

Exercices

de mathématiques de Math Spé

Archive complète

LYCÉE HENRI-POINCARÉ, NANCY

Walter Appel

58 rue Notre-Dame des Anges
54 000 Nancy

Voici quelques 3500 exercices que j'utilise dans mes enseignements en prépa.

Un certain nombre d'entre eux viennent directement des oraux de concours ; sont alors notés le nom de l'école ainsi que la filière et l'année de la planche. Ils sont plus ou moins regroupés par années au sein de chaque fiche.

Les corrections sont données sans aucune garantie : tout le monde fait des erreurs, et je suis très loin de faire exception à la règle. Vu le nombre d'erreurs que je retrouve encore régulièrement... Par conséquent, toute remarque est la bienvenue : on peut m'écrire à

`walter.appel@prepas.org`

pour toute suggestion, rapport d'erreur etc.

J'espère que ces exercices pourront dépanner des collègues (notamment tous ceux qui se retrouvent avec une nouvelle classe et qui ont besoin rapidement de nombreux exercices). J'ai également pas mal de feuilles de TD que je suis prêt à partager avec qui veut (mais tout n'est pas encore prêt pour être mis sur le ouébe, donc il suffit de m'écrire).

Note importante : il va sans dire qu'il n'y a pas de droit associé à ces exercices, que tout le monde en profite sans en tirer profit (!), mais je tiens à préciser que beaucoup d'exercices ont été glanés çà et là chez des collègues (notamment M. Quercia, N. François), chez mes anciens professeurs de Taupe (D. Suratteau et R. Lachaux), dans des bouquins, etc. Un bon nombre de corrections sont dues à Éric Ricard, Marc Rezzouk et d'autres collègues. (Les erreurs en revanche ne sont dues qu'à moi.) Tout ça reste donc bien entendu à l'usage privé des collègues et de leurs classes.

Première partie

Algèbre

Vocabulaire ensembliste, applications

◆ **ENS.1**

Montrer que $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ est une bijection.
 $(r, s) \mapsto 2^r(2s + 1)$

◇ [Divers/ensembleeexo.tex/alg:15]

Utiliser la parité.

◆ **ENS.2**

Soit E un ensemble quelconque. On ordonne $\mathfrak{P}(E)$ par l'inclusion.

- 1) Est-ce un ordre total ?
- 2) Existe-t-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ?
- 3) Soient A, B $\subset E$. Trouver la borne supérieure et la borne inférieure de $\mathcal{A} = \{A, B\} \subset \mathfrak{P}(E)$.

◇ [Divers/ensembleeexo.tex/alg:16]
Pas ordre total.

$\sup \mathcal{A} = A \cup B$ et $\inf \mathcal{A} = A \cap B$.

◆ **ENS.3**

E est un ensemble fini. Existe-t-il une injection (*resp.* une surjection, *resp.* une bijection) de E dans $\mathfrak{P}(E)$?
Même question si E est un ensemble infini.

INDICATION : Soit ϕ une application de E dans $\mathfrak{P}(E)$. On pose $A = \{x \in E ; x \notin \phi(x)\}$. À l'aide de l'ensemble A, montrer que ϕ ne saurait être surjective.

◇ [Divers/ensembleeexo.tex/alg:17]
Si $\phi : E \rightarrow \mathfrak{P}(E)$, on pose $A = \{x \in E ; x \notin \phi(x)\}$, il n'a clairement pas

d'antécédent.

◆ **ENS.4**

E étant un ensemble, on désigne par $\mathcal{F}(E, E)$ l'ensemble des applications de E dans E. Montrer que $(\mathcal{F}(E, E), \circ)$ est un monoïde (unitaire). Quels sont les éléments symétrisables ? Quels sont les éléments simplifiables à gauche (c'est-à-dire les éléments $g \in \mathcal{F}(E, E)$ vérifiant $g \circ f = g \circ f' \Rightarrow f = f'$ pour tout $f, f' \in \mathcal{F}(E, E)$) ? Quels sont ceux qui sont simplifiables à droite ?

◇ [Divers/ensembleeexo.tex/alg:18]
Symétrisables : les bijections.

Simplifiable à gauche : les injections.
Simplifiables à droite : les surjections.

◆ **ENS.5**

Soient E, F, des ensembles, et $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F. Soient A, B des parties de E.

- 1) Montrer que $f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A)$.
- 2) A-t-on égalité ?
- 3) Montrer que l'égalité a lieu si f est injective.
- 4) En déduire que, si f est une bijection de E sur F, on a, pour tout partie A de E : $f(\mathbb{C}_E A) = \mathbb{C}_F f(A)$.
- 5) Montrer que, si $M \subset F$ et $N \subset F$, $f^{(-1)}(M \setminus N) = f^{(-1)}(M) \setminus f^{(-1)}(N)$.
- 6) Montrer que, si $N \subset F$, on a $f^{(-1)}(\mathbb{C}_F N) = \mathbb{C}_E f^{(-1)}(N)$.

◇ [Divers/ensembleeexo.tex/alg:19]

◆ **ENS.6**

Soient E et F des ensembles, f une application de E dans F. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) f est injective ;
- (b) pour tout couple $(X, Y) \in \mathfrak{P}(E)^2$, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
- (c) pour tout ensemble X et pour tout couple (ϕ, ψ) d'applications de X dans E, on a

$$(f \circ \phi = f \circ \psi) \Rightarrow \phi = \psi.$$

◇ [Divers/ensembleeexo.tex/alg:20]

◆ **ENS.7**

Soient E et F deux ensembles, et $f : E \rightarrow F$ une application.

- 1) Soit $A \subset E$. Montrer que, si f est injective, alors $f|_A : A \rightarrow f(A)$ est bijective.
- 2) Soit $B \subset F$. Montrer que, si f est injective, alors en posant $A = f^{-1}(B)$, la restriction $f|_A : A \rightarrow B$ est bijective.

◇ [Divers/ensembleeexo.tex/alg:23]

◆ **ENS.8**

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$ deux applications. On considère

$$h : \begin{cases} E \longrightarrow F \times G \\ x \longmapsto (f(x), g(x)). \end{cases}$$

- 1) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.
- 2) On suppose f et g surjectives ; h est-elle nécessairement surjective ?

◇ [Divers/ensembleeexo.tex/alg:24]

◆ **ENS.9**

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- 1) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
- 2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

◇ [Divers/ensembleeexo.tex/alg:25]

1) On suppose $g \circ f$ injective et f surjective. \square Soient $x, y \in F$ tels que $g(x) = g(y)$. Il existe $u, v \in E$ tels que $x = f(u)$ et $y = f(v)$, donc $g \circ f(u) = g \circ f(v)$ donc $u = v$ et donc $x = y$. \square Donc g est injective.

2) On suppose $g \circ f$ surjective et g injective. \square Soit $y \in F$. Alors $g(y) \in G$, et $g \circ f$ étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = g(y)$. Par injectivité de g , $y = f(x)$. \square

◆ **ENS.10**

(Z)

Soient A et B deux ensembles.
Montrer que $B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = B$.

◇ [Divers/ensembleeexo.tex/alg:31]

◆ **ENS.11**

Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

◇ [Divers/ensembleeexo.tex/alg:32]

• On suppose f injective.
 \square Soit $x \in E$. Alors $f(x) = f \circ f \circ f(x)$; par injectivité, on a $x = f \circ f(x)$, donc $x \in \text{Im } f$. \square
Donc f est surjective.
• On suppose f surjective.
 \square Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Par surjectivité de f , il existe x' tel que $x = f(x')$. De même, il existe x'' tel que $x' = f(x'')$. On fait de même

pour y . Alors

$$f \circ f \circ f(x'') = f \circ f \circ f(y'')$$

donc

$$f(x'') = f(y'')$$

ce qui montre que $x' = y'$ et, par suite $x = y$. \square
Ainsi, f est injective.

◆ **ENS.12**

Soient A et B deux parties non vide d'un ensemble E. On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathfrak{P}(E) \longrightarrow \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B) \\ X \longmapsto (X \cap A, X \cap B). \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
- 2) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
- 3) Dans le cas où f est bijective, déterminer f^{-1} .

◇ [Divers/ensembleeexo.tex/alg:33]

◆ **ENS.13**

Soient A et B deux ensembles. On suppose qu'il existe $f : A \rightarrow B$ injective. Montrer qu'il existe une surjection de B sur A. Réciproque ?

◇ [Divers/ensembleeexo.tex/alg:36]

$$h : \begin{cases} B \longrightarrow A \\ x \longmapsto \begin{cases} a & \text{si } x \notin C \\ f^{-1}(x) & \text{si } x \in C. \end{cases} \end{cases}$$

On pose $C = f(A)$. Alors $\tilde{f} : A \rightarrow C$ est une bijection. On choisit maintenant $a \in A$ et on pose

Pour la réciproque, l'axiome du choix est hélas nécessaire.

◆ ENS.14

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire, avec des quantificateurs :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;
- 2) la négation de la phrase précédente ;
- 3) f est continue ;
- 4) f n'est pas continue.

◇ [Divers/ensembleexo.tex/alg:49]

◆ ENS.15

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. Écrire, avec des quantificateurs :

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$;
- 2) la négation de la phrase précédente ;
- 3) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ;
- 4) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

◇ [Divers/ensembleexo.tex/alg:49b]

◆ ENS.16 (Un peu de logique)

On vous présente quatre cartes imprimées sur les deux faces. On sait que chaque carte présente une lettre sur une face et un chiffre sur l'autre face. Posées sur la table, les quatre cartes présentent les symboles suivants :

A B 2 3

Par ailleurs, on vous précise que la règle d'impression des cartes est la suivante :

« Si une face présente une voyelle, alors l'autre face présente un chiffre pair ».

Quelle(s) carte(s) faut-il retourner pour vérifier la règle ?

◇ [Divers/ensembleexo.tex/alg:50]

Il faut retourner « A » et « 3 ».

◆ ENS.17

(♣)

Soient E, F, G et H quatre ensemble, et $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ trois applications. On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Montrer que f, g et g sont bijectives.

◇ [Divers/ensembleexo.tex/alg:51]

◆ ENS.18

Soit E un ensemble et $p : E \rightarrow E$ une application telle que $p \circ p = p$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) f injective ;
- (b) f surjective ;
- (c) f bijective.

◇ [Divers/ensembleexo.tex/div:67]

(a) \Rightarrow (c) Supposons p est injective. \square Soit $y \in E$, alors $p(y) = p(p(y))$ $p^2(u) = p^2(v)$ donc $p(u) = p(v)$ donc $x = y$. \square
 donc, par injectivité, $y = p(y)$. \square Ainsi, p est surjective, donc bijective.

Alors il existe $u, v \in E$ tels que $x = p(u)$ et $y = p(v)$, ce qui montre

$p^2(u) = p^2(v)$ donc $p(u) = p(v)$ donc $x = y$. \square

(b) \Rightarrow (c) Supposons p surjective. \square Soient $x, y \in E$ tels que $p(x) = p(y)$. \square Ainsi, p est injective, donc bijective.

◆ ENS.19

(*)

Soit E un ensemble, soit $A \in \mathfrak{P}(E)$. On note

$$A^- = \{B \in \mathfrak{P}(E) ; B \subset A\} \quad A^+ = \{C \in \mathfrak{P}(E) ; A \subset C\} \quad \text{et} \quad A^* = A^- \times A^+.$$

On considère l'application $f : \mathfrak{P}(E) \rightarrow A^*$ définie par

$$\forall X \in \mathfrak{P}(E) \quad f(X) = (X \cap A, X \cup A).$$

Vérifier que f est une bijection.

◇ [Divers/ensembleexo.tex/div:68]

◆ ENS.20

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E , on définit les applications

$$\phi_A : \mathfrak{P}(E) \longrightarrow \mathfrak{P}(E) \quad \text{et} \quad \psi_A : \mathfrak{P}(E) \longrightarrow \mathfrak{P}(E) \\ \left| \begin{array}{l} X \longmapsto X \cap A \\ X \longmapsto X \cup A \end{array} \right.$$

Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) ϕ_A injective ;
- (b) ϕ_A surjective ;
- (c) $A = E$.

Proposer un énoncé similaire pour l'application ψ .

◇ [Divers/ensembleexo.tex/div:69]

il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) ψ_A injective ;

(b) ψ_A surjective ;

(c) $A = \emptyset$.

◆ ENS.21

(**)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On définit l'application

$$\tilde{f} : \mathfrak{P}(F) \longrightarrow \mathfrak{P}(E) \\ \left| \begin{array}{l} B \longmapsto f^{-1}(B). \end{array} \right.$$

Montrer que \tilde{f} est injective si et seulement si f surjective, et de même, que \tilde{f} est surjective si et seulement si f injective.

◇ [Divers/ensembleexo.tex/div:70]

◆ ENS.22

(♣)

Remplir les tables de vérités des opérateurs logiques **xor** (disjonction « ou inclusif »), **xor** (ou exclusif), **and** (conjonction « et »), \Rightarrow (« implique ») et \Leftrightarrow (si et seulement si) :

and	or	xor	\Rightarrow	\Leftrightarrow																																													
<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>V</td><td>F</td></tr> <tr><td>V</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>F</td><td></td><td></td></tr> </table>		V	F	V			F			<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>V</td><td>F</td></tr> <tr><td>V</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>F</td><td></td><td></td></tr> </table>		V	F	V			F			<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>V</td><td>F</td></tr> <tr><td>V</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>F</td><td></td><td></td></tr> </table>		V	F	V			F			<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>V</td><td>F</td></tr> <tr><td>V</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>F</td><td></td><td></td></tr> </table>		V	F	V			F			<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>V</td><td>F</td></tr> <tr><td>V</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>F</td><td></td><td></td></tr> </table>		V	F	V			F		
	V	F																																															
V																																																	
F																																																	
	V	F																																															
V																																																	
F																																																	
	V	F																																															
V																																																	
F																																																	
	V	F																																															
V																																																	
F																																																	
	V	F																																															
V																																																	
F																																																	

◇ [Divers/ensembleexo.tex/div:181]

and	or	xor	\Rightarrow	\Leftrightarrow																																													
<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>V</td><td>F</td></tr> <tr><td>V</td><td>V</td><td>F</td></tr> <tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr> </table>		V	F	V	V	F	F	F	F	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>V</td><td>F</td></tr> <tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr> <tr><td>F</td><td>V</td><td>F</td></tr> </table>		V	F	V	V	V	F	V	F	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>V</td><td>F</td></tr> <tr><td>V</td><td>F</td><td>V</td></tr> <tr><td>F</td><td>V</td><td>F</td></tr> </table>		V	F	V	F	V	F	V	F	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>V</td><td>F</td></tr> <tr><td>V</td><td>V</td><td>F</td></tr> <tr><td>F</td><td>V</td><td>V</td></tr> </table>		V	F	V	V	F	F	V	V	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>V</td><td>F</td></tr> <tr><td>V</td><td>V</td><td>F</td></tr> <tr><td>F</td><td>F</td><td>V</td></tr> </table>		V	F	V	V	F	F	F	V
	V	F																																															
V	V	F																																															
F	F	F																																															
	V	F																																															
V	V	V																																															
F	V	F																																															
	V	F																																															
V	F	V																																															
F	V	F																																															
	V	F																																															
V	V	F																																															
F	V	V																																															
	V	F																																															
V	V	F																																															
F	F	V																																															

◆ ENS.23

Soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux assertions. Sachant que chacun des énoncés suivants est équivalent à l'assertion $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, remplacer les pointillés par les lettres \mathcal{P} et \mathcal{Q} :

- 1) ... implique ...
- 2) Pour que ... soit vraie, il suffit que ... soit vraie.
- 3) Une condition nécessaire pour que ... soit vraie est que ... le soit.
- 4) Une condition suffisante pour que ... soit vraie est que ... le soit.

◇ [Divers/ensembleexo.tex/div:184]

- 1) \mathcal{P} implique \mathcal{Q} .
- 2) Pour que \mathcal{Q} soit vraie, il suffit que \mathcal{P} soit vraie.

3) Une condition nécessaire pour que \mathcal{P} soit vraie est que \mathcal{Q} le soit.

4) Une condition suffisante pour que \mathcal{Q} soit vraie est que \mathcal{P} le soit.

◆ ENS.24

Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

- 1) Une condition suffisante pour qu'un nombre réel soit supérieur ou égal à 2 est qu'il soit supérieur ou égal à 3.
- 2) Pour qu'un entier soit supérieur ou égal à 4, il faut qu'il soit strictement supérieur à 3.
- 3) Pour qu'un nombre réel soit strictement supérieur à 2, il suffit que son carré soit strictement supérieur à 4.
- 4) $\exists x \in \mathbb{Z} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad x \leq -y^2$.
- 5) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad x \leq -y^2$.
- 6) $\exists x \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad x \leq -y^2$.
- 7) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad x \leq -y^2$.

◇ [Divers/ensembleexo.tex/div:185]

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) Vrai, 2) Vrai, 3) Faux, | <ol style="list-style-type: none"> 4) Vrai ($x = y = 0$), 5) Faux ($x = 1$), 6) Faux ($y^2 = x + 1$), 7) Faux ($x = 0, y = 1$). |
|--|---|

◆ ENS.25

◇ [Divers/ensembleexo.tex/div:186]

◆ ENS.26

(★★)

X MP – 2003

Trouver $E = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} ; f + f \circ f + f \circ f \circ f = 3 \text{Id}_{\mathbb{N}}\}$.

◇ [Rec03/ensemble-r3.tex/r3:68]

Solution de Philippe Châteaux (la mienne était plus longue et plus compliquée...)

Soit $f \in E$. Cette fonction vérifie donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n. \quad (1.1)$$

Notons tout d'abord que f est trivialement injective.

On en déduit que $f(0) = 0$.

On pose $A = \{n \in \mathbb{N} ; f(n) \neq n\}$. Supposons $A \neq \emptyset$ et posons $a = \min A$. Alors $f(a) \neq a$ donc, par injectivité, $f(a) > a$, puis $f(f(a)) \geq a$ et $f(f(f(a))) \geq a$, contradiction.

Ou bien par récurrence. On suppose $f(k) = k$ pour tout $k \in [0 ; n - 1]$, alors par injectivité $f(n) \geq n$ puis $f(f(n)) \geq n$ et $f(f(f(n))) \geq n$, donc $f(n) = n$ et la récurrence peut avancer.

Conclusion : $E = \{\text{Id}_{\mathbb{N}}\}$.

◆ ENS.27

(♣)

Centrale PC – 2003

Soient E, F, G trois ensembles et des applications

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G.$$

- 1) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- 2) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
- 3) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- 4) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

◇ [Rec03/ensemble-r3.tex/r3:388]

Encore un scandale : il suffit d'écrire!!!

1) On suppose $g \circ f$ injective et f surjective. \square Soient $x, y \in F$ tels que $g(x) = g(y)$. Il existe $u, v \in E$ tels que $x = f(u)$ et $y = f(v)$, donc $g \circ f(u) = g \circ f(v)$ donc $u = v$ et donc $x = y$. \square Donc g est injective.

2) De 1) on déduit que f est bijective, l'injectivité de g est immédiate.

3) On suppose $g \circ f$ surjective et g injective. \square Soit $y \in F$. Alors $g(y) \in G$, et $g \circ f$ étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = g(y)$. Par injectivité de g , $y = f(x)$. \square

4) De 3) on déduit que g est bijective d'où la surjectivité de f .

◆ ENS.28

(♣)

Centrale PC – 2003

Soit E un ensemble. Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux sous-ensembles de E . On note $\mathfrak{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Notons $f : \mathfrak{P}(E) \rightarrow \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$ la fonction définie par

$$\forall X \in E \quad f(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

- 1) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
- 2) Quand f est-elle injective ?

◇ [Rec03/ensemble-r3.tex/r3:401]

2) Il faut et il suffit que $A \cup B = E$.

1) T.

Dénombrement

◆ DEN.1 ($\sum C_n^{2p} = \sum C_n^{2p+1}$)

Les deux questions ne sont pas indépendantes.

- 1) Soit E un ensemble non vide. On choisit $a \in E$ et on considère l'application

$$\phi: \begin{cases} \wp(E) \longrightarrow \wp(E) \\ X \longmapsto \phi(X) = X + \{a\} \end{cases}$$

où l'on a noté « + » la **différence symétrique** entre deux ensembles, définie par

$$X + Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Déterminer $\phi \circ \phi$. Qu'en résulte-t-il pour ϕ ?

- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer combinatoirement que

$$\sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ 2q \leq n}} C_n^{2q} = \sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ 2q+1 \leq n}} C_n^{2q+1}.$$

◇ [Divers/denombrementexo.tex/den:1]

E un ensemble quelconque de cardinal n . On veut donc montrer que l'ensemble des parties de cardinal pair est de même cardinal que celui des parties de cardinal impair. Pour cela, on choisit $a \in A$, et on définit l'application $f: \wp(E) \rightarrow \wp(E)$ qui à une partie $P \subset A$ associe $P \setminus \{a\}$ si $a \in E$, et $P \cup \{a\}$ si

$a \notin P$. C'est bien une bijection.

On en déduit d'ailleurs que $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$.

◆ DEN.2 (Nombre d'applications croissantes)

Soient n, p deux entiers naturels. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de $[1, n]$ dans $[1, p]$? *On rappelle que $[1, n] = \{1, \dots, n\}$.*

◇ [Divers/denombrementexo.tex/den:2]

Il faut mettre $(p-n)$ billes dans $(n+1)$ trous. Or pour mettre N objets dans g trous, il y a $(N+g-1)!/(g-1)!$ solutions (voir ça avec des parois par exemple :

$g-1$ parois à mélanger avec N objets, soit $(N+g-1)!$ permutations mais les $(g-1)$ parois et les N objets sont indiscernables). Le résultat est $\frac{p!}{(p-n)!n!}$.

◆ DEN.3

Les deux questions ne sont pas indépendantes.

- 1) Soit n un entier naturel. Montrer que

$$\sum_{k=0}^n C_n^k 3^{n-k} k = n4^{n-1}.$$

INDICATION : *On rappelle que $(a+b)^n = \sum_{k=1}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, et on pourra utiliser la fonction $F(x) = (3+x)^n$.*

- 2) Soit E un ensemble quelconque. On note $n = \text{Card } E$. Calculer

$$S = \sum_{X, Y \subset E} \text{Card}(X \cap Y) \quad \text{et} \quad T = \sum_{X, Y \subset E} \text{Card}(X \cup Y).$$

◇ [Divers/denombrementexo.tex/den:3]

On commence par exprimer la première somme. Somme sur k de : nombre d'ensembles A de cardinal k , fois k , fois nombre d'ensembles X et Y tels que $X \cap Y = A$, ce dernier nombre étant choisi en choisissant d'abord les éléments de $E \setminus A$ qui sont dans $X \cup Y$, il y en a n avec $p = 0, \dots, n-k$, soit C_{n-k}^p choix, et pour chaque élément, on a le choix : il appartient à X ou Y , soit 2^p . On a donc

$$S = \sum_{k=1}^n C_n^k \times k \times \left(\sum_{p=0}^{n-k} C_{n-k}^p 2^p \right) = \sum_{k=1}^n C_n^k 3^{n-k} k = n4^{n-1}.$$

◆ DEN.4 ($\sum \text{Card } X$)

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Calculer $\sum_{X \in \wp(E)} \text{Card } X$.

◇ [Divers/denombrementexo.tex/den:4]

Égal à $\sum_{k=0}^n k C_n^k$.

◆ DEN.5

Démontrer que, si $p, n \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p \leq n$, on a $\sum_{k=0}^p C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p$.

◇ [Divers/denombrementexo.tex/den:5]

$C_n^k C_{n-k}^{p-k}$ est le nombre de parties de cardinal k dans un ensemble de cardinal n , multiplié par le nombre de parties de cardinal $p-k$ dans le reste de l'ensemble (de cardinal $p-k$). C'est donc le nombre de parties de cardinal p

dans un ensemble de cardinal n , sauf que chaque élément de l'ensemble peut faire partie de A ou de B , donc on a 2^p choix possibles.

On fait une injection, et on utilise le lemme des bergers.

◆ DEN.6

Les deux questions ne sont pas indépendantes.

- 1) Montrer que, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p \leq n$, on a

$$\sum_{k=0}^p C_{n+k}^k = C_{n+p+1}^p = C_{n+p+1}^{n+1}.$$

- 2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$E_{n,p} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_p); x_1, \dots, x_p \in \mathbb{N}, x_1 + \dots + x_p = n\} \quad \text{et} \quad \alpha_{n,p} = \text{Card } E_{n,p}.$$

Calculer $\alpha_{n,p}$.

◇ [Divers/denombrementexo.tex/den:6]

On calcule pour les petites valeurs de n , et on fait une récurrence montrant

que α vérifie les bonnes relations, et $\alpha_{n,p} \stackrel{\text{def}}{=} C_{n+p+1}^{p-1} = C_{n+p-1}^n$.

◆ DEN.7 ($A \cap B = \emptyset$)

Soit E un ensemble de cardinal n . Calculer le nombre de couples $(A, B) \in \wp(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.

Même question avec $A \cap B = \text{singleton}$.

Même question avec $A \subset B$.

◇ [Divers/denombrementexo.tex/den:7]

3^n .

$n3^{n-1}$.

3^n aussi, et c'est normal. Établir un bijection.

◆ DEN.8 (Diagonales d'un polygône)

On considère un polygône (convexe) à n sommets. Combien a-t-il de diagonales ? En combien de points (intérieurs ou extérieurs au polygône) ces diagonales se coupent-elles ?

◇ [Divers/denombrementexo.tex/den:8]

Il y a $n(n-3)/2$ diagonales. Si on ne compte pas les sommets, elles se coupent en

C'est fou !

$$\frac{1}{2} \frac{n(n-3)}{2} \left(\frac{n(n-3)}{2} - 2(n-4) - 1 \right) = \frac{n(n-3)(n^2-7n-14)}{8}.$$

◆ DEN.9 (Surjections)

Combien y a-t-il de surjections de $[1, n+1]$ dans $[1, n]$?

◇ [Divers/denombrementexo.tex/den:9]

qu'un seul. Il y a donc

$$C_{n+1}^2 \times n \times (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}$$

Pour qu'un application $f: [1, n+1] \rightarrow [1, n]$ soit surjective, il faut qu'un et un seul élément de $[1, n]$ ait deux antécédents, et que tous les autres n'en aient

possibilités.

◆ DEN.10 (Permutations de $[1, 12]$)

Combien y a-t-il de bijections f de $\{1, \dots, 12\}$ dans lui-même possédant :

- la propriété : n est pair $\Rightarrow f(n)$ est pair ?
- la propriété : n est divisible par 3 $\Rightarrow f(n)$ est divisible par 3 ?
- ces deux propriétés à la fois ?
- Reprendre les questions précédentes en remplaçant *bijection* par *application*.

◇ [Divers/denombrementexo.tex/den:10]

À gauche les résultats pour les *bijections*, à droite our les *applications*.

2) $4! \times 8!$

$4^4 \times 12^8$.

3) $2!2!4!4!$

$2^2 \times 4^2 \times 6^4 \times 12^4$.

1) $(6!)^2$

$6^6 \times 12^6$.

◆ **DEN.11 (Permutations de couples)**

On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes et n femmes, qui constituent n couples. Combien existe-t-il de dispositions...

1) au total?

3) sans séparer les couples?

2) en respectant l'alternance des sexes?

4) en remplissant les deux conditions précédentes?

◇ [Divers/denombrementexo.tex/den:11]

1) $(2n)!$.

3) $2^{n+1} \times n!$.

2) $2(n!)^2$.

4) $4 \times n!$.

◆ **DEN.12**

X MP – 2003

Soit (E, \cdot) un ensemble muni d'une loi de composition interne non associative. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in E^n$. Quel est le nombre de parenthésages possibles du produit $a_1 a_2 \cdots a_n$?

◇ [Rec03/denombrement-r3.tex/r3:191]

Arithmétique dans \mathbb{Z}

◆ **ARI.1** (★★)

Montrer que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} \notin \mathbb{N}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

◇ [Divers/arithmetiqueexo.tex/ari:1]

On pose H_n la propriété : « x_n est de la forme $\frac{p_n}{2q_n}$ avec p_n impair ».

On montre alors $H_n \Rightarrow H_{2n} \Rightarrow H_{2n+1}$ et on vérifie que ce schéma est suffisant pour conclure à la validité de H à tout rang.

◆ **ARI.2**

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(a^n, b^n) &= [\text{pgcd}(a, b)]^n \\ \text{ppcm}(a^n, b^n) &= [\text{ppcm}(a, b)]^n. \end{aligned}$$

◇ [Divers/arithmetiqueexo.tex/ari:3]

◆ **ARI.3** (★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les entiers a_n et b_n par

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}.$$

- 1) Déterminer a_n et b_n pour $n = 1, 2, 3$.
- 2) Montrer que $\text{pgcd}(a_n, b_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

INDICATION : On pourra par exemple considérer $(1 - \sqrt{2})^n$.

◇ [Divers/arithmetiqueexo.tex/ari:4]

On a $(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n \sqrt{2}$, donc $a_n^2 - 2b_n^2 = (1 + \sqrt{2})^n (1 - \sqrt{2})^n = (-1)^n$, et on applique le théorème de Bézout.

◆ **ARI.4**

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $p = 4n + 3$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

◇ [Divers/arithmetiqueexo.tex/ari:5]

Tout d'abord, Q est non vide ($7 \in Q$).

Reduction ad absurdum. □ On suppose que cet ensemble Q est fini. Alors $Q = \{a_1, \dots, a_n\}$. On pose $S = 4q_1 \dots q_n - 1$. On a alors $q_i \equiv 3 \pmod{4}$, or

$S \equiv 3 \pmod{4}$ donc, comme $S \notin Q$, S est non premier. Or S impair, et S est premier avec tous les q_i , donc tous les diviseurs de S sont $\equiv 1 \pmod{4}$. Donc $S \equiv 1 \pmod{4}$: contradiction. □

◆ **ARI.5** (★★)

On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : pour que $(2^n + 1)$ soit premier, il est nécessaire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^k$.
- 2) Si m et n sont des entiers naturels, et si $m \neq n$, montrer que $\text{pgcd}(F_m, F_n) = 1$.

INDICATION : On pourra étudier $(F_m - 2)/F_n$.

◇ [Divers/arithmetiqueexo.tex/ari:6]

On suppose $n = 2^k \cdot b$ avec b impair. Si $b \neq 1$, alors

$$2^{2^n} + 1 = (2^{2^k})^{2^{m-k}} - (-1)^{2^{m-k}} + 2 = (2^{2^k} + 1)K + 2,$$

c'est-à-dire que $(F_m - 2)/F_n = K$. Posons $d = \text{pgcd}(F_m, F_n)$ et $c = \text{ppcm}(F_m, F_n)$. Alors $dc - 2 = dKb$ donc d divise 2, or $d \neq 2$ donc $d = 1$.

$$2^{2^k \cdot b} + 1 = 2^{2^k \cdot b} - (-1)^b = (2^{2^k \cdot (b-1)} + 1) \dots : \text{non premier.}$$

◆ **ARI.6**

Tout carré impair est congru à 1 modulo 8.

◇ [Divers/arithmetiqueexo.tex/ari:7]

$$(2n + 1)^2 = 4 \underbrace{n(n+1)}_{\text{pair}} + 1.$$

◆ **ARI.7** (★)

Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que, si k divise $p^2 - p$ alors il divise également $p^n - p$.

◇ [Divers/arithmetiqueexo.tex/ari:8]

Petite récurrence utilisant $p^{n+1} - p = (p^n - p)p + (p^2 - p)$.

Ou bien remarquer que $p^n - p = p(p^{n-1} - 1) = p(p-1)(p^{n-2} + \dots + p + 1)$.

◆ **ARI.8**

Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, on a $\text{pgcd}(a^2 + b^2, ab) = (\text{pgcd}(a, b))^2$.

◇ [Divers/arithmetiqueexo.tex/ari:9]

Posons $d = \text{pgcd}(a, b)$. Il existe $A, B \in \mathbb{Z}^*$ tels que $a = dA$ et $b = dB$.

à $A^2 + B^2$. Alors p divise A ou B , disons par exemple A . Dans ce cas, il divise A^2 et donc $B^2 = B^2 + A^2 - A^2$, donc il divise B . Donc $p = 1$. Donc $\text{pgcd}(A^2 + B^2, AB) = 1$ donc $\text{pgcd}(a^2 + b^2, ab) = d^2$.

◆ **ARI.9** (★)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Montrer que $[n! + 2, \dots, n! + n]$ ne contient aucun nombre premier.

◇ [Divers/arithmetiqueexo.tex/ari:10]

En effet, k divise $n! + k$ pour tout $k \in [2, n]$.

◆ **ARI.10** (★)

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n . Montrer que, pour $n \geq 14$, on a $\pi(n) \leq \frac{n}{2} - 1$.

◇ [Divers/arithmetiqueexo.tex/ari:11]

Une récurrence immédiate permet de montrer que $\pi(2m) \leq m - 1$ et

$\pi(2m + 1) \leq m - 1$, récurrence que l'on commence pour $m = 7$ en utilisant que $\pi(2n - 1) = \pi(2n)$ pour tout $n \geq 2$.

◆ **ARI.11** (★)

Montrer que, si $n \geq 3$, au moins l'un des nombres $2^n - 1$ et $2^n + 1$ est composé.

◇ [Divers/arithmetiqueexo.tex/ari:12]

En effet, $(2^n - 1)(2^n + 1) = 4^n - 1$ est divisible par 3. De plus chacun des

nombres est plus grand que 3.

◆ **ARI.12**

Soit p un nombre premier, $p \geq 2$.

- 1) Montrer que, si $8p - 1$ est premier, alors $8p + 1$ est composé.
- 2) Montrer que, si $8p^2 + 1$ est premier, alors $8p^2 - 1$ est premier.

◇ [Divers/arithmetiqueexo.tex/ari:13]

1) $(8p - 1)(8p + 1) = 64p^2 - 1 \equiv p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1) \equiv 0 \pmod{3}$ si $p \neq 3$, puisque si l'on prend deux impairs successifs, l'un est divisible

par 3.

2) $8p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ si $p \neq 3$. Donc la première phrase ne saurait être vraie... (c'est tiré par les cheveux...)

◆ **ARI.13** (★)

Montrer que $6 \mid 5n^3 + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ [Divers/arithmetiqueexo.tex/ari:14]

Une simple récurrence en notant que

$$5(n + 1)^3 + (n + 1) = 5n^3 + n + 15 \underbrace{n(n + 1)}_{\text{pair}} + 6.$$

◆ **ARI.14** (★)

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$.

◇ [Divers/arithmetiqueexo.tex/ari:15]

Récurrence avec

$$u_{n+1} = 5u_n - 4 \underbrace{(3^{n-1} + 1)}_{\text{pair si } n \geq 2}.$$

◆ **ARI.15**

Notons $\tau(n)$ le nombre de diviseurs positifs de l'entier n . Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{k=1}^n \text{E} \left(\frac{n}{k} \right).$$

◇ [Divers/arithmetiqueexo.tex/ari:16]

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{k=1}^n \sum_{d \mid k} 1 = \sum_{d=1}^n \sum_{1 \leq k \leq n, d \mid k} 1 = \sum_{d=1}^n \text{E} \left(\frac{n}{d} \right),$$

puisque $\sum_{1 \leq k \leq n, d \mid k} 1$ est le nombre de multiples de d contenus dans $[1, n]$, au

nombre de $\text{E} \left(\frac{n}{d} \right)$.

♦ **ARI.16 (Congruences simultanées & pirates)** (**) Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces. Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces. Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

◊ [Divers/arithmeticqexo.tex/ari:17] des relations de type « Bézout ». On a alors que k_1 et k_2 sont premiers entre eux. De même k_2 et k_3 .
785 pièces d'or. $(k_1 = 46, k_2 = 71 \text{ et } k_3 = 130\dots)$
Il faut écrire $N = 17k_1 + 3 = 11k_2 + 4 = 6k_3 + 5$. Par différences, on obtient

♦ **ARI.17**
Notons $x_1 = 2002^{2002}$, $x_{n+1} = p(x_n)$ où « p » désigne l'opération « somme des chiffres (dans l'écriture décimale) ». Calculer x_5 .

◊ [Divers/arithmeticqexo.tex/ari:18] que $x_5 \leq 10$, donc $x_5 = 4$.
On montre que $x_5 \equiv 4 \pmod{9}$ puis, par une série de majorations logarithmiques,

♦ **ARI.18**
Notons $x_1 = 2003^{2003}$, $x_{n+1} = p(x_n)$ où « p » désigne l'opération « somme des chiffres (dans l'écriture décimale) ». Calculer x_5 .

◊ [Divers/arithmeticqexo.tex/ari:18bis] $1998 + 5 \equiv 5 \pmod{6}$ donc $2003^{2003} \equiv 5^5 \equiv 2 \pmod{9}$. Puis, par une série de majorations logarithmiques, que $x_5 \leq 10$, donc $x_5 = 2$.

♦ **ARI.19**
Notons $x_1 = 2004^{2004}$, $x_{n+1} = p(x_n)$ où « p » désigne l'opération « somme des chiffres (dans l'écriture décimale) ». Calculer x_5 .

◊ [Divers/arithmeticqexo.tex/ari:18ster] $x_5 < 18$, donc $x_5 = 0$ ou $x_5 = 9$. La solution 0 n'est pas envisageable, donc $2004 \equiv 6 \pmod{9}$ donc $2004^{2004} \equiv 6^{2004}$. Or $6^2 \equiv 0 \pmod{9}$, et $2004 \equiv 0 \pmod{2}$ $x_5 = 9$.
donc $2004^{2004} \equiv 0 \pmod{9}$. Puis, par une série de majorations logarithmiques, que

♦ **ARI.20**
Notons $x_1 = 2005^{2005}$, $x_{n+1} = p(x_n)$ où « p » désigne l'opération « somme des chiffres (dans l'écriture décimale) ». Calculer x_5 .

◊ [Divers/arithmeticqexo.tex/ari:18squat] $2004 + 1 \equiv 1 \pmod{6}$ donc $2005^{2005} \equiv 7^1 \equiv 7 \pmod{9}$. Puis, par une série de majorations logarithmiques, que $x_5 \leq 10$, donc $x_5 = 7$.
 $2005 \equiv 7 \pmod{9}$ donc $2005^{2005} \equiv 7^{2005} \pmod{9}$. Or $7^3 \equiv 1 \pmod{9}$, et $2005 =$

♦ **ARI.21**
Notons $x_1 = 2006^{2006}$, $x_{n+1} = p(x_n)$ où « p » désigne l'opération « somme des chiffres (dans l'écriture décimale) ». Calculer x_5 .

◊ [Divers/arithmeticqexo.tex/ari:18quint] série de majorations logarithmiques, que $x_5 \leq 10$, donc $x_5 = 8$.
 $2006 \equiv -1 \pmod{9}$ donc $2005^{2005} \equiv (-1)^{2005} \pmod{9} \equiv 8 \pmod{9}$. Puis, par une

♦ **ARI.22 (Amusant)** (**) Soit N un entier strictement positif. Calculer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{H \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^H \left(1 - \cos^{2m} \left(\frac{(i!)^r \pi}{N} \right) \right).$$

INDICATION : Montrer que la limite cherchée est le plus grand facteur premier de N .

◊ [Divers/arithmeticqexo.tex/div:2bis] Pour $i \in [0; p_n - 1]$, $(i!)^r / N$ n'est pas un entier, et ce quelle que soit la valeur de r , donc le cosinus tend vers 0 quand m tend vers l'infini et la limite cherchée est donc simplement p_n , le plus grand facteur premier.
On décompose $N = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$ où $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{P}^n$. La somme est finie et s'arrête à p_n puisque si $i > p_n$, $(i!)^r / N \in \mathbb{N}$.

♦ **ARI.23**
Si l'on travaille en base 8, donner un critère simple de divisibilité par 7.

◊ [Divers/arithmeticqexo.tex/ari:19] La somme des chiffres est un multiple de 7, et l'on peut itérer.

♦ **ARI.24 (Carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)**
Soit p un nombre premier, $p \geq 3$. Montrer que k est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $k^{(p+1)/2} \equiv k \pmod{p}$.

◊ [Divers/arithmeticqexo.tex/ari:20]

♦ **ARI.25 (Puissances de 7)**
Quel est le dernier chiffre de $7^{7^{7^{7^7}}}$?

◊ [Divers/arithmeticqexo.tex/div:38] $n \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$.
On vérifie $7^4 \equiv 4 \pmod{10}$, $7^2 \equiv 1 \pmod{4}$, $7^{7^{7^7}}$ impair donc $7^{7^{7^7}} \equiv 3 \pmod{4}$ et

♦ **ARI.26**
On suppose que $a^r - 1$ est un nombre premier. Montrer que r est premier et que a vaut 2. Réciproque ?

◊ [Divers/arithmeticqexo.tex/div:39] $2^p - 1$ divise $2^r - 1$: contradiction. Donc r est premier.
On suppose a, r entiers et ≥ 2 .
 $a - 1$ divise $a^r - 1$, qui est premier, donc $a = 2$. Si l'on suppose $r = pq$, alors La réciproque est bien sûr fautive : $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$.

