

2012-2013学年第一学期中欧学院2012级数学期中考试答案

第一部分

1. 证明:

1a. 设 $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall k \in [1, n-1]$, 令 $p = 2n - k$, 则 $Q_n = \prod_{p=n+1}^{2n-1} \sin \frac{(2n-p)\pi}{2n} = \prod_{p=n+1}^{2n-1} \sin \frac{p\pi}{2n}$.

1b. 设 $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, R_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} \cdot \sin \frac{n\pi}{2n} \cdot \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = Q_n \cdot Q_n$.

2. 解: 设 $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, 则 $z + 1 = e^{i\frac{k\pi}{n}}, k \in [0, 2n-1]$. 化简得:

$$z = 2ie^{i\frac{k\pi}{2n}} \sin \frac{k\pi}{2n}, k \in [0, 2n-1].$$

3. 解: 令 $z_0 = 0, \forall k \in [1, 2n-1], z_k = 2ie^{i\frac{k\pi}{2n}} \sin \frac{k\pi}{2n}$. 则 $\forall k \in [1, 2n-1], z_k$ 的三角形形式为:

$$z_k = 2 \sin \frac{k\pi}{2n} e^{i\frac{(n+k)\pi}{2n}}.$$

4. 证明: 设 $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, 由3得:

$$P_n = \prod_{k=1}^{2n-1} z_k = \prod_{k=1}^{2n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{2n} e^{i\frac{(n+k)\pi}{2n}} = 2^{2n-1} \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} \prod_{k=1}^{2n-1} e^{i\frac{(n+k)\pi}{2n}} = -2^{2n-1} R_n.$$

5. 5a. 由2知: $\{z_k | k \in [0, 2n-1]\}$ 是方程 $(z+1)^{2n} - 1 = 0$ 的 $2n$ 个解, 故 $(z+1)^{2n} - 1$ 可分解为

$$(z+1)^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} (z - z_k).$$

化简得: $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} (z - z_k)$. 即 $\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} z^k = \prod_{k=0}^{2n-1} (z - z_k)$.

也即 $z \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} z^{k-1} = z \prod_{k=1}^{2n-1} (z - z_k)$. 由于 $z \neq 0$, 故 $\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} z^{k-1} = \prod_{k=1}^{2n-1} (z - z_k)$.

对等式左边进行变量代换得: $\sum_{l=0}^{2n-1} \binom{2n}{l+1} z^l = \prod_{k=1}^{2n-1} (z - z_k)$.

5b. 定义复函数

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \sum_{l=0}^{2n-1} \binom{2n}{l+1} z^l - \prod_{k=1}^{2n-1} (z - z_k)$$

由于 $\forall k \in [1, 2n-1], z \mapsto z - z_k$ 连续; $\forall l \in [0, 2n-1], z \mapsto z^l$ 连续, 根据连续函数的四则运算可得, f 在 \mathbb{C} 上连续. 因为5a中已得: $\forall z \in \mathbb{C}^*, f(z) = 0$, 故 $\lim_{z \rightarrow 0^+} f(z) = 0 = \lim_{z \rightarrow 0^-} f(z)$, 因此根据连续性, $f(0) = 0$, 故5a中的等式对 $z = 0$ 也成立.

5c. 在等式 $\sum_{l=0}^{2n-1} \binom{2n}{l+1} z^l = \prod_{k=1}^{2n-1} (z - z_k)$ 中令 $z = 0$, 即可得 $P_n = -2n$.

5d. 利用1b, 4和5c中的结果便可得: $Q_n^2 = R_n = -\frac{P_n}{2^{2n-1}} = \frac{2n}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2^{2(n-1)}}$. 故 $Q_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

第二部分

1. 证明:

1a. $\forall n \geq 1, \ln(n+1) - \ln n = \ln(1 + \frac{1}{n})$. 因为 $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$, 且当 $n \geq 1$ 时, $\frac{1}{n} \in]-1, +\infty[$, 所以 $\ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$, 即 $\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.
同理, $\forall n \geq 2, \ln n - \ln(n-1) = \ln(\frac{n}{n-1}) = -\ln(\frac{n-1}{n}) = -\ln(1 - \frac{1}{n}) \geq \frac{1}{n}$.

