

2012-2013学年第一学期中欧学院2012级数学期中考试试题

第一部分: 求 $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$

设 $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. 令 $Q_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}, R_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

1. 证明:

1a. $Q_n = \prod_{p=n+1}^{2n-1} \sin \frac{p\pi}{2n};$

1b. $R_n = Q_n^2.$

2. 在 \mathbb{C} 中求解方程 $(z+1)^{2n} - 1 = 0$.

3. 记 $z_0 = 0, z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}$ 表示其他 $2n-1$ 个解. 写出 $z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}$ 的三角形式.

4. 令 $P_n = \prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. 证明: $R_n = -\frac{P_n}{2^{2n-1}}$.

5. 5a. 证明: $\forall z \in \mathbb{C}^*, \sum_{l=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{l} z^l = \prod_{k=1}^{2n-1} (z - z_k)$.

5b. 利用复函数的连续性证明: $z = 0$ 时, 5a 中的等式也成立.

5c. 证明: $P_n = -2n$.

5d. 证明: $Q_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

第二部分: 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

1. 设 $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, 令 $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. 已知 $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(x+1) \leq x$.

1a. 证明: $\forall n \geq 1, \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}; \forall n \geq 2, \frac{1}{n} \leq \ln n - \ln(n-1)$.

1b. 证明: $\forall n \geq 1, \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln n + 1$.

1c. 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$.

1d. 定义数列 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 为: $\forall n \geq 1, u_n = H_n - \ln(n+1)$. 证明: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛.

2. 设 $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

2a. 证明: $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ 和 $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ 是毗邻数列.

2b. 证明: $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 收敛.

2c. 证明: $\forall n \geq 1, S_{2n} = H_{2n} - H_n$.

2d. 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

第三部分

设 $E = \{f \in C([0, 1]) \mid f(0) = f(1)\}$.

1. 设 $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in E$. 定义

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0, 1 - \frac{1}{n}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \end{array} .$$

1a. 计算 $\sum_{k=0}^{n-1} f_n(\frac{k}{n})$.

1b. 证明: 存在 $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, 使得 $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

2. 设 $c \in]0, 1]$, $f \in E$.

2a. 将 f 做 1 周期延拓, 即定义 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x - k)$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$, 使得 $x - k \in [0, 1]$. 证明: g 在 \mathbb{R} 上连续.

2b. 定义函数 h 为:

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x + c) \end{array} .$$

证明: $g - h$ 在 \mathbb{R} 上有最大值和最小值.

2c. 假设 $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) \neq g(x)$.

1) 证明: $\min_{x \in \mathbb{R}} (g(x) - h(x)) > 0$ 或 $\max_{x \in \mathbb{R}} (g(x) - h(x)) < 0$.

2) 若令 $e = \min_{x \in \mathbb{R}} (g(x) - h(x)) > 0$, 证明: $\max_{x \in \mathbb{R}} g(x) \geq e + \max_{x \in \mathbb{R}} h(x)$.

3) 得出矛盾, 并给出结论: 存在 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $g(x_0) = h(x_0)$.

2d. 利用 g 和 h 的定义, 通过讨论 x_0 的范围证明: $\exists x \in [0, 1 - c]$, 使得 $f(x + c) = f(x)$; 或者 $\exists x \in [0, c]$, 使得 $f(x + 1 - c) = f(x)$.