♦ **ARI.27**
Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $10^{3^n} - 1 \equiv 0 \pmod{3^{n+2}}$.

◊ [Divers/arithmeticqexo.tex/div:40] $10^{3^{n+1}} - 1 = (10^{3^n})^3 - 1 = (10^{3^n} - 1)(10^{2 \cdot 3^n} + 10^{3^n} + 1)$.
(Arnaudies).

Essayons une récurrence : la relation n'a rien d'extraordinaire pour $n = 0$, elle dit que 9 est divisible par 9. Supposons qu'elle soit vraie pour un rang n , et utilisons nos connaissances sur les identités remarquables du style $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$: Le premier facteur est par hypothèse divisible par 3^{n+2} , et puisque $10 \equiv 1 \pmod{3}$, le deuxième facteur est divisible par 3. Donc $10^{3^{n+1}} - 1$ est divisible par 3^{n+3} , ce qu'il fallait démontrer.

♦ **ARI.28 (Divisibilité par 7)**
Démontrer le critère suivants de divisibilité par 7 (tiré de *Topics in number theory* de Paul Erdős) : on considère le nombre n écrit en base 10 sous la forme $a_1 a_2 \dots a_q$. On retire le chiffre a_q des unités, que l'on rebranche au nombre $a_1 a_2 \dots a_{q-1}$ ainsi raboté : on obtient $n' = a_1 \dots a_{q-1} - 2a_q$. Alors n est divisible par 7 si et seulement si n' l'est. Vérifier ainsi rapidement que 691068 est divisible par 7.

◊ [Divers/arithmeticqexo.tex/div:41]

♦ **ARI.29**

◊ [Divers/arithmeticqexo.tex/div:42]

♦ **ARI.30** TPE MP – 2001
Démontrer qu'il existe un nombre infini de nombres premiers congrus à -1 modulo 4.

◊ [Rec01/arithmeticq-r1.tex/ari-r:1]

♦ **ARI.31** TPE MP – 2001
Résoudre $x^2 - \overline{3}x + k = 0$ dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$, où $k \in \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$.

◊ [Rec01/arithmeticq-r1.tex/ari-r:2] On peut par exemple bourriner :
 $k = 0$ $x = 0, x = 3$
 $k = 1$ \emptyset
 $k = 2$ $x = 2, x = 1$
 $k = 3$ \emptyset
 $k = 4$ \emptyset
 $k = 5$ \emptyset
 $k = 6$ $x = 7, x = 13$
 $k = 7$ $x = 5, x = 15$
 $k = 8$ \emptyset

$k = 9$ \emptyset
 $k = 10$ \emptyset
 $k = 11$ $x = 8, x = 12$
 $k = 12$ \emptyset
 $k = 13$ $x = 4, x = 16$
 $k = 14$ $x = 9, x = 11$
 $k = 15$ $x = 10$
 $k = 16$ $x = 6, x = 14$

♦ **ARI.32** CCP MP – 2001
Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation : $y^2 = x(x+1)(x+2)(x+8)$.

◇ [Rec01/arithmetic-r1.tex/ari-r:3]

◆ **ARI.33** TPE MP – 2002

Résoudre, dans $(\mathbb{Z}/36\mathbb{Z})^2$ le système
$$\begin{cases} 5x - y = \overline{11} \\ 3x + 5y = \overline{1} \end{cases}$$

◇ [Rec02/arithmetic-r2.tex/ari-r2:1]

obtenir $-x - 7y = 5$, puis un pivot classique donne $x = 2$ et $y = -1$.On multiplie la première équation par 7 (qui est inversible dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$) pour

◆ **ARI.34** CCP PC – 2002

Montrer qu'il n'existe pas de couple $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $y^2 = x(x+1)(x+2)$.

◇ [Rec02/arithmetic-r2.tex/ari-r2:2]

Supposons que $x \geq 1$ soit une solution.

– Si x est impair, (comme $x = 1$ n'est pas solution), alors x est un carré. En effet si p est premier et $p|x$ alors $p|y^2$ donc $p|y$ et $p^2|y^2 = x(x+1)(x+2)$, par conséquent soit $p|x+1$, $p|x+2$ ou $p^2|x$. Les deux premiers cas sont exclus car sinon $p|(x+1) - x = 1$ (ou $p|(x+2) - x = 2$) ce qui est impossible. En raisonnant de même avec les facteurs de x/p^2 , on aboutit à $x = t^2$. On

a $(y/t)^2 = (x+1)(x+2)$, ce qui est impossible puisque $(x+1)(x+2)$ ne peut être le carré (par encadrement) que de $x+1$ ou $x+2$.

– Si $x+1$ est impair, alors de même c'est un carré $x+1 = t^2$. On a $(y/t)^2 = x(x+2)$, donc par encadrement la seule possibilité est $x(x+2) = (x+1)^2$ ce qui n'est pas possible.

Il n'y a pas de solution.

◆ **ARI.35** (★★★) X MP – 2003

Soit \overline{abcdef}^{10} un nombre écrit en base 10, divisible par 13. Montrer que \overline{bcdefa}^{10} est aussi divisible par 13.

◇ [Rec03/arithmetic-r3.tex/r3:193]

Posons $N = abcdef$ et $N' = bcdefa$. On

$$N' = 10(N - 10^6 \cdot a) + a = 10N - a(10^6 - 1).$$

Il ne reste donc qu'à prouver que 13 divise $10^6 - 1$. Or

$$10^6 - 1 = 999 \cdot 1001 = 999 \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13).$$

On peut également le prouver en calculant modulo 13 :

$$10^6 \equiv (-3)^6 \equiv (9)^3 \equiv (-4)^3 \equiv -64 \equiv 1 \pmod{13}.$$

◆ **ARI.36** (★★) X MP – 2003

Soit p un nombre premier. Soit $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

- 1) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ coïncidant avec f sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- 2) Est-ce toujours le cas dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ où $n \geq 2$?

◇ [Rec03/arithmetic-r3.tex/r3:338]

La condition $P(0) = 0$ donne $\alpha_0 = 0$. Par ailleurs,

$$P(2) = \underbrace{\alpha_0}_{=0} + \alpha_1 \times 2 + \underbrace{\alpha_2 \times 4 + \alpha_2 \times 8 + \dots}_{=0 \text{ dans } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$$

et l'équation $2\alpha_1 = 1$ n'admet pas de solution car 2 n'est pas inversible.

◆ **ARI.37** Mines MP – 2003

- 1) Résoudre dans \mathbb{N} l'équation $x^y = y^x$.
- 2) Y a-t-il d'autres solutions dans \mathbb{Q}^+ ? Peut-on les localiser ?

◇ [Rec03/arithmetic-r3.tex/r3:424]

◆ **ARI.38** Centrale MP – 2003

On cherche le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n . Notons \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers.

- 1) On suppose $n \in \mathbb{P}$.
 - a) Résoudre les cas $n = 1, 2$ et 3 .
 - b) Déterminer l'ensemble $\Omega = \{\overline{p} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{0\}) ; \overline{p} \neq \overline{p}^{-1}\}$.
 - c) Calculer $\overline{2} \cdot \overline{3} \cdots \overline{(n-3)} \cdot \overline{(n-2)}$.
 - d) Conclure.
- 2) On suppose que $n \notin \mathbb{P}$.
 - a) Résoudre le cas où $n = ab$, avec a et b distincts supérieurs ou égaux à 2.
 - b) Résoudre le cas $n = p^2$ avec $p \notin \mathbb{P}$.
 - c) Résoudre le cas $n = p^2$ avec $p \in \mathbb{P}$.
 - d) Résoudre dans le cas $n = 4$.
- 3) Récapituler les résultats obtenus.

◇ [Rec03/arithmetic-r3.tex/r3:22]

◆ **ARI.39** Centrale MP – 2003

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Soit d un diviseur de n . Montrer qu'il existe un unique sous-groupe d'ordre d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En déduire que

$$n = \sum_{d|n} \phi(d),$$

où ϕ est la fonction indicatrice d'Euler.

◇ [Rec03/arithmetic-r3.tex/r3:198]

◆ **ARI.40** Centale MP – 2003

Quel est le dernier chiffre de 7^{7^7} ?

◇ [Rec03/arithmetic-r3.tex/r3:310]

On vérifie que $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Il suffit donc de trouver $7^7 \pmod{4}$. Or $7 \equiv$

$$-1 \pmod{4} \text{ donc } 7^7 \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4} \text{ donc } 7^{7^7} \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}.$$

◆ **ARI.41** TPE MP – 2003

Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on considère l'équation

$$\overline{x}^2 = \overline{x}. \tag{E}$$

- 1) Résoudre (E) si n est premier.
- 2) On considère \overline{x} solution de (E). On pose $\alpha = n \wedge x$ et $\beta = n \wedge (x-1)$. Montrer que $\alpha\beta = n$.
- 3) Réciproque ?

◇ [Rec03/arithmetic-r3.tex/r3:95]

◆ **ARI.42** ($24|p^2 - 1$) (★) Mines MP – 2004

Montrer que, pour tout p premier tel que $p \geq 5$, le nombre $p^2 - 1$ est divisible par 24.

◇ [Rec04/arithmetic-r4.tex/r4:154]

$p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$. De plus, p étant impair, $(p+1)$ et $(p-1)$ sont pairs donc ils sont tous les deux divisibles par 2, et l'un d'entre eux est même divisible par 4, donc $p^2 - 1$ est divisible par 8.

De plus, l'un des trois nombres $p-1$, p et $p+1$ est divisible par 3, mais ce n'est pas p par hypothèse, donc $p^2 - 1$ est divisible par 3.

Au total, $p^2 - 1$ est divisible par $3 \cdot 8 = 24$.

◆ **ARI.43** (★★★) Mines MP – 2004

- 1) Soit n un entier ; soit a un entier premier avec n . Montrer que $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. En déduire que, pour tout entier p premier et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k^p \equiv k \pmod{p}$.
- 2) Soit p un entier premier et soit $k < p$ un entier. Montrer que k divise $\binom{p}{k}$.
- 3) Soit $n \geq 2$ tel que, pour tout $a < n$, $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ et, pour tout diviseur d de $n-1$, $a^d \not\equiv 1 \pmod{n}$. Montrer que n est premier.

◇ [Rec04/arithmetic-r4.tex/r4:158]

◆ **ARI.44** (★★) Mines MP – 2004

On note $n = 1222 \cdots 221$ avec 2005 chiffres « 2 » entre les « 1 ». Quelle est la plus grande puissance de 11 qui divise n ?

◇ [Rec04/arithmetic-r4.tex/r4:214]

◆ **ARI.45** (★) Centrale MP – 2004

Déterminer le dernier chiffre en base 10 de $7^{(7^7)}$.

◇ [Rec04/arithmetic-r4.tex/r4:238]

◆ **ARI.46 (Valuation de p dans $n!$)** Centrale MP – 2004

- 1) On note $v_p(n!)$ la valuation de p dans $n!$, c'est-à-dire l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de $n!$. Montrer que

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} E\left(\frac{n}{p^k}\right).$$
 Application : déterminer le nombre de zéros finaux dans l'écriture décimale de $2004!$.
- 2) Soit p un entier premier. Montrer que, pour tout $k \in [1; p-1]$, p divise C_p^k .
- 3) Soit p un entier premier, $p \geq 3$. Montrer que, pour tout $r \geq 1$,

$$(1+p)^{p^r} \equiv 1 + p^{r+1} \pmod{p^{r+2}}.$$

◇ [Rec04/arithmetic-r4.tex/r4:251]

◆ ARI.47	(**)	TPE MP – 2004
Résoudre l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.		

◇ [Rec04/arithmetic-r4.tex/r4:255]

Algèbre générale

Manipulations algébriques

◆ **ALG.1 (Existence d'un idempotent)** (★★★)
 Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition interne associative. Montrer qu'il existe $s \in E$ tel que $s^2 = s$.

◆ [Divers/algebreeoxo.tex/alg:34] Choisissons $a \in E$ quelconque. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} a^{2^n}$. Puisque E est fini, cette suite ne saurait être injective : il existe donc deux éléments u_n et u_{n+p} égaux. Posons $b = a^{2^n}$. Alors $b^{2^p} = b$. Si $p = 1$ on a répondu à la ques-

tion. Si $p > 1$, on remarque que si $x^m = x$ alors x^{m-1} est idempotent puisque $(x^{m-1})^2 = x^{2m-2} = x^m \cdot x^{m-2} = x \cdot x^{m-2} = x^{m-1}$. Alors $s = 2^{2^p-1}$ convient.

◆ **ALG.2** X PC – 2001
 Simplifier $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right)$.

◆ [Rec01/algebree-r1.tex/alg:r:3] On se reporte à l'exercice **POL.17** page 40. On cherche à résoudre formellement

$(X+1)^n = e^{2in\alpha}$ donc $(X+1) = e^{2i\alpha} e^{2i\pi k/n}$ avec $k \in [0; n-1]$.
 Les racines sont donc

$$\lambda_i = e^{2i(\alpha+k\pi/n)} - 1 = 2ie^{i(\alpha+k\pi/n)} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Le produit des racines est donc

$$\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_i = \prod_{k=0}^{n-1} 2e^{i(\alpha+\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2})} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)$$

d'où la formule

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin n\alpha}{2^{n-1}}.$$

◆ **ALG.3** Mines MP – 2001
 Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{2ik\pi/n})^{-1}$.

◆ [Rec01/algebree-r1.tex/alg:r:2] Cf. **POL.74** page 50.

◆ **ALG.4** (★) CCP PC – 2001
 Calcul de $\sum_{k=0}^n (k+1)C_n^k$ et de $\sum_{k=0}^n (-1)^k (k+1)C_n^k$.

◆ [Rec01/algebree-r1.tex/alg:r:4] Posons $A(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+1} = x(1+x)^n$, alors $A'(x) = \sum_{k=0}^n (k+1)C_n^k x^k = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = (1+x)^{n-1} [1 + (n+1)x]$ et le premier truc vaut $A'(1) = (n+2)2^{n-1}$. Pareil pour l'autre.

◆ **ALG.5** TPE MP – 2001
 On pose, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$: $S_{n,p} = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k k^p$.
 1) Calculer $S_{n,0}$ et $S_{n,1}$.
 2) Calculer $S_{n,p}$ pour $p \in [0; n]$. On pourra introduire $t \mapsto (1 - e^t)^n$.

◆ [Rec01/algebree-r1.tex/alg:r:6] $n \geq 2$.
 $S_{n,0} = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k = (1-1)^n = 0$, et $S_{n,1} = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k k = 0$ pour $S_{n,p} = 0$ si $n > p$, et $S_{n,n} = (-1)^n n!$.

◆ **ALG.6** X MP – 2003
 Calculer $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 998 \cdot 999 \cdot 1000$.
 Plus généralement, proposer une méthode de calcul (rapide) de $\sum_{n=1}^N n(n+1) \dots (n+k)$.

◆ [Rec03/algebree-r3.tex/r3:27] Il ne reste qu'à évaluer en $x = 1$.
 On peut passer par des séries entières, et vérifier en dérivant trois fois que

$$D^3 \left(\frac{1-x^{N+1}}{1-x} \right) = \sum_{k=1}^{N-2} k \cdot (k+1) \cdot (k+2).$$

◆ **ALG.7** X MP – 2003
 Soient x_1, \dots, x_n deux à deux distincts, et y_1, \dots, y_n deux à deux distincts, tels que

$$\prod_{i=1}^n (x_i - y_j) \quad \text{ne dépend pas de } j.$$

 Montrer que

$$\prod_{j=1}^n (x_i - y_j) \quad \text{ne dépend pas de } i.$$

◆ [Rec03/algebree-r3.tex/r3:28]

◆ **ALG.8** (★★) CCP PC – 2003
 Simplifier $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.

◆ [Rec03/algebree-r3.tex/r3:56] tié, et l'on obtient donc

$$S_n = \Re \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} \right) = \Re \left((1 + e^{i\theta})^n \right). \text{ On fait apparaître l'angle moi-} \quad S_n = 2^n \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cdot \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

◆ **ALG.9** Navale PC – 2003
 Notons z_1, \dots, z_{n-1} les racines n -ièmes de l'unité (excluant 1). Calculer

$$S = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (z - z_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (z + z_i)}.$$

◆ [Rec03/algebree-r3.tex/r3:442]

◆ **ALG.10** (★) Centrale PC – 2004
 On note $S = \{z \in \mathbb{C} ; z^9 = 1\}$.
 1) Montrer que $\sum_{z \in S} \frac{z^5}{z^4 + a} = -\frac{9a^7}{(1+a^9)}$.
 2) Étudier $\sum_{z \in S} \frac{z^p}{(z^4 + a)}$ pour tout $p \in [0; 9]$.

◆ [Rec04/algebree-r4.tex/r4:02]

Groupes

◆ **ALG.11 (Cycles de \mathfrak{S}_n)**
 Montrer que si c et c' sont des n -cycles de \mathfrak{S}_n qui commutent entre eux, alors il existe un entier r tel que $c' = c^r$.

◆ [Divers/groupesexo.tex/alg:40] Écrivons $c = (1 \ c(1) \dots \ c^{n-1}(1))$ et $c' = (1 \ c'(1) \dots \ c'^{n-1}(1))$.
 L'ensemble $\{1, \dots, n\}$ étant égal à l'ensemble $\{1, c(1), \dots, c^{n-1}(1)\}$, il existe un entier r tel que $c'(1) = c^r(1)$ (et $0 \leq r \leq n-1$).
 De même, choisissons $p \in [1, n]$, alors il existe un entier q tel que $p = c^q(1)$; ce qui achève la démonstration.
 montrons maintenant que $c'(p) = c^r(p)$:
 $c'(p) = c^r(c'(1)) = c^r(c^s(1)) = c^s c^r(1) = c^r c^s(1) = c^r(i)$,

◆ **ALG.12**
 Déterminer l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui commutent avec toutes les permutations de \mathfrak{S}_n , lorsque $n \geq 3$.

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:41]
 Soit σ une telle permutation.
 Soient $i \neq j$ deux éléments de $[1, n]$. On a

$$\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i)\ \sigma(j)) = (i\ j)$$

ce qui montre que σ laisse invariante toute partie à deux éléments.
 Soit $i \in [1, n]$, on peut trouver j, k tels que i, j, k soient distincts deux à deux ($n \geq 3$) donc $\{i, j\}$ et $\{i, k\}$ étant invariantes, on en déduit $\sigma(i) = i$. Donc σ est l'identité.

◆ **ALG.13**
 Soit G un groupe fini d'ordre n . Montrer que, pour tout $x \in G$, on a $x^n = e$.

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:1]
 On note $H = \langle x \rangle$, et on note r son ordre. Alors $r|n$, et il suffit de prouver que $x^r = e$.
 On peut supposer sans restreindre que $H = G$, ou alors on travaille dans H .
 On pose $f: \begin{cases} \mathbb{Z} \longrightarrow H \\ q \longmapsto x^q, \end{cases}$ qui est *surjective* par construction de H . L'ensemble

des $q \in \mathbb{Z}$ tel que $f(x) = e$ forme un sous-groupe de \mathbb{Z} , c'est donc un certain $s\mathbb{Z}$ avec $s \in \mathbb{Z}$. De plus, $q' - q'' \in s\mathbb{Z} \Leftrightarrow f(q')f(q'')^{-1} = e$, ce qui montre que H a autant d'éléments qu'il y a de classes modulo s dans \mathbb{Z} , donc $\text{Card } H = s$ donc $s = r$ et $x^r = e$.

◆ **ALG.14** (*)
 Si un groupe G n'a qu'un nombre fini de sous-groupes, alors G est fini.

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:2]
 On note G_x le groupe engendré par x . $G_x = \{x^n ; n \in \mathbb{Z}\}$. On a alors $G = \bigcup_{x \in G} G_x$, et c'est une union finie.
 Démonstration : En effet, si G_x infini, alors $G_x \simeq \mathbb{Z}$ et il contient tous les $n\mathbb{Z}$ comme sous-groupes, donc C_{x^n} est sous-groupe de C_x pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et ils sont différents. ■

LEMME 1 G_x est fini. Donc G est union d'un nombre fini de sous-groupe finies, donc G fini.

◆ **ALG.15** (*)
 Soit G un groupe d'ordre p avec p impair. Montrer que l'application $x \mapsto x^2$ est bijective.
On rappelle que si G est d'ordre p , alors $x^p = e$ pour tout $x \in E$.