1b. 由1a 即可得: $\forall n \geq 1, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^n (\ln k - \ln(k-1)) = \ln n + 1$,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1).$$

1c. 由1b 知, $\forall n \geq 1, H_n \geq \ln(n+1)$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

1d. $\forall n \geq 1, u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1))$.
由1b 知, $\ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \frac{1}{n+1}$, 故 $u_{n+1} \geq u_n$, 即数列 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 单调递增.

另一方面, $H_n - \ln(n+1) \leq \ln n + 1 - \ln(n+1) = 1 - \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq 1$, 故 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 有界. 根据单调有界定理, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 收敛.

2. 证明:

2a. $\forall n \geq 1, S_{2(n+1)} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0$, 故 $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ 单调递增;

$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \leq 0$, 故 $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ 单调递减;

$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} > 0$, 故 $S_{2n+1} \geq S_{2n}$;

且由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$.

综上, $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ 和 $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ 是毗邻数列.

2b. 根据2a 和毗邻数列收敛定理得, $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ 和 $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ 都收敛且收敛到同一值, 故由子列定理便可得 $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 收敛.

2c. 因为 $S_2 = \frac{1}{2} = H_2 - H_1$, 即当 $n = 1$ 时, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$ 成立;

设 $k \in \mathbb{N}^*$, 当 $n = k$ 时, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$ 成立, 则当 $n = k+1$ 时,

$$S_{2n} = S_{2(k+1)} = S_{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = H_{2k} - H_k + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = H_{2(k+1)} - H_{k+1} = H_{2n} - H_n.$$

根据数学归纳法, $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} = H_{2n} - H_n$.

2d. 根据2c, $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} = H_{2n} - H_n = H_{2n} - \ln(2n+1) - (H_n - \ln(n+1)) + \ln(\frac{2n+1}{n+1}) = u_{2n} - u_n + \ln(\frac{2n+1}{n+1})$. 由1d 知, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\frac{2n+1}{n+1}) = \ln 2$, 故根据数列极限的四则运算得: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \ln 2$, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2$.

第三部分

1. 1a. 设 $n \in \mathbb{R}^*, f \in E$. 由 f 的定义得: $\sum_{k=0}^{n-1} f_n(\frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})) = f(1) - f(0) = 0$.

1b. 因为 $\sum_{k=0}^{n-1} f_n(\frac{k}{n}) = 0$, 则有两种情形:

情形一: $\exists k_0 \in [0, n-1]$, $f_n(\frac{k_0}{n}) = 0$, 即 $f(\frac{k_0}{n} + \frac{1}{n}) = f(\frac{k_0}{n})$, 此时取 $x = \frac{k_0}{n}$ 即可.

情形二: 若 $\forall k_0 \in [0, n-1]$, $f_n(\frac{k_0}{n}) \neq 0$, 则一定存在 $k_1, k_2 \in [0, n-1]$, $k_1 \neq k_2$, 使得 $f_n(\frac{k_1}{n})$

和 $f_n(\frac{k_2}{n})$ 异号,不妨设 $\frac{k_1}{n} < \frac{k_2}{n}$. 由于 f_n 在 $[\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}]$ 上连续,根据连续函数的零点定理,存在 $x \in [\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}]$,使得 $f_n(x) = 0$,即 $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

2. 设 $c \in]0, 1]$, $f \in E$.

2a. 设 $k \in \mathbb{Z}$,当 $x \in]k, k+1[$ 时, $g(x) = f(x-k)$. 由于 f 连续,故 g 在 $]k, k+1[$ 上连续. 另一方面, $\lim_{x \rightarrow k^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x-k) = f(0)$, $\lim_{x \rightarrow k^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} f(x-(k-1)) = f(1)$. 因为 $f(0) = f(1) = g(k)$,故 $\lim_{x \rightarrow k^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} g(x) = g(k)$,即 g 在 k 点连续. 综上, g 在 \mathbb{R} 上连续.

