

## 2012-2013学年第一学期2012级数学期末考试答案

2013.1.6 8:30-11:30

第I部分: 研究函数  $f: x \mapsto (x^2 - 1) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 

1. 证明:

1a. 由  $\ln$  的定义可知, 要使  $f$  有意义, 须  $\frac{x+1}{x-1} > 0$ , 从而  $f$  的定义域为  $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ .

1b.  $\forall x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[, f(-x) = -f(x)$ .

1c.  $\forall x > 1, f(x) = (x^2 - 1) \ln(1+x) - (x^2 - 1) \ln(x-1)$ , 由于当  $x \rightarrow 1^+$  时,  $(x^2 - 1) \ln(x+1) \rightarrow 0$ , 令  $y = \frac{1}{x-1}$ , 则  $(x^2 - 1) \ln(x-1) = -\left(\frac{1}{y} + 2\right) \frac{\ln y}{y} \rightarrow 0$ , ( $y \rightarrow +\infty$ ). 故  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ , 所以  $f$  在 1 点可以连续延拓. 利用  $f$  的奇函数性质便可证 -1 处, 略. 延拓后的函数为

$$f: ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} (x^2 - 1) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), & x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[ \\ 0, & x = \pm 1 \end{cases}$$

1c. 显然,  $f$  在  $]1, +\infty[$  上连续, 且由 1c 知,  $f$  在  $[1, +\infty[$  上连续. 另一方面, 易知  $f$  在  $]1, +\infty[$  上可导, 且  $\forall x > 1, f'(x) = 2x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 2$ . 由于  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty$ , 故  $f$  在 1 点不可导, 且曲线  $y = f(x)$  在 1 点有一条垂直于  $x$  轴的切线.

2. 2a. 由 1c 知, 函数

$$h: ]1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{1}{x}$$

既满足要求.

2b. 易知  $h$  在  $]1, +\infty[$  上可导, 且  $\forall x > 1, h'(x) = -\frac{x^2+1}{x^2(x^2-1)} < 0$ , 故  $h$  在  $]1, +\infty[$  上严格单调递减.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1}\right) = 0$$

2c. 由 2b 即可得:  $\forall x > 1, h(x) > 0$ .2d. 在  $]1, +\infty[$  上,  $f'$  与  $h$  同号, 故  $f$  在  $[1, +\infty[$  上严格单调递增.

3. 3a.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x} (x-1) \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x+1}{x} \cdot \left(\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)\right)^{\frac{x-1}{2}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} \cdot \ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

3b.  $\forall x > 1$ , 有

$$\begin{aligned} f(x) - 2x &= (x^2 - 1) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 2x \\ &= (x^2 - 1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - (x^2 - 1) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) - 2x \\ &= (x^2 - 1) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \epsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) - (x^2 - 1) \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \epsilon\left(-\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= (x^2 - 1) \frac{4x}{2x^2} - 2x + \frac{x^2 - 1}{x^2} \epsilon\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2 - 1}{x^2} \epsilon\left(-\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0, (x \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

4. 4a. 由  $g$  的定义知,  $g$  在  $[1, +\infty[$  上二次可导, 故  $\forall x > 1$ ,

$$g'(x) = f'(x) - 2,$$

$$g''(x) = f''(x) = 2(h(x) + xh'(x)) = 2\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{2x}{x^2-1}\right).$$

4b. 设  $\psi : u \mapsto \ln(1+u) - \frac{u(u+2)}{2(1+u)}$ , 则  $\psi$  在  $[0, +\infty[$  上可导, 且  $\forall u > 0$ ,

$$\psi'(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{u^2 + 2u + 2}{2(1+u)^2} = -\frac{u^2}{2(1+u)^2} < 0.$$

又因为  $\psi(0) = 0$ , 故  $\forall u \geq 0$ ,  $\psi(u) \leq 0$ .

由于  $\forall x > 1$ ,  $g''(x) = 2\left[\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) - \frac{\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x-1} + 2\right)}{2\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)}\right]$ , 且  $\frac{2}{x-1} > 0$ ,

故  $\forall x > 1$ ,  $g''(x) \leq 0$ .

4c.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 2\right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[4 \frac{x}{x-1} \frac{x-1}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) - 2\right] \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \frac{x-1}{2} - 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x) - 2) = 0$ . 由4b可知,  $g'$  在  $[1, +\infty[$  上单调递减, 所以,  $\forall x > 1$ ,  $g'(x) \geq 0$ .