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:3]
 On prendra bien garde à ne pas écrire que f est un morphisme, car ce n'est pas vrai si G n'est pas abélien !!! Ainsi, pour montrer l'injectivité, le recours au noyau est inutile.
 Du coup, c'est la surjectivité qui est importante.
 On considère $\langle x \rangle$ qui est forcément d'ordre impair, qu'on note $2m + 1$, avec $m \in \mathbb{N}$. Donc $x^{2m+2} = x = (x^{m+1})^2$. Donc f surjective. Donc f bijective.

◆ **ALG.16** (★)
 Soit G un groupe. Montrer que l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme si et seulement si la loi de G est commutative.

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:4]
 $x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme si et seulement si

$$\forall x, y \in G, \quad x^{-1}y^{-1} = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$
 En prenant dans cette équation x^{-1} et y^{-1} (puisque $x \mapsto x^{-1}$ est une permutation, donc une bijection), on a montré

$$\forall x, y \in G, \quad xy = yx.$$

◆ **ALG.17** (★)
 Soit G un groupe. Montrer que l'application $x \mapsto x^2$ est un morphisme si et seulement si G est abélien.

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:37]
 On note $\phi : x \mapsto x^2$. Soit $(x, y) \in G^2$, et montrons que $xy = yx$.
 On suppose que ϕ est un homomorphisme, alors $\phi(xy) = (xy)(xy) = \phi(x)\phi(y) = x^2y^2$. Par suite $x(yx)y = x(xy)y$. On multiplie par x^{-1} à gauche et y^{-1} à droite. On en déduit $xy = yx$.

◆ **ALG.18 (Transport de structure)**
 Montrer que \mathbb{R} , muni de la loi $\star : (x, y) \mapsto x \star y = (x^3 + y^3)^{1/3}$ est un groupe.

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:5]
 On considère $\phi : x \mapsto x^{1/3}$ qui est bijective. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $(x + y)^{1/3} = x^{1/3} \star y^{1/3}$, et donc $\phi(x + y) = \phi(x) \star \phi(y)$. L'application ϕ est donc un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur (\mathbb{R}, \star) , donc transporte la structure de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ sur (\mathbb{R}, \star) .
 L'élément neutre de (\mathbb{R}, \star) est donc 0, et le symétrique de x est $-x$.

◆ **ALG.19 (Automorphismes intérieurs)**
 Soit G un groupe. Pour tout $a \in G$, on pose $\phi_a : \begin{cases} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto axa^{-1}. \end{cases}$ Montrer que l'application $\Phi : \begin{cases} G \longrightarrow \text{Aut}(G) \\ a \longmapsto \phi_a \end{cases}$ est un morphisme de groupe de G dans le groupe $\text{Aut}(G)$ des automorphismes de G . Quel est le noyau de Φ ?

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:6]
 1) On vérifie que si $a \in G$, ϕ_a est une bijection et que sa bijection réciproque est $\phi_{a^{-1}}$.
 2) Si $a \in G$, on vérifie sans peine que $\phi_a(xy) = \phi_a(x)\phi_a(y)$, donc que c'est un morphisme, et donc un automorphisme de groupe.
 3) De même, $\phi_b \circ \phi_a = \phi_{ba}$, ce qui montre que Φ est un morphisme de groupe de G dans $\text{Aut } G$.
 4) Le noyau de Φ est formé des éléments tels que $\Phi(a) = \phi_a = \text{Id}_G$, donc si $a \in \text{Ker } \Phi$, on a $axa = ax$ pour tout $x \in G$; le noyau de Φ est donc constitué des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G ,

c'est-à-dire le **centre** de G .

◆ **ALG.20** (*)
 Soit G un groupe fini d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ Soit k un entier premier avec n . Montrer que l'application $x \mapsto x^k$ est une bijection de G sur lui-même.
 INDICATION : *On utilisera Bézout et on montrera que l'application demandée est surjective.*
 Peut-on généraliser à G groupe non fini tel que $x^n = e$ pour tout $x \in G$?

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:7]
 Attention, $x \mapsto x^k$ n'est pas un morphisme si G n'est pas abélien.
 On se souvient que, dans un groupe fini d'ordre n , on a $x^n = e$ pour tout x . Or, par le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que

$$un + vk = 1.$$
 Ceci montre la surjectivité, et comme c'est un ensemble fini, c'est une permutation donc une bijection.
Autre solution : on pose $g : x \mapsto x^v$, et on vérifie que $f \circ g = \text{Id}$ car

$$\forall x \in G \quad f \circ g(x) = x^{vk} = x^{1-un} = x.$$
 Pour tout $y \in G$, on a donc $y = y^{un+vk} = (y^n)^u (y^v)^k = x^k$ avec $x \stackrel{\text{def}}{=} y^v$. Cela reste valable si G est un groupe d'ordre quelconque vérifiant $x^n = e$ pour tout $x \in G$.

◆ **ALG.21 (Transport de structure)**
 Montrer que l'intervalle $] -1 ; 1 [$ muni de la loi $*$: $(x, y) \mapsto x * y = \frac{x+y}{1+xy}$ est un groupe abélien.

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:8]
 Il faut commencer par vérifier que $x * y \in] -1 ; 1 [$, ce qui est une petite étude :

$$\begin{cases} 1 - x * y = \frac{1 - xy - x - y}{1 + xy} = \frac{(1-x)(1-y)}{1+xy} > 0 \\ 1 + x * y = \frac{1 + xy + x + y}{1 + xy} = \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} > 0 \end{cases}$$
 Enfin, si $x, y, z \in] -1 ; 1 [$, on a

$$x * (y * z) = \dots = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}.$$
 Or, par commutativité, on a $(x * y) * z = z * (x * y)$, qui donne évidemment le même résultat (il faut permuter x, y et z). Donc la loi est associative.
 Enfin, l'inverse de tout x est $-x$.
 Ceci montre que $(] -1 ; 1 [, *)$ est un groupe abélien.
 On peut également transporter la structure de groupe additif au moyen de l'application th .

◆ **ALG.22 (Union de deux sous-groupes)** (**)
 Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G . Montrer que $K \cup H$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:9]
 « est évident.
 Supposons que $K \cup H$ est un sous-groupe de G . Supposons de plus que $H \not\subset K$. Il existe alors $a \in H$ tel que $a \notin K$.
 □ Soit $x \in K$, et montrons $x \in H$. Puisque x et a appartiennent à $H \cup K$, il en est de même de xa . Or si $xa \in K$, on aurait $a = x^{-1}(xa) \in K$ ce qui est faux, donc $xa \in H$, donc $xa = (xa)x^{-1} \in H$. □
 Donc $K \subset H$.

◆ **ALG.23 (Groupe modulaire)**
 On note $\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} ; \Im z > 0\}$ le **demi-plan de Poincaré**. On définit ensuite l'application f qui à toute matrice $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe la fonction homographique $f_A : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.
 1) Montrer que si $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors $f_A \subset \mathbb{P}$.
 2) Montrer que l'application $\psi : A \mapsto f_A$ est un morphisme de groupes de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ dans le groupe des permutations de \mathbb{P} .
 3) Déterminer $\text{Ker } \psi$.
 4) On note $G = \text{Im } \psi$, que l'on appelle **groupe modulaire**.
 2) On vérifie rapidement que $f_A \circ f_B = f_{AB}$. Puisque $f_1 = \text{Id}_{\mathbb{P}}$, cela implique que f_A est bijective, et que sa réciproque est $f_{A^{-1}}$. Donc $f_A(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$ et ψ est un morphisme de groupes.
 3) Soit $A \in \text{Ker } \psi$, alors $f_A = \text{Id}_{\mathbb{P}}$, donc $az + b = cz^2 + dz$ pour tout $z \in \mathbb{P}$, donc $b = c = 0$ et $a = d$, donc $A = \pm 1$, et $\text{Ker } \psi = \{1, -1\}$.

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:27]
 1) On vérifie que $f_A : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, car après calculs

$$\Im(f_A(z)) = \frac{(ad-bc)\Im z}{|cz+d|^2} > 0.$$

◆ **ALG.24 (Famille génératrice minimale)** (***)
 Soit G un groupe fini d'ordre n , et m le plus petit entier tel qu'il existe une famille (x_1, \dots, x_m) d'éléments de G engendrant G . Montrer que $\text{Card } G \geq 2^m$.

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:29]
 Card $H_{k+1} \geq 2 \text{ Card } H_k$. Puis récurrence immédiate.
 On pose, pour $k \in [1, m]$: $H_k \stackrel{\text{def}}{=} \langle x_1, \dots, x_k \rangle$. Alors les H_k forment une suite croissante pour l'inclusion, et de plus cette suite est non stationnaire (sinon x_{k+1} s'écrirait en fonction des x_1, \dots, x_k et la famille (x_1, \dots, x_k) serait génératrice et de cardinal $m-1$). Ils sont donc distincts, et même disjoints, et H_{k+1} contient à la fois H_k et x_{k+1} qui sont disjoints. Ainsi
 On peut également prendre une famille génératrice (x_1, \dots, x_m) et considérer l'ensemble des éléments de la forme

$$x = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m}$$
 avec $\alpha_k \in \{0, 1\}$. On montre que tous les éléments de cet ensemble sont dis-

incts (en faisant les choses *proprement* car les produits ne commutent pas). En effet, si deux de ces éléments sont distincts, il existe un plus petit indice i_0 tel que $\alpha_i \neq \beta_i$. On peut supposer par exemple $\alpha_{i_0} = 1$ et $\beta_{i_0} = 0$. On exprime alors

x_{i_0} en fonction des autres, ce qui est une contradiction.

Or le cardinal de cette famille est 2^m .

◆ **ALG.25** (***)

Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G . On pose

$$HK \stackrel{\text{def.}}{=} \{hk; h \in H, k \in K\}.$$

- 1) Donner une CNS pour que HK soit un sous-groupe de G .
- 2) Montrer, de plus, que si G est d'ordre fini, alors

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}.$$

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:30]

Alors il y a équivalence entre les énoncés :

- 1) Il faut et il suffit que $HK = KH$, démonstration plus ou moins triviale en faisant attention.
- 2) Supposons G d'ordre fini. Considérons maintenant l'application

$$\phi: \begin{cases} H \times K \longrightarrow HK \\ (h, k) \longmapsto hk. \end{cases}$$

Notons $J = H \cap K$, qui est un sous-groupe de G .

- (a) $\phi(h, k) = \phi(h', k')$;
- (b) il existe $j \in J$ tel que $(h', k') = (hj, j^{-1}k)$.

(Il suffit pour cela de poser $j = kk'^{-1} = h'^{-1}h$ et de noter que $j \in J$...) Ainsi, tout élément de HK a exactement $|J|$ antécédents par ϕ puisque, à (h, k) fixé, l'application $j \mapsto (hj, j^{-1}k)$ est bijective. Le lemme des bergers permet de conclure.

◆ **ALG.26 (Union de sous-groupes)** (*)

Soit G un groupe.

- 1) Montrer que G ne saurait être la réunion de deux sous-groupes propres (c'est-à-dire distincts de G et de $\{e\}$).
- 2) Peut-on généraliser à une réunion finie de sous-groupes propres ?
- 3) Un groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ peut-il être réunion de ses sous-groupes propres ?

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:35]

diction. □

- 1) □ Supposons $G = H \cup K$ où H et K sont des sous-groupes propres. Alors $G \setminus H$ et $G \setminus K$ sont non vides. On choisit $x \in G \setminus H$ et $y \in G \setminus K$. Considérons maintenant xy . Il ne saurait être dans H car sinon y serait dans H . Il ne saurait non plus être dans K sinon x serait dans K . Contra-

- 2) En revanche un groupe fini non cyclique est réunion (finie!) de ses sous-groupes cycliques... Par exemple, considérer $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- 3) Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'élément 1 ne peut appartenir à aucun sous-groupe propre (puisque le groupe monogène $\text{gr}(1)$ est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tout entier!)

◆ **ALG.27**

Soit G un groupe fini d'ordre pair. Montrer qu'il existe un élément, distinct de l'élément neutre, qui est son propre inverse.

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:38]

Dans le cas contraire, G serait la réunion disjointe de $\{e\}$ et d'ensembles du type $\{x, x^{-1}\}$, de cardinal 2. L'ordre de G serait alors impair.

◆ **ALG.28** (**)

- 1) Montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le groupe \mathbb{Q}/\mathbb{Z} contient exactement un sous-groupe cyclique d'ordre n .
- 2) Montrer que tout groupe est la réunion de ses sous-groupes monogènes.
- 3) Comparer les ordres de deux sous-groupes cycliques G et H de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} qui vérifient $G \subset H$.
- 4) Soit $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Déterminer les sous-groupes cycliques qui le contiennent.
- 5) Déterminer les morphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .
- 6) Déterminer les morphismes de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} dans \mathbb{Z} .

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:39]

4) Tout $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est de la forme p/q avec $p \wedge q = 1$ et $p < q$. Il est élément du groupe cyclique $\langle \frac{1}{q} \rangle$ et dans tous les groupes cycliques $\langle \frac{1}{n}q \rangle$.

- 1) Le groupe monogène $\langle \frac{1}{n} \rangle$ est d'ordre n . Si G est un groupe cyclique d'ordre n , il est engendré par un élément de la forme p/q où $p \wedge q = 1$ et $0 \leq p \leq q$. Alors $np/q \in \mathbb{Z}$ donc $np = kq$ où k est un entier. Puisque p divise kq et $p \wedge q = 1$, on en déduit que p divise k , donc q est multiple de n , et ensuite $q = n$ etc.
- 2) T.
- 3) T.

- 5) Soit f un morphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Son image est un groupe cyclique de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , contenu dans le groupe cyclique $\langle \frac{1}{n} \rangle$. Pour déterminer un tel morphisme, il suffit de connaître l'image de 1 (en tant qu'élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) dans $\langle \frac{1}{n} \rangle$; il y a n possibilités, donc n morphismes possibles.
- 6) Le seul est le morphisme nul. En effet, tout élément de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est d'ordre fini, donc son image est d'ordre fini, donc c'est 0.

◆ **ALG.29** (***)

Montrer qu'un groupe n'ayant aucun sous-groupes propre est fini et que son ordre est un nombre premier.

◇ [Divers/groupesexo.tex/div:34]

- 1) On suppose que G est d'ordre infini. Alors, pour tout $x \in G$, on a $\langle x \rangle = \{e\}$ ou $\langle x \rangle = G$. Soit $x \neq e$ quelconque; alors $x^2 \neq e$ et $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle$; ainsi, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^{2^n} = x$. Ah oui, mais alors cela veut dire que $x^{2^n-1} = e$ et $\langle x \rangle$ est donc d'ordre fini; c'est donc un sous-groupe propre de G : contradiction. Par suite G est d'ordre fini.

- 2) Notons p l'ordre du groupe G . Pour tout $x \in G$ différent de e , on a toujours $\langle x \rangle = G$ donc l'ordre de tout élément distinct de e est égal à p . Bon, supposons que p soit composé : $p = ab$.

Soit $x \in G \setminus \{e\}$. Alors $x^p = (x^a)^b = e$. Ah bon, mais alors soit $b = p$ (et $a = 1$), soit $x^a = e$, dans quel cas $a = p$ et $b = 1$.

Donc p est premier.

◆ **ALG.30** (*)

Soit G un groupe. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $x \mapsto x^n$ est un morphisme de groupe surjectif. Montrez que, pour tout $x \in G$, x^{n-1} commute avec tous les éléments de G .

◇ [Divers/groupesexo.tex/alg:52]

Soient $x, y \in G$. Il existe z tel que $y = z^n$. Alors

$$\begin{aligned} xyx^{-1} &= xz^n x^{-1} = (xz x^{-1})^n \\ &= x^n z^n x^{-n} = x^n y x^{-n} \end{aligned}$$

où l'égalité « * » a lieu par morphisme de groupe, d'où, par multiplication par x^{-1} à gauche et x à droite : $y x^{n-1} = x^{n-1} y$.

◆ **ALG.31**

Soient m et n deux entiers, on pose $d = m \wedge n$. Déterminer les morphismes de groupe de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

◇ [Divers/groupesexo.tex/div:31]

1^{er} cas : $m \wedge n = 1$. Alors $m\phi(1) = \phi(m) = \bar{0}$ donc $m\phi(1) = nk$ mais $m \wedge n = 1$ donc $m|k$ donc $\phi(1)$ divise n donc $\phi(1) = 0$ [n] : le seul morphisme est le morphisme nul.

relation « modulo n' », dont la projection est notée Π : c'est un morphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n'\mathbb{Z}$. L'application $\Pi \circ \phi$ est alors un morphisme de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n'\mathbb{Z}$ et $m \wedge n' = 1$, ce qui prouve que $\phi(1) \equiv 0$ [(n')]. Ainsi, il y a d morphismes différents, définis par $\phi_k(1) = kn'$.

2^e cas : $m \wedge n = d$. On écrit $n = n'd$, et on quotiente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par la

◆ **ALG.32** (**)

Soit ϕ un morphisme de groupe dans \mathfrak{S}_n dans C^* . Montrer que ϕ est constant sur l'ensemble des transpositions. En déduire ϕ .

◇ [Divers/groupesexo.tex/div:32]

Pour toute transposition s , $\phi(s \circ s) = \phi(\text{Id}) = 1 = \phi(s) \cdot \phi(s)$ donc $\phi(s) \in \{-1, 1\}$.

De même, $(i, j) = (i, k)(j, \ell)(k, \ell)(j, \ell)(i, k)$ ce qui montre que $\phi(i, j) = \phi(k, \ell)$.

Soient $i, j, k \in [1; n]$ sont distincts, on écrit $(i, j) = (k, j)(k, i)(k, j)$ et on obtient $\phi(i, j) = \phi(k, i)$.

Conclusion : ϕ est constant (égal à ± 1) sur l'ensemble des transpositions. Puisque toute permutation est un produit de transpositions :

$$f = \text{Id} \text{ ou } f = \text{sgn}$$

◆ **ALG.33**

On suppose G abélien d'ordre pq , où p et q sont des premiers distincts. Montrer que G est cyclique.

◇ [Divers/groupesexo.tex/div:33]

◆ **ALG.34** (*)

Soit G un groupe, d'élément neutre e . Soient $a, b \in G$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $(ab)^n = e$. Montrer que $(ba)^n = e$.

◇ [Divers/groupesexo.tex/div:187]

$$(ab)^n = a(ba)^{n-1}b = e \text{ donc } (ba)^{n-1} = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1} \text{ d'où le résultat.}$$

◆ **ALG.35**

◇ [Divers/groupesexo.tex/div:188]

◆ **ALG.36**

◇ [Divers/groupesexo.tex/div:189]

◆ **ALG.37 (Centre d'un groupe)** TPE MP – 2001

Soit (G, \star) un groupe. On pose $\Gamma \stackrel{\text{def.}}{=} \{\alpha \in G; \forall x \in G, \alpha \star x = x \star \alpha\}$. Montrer que Γ est un sous-groupe de G .

◇ [Rec01/groupe-r1.tex/alg-r:8]

Soient $\alpha, \beta \in \Gamma$, alors

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) = \alpha(x\beta) = (\alpha x)\beta = \alpha x \beta$$

donc $\alpha\beta \in \Gamma$.

◆ **ALG.38** CCP MP – 2002

Notons \mathfrak{S}_n le groupe symétrique d'ordre n et $\mathcal{A}(n)$ le nombre d'éléments σ de \mathfrak{S}_n qui vérifient $\sigma^2 = \text{Id}$ (involutions). Trouver une formule récurrente entre $\mathcal{A}(n+1)$, $\mathcal{A}(n)$ et $\mathcal{A}(n-1)$. Même question pour les éléments vérifiant $\sigma^3 = \text{Id}$.

◊ [Rec02/groupe-r2.tex/alg-r2:5]

On compte les possibilités pour σ en fonction de $\sigma(n+1)$:

- Soit $\sigma(n+1) = n+1$ et il y a $\mathcal{A}(n)$ possibilités pour σ .
- Soit $\sigma(n+1) = p \leq n$, pour p fixé, il y a $\mathcal{A}(n-1)$ possibilités et n choix pour p .

Donc $\mathcal{A}(n+1) = \mathcal{A}(n) + n\mathcal{A}(n-1)$.

Le même genre de raisonnement en degré trois donne $\mathcal{A}(n+2) = \mathcal{A}(n) + n(n-1)\mathcal{A}(n-2)$ (soit $n+1$ est fixe, soit l'orbite de $n+1$ est formée de exactement trois éléments $n+1, p, q$).

◆ **ALG.39** CCP PC – 2002
Les groupes $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ sont-ils isomorphes ? Si oui, trouver l'isomorphisme.

