定义 2.2.10 设$f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in I$. 若$\lim\limits_{a} f = f(a)$, 则称f 在a 点连续.

定理 2.2.9 (复函数一点处连续定理) 设f 在a 的某个邻域内有定义, 则下面结论等价

1) f 在a 点连续;

2) $\mathrm{Re}f$ 和$\mathrm{Im}f$ 在a 点连续.

推论 2.2.2 若复函数f 在a 点连续, 则$|f|$ 和$\bar{f}$ 在a 点连续.

定义 2.2.11 设$f: I \to \mathbb{C}$, 若f 在I 上的每一点都连续, 则称f 在区间I 上连续. 所有在I 上连续的复函数组成的集合记为$C(I, \mathbb{C})$ 或$C^0(I, \mathbb{C})$.

定理 2.2.10 (复函数区间上连续定理) 设$I \subset \mathbb{R}$ 且f 在I 上有定义, 则下面结论等价

1) f 在I 上连续;

2) $\mathrm{Re}f$ 和$\mathrm{Im}f$ 在I 上都连续.

推论 2.2.3 设$I \subset \mathbb{R}$, 若复函数f 在I 上连续, 则$|f|$ 和$\bar{f}$ 在I 上均连续.

在此之后要学的定义或定理, 给出严格的数学描述.