2b. 首先证明: g 是周期为1的周期函数. 事实上, $\forall x \in \mathbb{R}$,存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $x \in [k, k+1]$,则 $g(x) = f(x-k)$, $g(x+1) = f(x-k)$,即 $g(x+1) = g(x)$. 其次,根据 h 的定义得, $g-h$ 也是周期为1的周期函数,即

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x+1) - h(x+1) = g(x) + h(x).$$

再次,由于 $g-h$ 连续,故在 $[0, 1]$ 上存在最大值 M 和最小值 m ,即

$$\forall x \in [0, 1], m \leq g(x) - h(x) \leq M.$$

最后,根据周期性, $\forall x \in \mathbb{R}$,存在 $k \in \mathbb{Z}$,使得 $x-k \in [0, 1]$,从而

$$m \leq g(x) - h(x) = g(x-k) - h(x-k) \leq M.$$

综上, $g-h$ 在 \mathbb{R} 上有最大值和最小值.

2c. 1) 假设 $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq h(x)$. 分两种情形:

情形一: $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > h(x)$ 时,由2b知 $g-h$ 在 \mathbb{R} 上有最小值,即存在 $x_0 \in \mathbb{R}$,使得

$$\min_{x \in \mathbb{R}} (g(x) - h(x)) = g(x_0) - h(x_0) > 0.$$

情形二:同理, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < h(x)$ 时,由2b知 $g-h$ 在 \mathbb{R} 上有最大值,即存在 $x_0 \in \mathbb{R}$,使得

$$\max_{x \in \mathbb{R}} (g(x) - h(x)) = g(x_0) - h(x_0) < 0.$$

2) 令 $e = \min_{x \in \mathbb{R}} (g(x) - h(x)) > 0$. 则

$$g(x) = g(x) - h(x) + h(x) \geq e + h(x),$$

从而

$$\max_{x \in \mathbb{R}} g(x) \geq \max_{x \in \mathbb{R}} (e + h(x)).$$

另一方面, $\max_{x \in \mathbb{R}} (e + h(x)) = e + \max_{x \in \mathbb{R}} h(x)$. 事实上, $\forall x \in \mathbb{R}, e + h(x) \leq e + \max_{x \in \mathbb{R}} h(x)$,故 $\max_{x \in \mathbb{R}} (e + h(x)) \leq e + \max_{x \in \mathbb{R}} h(x)$;又因为 $\forall x \in \mathbb{R}, \max_{x \in \mathbb{R}} (e + h(x)) \geq e + h(x)$,从而 $\max_{x \in \mathbb{R}} (e + h(x)) - e \geq h(x)$,所以 $\max_{x \in \mathbb{R}} (e + h(x)) - e \geq \max_{x \in \mathbb{R}} h(x)$,即 $\max_{x \in \mathbb{R}} (e + h(x)) \geq e + \max_{x \in \mathbb{R}} h(x)$.

3) 由 h 的定义可知, $\max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \max_{x \in \mathbb{R}} h(x)$. 由于 $e > 0$,故得到矛盾. 因此假设不成立,即,

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}, \text{使得 } g(x_0) = h(x_0), \text{即 } g(x_0) = g(x_0 + c).$$

2d. 设 $x_0 \in \mathbb{R}$,则一定存在 $k \in \mathbb{Z}$,使得 $x_0 \in [k, k+1]$. 由于 $c \in]0, 1]$,分两种情形:

情形一:若 $x_0 \in [k, k+1-c]$,则

$$g(x_0) = f(x_0 - k), g(x_0 + c) = f(x_0 - k + c),$$

故此时取 $x = x_0 - k \in [0, 1-c]$,即可得到 $f(x+c) = f(x)$;

情形二:若 $x_0 \in [k+1-c, k+1]$,则

$$g(x_0) = f(x_0 - k), g(x_0 + c) = f(x_0 + c - k - 1),$$

故此时取 $x = x_0 - k + c - 1 \in [0, c]$,即可得到 $f(x+1-c) = f(x)$.