◊ [Rec02/groupe-r2.tex/alg-r2:6]

Supposons que ϕ soit un isomorphisme. Or 1, en tant qu'élément de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, engendre ce groupe (pour la loi « + »), et il est d'ordre 8. On cherchera en vain un générateur de l'autre, car tous les éléments sont d'ordre 4 !

◆ **ALG.40** Mines MP – 2003
Si $h \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$, on pose

$$M_{h,x} = \begin{pmatrix} 1 & h & h \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix}.$$

Montrer que $G = \{M_{h,x} ; h \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^*\}$ est un groupe.

◊ [Rec03/groupe-r3.tex/r3:72]

On note $(h, x) = M_{h,x}$. On vérifie immédiatement que

$$(h, x) \star (h', x') = (h' + 2hx', 2xx').$$

$M_{0, \frac{1}{2}}$. Tout élément est inversible et

$$(h, x)^{-1} = \left(-\frac{h}{2x}, \frac{1}{4x}\right).$$

On a donc bien une loi interne de multiplication, l'élément neutre étant $E =$ Enfin, l'associativité vient de l'associativité de $(\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}), \cdot)$.

◆ **ALG.41** Mines MP – 2003
Quels sont les générateurs de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$? En déduire tous les automorphismes de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

◊ [Rec03/groupe-r3.tex/r3:85]

Ce sont les entiers premiers avec 10, soit

$$\mathcal{G} = \{1, 3, 7, 9\}.$$

Un automorphisme de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ est donné par l'image de 1. Il y en a donc 4 au total.

◆ **ALG.42** (♣) Mines MP – 2003
Soit $a > 0$. On pose $G = \{M_x \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) ; x \in \mathbb{R}\}$ avec $M_x = \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
G est-il un groupe ? Est-il isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$?

◊ [Rec03/groupe-r3.tex/r3:268]

$M_x \cdot M_y = M_{x+y}$ donc isomorphisme.

◆ **ALG.43** Centrale MP – 2003
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle G_n le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

- 1) Déterminer G_1, G_2, G_3 . Déterminer le cardinal de G_n .
- 2) Démontrer que, pour $n \geq 3$, il existe un entier naturel λ_n impair tel que $3^{2^{n-1}} = 1 + 2^n \lambda_n$.
- 3) Quel est l'ordre de $\bar{3}$ dans G_n ?
- 4) Montrer que $\bar{-1} \notin \text{gr}(\bar{3})$.
- 5) Montrer que G_n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z})$.

◊ [Rec03/groupe-r3.tex/r3:314]

◆ **ALG.44 (Théorème chinois)** (★) Centrale MP – 2003
Trouver les couples $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}, +)$ soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.

◊ [Rec03/groupe-r3.tex/r3:208]

Il faut et il suffit que m et n soient premiers entre eux.

S'ils ont un **dénominateur commun** on pose $d = m \wedge n$, alors $\langle mn/d \rangle$ est un sous-groupe cyclique d'ordre d de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, et c'est le seul. En revanche, $(n/d, 0)$ et $(0, m/2)$ sont deux éléments d'ordre d engendrant des sous-groupes d'ordre d distincts de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Si m et n sont premiers entre eux, alors on construit l'application

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \\ (a, b) \longmapsto ma + nb \end{cases}$$

dont on vérifie que c'est un isomorphisme (l'application réciproque est $p \mapsto ([p]_m, [p]_n)$, où $[p]_m$ désigne la classe de p modulo m).

◆ **ALG.45** Centrale MP – 2003

On note B le sous-groupe de $\text{GL}_2(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures et $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que $\text{GL}_2(\mathbb{K})$ est la réunion disjointe de B et de

$$B' = \{bwb' ; (b, b') \in B^2\}.$$

- 2) Trouver tous les sous-groupes de $\text{GL}_2(\mathbb{K})$ contenant B.

◊ [Rec03/groupe-r3.tex/r3:209]

◆ **ALG.46** (★★) Mines MP – 2003
Soient G un groupe fini, et A et B des parties de G telles que $\text{Card}(A) + \text{Card}(B) > \text{Card}(G)$. Mq $A \cdot B = G$, où l'on a noté $A \cdot B = \{ab ; a \in A \text{ et } b \in B\}$.

◊ [Rec03/groupe-r3.tex/r3:453]

Soit g un élément quelconque de G. On veut montrer qu'il s'écrit sous la forme $g = ab$, avec $(a, b) \in A \cdot B$.

L'ensemble $A' = A^{-1}g$ a même cardinal que A. Il en résulte que son intersection avec l'ensemble B est non vide : il existe $(a, b) \in A \cdot B$ tels que $a^{-1}g = b$, c'est-à-dire tel que $g = ab$.

◆ **ALG.47** ENS Ulm MP – 2004
Soit $(M, +)$ un groupe abélien.

- 1) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un \mathbb{Q} -espace vectoriel V et $\phi : M \rightarrow V$ un morphisme de groupes injectif.
- 2) Trouver un groupe abélien G tel qu'il n'est pas possible de construire un isomorphisme entre G et un \mathbb{Q} -espace vectoriel.

◊ [Rec04/groupe-r4.tex/r4:190]

$$\forall x \in M \setminus \{0\} \quad k \neq \ell \Rightarrow kx \neq \ell x.$$

- 1) La condition nécessaire et suffisante est :
- 2) \mathbb{Z} par exemple.

◆ **ALG.48 (Groupes de Prüfer)** (★★) Centrale MP – 2004
Soit p un entier premier. On pose $G_p = \left\{z \in \mathbb{C} ; \exists k \in \mathbb{N} \quad z^{p^k} = 1\right\}$.

- 1) Montrer que G est un groupe.
- 2) Montrer que tous ses sous-groupes propres sont cycliques, et qu'il n'existe pas de sous-groupe propre maximal pour l'inclusion.
- 3) Montrer qu'il n'y a pas de famille génératrice finie de G_p .

◊ [Rec04/groupe-r4.tex/r4:157]

la définition. Si $k_0 = \infty$, montrer que $H = G$. Sinon, H est évidemment cyclique.

- 1) \mathbb{T} .
- 2) Soit H un sous-groupe. On note $k_0 = \sup k$ où k est l'entier minimal de
- 3)

◆ **ALG.49** (★★) CCP MP – 2004
Spot G un groupe abélien de cardinal n . Soient $(a, b) \in G^2$ tous deux d'ordre p premier et tels que $b \notin \langle a \rangle$. On note $H = \langle a \rangle$, $K = \langle b \rangle$ et $HK = \{hk ; (h, k) \in H \times K\}$.

Montrer que H est un sous-groupe de G et déterminer son cardinal. Montrer que G a au moins $p^2 - 1$ éléments d'ordre p .

◊ [Rec04/groupe-r4.tex/r4:171]

◆ **ALG.50** (★) Centrale PC – 2005
Notons $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \right\}$. Est-ce un groupe pour le produit matriciel usuel ?

◊ [Rec05/groupe-r5.tex/r5:70]

Anneaux

◆ **ALG.51**
Dans un anneau principal, toute suite croissante d'idéaux est stationnaire.

◊ [Divers/anneaux.tex/alg:10]

existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_{n_0}$, et la suite est stationnaire alors.

On pose $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n$, alors c'est un idéal, donc $I = xA$. Or $x \in I$ donc il

◆ **ALG.52 (Formule d'inversion de Möbius)** (★★)

But de l'exercice : soient f, g deux fonctions de \mathbb{N} dans \mathbb{C} . On suppose que l'on connaît une relation donnant f en fonction de g , et qui s'écrit :

$$(*) \quad f(n) = \sum_{d|n} g(d),$$

et on voudrait pouvoir exprimer g en fonction de f .

On note \mathfrak{F} l'ensemble des fonction de \mathbb{N}^* dans \mathbb{C} , muni de l'addition usuelle et du produit noté \star et défini par

$$\forall b, h \in \mathfrak{F}, \quad \forall n \geq 1, \quad (b \star h)(n) = \sum_{d|n} b(d)h(n/d).$$

- 1) Montrer que $(\mathfrak{F}, +, \star)$ est un anneau commutatif. Quel est son élément unité ?
- 2) Montrer que $f \in \mathfrak{F}$ est inversible si et seulement si $f(1) \neq 0$.
- 3) On pose $\mu(1) = 1$, si p_1, \dots, p_n sont des entiers premiers distincts, $\mu(p_1 \cdots p_n) = (-1)^n$ et pour tout entier n différent de 1 et qui n'est pas un produit de nombres premiers distincts, $\mu(n) = 0$. Calculer $\mu \star 1$, où $\mathbf{1}$ est la fonction constante en 1. En déduire la formule donnant g en fonction de f sachant $(*)$.

◇ [Divers/anneauxexo.tex/alg:11]

rence... $h(1) = 1/f(1)$, etc.

$\chi = (1, 0, 0, \dots)$ est l'élément unité. Si $f(1) \neq 0$, on construit par récurrence...

◆ **ALG.53 (Anneau de Boole)**

Soit A un anneau dans lequel, pour tout élément $x \in A$, on a $x^2 = x$. Un tel anneau est appelé **anneau de Boole**.

- 1) Donner un exemple d'un tel anneau.
- 2) Montrer que, pour tout $a \in A$, on a $2a = 0$. En déduire que A est commutatif.
- 3) Montrer que A ne peut se réduire à trois éléments.
- 4) On suppose que A est fini et de cardinal strictement supérieur à 2. Montrer que A possède des diviseurs de zéro. (On considèrera un élément de la forme $xy(x+y)$.)
- 5) Montrer que, si A est de cardinal fini, alors ce cardinal est une puissance de 2.

◇ [Divers/anneauxexo.tex/alg:12]

ce qui montre que $xy = yx : A$ est commutatif.

- 1) L'anneau $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ où $+$ est la différence symétrique.
- 2) Soit $a \in A$, alors $(a+a)^2 = a^2 + 2a^2 + a^2 = 4a^2 = 4a$, mais $(a+a)^2 = a+a = 2a$ donc $4a = 2a$ donc $2a = 0$ ou, ce qui revient au même, $a = -a$.
Si $x, y \in A$, on a

$$\begin{cases} (x+y)^2 = x+y \\ (x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y, \end{cases}$$
- 3) On sait que $0 \neq 1$. Supposons $A = \{0, 1, a\}$. Seulement $a+1$ ne peut être égal à 0, sinon $a = -1 = 1$, et pas non plus égal à 1 sinon $a = 0$, ni égal à a , sinon $1 = 0$. D'où contradiction.
- 4) On suppose que A a au moins 4 éléments. Soit $x \in A$ tel que $x \neq 1$ et $x \neq 0$. Alors $x(x+1) = x^2 + x = x + x = 0$.

◆ **ALG.54 (Centre d'un anneau)** (★)

Soit A un anneau et notons $C \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in A ; \forall y \in A, \quad xy = yx\}$ le **centre** de A . Montrer que C est un sous-anneau de A .

◇ [Divers/anneauxexo.tex/alg:13]

ce qui prouve que $ab \in C$ et $ba \in C$.

On a $C \neq \emptyset$ car il contient le neutre 1_A .

De plus, si $a, b \in C$ et si $x \in A$, on a

$$\begin{aligned} (ab)x &= a(bx) = a(xb) = (ax)b = x(ab) \\ (a-b)x &= ax - bx = xa - xb = x(a-b), \end{aligned}$$

◆ **ALG.55 (x nilpotent $\Rightarrow (1-x)$ inversible)** (★)

Soit x un élément nilpotent d'un anneau A , c'est-à-dire un élément tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^p = 0$. Montrer que $(1-x)$ est inversible et donner son inverse en fonction de x .

◇ [Divers/anneauxexo.tex/alg:14]

ce qui montre que $(1-x)$ est inversible et que son inverse est $\sum_{n=0}^{p-1} x^n$.

La formule des anneaux nous permet d'écrire

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{p-1}) = 1-x^p = 1,$$

◆ **ALG.56 ($A[\sqrt{d}]$)**

Soit A un anneau commutatif, non nul, et soit $d \in A$. On introduit sur l'ensemble $A \times A$ l'addition canonique $(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$ et le produit

$$(x, y) \star (x', y') \stackrel{\text{def.}}{=} (xx' + dy'y', xy' + yx').$$

- 1) Montrer que $(A, +, \star)$ est un anneau commutatif non nul, qu'on note $A[\sqrt{d}]$.
- 2) Soit K un corps. Si d n'est pas un carré dans \mathbb{K} , montrer que $F = K[\sqrt{d}]$ est un corps. Identifier $\mathbb{R}[\sqrt{-1}]$.

◇ [Divers/anneauxexo.tex/alg:22]

◆ **ALG.57 ($(1-ab)$ inversible $\Rightarrow (1-ba)$ inversible)** (★★★)

Soit A un anneau, et $a, b \in A$. On suppose que $1-ab$ est inversible. Montrer que $1-ba$ est inversible :

- 1) en supposant d'abord que ab est nilpotent, et en calculant l'inverse de $(1-ba)$ en fonction de a, b et $(1-ab)^{-1}$;
- 2) dans le cas général.

◇ [Divers/anneauxexo.tex/alg:26]

verse de $1-ba$ est

- 1) si ab est nilpotent, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $(ab)^p = 0$, et alors

$$(1-ab)^{-1} = 1 + ab + (ab)^2 + \dots + (ab)^{p-1}.$$

Mais alors ba est nilpotent puisque $(ba)^{p+1} = b(ab)^p a = 0$, donc l'in-

$$(1-ba)^{-1} = 1 + ba + \dots + (ba)^p = 1 + b(1-ab)^{-1}a.$$

- 2) Il ne reste plus qu'à vérifier que $1 + b(1-ab)^{-1}a$ est bien l'inverse de $1-ba$ dans le cas général, en multipliant à gauche ou à droite.

◆ **ALG.58 (Éléments inversibles de $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$)** (★)

On note $A = \{a + b\sqrt{2} ; (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

- 1) Montrer que A est un sous-anneau intègre de \mathbb{R} .
- 2) Pour tout $x = a + b\sqrt{2} \in A$, on pose $N(x) \stackrel{\text{def.}}{=} a^2 - 2b^2$. Montrer que, pour tout $x, y \in A$, $N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)$.
- 3) En déduire que x est inversible dans A si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
- 4) Montrer que les éléments de la forme $\pm(1 \pm \sqrt{2})^n$ sont inversibles.
- 5) On veut montrer la réciproque. Montrer qu'on peut se ramener au cas $x = a + b\sqrt{2}$ avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$. Montrer qu'alors x est de la forme $(1 + \sqrt{2})^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et conclure.

INDICATION : Si $b \geq 1$, on considèrera $x' = x/(1 + \sqrt{2})$.

◇ [Divers/anneauxexo.tex/alg:28]

- 1) A contient \mathbb{Z} donc $A \neq \emptyset$. On vérifie que $x+y$ et $x \cdot y$ appartiennent à A , donc A est un sous-anneau. \mathbb{R} étant intègre, A est intègre.
- 2) Calcul.
- 3) Si x inversible, alors $N(x)$ inversible dans \mathbb{Z} . Réciproquement, si $N(x) = \varepsilon$, on pose $y = a - b\sqrt{2}$, alors $xy = \varepsilon$, donc εy est l'inverse de x dans A .
- 4) On a $N(\pm(1 + \sqrt{2})^n) = (-1)^n$, donc les éléments $(1 + \sqrt{2})^n$ sont inversibles dans A .

- 5) Soit $x = a + b\sqrt{2} \in A$ inversible. On peut supposer $b \geq 0$. Or, par passage à l'inverse $a + b\sqrt{2} \leftrightarrow -a + b\sqrt{2}$ donc on peut aussi (quitte à changer x en x^{-1}) prendre $a \geq 0$. Si $b = 0$ alors $a = \pm 1$. Si $b \geq 1$, on pose $x' = x/(1 + \sqrt{2}) = a' + b'\sqrt{2}$ avec $a' = 2b - a$ et $b' = a - b$. Alors l'équation $a'^2 = 2b'^2 \pm 1$ montre que $0 < b \leq a < 2b$, et donc $b' = a - b \in [0, b[$. Si $b' = 0$ tat mieux, c' est fini car alors $a' = 1$, sinon on recommence, et la suite $(b^{(n)})_n$ décroît strictement, donc finit par retomber sur 0. Alors $x^{(n)} = x(1 + \sqrt{2})^n$.

◆ **ALG.59** (★★)

Notons \mathcal{A} l'ensemble des suites stationnaires d'entiers relatifs.

- 1) Montrer que \mathcal{A} est un anneau.
- 2) Trouver tous les morphismes d'anneaux de \mathcal{A} dans \mathbb{Z} .
- 3) Montrer que l'ensemble des suites stationnaires en 0 est un idéal de \mathcal{A} . Est-ce un idéal principal ?

◇ [Divers/anneauxexo.tex/alg:44]

- 1) \mathbb{I} .
- 2) Non trivial ! On se reporte d'abord à l'exercice **ALG.66** pour voir que les formes coordonnées fonctionnent.

On décompose ensuite : toute suite stationnaire est la somme d'une suite stationnaire en 0 et d'un multiple entier de la suite constante $\mathbf{1} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$, la constante étant la valeur limite ℓ de la suite. D'une part $\phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ par propriété de morphisme d'anneaux (unitaires). Ensuite, une suite stationnaire en 0 est somme finie d'éléments de la forme

$$e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$$

↑
 i -ième position

Il est évident que

$$\phi(e_i) \cdot \phi(e_j) = \phi(e_i \cdot e_j) = \phi(0) = 0$$

dès que $i \neq j$, et $\phi(e_i^2) = \phi(e_i)^2$ donc il y en a au maximum un égal à 1, et les autres sont nuls. On sépare alors deux cas :

- **1^{er} cas** : tous les $\phi(e_i)$ sont nuls ; alors $\phi(u) = \phi(\ell \mathbf{1}) = \ell$:

$$\phi : u \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

- **2^{es} cas** : il existe un indice $i \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(u_j) = \delta_{i,j}$. Alors $u = (u - \ell \mathbf{1}) + \ell \mathbf{1}$ et

$$\phi(u) = (u_i - \ell) + \ell = u_i,$$

donc

ϕ est une forme coordonnée.

- 3) Non, par l'absurde : si $I = xA$ avec x stationnaire en 0, alors on prend une suite qui stationne en 0 plus loin que x et on aboutit à une contradiction !

◆ **ALG.60** (★★)

Soit A un anneau ne possédant aucun élément nilpotent à part 0. Soit $a \in A$ tel que $a^2 = a$. Montrer que a commute avec tous les éléments de A .

◇ [Divers/corpsexo.tex/alg:43]

dédit la table de multiplication et d'addition de \mathbb{F}_4 .Ce corps est de la forme $\{0, 1, a, b\}$ et on doit avoir $b = a^2$ et $a^3 = 1$. On en◆ **ALG.71** (*)

Montrer que tout anneau commutatif, intègre et fini est un corps.

◇ [Divers/corpsexo.tex/alg:45]

$$ab = ac \Rightarrow a(b - c) = 0 \Rightarrow b = c,$$

(Un anneau intègre est toujours commutatif.)

c'est-à-dire que a est simplifiable à droite, et de même à gauche.Soit a un élément non nul de A . Puisque A est intègre, on a, pour tout $b, c \in A$:Ainsi, l'application $x \mapsto ax$ est une injection de A dans A , donc une bijection car A est fini. En particulier, il existe $b \in A$ tel que $ba = 1$.◆ **ALG.72 (Idéaux premiers)** (*)Soit A un anneau commutatif dont tout idéal est premier, c'est-à-dire que si I est un idéal de A , il vérifie

$$\forall x \in I \quad x \in i \quad \text{ou} \quad y \in I.$$

Montrer que A est un corps.

◇ [Divers/corpsexo.tex/div:2]

(0) est premier ce qui montre que A est intègre.Soit $x \neq 0$ et montrons que x est inversible. (x^2) est premier et $x^2 \in (x^2)$ donc $x \in (x^2)$, ce qui montre qu'il existe $a \in A$ tel que $x = ax^2$; or A intègre et $x \neq 0$ donc $1 = xa$. CQFD.◆ **ALG.73** (*)Soit A un anneau non nul, commutatif et intègre, n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux. Montrer que A est un corps.INDICATION : On considérera les anneaux de la forme $I_n = x^n A$ pour $x \in A$ non nul.

