

2012-2013学年第一学期2012级数学期末考试

2013.1.6 8:30-11:30

注意事项:

1. 请在答题纸指定的位置写清楚姓名、分组, 若有加页请在加页上也写上姓名, 答题结束后, 在答题纸的每一页上标明页码及总页数, 例如5/8.
2. 课上讲过的结论可以直接利用, 但用之前须指明是根据哪个结论; 如果利用考题中前面某一问的结论, 也须标明.
3. 请用黑色钢笔或签字笔答题, 注意书面整洁及书写规范.

第I部分: 研究函数 $f: x \mapsto (x^2 - 1) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1. (12分)

- 1a. 求 f 的定义域.
- 1b. 证明: f 是奇函数.
- 1c. 证明: f 在 1 和 -1 处可以连续延拓. 延拓后的函数仍记为 f , 写出 f 的表达式.

下面研究 f 限制在 $[1, +\infty[$ 上.

- 1d. 给出 f 在 $[1, +\infty[$ 上的连续性和可导性, 并描述曲线 $y = f(x)$ 在 1 处的切线情况.

2. (11分)

2a. 求函数 h , 使得 $\forall x > 1, f'(x) = 2xh(x)$.

2b. 证明: h 在 $]1, +\infty[$ 上严格单调递减, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

2c. 判断 h 的符号.

2d. 给出 f 在 $[1, +\infty[$ 上的单调性.

3. (10分)

3a. 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x} = 1$.

3b. 已知: $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\epsilon(u)$, 其中 $\lim_{u \rightarrow 0} \epsilon(u) = 0$.

证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$. (提示: 令 $u = \frac{1}{x}$ 和 $-\frac{1}{x}$)

此时我们称函数 f 的图像在 $+\infty$ 处以直线 $y = 2x$ 为渐近线.

4. (18分) 令

$$g: [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - 2x$$

4a. $\forall x > 1$, 求 $g'(x)$ 和 $g''(x)$.

4b. 证明: $\forall u \geq 0, \ln(1+u) \leq \frac{u(u+2)}{2(u+1)}$, 由此证明: $\forall x > 1, g''(x) \leq 0$.

4c. 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 2$, 并由此判断 g' 的符号.

4d. 证明: $\forall x \geq 1, g(x) \leq 0$. (提示: 利用 3b 和 4c)

这说明: 在 $[1, +\infty[$ 上, 函数 f 的图像在直线 $y = 2x$ 的下方.

5. (3分) 画出函数 f 在其定义域上的图像.

第II部分: 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

6. (12分) 设 $f \in C^1(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

6a. 证明: $\int_a^b f'(x) \sin(nx) dx$ 和 $\int_a^b f'(x) \cos(nx) dx$ 有界.

6b. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0$.
(提示: 利用分部积分)

7. (12分) 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 定义函数 S_n 为

$$S_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}, & x \in]0, \pi[, \\ 2n+1, & x = 0, \pi. \end{cases}$$

7a. 证明: S_n 在 $[0, \pi]$ 上连续.

7b. 证明: $\forall x \in [0, \pi]$, $S_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kx)$.

7c. 求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$.

8. (6分) 设 $\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 默认 $\phi \in C^1([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$.

8a. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(x) \sin(2n+1)x dx$.

8b. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x} dx$.

9. (4分) 设 $n \in \mathbb{N}^*$. 求 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 使得 $\int_0^\pi (\alpha x + \beta x^2) \cos(nx) dt = \frac{1}{n^2}$.

下面两题中的 α 和 β 都为9中所求.

10. (4分) 证明: $2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \int_0^\pi (\alpha x + \beta x^2) S_n(\frac{x}{2}) dx$ 与 n 无关.

11. (6分) 设

$$h:]0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\alpha x + \beta x^2}{\sin(x/2)},$$

11a. 证明: h 在0点可连续延拓. 延拓后的函数仍记为 h , 写出 h 的表达式.

11b. 证明: $h \in C^1([0, \pi])$. (提示: 利用 \sin 和 \tan 在0点的二阶极限展开)

12. (2分) 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.