4d. 由4c知,  $g$  在  $[1, +\infty[$  上单调递增. 由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$ , 故,  $\forall x \geq 1$ ,  $g(x) \leq 0$ .

5.

第II部分: 求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

6. 证明:

6a. 由于  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , 故  $f' \in C(\mathbb{R})$ , 从而  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f'(x) \sin(nx)$  在  $[a, b]$  上连续, 从而可积. 根据可积函数的有界性便可得结论.

6b.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx &= -\frac{f(x) \cos(nx)}{n} \Big|_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{f(a) \cos(na) - f(b) \cos(nb)}{n} + \frac{1}{n} \int_a^b f'(x) \cos(nx) dx. \end{aligned}$$

显然,  $f(a) \cos(na) - f(b) \cos(nb)$  和  $\int_a^b f'(x) \cos(nx) dx$  都是有界量, 故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

同理可证  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0$ .

7. 7a. 显然,  $S_n$  在  $]0, \pi[$  上连续. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 2n+1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} S_n(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 2n+1,$$

故  $S_n$  在  $[0, \pi]$  上连续.

7b. 可用数学归纳法证明, 略.

$$7c. \text{ 由上可知, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kx)\right) dx = \frac{\pi}{2}.$$

8. 8a. 由于  $\phi \in C^1([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ , 由6可知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(x) \sin(2n+1)x dx = 0$ .

$$8b. \text{ 由于 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(x) \sin(2n+1)x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx.$$

$$\text{由7c和8a可知, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

9. 因为

$$\int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) \cos(nt) dt = -\frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nt) (\alpha + 2\beta t) dt = \frac{(\alpha + 2\beta\pi)(\cos(n\pi) - 1) - \alpha}{n^2},$$

要使  $\int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$ , 取  $\alpha = -1, \beta = \frac{1}{2\pi}$  即可.

10.

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) S_n\left(\frac{t}{2}\right) dt &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt)\right) dt \\ &= -\int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) dt = \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt = \frac{\pi^2}{3}, \end{aligned}$$

显然与  $n$  无关.

11. 易知,  $h$  在  $]0, \pi]$  上连续. 由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha x + \beta x^2}{\sin(x/2)} = 2\alpha = -2$ , 故  $h$  在 0 点可以连续延拓, 即

$$h(x) = \begin{cases} \frac{-x + (x^2/2\pi)}{\sin(x/2)}, & x \in ]0, \pi] \\ -2, & x = 0 \end{cases}.$$

$h$  在  $]0, \pi]$  上可导, 下证  $h$  在 0 点可导. 事实上,

$$\frac{\frac{-x + (x^2/2\pi)}{\sin(x/2)} + 2}{x} = \frac{-1 + (x/2\pi)}{\sin(x/2)} + \frac{2}{x} = \frac{-x + (x^2/2\pi) + 2\sin(x/2)}{x\sin(x/2)},$$

利用  $\sin$  在 0 点的二阶极限展开, 得

$$\sin(x/2) = \frac{1}{2}x + o(x^2),$$

从而,

$$\frac{-x + (x^2/2\pi) + 2\sin(x/2)}{x\sin(x/2)} = \frac{(x^2/2\pi) + o(x^2)}{x\sin(x/2)} \rightarrow \frac{1}{\pi}, \quad (x \rightarrow 0).$$

因此,  $h$  在  $[0, \pi]$  上可导, 且

$$h'(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x/2)}{2} \cdot \frac{(-2 + \frac{2x}{\pi})\tan(x/2) + x - (x^2/2\pi)}{\sin^2(x/2)}, & x \in ]0, \pi] \\ \frac{1}{\pi}, & x = 0 \end{cases}$$

利用  $\tan$  在 0 点的二阶极限展开, 便可得  $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = \frac{1}{\pi}$ , 从而  $h \in C^1([0, \pi])$ .

12. 由于

$$\int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) S_n\left(\frac{t}{2}\right) dt = \int_0^\pi \frac{\alpha t + \beta t^2}{\sin(t/2)} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt = \int_0^\pi h(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt,$$

且  $h \in C^1([0, \pi])$ , 由 6 可知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) S_n\left(\frac{t}{2}\right) dt = 0$ . 从而,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$