◇ [Divers/corpsexo.tex/div:36]

encore $p + q - 1 \geq 0$.Soit $x \neq 0$. Les I_n sont en nombre fini, ce qui veut dire qu'il existe deux puissances p et q telles que $x^p A = x^q A$. On peut par exemple supposer $p > q$, ouNotamment, $x^p \in x^q A$ c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ tel que $x^p = x^q a = x^p x^{q-p} a$, donc par intégrité $1 = x^{p-q} a$, donc x est inversible.◆ **ALG.74**

X MP – 2003

On travaille dans le corps \mathbb{Q} . Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme non nul. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $P(\alpha) = 0$.1) Que dire de $V = \text{Vect}\{\alpha^n; n \geq 2\}$ (dimension, structure...)?2) On considère $Q = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ un polynôme non nul dont les coefficients vérifient $a_i \in V$ pour tout i . Soit $\beta \neq 0$ une racine de Q .Que dire de $V = \text{Vect}\{\beta^n; n \geq 0\}$?3) Soient $K_0 \subset K_1 \subset K_2$ trois corps et espaces vectoriels tels que $\dim_{K_0} K_1 = n$ et $\dim_{K_1} K_2 = m$ (finis). K_2 est-il de dimension finie sur K_0 ? Si oui, la calculer.4) Même question pour $\dim_{K_0} K_2 = n$ finie : K_1 est-il de dimension finie sur K_0 ? K_2 sur K_1 ?

◇ [Rec03/corps-r3.tex/r3:287]

◆ **ALG.75** (**)

X MP – 2004

On pose $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}]$.1) Calculer la dimension de K .2) Trouver tous les automorphismes de K .

◇ [Rec04/corps-r4.tex/r4:188]

◆ **ALG.76** (***)

X MP – 2004

Soit \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} .1) Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$:

a) $f(x + y) = f(x)f(y)$;

b) $f(xy) = f(x) + f(y)$;

c) $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

2) Soit p un entier premier. On pose $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.a) Justifier brièvement que \mathbb{K} est un corps.b) Quelles sont les fonctions polynomiales telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{K}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$?c) On suppose que $f'(0) \neq 0$. Montrer que toutes les racines de f sont simples.

d) Montrer que l'ensemble des racines a une structure d'espace vectoriel.

◇ [Rec04/corps-r4.tex/r4:198]

◆ **ALG.77** (**)

TPE MP – 2004

Soit p un entier premier. On note $E = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}, \bar{1}\}$.On définit $\phi : E \rightarrow E$ par $\phi : x \mapsto 1 - x^{-1}$. Montrer que ϕ est bijective et déterminer son ordre.

◇ [Rec04/corps-r4.tex/r4:180]

L'injectivité est immédiate ; dans un ensemble fini, ça suffit.

Pour l'ordre??

À FINIR !!!

◆ **POL.14 (Polynômes de Tchebychev)**
 On construit dans cet exercice une famille étagée de polynômes, appelés **polynômes de Tchebychev**. Les propriétés d'orthogonalité de ces polynômes sont étudiées dans l'exercice **FAM.14** page 229 et ??.

1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{R}$. Transformer en produit la somme

$$\cos((n+3)y) + \cos((n+1)y).$$

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un élément $T_n \in \mathbb{R}[X]$ et un seul tel que

$$\cos((n+1)y) = T_n(\cos y) \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R},$$

et que l'on a alors $T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n . Démontrer que

$$T_n(x) = \cos((n+2) \text{Arc cos } x) \quad \text{pour tout } x \in [-1; 1].$$

Calculer $T_n(1)$, $T_n(-1)$, $T_n(0)$ et $\sup_{x \in [-1; 1]} |T_n(x)|$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $J_n = \{x \in [-1; 1] ; T_n(x) = 0\}$. Démontrer que

$$J_n = \{a_{n,k} ; k = 0, 1, \dots, n\} \quad \text{où } 1 > a_{n,0} > a_{n,1} > \dots > a_{n,n} > -1$$

et explicitez les $a_{n,k}$ pour $k = 0, 1, \dots, n$.

5) Déterminer les racines de T_n dans \mathbb{R} , exprimer T_n à l'aide du polynôme

$$A_n = \prod_{k=0}^n (X - a_{n,k}),$$

et déterminer $\sup_{x \in [-1; 1]} |A_n(x)|$.

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:15] Cf **FAM.14** page 229 et ??.

1) on utilise $\cos nx = \Re(\cos x + i \sin x)^n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} (-1)^k (\cos^{n-2k} x)(1 - \cos^2 x)^k$.

2) (cf Francinou p.207).
 3)
 4)
 5) $1/2^{n-1}$ (cf. ?? page ??)

◆ **POL.15**
 Déterminer le couple quotient/reste (Q, R) de la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{Q}[X]$ dans les cas suivants :

1) $A = X^5 + X^4 + 2X^3 - 2X + 3$	$B = X^4 + 3X^3 + 7X^2 + 8X + 6$
2) $A = 3X^5 + X^4 - 6X^2 + 5X - 1$	$B = 2X^3 - X + 1$
3) $A = 2X^4 - 5X + 7$	$B = 3X^2 + 7X - 2$

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:16]

1) $Q = X - 2, R = X^3 + 6X^2 + 8X + 15.$
 2) $Q = \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{4}, R = -7X^2 + \frac{21}{4}X - \frac{7}{4}.$
 3) $Q = \frac{2}{3}X^2 - \frac{14}{9}X + \frac{110}{27}; R = -\frac{989}{27}X + \frac{209}{27}.$

◆ **POL.16** (*)
 Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. On note r le reste de la division euclidienne de p par q dans \mathbb{Z} . Démontrer que le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ de $X^p - 1$ par $X^q - 1$ est $X^r - 1$.
 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $p, q \in \mathbb{N}^*$ pour que $X^q - 1$ divise $X^p - 1$ dans $\mathbb{K}[X]$.

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:17]

On cherche A tel que $(X^p - 1) = A(X^q - 1) + X^r - 1$, cad tel que $A(X^q - 1) = X^p - X^r$. Or de $p = aq + r$, on tire

$$X^p - X^r = X^r \underbrace{(X^a)^q - 1}_{(*)}$$

où le terme (*) est divisible par $X^q - 1$ grâce à la formule des anneaux. On peut donc bien trouver le polynôme A et par unicité du reste de la DE, on a répondu à la question.

On peut également écrire explicitement la division, voir le résultat arriver, conjecturer la forme de A et conclure.

◆ **POL.17**
 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines du polynôme

$$A_n = (X + 1)^n - e^{2in\alpha}.$$

En déduire la valeur du produit

$$a_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right).$$

INDICATION : On utilisera la formule donnant le produit des racines de A_n .

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:18]

Le produit des racines est donc

On cherche à résoudre formellement

$$(X+1)^n = e^{2in\alpha} \quad \text{donc} \quad (X+1) = e^{2i\alpha} e^{2i\pi k/n} \quad \text{avec } k \in [0, n-1].$$

$$(-1)^n (1 - 2e^{in\alpha}) = 2^n e^{in\alpha} e^{i\frac{n(n-1)\pi}{2n}} e^{i\pi/2} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)$$

Les racines sont donc

$$(-1)^{n-1} 2ie^{in\alpha} \sin(n\alpha) = 2^n e^{in\alpha} (-1)^n (-i) \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)$$

d'où la formule

$$\lambda_i = e^{2i(\alpha + k\pi/n)} - 1 = 2ie^{i(\alpha + k\pi/n)} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right).$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin n\alpha}{2^{n-1}}.$$

◆ **POL.18**
 Déterminer le pgcd dans $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes A et B dans les cas suivants :

1) $A = 2X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 2X + 1$	$B = 3X^3 + 4X^2 + 4X + 1 ;$
2) $A = X^5 + X^4 + 2X^3 - 2X + 3$	$B = X^4 + 3X^3 + 7X^2 + 8X + 6 ;$
3) $A = X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + 2$	$B = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 7X + 6.$

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:19]

1) $X^2 + X + 1 ; 2) X^2 + X + 3 ; 3) X^2 - 3X + 2.$

◆ **POL.19** (**)
 Dans $\mathbb{C}[X]$, trouver tous les polynômes P tels que P' divise P.

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:20]

$$\phi : \mathbb{R} \setminus \{C\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{P(x)}{(x+C)^n}$$

Les polynômes constants ne satisfont pas cette condition. Soit P un polynôme non constant. Toutes ses racines doivent être au moins doubles. Mais ce n'est pas suffisant. On note a le coefficient dominant de P, alors celui de P' est na. Il existe une constante C telle que $nP'(X) = (X+C)P'(X)$. Alors la fonction

est (calcul) de dérivée nulle, donc il existe deux réels α_+, α_- tels que $\phi(x) = \alpha_{\pm}$ selon que $x > C$ ou $x < C$. Ce qui nous donne pour le polynôme $P(x) = \alpha_{\pm}(x+C)^n$. On dérive n fois pour trouver $\alpha_+ = \alpha_-$, et $P(X) = \alpha(X+C)^n$.

◆ **POL.20** (♣)
 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Soit P $\in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $P(X+1) - P'(X) = \alpha P(X)$. Montrer que le degré de P est au plus égal à 1.

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:21]

On suppose $P = \sum_{n=0}^N a_n X^n$, alors...

◆ **POL.21**
 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ unique tel que

$$P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n.$$

Trouver une relation entre P'_n et P_{n-1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Montrer que, si $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $Q(X) + Q(X+1) = 0$, alors $Q = 0$.

3) Exprimer ensuite $P_n(X+1)$ en fonction de P_0, \dots, P_n , et en déduire une relation de récurrence donnant P_n en fonction de P_0, \dots, P_{n-1} .

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:22]

1) **Solution moche.** On écrit $P_n = a_0 + \dots + a_n X^n$, et on se retrouve avec un système linéaire à inconnues échelonnées.
Solution élégante. L'application $\Phi_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ qui à P associe $P(X) + P(X+1)$ est linéaire et injective, elle est donc surjective (la ruse !!!).
 2) T.
 3) De plus, $P'_n(X) + P'_n(X+1) = 2nX^{n-1} = n(P_{n-1}(X) + P_{n-1}(X+1))$

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:39] $\sigma_1 \neq 0$ et $\sigma_3 = 0$. Donc x, y et z sont racines du polynôme $X^3 - \sigma_1 = 0$, dont les racines sont $\lambda, j\lambda$ et $\bar{j}\lambda$, avec λ une racine cubique de σ_1 .
Notons $\sigma_1 = xyz, \sigma_2 = xy + yz + xz$ et $\sigma_3 = x + y + z$. Alors $\sigma_2 = 0$,

◇ **POL.34** (*)
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que
$$P - Q \mid P \circ Q - Q \circ P \implies P - Q \mid P \circ Q - Q \circ P.$$

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:40] donc $(P \circ P - Q \circ Q) - (P \circ Q - Q \circ P)$ est divisible par $P - Q$.
On note $P = \sum \alpha_k X^k$ et $Q = \sum \beta_k X^k$. Alors
 $P \circ P - P \circ Q = \sum \alpha_k (P^k - Q^k)$ et $Q \circ Q - Q \circ P = \sum \beta_k (Q^k - P^k)$,

◇ **POL.35** (*)
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = X^{2^n} + X^{2^{n-1}} + 1$. Montrer que si $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$m \leq n \implies P_m \mid P_n.$$

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:41] Il suffit de montrer que P_n divise P_{n+1} grâce à
$$P_{n+1} = (X^{2^n} + X^{2^{n-1}} + 1)(X^{2^n} - X^{2^{n-1}} + 1).$$

◇ **POL.36** (P(U) ⊂ U) (***)
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbf{U}) \subset \mathbf{U}$.
INDICATION : On remarquera que $P(e^{i\theta}) \cdot \bar{P}(e^{-i\theta}) = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et on introduira le polynôme aux inverses :
$$Q(X) = X^{\deg P} P\left(\frac{1}{X}\right).$$

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:43] Alors $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P(e^{i\theta}) \cdot \bar{Q}(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$.
On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$P(e^{i\theta}) \cdot \bar{P}(e^{-i\theta}) = 1.$$

Or $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$. On note Q le polynôme aux inverses de P :
$$Q \stackrel{\text{déf.}}{=} X^n P\left(\frac{1}{X}\right).$$

Cette égalité étant vraie sur une infinité de points, c'est une égalité algébrique :
$$P \cdot \bar{Q} = X^n.$$

Or $\deg P = n$ donc $\deg Q = 0$ donc $Q \in \mathbb{C}^{\mathbb{B}}$ de module 1.
Ainsi, $P = e^{i\alpha} X^n$.

◇ **POL.37**
Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_7[X]$ tel que $\begin{cases} (X-1)^4 \text{ divise } P(X) + 1 \\ (X+1)^4 \text{ divise } P(X) - 1. \end{cases}$

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:44] Avec $P(1) + 1 = 0$ et $P(-1) - 1 = 0$ on obtient $\beta = 0$ et $\alpha = \frac{35}{16}$ donc
On dérive, alors $(X-1)^3$ divise P' ainsi que $(X+1)^3$, donc $P' = \alpha(X^2 - 1)^3$,
ce qui montre que
$$P = \alpha \left[\frac{X^7}{7} - \frac{3X^5}{5} + X^3 - X \right] + \beta. \quad P = \frac{5}{16} X^7 - \frac{21}{16} X^5 + \frac{35}{16} X^3 - \frac{35}{16}.$$

◇ **POL.38** (Polynômes symétriques à 2 indéterminées) (**)
On dit que $P \in \mathbb{K}[X, Y] = \mathbb{K}[X][Y]$ est **symétrique** si et seulement si $P(X, Y) = P(Y, X)$.
1) Soit $P \in \mathbb{K}[X, Y]$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
(a) P est divisible par $X - Y$;
(b) $P(X, Y) = 0$.
2) On suppose \mathbb{K} de caractéristique différente de 2. Montrer que si $P \in \mathbb{K}[X, Y]$ est symétrique et divisible par $(X - Y)$, alors il est divisible par $(X - Y)^2$.

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:45] et donc, puisque $(X - Y)$ n'est pas un diviseur de 0,
1) On effectue la division euclidienne de P par $X - Y$ selon la variable X :
$$P(X, Y) = (X - Y) Q(X, Y) + R(X, Y),$$

avec $\deg_X R \leq 0$ donc en fait $R(X, Y) = \bar{R}Y \in \mathbb{K}[Y]$.
et comme on est en caractéristique différente de 2, $Q(X, X) = 0$ donc d'après la question 1), Q est divisible par $(X - Y)$.
Il y a donc trivialement équivalence entre les deux propriétés demandées.
2) On a $P(X, Y) = (X - Y) \cdot Q(X, Y)$. Or P est symétrique donc
 $(Q(X, Y) + Q(Y, X)) \cdot (X - Y) = 0,$

◇ **POL.39** (P(X² + 1) = P(X)² + 1) (*)
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$.

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:46] fité de racines (distinctes, puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante) du polynôme $P(X) - X$, ce qui montre que $P = X$.
On vérifie aisément que puisque $P(0) = 0$, alors $P(1) = 1$ puis $P(2) = 2$, puis $P(5) = 5$ et, en définissant $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$, on a une in-

◇ **POL.40** (**)
Trouver les racines doubles, lorsqu'elles existent, du polynôme $P_z = X^3 - zX - z$, où $z \in \mathbb{C}$.

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:47] les seules valeurs de z possibles sont 0 et $\frac{27}{4}$; les racines correspondantes sont respectivement 0 et $\frac{3}{2}$.
 P_z n'a de racines doubles que si les racines de P'_z sont également racines de P_z . On calcule les racines de $P'_z = 3X^2 - z$, on injecte, et on trouve que

◇ **POL.41** (*)
Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ telle que $L(X) = 1$ et $L(PQ) = L(P)Q + PL(Q)$ pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que L est la dérivation canonique.

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:48] On montre que $L(X^n) = nX^{n-1}$ par récurrence et on fait jouer la linéarité.

◇ **POL.42**
En séparant la partie paire et la partie impaire d'un polynôme, trouver tous les polynômes dont le carré est pair.

◇ [Divers/polynomesexo.tex/pol:49] On écrit $P = Q + R$ et on montre que $P = 0$ ou $R = 0$.

◇ **POL.43**
Quels sont les polynômes vérifiant $P(X^2) = [P(X)]^2$?
INDICATION : On écrira $P = \alpha X^n + R$ avec $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et on prouvera que $\alpha = 1$ et $R = 0$.

◇ [Divers/polynomesexo.tex/div:4]

◇ **POL.44**
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = (-1)^n \prod_{k=0}^n (X - k)$.
1) Montrer qu'il existe un unique élément $x_n \in]0; 1[$ tel que $P'_n(x_n) = 0$.
2) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
3) Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k - x_n}$.
4) En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

◇ [Divers/polynomesexo.tex/div:150] 4)
1) Rolle &c.
2) La suite est décroissante, faire un dessin et prouver que $P'_{n+1}(x_n) < 0$.
3) Cette quantité est exactement $\frac{P'(x_n)}{P(x_n)} = 0$.
$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k - x_n} \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

◇ **POL.45**

◇ [Divers/polynomesexo.tex/div:5]

◇ **POL.46** (♣) X PC - 2005
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ scindé à racines simples. Montrer que, pour tout ε assez petit, $Q(X) = P(X) + \varepsilon X^{n+1}$ est scindé à racines simples.

◇ [Rec00/polynomes-r0.tex/div:164]

◇ **POL.47** Centrale MP
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant. Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. On suppose que $P - a$ et $P - b$ sont scindés sur \mathbb{R} . Montrer que, pour tout $c \in]a; b[$, le polynôme $P - c$ est scindé sur \mathbb{R} et à racines simples.

◇ [Rec00/polynomes-r0.tex/pol:36] racines de $P - a$ (éventuellement répétées selon leur ordre de multiplicité).
Notons $n = \deg P$. Notons $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ la suite ordonnée des (Classiques MPSI page 41).

◆ **POL.48** (**) ENS Ulm MP – 2000
Notons A la sous-algèbre de $\mathbb{R}[X]$ engendrée par X^2 et X^3 . Montrer que A n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}[X]$.

◇ [Rec00/polynomes-r0.tex/r0:21] par la donnée de $P = \Phi(X)$, donc pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, on a
On commence par vérifier que $A = \text{Vect}\{X^k\}_{k \neq 1}$. En effet, si $k \geq 2$ est pair, alors $X^k = (X^2)^{k/2}$ et si k est impair, alors $X^k = X^3 X^{(k-3)/2}$. De plus A étant une algèbre, elle contient l'unité de $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire X^0 (et donc \mathbb{R}).
Réciproquement, $\text{Vect}\{X^k\}_{k \neq 1}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{R}[X]$ et elle contient bien X^3 et X^3 donc, comme elle est stable par multiplication, elle contient A .
Soit Φ un morphisme d'algèbre de $\mathbb{R}[X]$ dans A . Il est entièrement déterminé
Notamment, $\deg \Phi(Q) = \deg P \cdot \deg Q$. Si Φ était surjective, alors X^2 et X^3 seraient dans l'image, donc $\deg P$ divisé à la fois 2 et 3, donc $\deg P = 1$, mais aucun polynôme de A n'est de degré 1 !

◆ **POL.49** (***) X MP – 2000
Soient P et Q deux polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$. On suppose que l'on a égalité entre les ensembles de racines :
$$Z(P) = Z(Q) \quad \text{et} \quad Z(P - 1) = Z(Q - 1).$$

Montrer que $P = Q$.
INDICATION : Poser $R = P - Q$ et montrer que R possède au moins $n + 1$ racines.

◇ [Rec00/polynomes-r0.tex/r0:22] Seulement, P et $P - 1$ sont premiers entre eux (évident), donc
Notons $n = \deg P$ et $m = \deg Q$. On peut supposer $n \geq m$. On pose $R = P - Q$. Alors $\deg R \leq n$.
Par hypothèse, R s'annule sur $Z(P)$ et sur $Z(P - 1)$, ensembles évidemment disjoints.
Or le nombre de racines distinctes de P est $\deg P - \deg(P \wedge P')$, ce qui donne $\text{Card } Z(P) = n - \deg(P \wedge P')$.
Il en résulte donc
De même,
$$\text{Card } Z(P - 1) = \deg(P - 1) - \deg((P - 1) \wedge (P - 1)')$$

$$= n - \deg((P - 1) \wedge P').$$

Donc R admet au moins $n + 1$ racines, donc est nul.

◆ **POL.50** (***) ENS Ulm MP – 2000
Soient $n \geq 2$ et (a_1, \dots, a_n) des éléments de \mathbb{Z} deux à deux distincts. Montrer que le polynôme
$$P = (X - a_1) \cdot (X - a_2) \cdot \dots \cdot (X - a_n) - 1$$

est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

◇ [Rec00/polynomes-r0.tex/r0:23] tout point ; comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$, il y a clairement un blème.
Supposons $P = QR$ où $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$. Alors $Q(a_k) \cdot R(a_k) = P(a_k) = -1$, donc $Q(a_k) = -R(a_k) = \pm 1$; en tout cas $Q(a_k) + R(a_k) = 0$. Ainsi, le polynôme $Q + R$ s'annule en n points.
Si $\deg(Q + R) < n$, alors $Q + R = 0$ donc $P = -Q^2$, donc P est négatif en
Donc $\deg(Q + R) = n$, donc l'un des deux est de degré n . Donc l'autre est constant. Le coefficient dominant de P est 1 et c'est le produit des coefficients dominants de Q et de R , qui valent donc chacun ± 1 . Donc soit $Q = \pm 1$, soit $R = \pm 1$, ce qui prouve que P est irréductible, et voilà !

◆ **POL.51** ENS Ulm MP – 2000
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note $n = \deg P$ et on pose
$$Q = P + P' + \dots + P^{(n)}.$$

Montrer que $Q(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

◇ [Rec00/polynomes-r0.tex/r0:24] (Q est continue sur un compact incluant $Q^{-1}([m; m + 1])$...) On note x_0 ce point : $Q(x_0) \geq m$. On a bien sûr $Q'(x_0) = 0$. Or $Q - Q' = P$ donc $Q(x_0) = P(x_0) \geq 0$: la ruse !
 n est évidemment pair et le coefficient dominant de P est positif.
Le degré de Q vaut alors n et son coefficient dominant est celui de P .
Donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x) = +\infty$. Par suite, Q est minoré et atteint son minimum

◆ **POL.52** (**) X MP
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
(a) $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
(b) il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

◇ [Rec00/polynomes-r0.tex/r0:27] On décompose
$$P = \lambda \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)^{d_i} \times \prod_{j=1}^q (X - \lambda_i)^{n_j} (X - \bar{\lambda}_i)^{n_j}.$$

De plus, les n_i sont forcément pairs si on veut que P ne change pas de signe de ce qui montre que
part et d'autres de α_i .
Enfin, $\lambda > 0$.
On peut donc poser
$$R = \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)^{d_i/2} \times \prod_{j=1}^q (X - \lambda_i)^{n_j} = A + iB,$$

$$P = R \cdot \bar{R} = (A + iB) \cdot (A - iB) = A^2 + B^2.$$

◆ **POL.53 (Interpolation de Lagrange)** (***) ENS Ulm MP – 2000
1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$. On suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que les éléments $P(k), P(k + 1), \dots, P(k + n)$ soient tous dans \mathbb{Z} .
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $P(x) \in \mathbb{Z}$.
2) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $n \geq 1$. On note N le pgcd de $P(0), P(1), \dots, P(n)$. Montrer que N divise $P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.
3) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$ tel que les éléments $P(0), P(1), P(4), \dots, P(n^2)$ soient dans \mathbb{Z} . Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $P(k^2) \in \mathbb{Z}$.

◇ [Rec00/polynomes-r0.tex/r0:28] ou voir exercice **POL.54** consistant à montrer que, en posant $H = \frac{1}{k!}(X + 1)(X + 2) \dots (X + k)$, alors $H(k)$ est soit nul, soit \pm un facteur combinatoire, donc entier). Cela permet de traiter tous les $L_i(k)$ (en décomposant en un produit de i entiers et un autre produit de $n - i$ entiers...)
1) Quitte à prendre $Q(X) = P(X + k)$, on peut supposer $k = 0$. On note L_0, \dots, L_n les polynômes élémentaires de Lagrange pour $(0, \dots, n)$. On a alors
$$P(x) = \sum_{i=0}^n P(i) L_i(x),$$

et il suffit de montrer que les L_i prennent des valeurs entières sur \mathbb{Z} .
Pour cela, il suffit de remarquer que le produit de k entiers consécutifs est divisible par $k!$ (raisonner selon la position du premier entier,
2) Pareil.
3) Poser $Q(X) = X^2$, de degré $2n$ et tel que $Q(-n), \dots, Q(n)$ sont dans \mathbb{Z} , puis conclure avec la question 1.

◆ **POL.54 (Polynômes de Hilbert)** (**) X MP – 2000
On définit la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes par
$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad H_n = \frac{1}{n!}(X + 1) \dots (X + n).$$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $H_n(x) \in \mathbb{Z}$.
En déduire que le produit de n entiers consécutifs dans \mathbb{Z} est divisible par $n!$.
2) Soit $A \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $A(x) \in \mathbb{Q}$. Montrer qu'alors $A \in \mathbb{Q}[X]$.
3) Soit $A \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $A(x) \in \mathbb{Z}$. A-t-on $A \in \mathbb{Z}[X]$?
4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq n$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
(a) $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$;
(b) $P(k) \in \mathbb{Z}$ pour $k = 0, 1, \dots, n$;
(c) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $P(k), P(k + 1), \dots, P(k + n)$ sont dans \mathbb{Z} ;
(d) il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k H_k$.

◇ [Rec00/polynomes-r0.tex/pol:8] 4) On a clairement (a) \Rightarrow (b) et (a) \Rightarrow (c). Si P est combinaison linéaire de (H_0, \dots, H_n) , alors la question 1) montre que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, donc (d) \Rightarrow (a).
Il reste donc à prouver (b) \Rightarrow (d).
La famille (H_0, \dots, H_n) étant étagée, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc on trouve des scalaires tels que $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k H_k$.
On a $P(0) = \lambda_0 \in \mathbb{Z}$. Donc $P(1) = \lambda_0 H_0(1) + \lambda_1 H_1(1) = \lambda_0 H_0(1) + \lambda_1$ étant dans \mathbb{Z} , on en déduit que λ_1 est dans \mathbb{Z} aussi. Et ainsi de suite par récurrence, tous les λ_k sont entiers.
Enfin, montrons (c) \Rightarrow (a). On pose $Q(X) = P(X - k)$, alors Q vérifie $Q(k) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in [0; n]$. Notons (L_0, \dots, L_n) les polynômes élémentaires de Lagrange pour $(0, 1, \dots, n)$. Ils sont à coefficients dans \mathbb{Z} d'après la question 1). Or $P(x) = \sum_{k=0}^n P(k) L_k(x)$, donc $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
1) $H_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq k \leq n - 1 \\ C_n^k & \text{si } k \geq n \\ (-1)^n C_{n-k-1}^n & \text{si } k < 0. \end{cases}$
On remarque que $k \cdot (k + 1) \dots (k + n - 1) = n! H_n(k + 1)$ qui est un multiple de $n!$.
2) Soit $A \in \mathbb{R}$ vérifiant la propriété donnée. Notons $n = \deg A$. Notons L_0, \dots, L_n les polynômes élémentaires de Lagrange, vérifiant
$$\forall i, j \in [1, n] \quad L_i(j) = \delta_{ij}.$$

On sait les écrire et, par construction, ils sont à coefficients dans \mathbb{Q} et même mieux, d'après la question précédente, à coefficients dans \mathbb{Z} . Or on peut écrire $A = \sum_{k=0}^n A(k) L_k$, donc $A \in \mathbb{Q}[X]$.
3) Non, justement, voir exemple de la première question.

◆ **POL.55 (P(Q) = Q)** (***)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que P induise une surjection de \mathbb{Q} sur \mathbb{Q} .

◊ [Rec02/polynomes-r2.tex/alg-r2:16]

On dérive l'égalité pour obtenir $(X-1)P'' = nX^{n-1}$ comme $X-1$ ne divise $\lambda \in \mathbb{R}$ (algèbre linéaire). par X^{n-1} , on a $n=0$ et $P''=0$. Les solutions sont $P = -1 + \lambda(X-1)$ avec

◆ **POL.70 (Polynômes de Hilbert)** (♣) X MP – 2003

Pour tout $n \geq 1$, on pose $P_n(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$ et $P_0(X) = 1$.
 Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n(z) \in \mathbb{Z}$.

◊ [Rec03/polynomes-r3.tex/r3:340]

$$P_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ C_n^k & \text{si } k \geq n \\ (-1)^n C_{n-k-1}^n & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

◆ **POL.71** (♣) Centrale MP – 2003

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$.

- 1) Montrer que si P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, alors P n'a que des racines simples dans \mathbb{C} .
- 2) On suppose que $\deg P = 5$ et que P admet une racine multiple $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que P admet une racine rationnelle.

◊ [Rec03/polynomes-r3.tex/r3:167]

LEMME Soit L un sur-corps de K . Soient P et Q des polynômes de $K[X]$ (donc de $L[X]$). Alors le pgcd de P et de Q est le même dans $K[X]$ ou dans $L[X]$.

Démonstration : Il est obtenu par l'algorithme d'Euclide ; ses coefficients appartiennent donc à K !

1) Puisque $1 \leq \deg P' \leq \deg P$ et P irréductible, P et P' sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$. Leur pgcd est donc égal à 1 dans $\mathbb{Q}[X]$; mais en fait l'algorithme d'Euclide ne dépend pas du corps dans lequel on effectue le calcul, car ses coefficients appartiennent au plus petit corps contenant les coefficients de P et de Q ; donc le pgcd est encore égal à 1 dans $\mathbb{C}[X]$, ce qui montre que P et P' sont encore premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$. Or si P admettait une racine multiple $\alpha \in \mathbb{C}$, $(X-\alpha)$ serait un facteur commun à P et P' : contradiction.

2) Notons α une racine multiple de P dans \mathbb{C} .
 □ Supposons que P n'a pas de racines rationnelles. Cela ne l'empêche pas d'être réductible dans $\mathbb{Q}[X]$. On le décompose en éléments irréductibles. Aucun ne saurait être de degré 1 (P est supposé n'avoir pas de racine rationnelle). Donc P s'écrit sous la forme

$$P = QR,$$

avec $\deg Q = 2$ et $\deg R = 3$, et où Q et R sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$. Q et R sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$ (irréductibles et non proportionnels) donc, d'après le même argument, ils sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$ (leur pgcd dans $\mathbb{Q}[X]$ est égal à 1, donc dans $\mathbb{C}[X]$ aussi) ; ils n'ont donc pas de racine commune, notamment α n'est pas racine des deux.

Oui mais d'un autre côté $(X-\alpha)^2$ divise P , donc il divise soit Q , soit R , donc Q ou R est un polynôme irréductible ayant une racine double dans \mathbb{C} , ce qui contredit le résultat de la question 1). □
 Donc P admet au moins une racine rationnelle.

◆ **POL.72** Centrale MP – 2003

1) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ des complexes distincts. Soient X et Y deux parties finies et disjointes de \mathbb{C} . Existe-t-il toujours $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\begin{cases} P(x) = \alpha & \iff x \in X \\ P(x) = \beta & \iff x \in Y \end{cases} ?$$

2) Exprimer le nombre de racines complexes de P en fonction du degré de P et du p.g.c.d. de P et de P' .

3) Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, α et β deux complexes distincts. Montrer que si

$$P^{-1}(\{\alpha\}) = Q^{-1}(\{\alpha\}) \quad \text{et} \quad P^{-1}(\{\beta\}) = Q^{-1}(\{\beta\}),$$

alors $P = Q$.

◊ [Rec03/polynomes-r3.tex/r3:263]

1) On utilise des polynômes interpolateurs de Lagrange P et Q valant 0 sur X et 1 sur Y (resp. le contraire) ?
À FINIR !!!

2) Card (Zéro(P)) = $\deg(P) - \deg(P \wedge P')$.

3) Quitte à renommer P en $P - \alpha$, on peut supposer $\alpha = 0$. De même, quitte à effectuer une similitude, on peut supposer $\beta = 1$.
 Notons $n = \deg P$ et $m = \deg Q$. On peut supposer $n \geq m$. On pose $R = P - Q$. Alors $\deg r \leq n$.
 Par hypothèse, R s'annule sur $Z(P)$ et sur $Z(P-1)$, ensembles évidemment disjoints.
 Or le nombre de racines distinctes de P est $\deg P - \deg(P \wedge P')$, ce qui donne

$$\text{Card } Z(P) = n - \deg(P \wedge P').$$

De même,

$$\text{Card } Z(P-1) = \deg(P-1) - \deg((P-1) \wedge (P-1)') = n - \deg((P-1) \wedge P').$$

Seulement, P et $P-1$ sont premiers entre eux (évident), donc

$$(P-1) \wedge P' \quad \text{et} \quad P \wedge P'$$

sont premiers entre eux ; et ils divisent tous deux P' , donc

$$\deg((P-1) \wedge P') + \deg(P \wedge P') \leq n-1.$$

Il en résulte donc

$$\text{Card } Z(R) \geq 2n - (n-1) = n+1.$$

Donc R admet au moins $n+1$ racines, donc est nul.

◆ **POL.73 (Reste d'une D.E.)** (★) Centrale PC – 2003

Calculer le reste de la division euclidienne de $(X \sin \alpha + \cos \alpha)^n$ par $(X^2 + 1)$.

◊ [Rec03/polynomes-r3.tex/r3:345]

Le reste est $R(x) = \lambda X + \mu$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
 En évaluant le polynôme $A = BQ + R$ en i et en $-i$, on a

$$e^{in\alpha} = R(i) = \lambda i + \mu.$$

On en déduit que $\mu = \cos(n\alpha)$ et $\lambda = \sin(n\alpha)$, et donc

$$R = \sin(n\alpha)X + \cos(n\alpha).$$

◆ **POL.74** (★★★) Mines MP – 2003

Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - e^{2ik\pi/n}}$.

◊ [Rec03/polynomes-r3.tex/r3:315]

On remarque que les $\lambda_k \stackrel{\text{déf.}}{=} 1 - e^{2ik\pi/n}$ sont racines de $P = (X-1)^n - (-1)^n$; on sait donc calculer leur produit en ayant au préalable enlevé la racine nulle et en ayant divisé P par X .

Cf. ALG.3 page 23.

◆ **POL.75** CCP PC – 2003

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ un polynôme unitaire : $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.

- 1) Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 (a) $x \neq y$ et $P(x) = P(y)$;
 (b) $x \neq y$ et $x^2 + xy + y^2 + ax + ay + b = 0$.
- 2) On note $\mathbf{I} = \frac{i+j}{\sqrt{2}}$ et $\mathbf{J} = \frac{-i+j}{\sqrt{2}}$.
 Montrer que (\mathbf{I}, \mathbf{J}) est une base orthonormée. Soit $M(x, y)$. Trouver ses coordonnées (X, Y) dans la base (\mathbf{I}, \mathbf{J}) .
- 3) Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 (a) $x \neq y$ et $P(x) = P(y)$;
 (b) $Y \neq 0$ et $3X^2 + Y^2 + 2\sqrt{2}aX + 2b = 0$.
- 4) Montrer que l'ensemble des points M tels que $P(x) = P(y)$ est inclus dans une ellipse d'excentricité fixe.

◊ [Rec03/polynomes-r3.tex/r3:390]

◆ **POL.76** Mines MP – 2003

Soit $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

- 1) Déterminer un polynôme P_n tel que $P_n(\cotan^2 \theta) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1} \theta}$.
- 2) Trouver les racines de P_n ainsi que leur somme.
- 3) Démontrer l'encadrement, valable sur \mathbb{R}^{++} : $\cotan^2 \theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cotan^2 \theta$.
- 4) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

◊ [Rec03/polynomes-r3.tex/r3:155]

1) On a par convexité $\theta < \tan \theta$ ce qui donne la première inégalité ; pour la seconde, on utilise $\sin \theta < \theta$ ce qui donne la formule voulue (en ayant réduit au même dénominateur).

2)

◆ **POL.77** (★★★) CCP MP – 2003

1) Montrer que s'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P(X^2) = P(X) \cdot P(X+1) \tag{I}$$

alors 0, 1, $-j$ et $-j^2$ sont les seules racines possibles de P .

2) Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant (I).

◊ [Rec03/polynomes-r3.tex/r3:132]

1) Si λ est une racine, alors $P(\lambda^2) = 0$ donc $\lambda^2, \lambda^4, \dots, \lambda^{2^k}$ sont racines aussi. Or P n'admettant qu'un nombre fini de racines, cela implique que $\lambda = 0$ ou $|\lambda| = 1$. De plus,

$$P((\lambda-1)^2) = P(\lambda-1) \cdot P(\lambda) = 0,$$

donc $(\lambda-1)$ est racine aussi, ce qui implique que $\lambda = 1$ ou que λ et

$\lambda-1$ sont de module 1 : une rapide inspection de l'intersection de deux cercles montre que cela ne se produit que si $\lambda = -j$ ou $\lambda = -j^2$.

2) Le polynôme P est de la forme

$$(X+j)^p (X+j^2)^{p'} X^q (X-1)^{q'},$$

mais la propriété est stable par division par $(X+j)(X+j^2)$ ainsi que par $X(X+1)$, donc finalement $p = p'$ et $q = q'$.

◆ **POL.78** (**) CCP MP – 2003

Soient z' et z'' les racines de $X^2 - 2pX + 1$ avec $p \in \mathbb{R}$.

1) Rappeler pourquoi $\begin{cases} \frac{1}{2}(z' + z'') = p, \\ z'z'' = 1. \end{cases}$

2) Montrer que $|z'| + |z''| = |p - 1| + |p + 1|$.

◆ [Rec03/polynomes-r3.tex/r3:349] bien.
 1) Développer $(X - z')(X - z'') = X^2 - 2pX + 1$ et identifier les coefficients.
 2) Si $|p| \geq 1$, on a génériquement $z = p + \sqrt{p^2 - 1}$ et la formule marche
 Si $|p| < 1$, $z = p \pm i\sqrt{1 - p^2}$ et $|z'| = |z''| = 1$. La formule donne encore le bon résultat (regarder selon le signe de p).

◆ **POL.79** ENS UIm MP – 2004

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x_0, y)$ est une fonction polynôme ;
- pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y_0)$ est une fonction polynôme.

1) Montrer que f est une fonction polynôme en x et x .

2) Le résultat reste-t-il vrai si l'on remplace les hypothèses par « pour tout $x_0 \in \mathbb{Q} \dots$ » et « pour tout $y_0 \in \mathbb{Q} \dots$ » ?

◆ [Rec04/polynomes-r4.tex/r4:196]

◆ **POL.80** ENS MP – 2004

Soit $m \geq 1$ un entier. Déterminer le nombre maximal $N(m)$ de racines réelles d'un polynôme composé de m monômes.

◆ [Rec04/polynomes-r4.tex/r4:269]

◆ **POL.81** ENS MP – 2004

Soit P un polynôme réel. On note $\text{Ch}(P)$ le nombre de changements de signes lorsque l'on observe les coefficients de P , du coefficient dominant au coefficient constant.
 Par exemple, pour $P = X^5 - 2X^3 - 2X + 1$, la liste est

$\underbrace{1 \quad -2}_{1 \text{ chgt}} \quad \underbrace{-2 \quad 1}_{1 \text{ chgt}}$

et $\text{Ch}(P) = 2$.
 Montrer que $\text{Ch}(P) \geq \text{Card} \{x > 0 ; P(x) = 0\}$.

◆ [Rec04/polynomes-r4.tex/r4:270]

◆ **POL.82** X MP – 2004

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $\|P\| = \sup_{|z| \leq 1} |P(z)|$ et $d = \deg(P)$. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} : |P(z)| \leq \|P\| \cdot (\max(1, |z|))^d$.

◆ [Rec04/polynomes-r4.tex/r4:277]

◆ **POL.83** (*) Centrale MP – 2004

Trouver tous les couples $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C} \quad |P(z)| \leq |Q(z)|$.

◆ [Rec04/polynomes-r4.tex/r4:01] les couples sont de la forme
 La fraction rationnelle P/Q est bornée, donc l'ensemble des racines de Q est inclus dans l'ensemble des racines de P , donc Q divise P . On peut donc écrire $P = Q \cdot R$ où R est un polynôme. Mais R est borné, donc R est constant. Ainsi, $P = \alpha Q$ avec $|\alpha| \leq 1$. Réciproquement, les couples de cette forme conviennent.

◆ **POL.84** (**) Centrale MP – 2004

Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$, possédant n racines distinctes x_1, \dots, x_n . Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(x_i)} = 0.$$

◆ [Rec04/polynomes-r4.tex/r4:137]

◆ **POL.85** $(P(X^2) = P(X) \cdot P(X - 1))$ (**) Centrale MP – 2004

Trouver tous les polynômes tels que $P(X^2) = P(X) \cdot P(X - 1)$.

◆ [Rec04/polynomes-r4.tex/r4:138]

Si P est constant, alors $P = 0$ ou 1. Sinon de la formule, on déduit que si z est racine de P alors z^2 et $(z+1)^2$ le sont aussi. En effet, $P(z^2) = P(z) \cdot P(z-1) = 0$ et $P((z+1)^2) = P(z+1) \cdot P(z) = 0$.
 En particulier 0 n'est pas racine car sinon 1, 4, 25, ... le sont. Soit z une racine de P (non nulle) alors z^2 est aussi racine et par récurrence pour tout n , z^{2^n} est racine. Comme ces nombres ne peuvent être tous distincts (car inclus dans l'en-

semble fini des racines), on en déduit que z est une racine de l'unité. Les seuls complexes de module 1 solutions de $|z+1| = 1$ sont j et j^2 , ce sont donc les seules racines possibles. P est de la forme $P(X) = (X-j)^p(X-j^2)^q$ car il doit être de plus unitaire. On vérifie que $(X-j)(X-j^2) = X^2 + X + 1$ est solution et que l'égalité souhaitée est stable par quotient. Comme ni $X-j$ ni $X-j^2$ ne sont solutions, on a $p = q$ et $P = (X^2 + X + 1)^p$ pour $p \geq 0$.
 La réciproque est directe.

◆ **POL.86** (*) Centrale PC – 2004

Le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)$ est $X+2$, celui de la division euclidienne de P par $(X-2)(X-3)$ est $2X$.
 Trouver le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.

◆ [Rec04/polynomes-r4.tex/r4:72]

On écrit $P = Q_1(X-1)(X-2) + X+2 = Q_2(X-2)(X-3) + 2X$ et on cherche à écrire $P = Q_3(X-1)(X-2)(X-3) + R$, ce qui donne tout de suite

$R(1) = P(1) = 3, R(2) = P(2) = 4$ et $R(3) = P(3) = 6$. On résout alors le système sur R .

◆ **POL.87 (Polynômes de Tchebychev)** (**) Centrale PC – 2004 (Avec Maple)

On définit la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes par

$$\begin{cases} T_0 = 1, & T_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}^* & T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1} \end{cases}$$

1) Montrer l'unicité d'une telle famille, trouver le degré de T_n et son coefficient dominant.

2) Avec Maple, calculer les polynômes T_0, \dots, T_{10} et les représenter sur un même graphe.

3) Montrer que $T_n(\cos t) = \cos(nt)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0; \pi]$.

4) On munit $E = \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

a) On définit le polynôme $t_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$. Calculer $\|t_n\|_\infty$.

b) Soit P un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1. Montrer que $\|P\| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ à l'aide du polynôme $P - t_n$.

5) En déduire la famille (a_0, \dots, a_n) de réels de $[-1; 1]$ qui minimise $\left\| \prod_{i=0}^n (X - a_i) \right\|_\infty$.

◆ [Rec04/polynomes-r4.tex/r4:82]

Cf **POL.14** pour une étude générale des polynômes et **FAM.14** page 229

- 1) $\deg(T_n) = n$ et $\text{val}(T_n) = 2^n$.
 2) De manière récursive (ce qui est le plus simple à programmer, mais demande de la mémoire à la bête) :

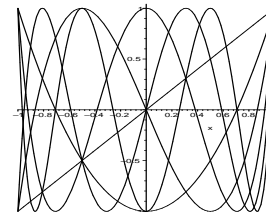
```
T:=proc(n::integer)
  if n=0 then 1
  elif n=1 then x
  else 2*x*T(n-1)-T(n-2)
  fi ;
end;
```

On remarquera que les $T(n)$ sont des fonctions implicites de la variable x . Puis

```
> for i from 0 to 10 do expand(T(i)) od ;
```

Enfin, pour l'affichage, au vu de la propriété de la question 3), la «fenêtre» utile est le segment $[-1; 1]$; on lance donc

```
> plot( [seq(T(i), i=1..6)] , x=-1..1 );
```



- 3) Récurrence immédiate. Par parité, la propriété est vraie également sur $[-\pi; \pi]$ et, par périodicité du cosinus, sur \mathbb{R} tout entier.
 4) a) Sur $[-1; 1]$, tout x peut s'écrire sous la forme $\cos t$, donc $T_n(x) \in [-1; 1]$; par ailleurs, en $x = 1$ ($t = 0$), on a $T_n(1) = 1$, ce qui montre que $\|T_n\|_\infty = 1$ et donc $\|t_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$.

- b) Notons $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour tout $k \in [0; n]$, qui sont les points où T_n (et t_n) atteignent leur maximum en valeur absolue, à savoir : -1 si k est impair, et 1 si k est pair. On a ainsi

$$-1 = x_n < \dots < x_1 < x_0 = 1.$$

(On dit que T_n **équi-oscille** sur $n+1$ points de $[-1; 1]$.)

► **Supposons qu'il existe un polynôme unitaire P de degré n tel que $\|P\| < \|t_n\| = 1/2^{n-1}$.** Alors $P - t_n$ est du signe (strict) de t_n aux points où t_n est maximal, c'est-à-dire aux points x_k ; donc $P - t_n$ change $n+1$ fois de signe, donc admet n racines. Or le degré de $P - t_n$ est $n-1$, donc $P = t_n$, ce qui est en **contradiction** avec l'hypothèse $\|P\| < \|t_n\|$. ◀

- 5) Le polynôme est minimal pour $P = t_{n+1}$, donc les a_i sont les racines du polynôme T_{n+1} , qui s'annule en

$$a_k = \cos(\text{Arccos}((n+1)t)) = \cos\left(\frac{\pi/2 + k\pi}{(n+1)}\right).$$

Remarque On pourrait montrer que $\|P\| = \|t_n\|$ si et seulement si $P = t_n$, mais c'est un peu plus délicat. Cf. Francinou *et al.* : *Oraux X-ENS, algèbre I*, Cassini.

◆ **POL.88 (Racines de P' et enveloppe convexe)** (★★★) Mines PC – 2004

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg P \geq 2$. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe C des racines de P.

INDICATION : Si a est un zéro simple, on considérera $\frac{P'(a)}{P(a)}$.

◇ [Rec04/polynomes-r4.tex/r4:128] En multipliant par le complexe conjugué, on obtient

Ça marche bien pour les zéros multiples.
Soit a tel que $P'(a) = 0$ mais $P(a) \neq 0$. On écrit

$$P = \lambda \prod_{i=1}^n (X - a_i)^{m_i}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{m_i(a - a_i)}{|a - a_i|^2} = 0$$

alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{X - a_i} \quad \text{donc} \quad \frac{P'(a)}{P(a)} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{a - a_i} = 0. \quad \text{soit} \quad \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|a - a_i|^2} \right) a = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|a - a_i|^2} a_i.$$

◆ **POL.89** (*) CCP PC – 2004

Trouver l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant respectivement

- $P(X - a) - P(X + a) = 0$;
- $P(X - a) + P(X + a) = 2P(X)$.

◇ [Rec04/polynomes-r4.tex/r4:12] 2) Notons $\beta = P(0)$ et $\alpha = \frac{P(a) - P(0)}{a}$. Alors P coïncide avec $\alpha X + \beta$ sur l'ensemble $a\mathbb{Z}$, qui est infini, donc P est un polynôme de degré ≤ 1 . Réciproquement, tout polynôme de $\mathbb{C}_1[X]$ convient.

1) Les polynômes constants.

◆ **POL.90** (*) TPE PC – 2004

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$P(X + n) = \sum_{k=1}^n C_n^k (-1)^{k+1} P(X + n - k)$$

◇ [Rec04/polynomes-r4.tex/r4:118] associés à $0, 1, \dots, n$

Montrer que c'est vrai sur une base, par exemple des polynômes de Lagrange

◆ **POL.91** (*) TPE PC – 2004

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(1 - x)^{2n} = (1 + x)^{2n}$. Calculer le produit des racines.

◇ [Rec04/polynomes-r4.tex/r4:57]

◆ **POL.92** (★★★) CCP PC – 2004

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P_n = \frac{1}{2i} [(X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1}]$.

- Calculer les racines de P_n , montrer qu'elles sont réelles et symétriques par rapport à l'origine.
- En déduire $\sum_{k=1}^{2n} \cotan\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$.
- Vérifier l'existence de et calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

◇ [Rec04/polynomes-r4.tex/r4:65]

◆ **POL.93** (*) Centrale PC – 2005

Reste de la division euclidienne de $(\cos a + X \sin a)^n$ par $(X^2 + 1)$?

◇ [Rec05/polynomes-r5.tex/r5:79] On en déduit que $\mu = \cos(n\alpha)$ et $\lambda = \sin(n\alpha)$, et donc

Le reste est $R(x) = \lambda X + \mu$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
En évaluant le polynôme $A = BQ + R$ en i et en $-i$, on a

$$e^{in\alpha} = R(i) = \lambda i + \mu. \quad R = \sin(n\alpha) X + \cos(n\alpha).$$

◆ **POL.94** (★★) Centrale PC – 2005

Trouver tous les polynômes de degré 7 tels que $(X + 1)^4$ divise $P - 1$ et $(X - 1)^4$ divise $P + 1$.

◇ [Rec05/polynomes-r5.tex/r5:86] On en déduit, puisque $P' \in \mathbb{R}_6[X]$, que $P' = \alpha(X - 1)^3(X + 1)^3$. On en déduit P à une constante β près, et l'on détermine α et β avec le reste de l'énoncé. On remarque que $(X + 1)^3$ divise P' et $(X + 1)^3$ divise P' (attention, ce n'est pas si évident, il faut l'écrire proprement !)

◆ **POL.95** (★★★) TPE PC – 2005

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'application

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto \Delta P = P(X + 1) - P(X). \end{cases}$$

- Montrer que Δ est un endomorphisme.
- On pose $c_0 = 1$ et $c_k = \frac{X(X - 1) \cdots (X - k + 1)}{k!}$. Montrer que (c_0, \dots, c_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(p) \in \mathbb{Z}$.
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Décomposer P dans la base (c_0, \dots, c_n) à l'aide des $\Delta^k P(0)$.
- On suppose que, pour tout $q \in [0; n]$, $P(q) \in \mathbb{Z}$. Montrer que $P(q) \in \mathbb{Z}$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$.

◇ [Rec05/polynomes-r5.tex/r5:25] On en déduit $\Delta^k(c_p)(0) = \delta_{k,p}$, on applique à $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k c_k$, et on en déduit

$$P = \sum_{k=0}^n \Delta^k P(0) c_k.$$

Cf. exercice POL.54 page 46 sur les polynômes de Hilbert.

- T
- Famille échelonnée en degré.
- C'est soit un coefficient binomial, soit pareil avec un signe, soit 0, en fonction de n et p (faire ça proprement).
- (Cf. Petites Mines 1995.) On vérifie que $\Delta(c_p) = c_{p-1}$ pour $p \geq 1$ et donc

$$\Delta^k(c_p) = \begin{cases} c_{p-k} & \text{si } k \leq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5) On vérifie que $\Delta^k P(0) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in [0; n]$. On utilise ensuite la troisième question.

◆ **POL.96** CCP PC – 2005

Reste de la division euclidienne de $X^n + X + b$ par $X^2 - a^2$?

◇ [Rec05/polynomes-r5.tex/r5:27]

◆ **POL.97** (*) CCP PC – 2005

Soit P un polynôme à coefficients réels tel que, pour tout x réel, on ait $P(x) \geq 0$.

- Que peut-on dire sur le degré de P ?
- Montrez que les racines réelles de ce polynôme sont d'ordre de multiplicité paire.
- Montrez que P peut s'écrire sous la forme $P = A^2 + B^2$ où A et B sont deux polynômes à coefficients réels.

◇ [Rec05/polynomes-r5.tex/r5:50] 3. On écrit

$$P = \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{2m_k} \prod_{k=1}^q (X - z_k)^{n_k} \prod_{k=1}^q (X - \bar{z}_k)^{n_k}$$

$$= \left[\prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{k=1}^q (X - z_k)^{n_k} \right] \left[\prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{k=1}^q (X - \bar{z}_k)^{n_k} \right]$$

$$= Q(X) \cdot \bar{Q}(X) = (A(X) + iB(X))(A(X) - iB(X)) = A^2 + B^2$$

où A et B sont deux polynômes à coefficients réels.

- deg P est pair
- $P(x) \sim \frac{P^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m$ où m est la multiplicité de la racine x_0
d'où le résultat

◆ **POL.98** (★★) CCP PC – 2005

Condition sur n pour que $P_n = (X + 1)^n + X^n$ soit divisible par $X^2 + X + 1$?

◇ [Rec05/polynomes-r5.tex/r5:113]

◆ **POL.99** (★★) CCP PC – 2005

Soit $a > 0$. On définit $P(z) = z^3 + a z^2 + 4 z + a$. Montrer que P a toutes ses racines de partie réelle strictement négative.

◇ [Rec05/polynomes-r5.tex/r5:138] Le produit des racines est $\lambda\mu\nu = -a < 0$. De plus, l'une au moins des racines est réelle, et $\lambda + \mu + \nu = -a < 0$. Enfin, $P(0) > 0$ et P' est positif sur \mathbb{R}^+ , ce qui montre qu'on a une première racine réelle $\lambda < 0$.
Enfin, on a deux cas :

- 1^{er} cas : $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Puisque $P(x) \geq a > 0$ pour tout $x \geq 0$, ces racines sont négatives.
- 2^e cas : $\mu, \nu \notin \mathbb{R}$ et $\nu = \bar{\mu}$. Alors $\mu + \nu = 2\Re(\mu) = -a - \lambda$. De plus, P ne s'annule, sur \mathbb{R} , qu'en λ

et

$$P(-a) = -a^3 + a^3 - 4a + a = -3a < 0$$

ce qui prouve que $\lambda \in [-a; 0]$, donc $2\lambda(\mu) < 0$.

Fractions rationnelles

◆ FRA.1

Réduire en éléments simples

$$\frac{X^2 + X + 1}{(X - 1)^2(X + 1)^2}.$$

◇ [Divers/fracratexo.tex/pol:27]

$$= \frac{3}{4(X-1)^2} + \frac{1}{4(X+1)^2}.$$

◆ FRA.2

Réduire en éléments simples $\frac{X^7 + 1}{(X^2 + X + 1)^3}$.

◇ [Divers/fracratexo.tex/pol:28]

$$\frac{X^7 + 1}{(X^2 + X + 1)^3} = X - 3 + \frac{X + 1}{(X^2 + X + 1)^3} - \frac{4X + 2}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{3X + 5}{X^2 + X + 1}.$$

◆ FRA.3

Réduire en éléments simples $\frac{6}{X^3 + 1}$.

◇ [Divers/fracratexo.tex/pol:29]

Ou bien, sur $\mathbb{C}[X]$:

$$\frac{6}{X^3 + 1} = \frac{2}{X + 1} - \frac{2(X - 2)}{X^2 - X + 1}.$$

Espaces vectoriels

◆ **AL.1** (♣)
 Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un s.e.v. de E si et seulement si $(F \subset G \text{ ou } G \subset F)$.

◇ [Divers/evexo.tex/ev:01] donc $x + z \in F \cup G$. Donc soit $x + z \in G$ et alors $z \in G$: contradiction ; soit $x + z \in F$ et dans ce cas on a : $x \in F$. □
 \Leftarrow est trivial. Pour \Rightarrow : Supposons que $F \cup G$ est un s.e.v. et que $F \not\subset G$. Alors il existe $z \in F$ tel que $z \notin G$.
 □ Soit $x \in G$. Alors x et z appartiennent tous deux à $F \cup G$ qui est un s.e.v. On a donc montré que $G \subset F$. C'est suffisant pour prouver la propriété demandée.

◆ **AL.2** (♣)
 On considère dans \mathbb{R}^3 les trois vecteurs suivants : $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (2, 0, 1)$ et $\mathbf{c} = (-1, 1, 1)$. Montrer que ces trois vecteurs forment une base, et déterminer dans cette base les coordonnées de tout vecteur $\mathbf{r} = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 .

◇ [Divers/evexo.tex/ev:1]

◆ **AL.3** (♣)
 On munit l'ensemble des fonctions $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de sa structure canonique de \mathbb{R} -e.v., et on pose

$$E_0 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{f \in E ; f \text{ est paire}\} \quad \text{et} \quad E_1 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{f \in E ; f \text{ est impaire}\}.$$
 Montrer que $E = E_0 \oplus E_1$. Expliciter la projection sur E_0 parallèlement à E_1 .

◇ [Divers/evexo.tex/ev:2]

◆ **AL.4** (♣)
 Soit E un \mathbb{K} -e.v., et soient V_1, \dots, V_n des s.e.v. de E. Montrer que

$$\text{Vect}(V_1 \cup \dots \cup V_n) = V_1 + \dots + V_n.$$

◇ [Divers/evexo.tex/ev:3]

◆ **AL.5** (♣)
 Soient A et B deux parties de E. Montrer que $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

◇ [Divers/evexo.tex/div:79]

◆ **AL.6 (Liberté de $(\ln p_i)_i$)** (★)
 Montrer que la famille $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est libre dans le \mathbb{Q} -e.v. \mathbb{R} .
 Montrer que la famille $(\ln p)_{p \in \mathbb{P}}$, où \mathbb{P} est l'ensemble des nombres premiers, est libre dans le \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} .

◇ [Divers/evexo.tex/ev:14] Quitte à multiplier les μ_i par une constante, on peut les supposer entiers relatifs. On a alors $\prod_{i=1}^n p_i^{\mu_i} = 1$. Or on a un théorème d'unicité de la décomposition en facteurs premiers de 1, qui impose que les μ_i sont tous nuls. On en déduit que \mathbb{R} est un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension infinie.
 On suppose que $\lambda + \mu\sqrt{2} + \nu\sqrt{3} = 0$. Alors $\lambda^2 = (\mu\sqrt{2} + \nu\sqrt{3})^2 = 2\mu^2 + 3\nu^2 + 2\mu\nu\sqrt{6}$, or $\sqrt{6}$ est irrationnel, donc $\mu\nu = 0$, donc $\mu = 0$ ou $\nu = 0$, et finalement $\mu = \nu = 0$ ce qui entraîne $\lambda = 0$.
 Soient p_1, \dots, p_n des nombres premiers et $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{Q}$ tels que

◆ **AL.7** (♣)
 E étant un \mathbb{K} -e.v., et A, B, C trois s.e.v. de E, montrer que si 1° A et B sont en somme directe et 2° A + B et C sont en somme directe, alors : A, B et C sont en somme directe.

◇ [Divers/evexo.tex/ev:24] avec $(a + b) \in A + B$ donc $c = 0$ et $a + b = 0$, d'où $a = b = 0$.
 On suppose $a \in A$, $b \in B$ et $c \in C$ et $a + b + c = 0$. Alors $(a + b) + c = 0$

◆ **AL.8** (♣)
 On suppose que $\dim E = n$.
 1) Montrer que si F_1 et F_2 sont des s.e.v. de E tels que $F_1, F_2 \subsetneq E$, alors $F_1 \cup F_2 \subsetneq E$.
 2) Montrer que si F_1 et F_2 sont des s.e.v. de E et si $\dim F_1 = \dim F_2$, alors ils admettent un supplémentaire commun.

◇ [Divers/evexo.tex/ev:35]

Utiliser **AL.1**, puis construire la base.

◆ **AL.9** (★)
 On pose $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. On note F (*resp.* G) le s.e.v. des fonctions de E nulles sur $[0; \frac{1}{2}]$ (*resp.* $[\frac{1}{2}; 1]$). Déterminer un s.e.v. H de E tel que : $E = F \oplus G \oplus H$.

◇ [Divers/evexo.tex/ev:47] donc écrire comme une somme d'éléments de F et de G. De plus, la somme est bien directe.
 $H = \{\lambda \mathbf{1}\}$ où $\mathbf{1} : x \mapsto 1$.
 Si $f \in E$, on considère $g = f - f(\frac{1}{2})\mathbf{1}$, qui vérifie $g(\frac{1}{2}) = 0$, et qu'on peut

◆ **AL.10** (★★)
 Soient V et W deux s.e.v. supplémentaires du \mathbb{K} -e.v. E. On pose

$$L_1 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left\{ f \in \mathcal{L}(E, F) ; f|_W = 0 \right\} \quad \text{et} \quad L_2 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left\{ f \in \mathcal{L}(E, F) ; f|_V = 0 \right\}.$$
 Montrer que L_1 et L_2 sont deux s.e.v. supplémentaires de $\mathcal{L}(E, F)$.

◇ [Divers/evexo.tex/ev:48] $x = v + w$, et on pose $g(x) = f(v)$ et $h(x) = f(w)$. On vérifie que $g, h \in \mathcal{L}(E, F)$ et que $g \in L_1, h \in L_2$ et $g + h = f$. □
 On vérifie rapidement que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.
 □ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $x \in E$, on peut écrire de manière unique

◆ **AL.11** (★)
 Soient U, V deux s.e.v. de E. Montrer que $(U \cap V = U + V \Leftrightarrow U = V)$.

◇ [Divers/evexo.tex/ev:48bis] donc $U \subset U \cap V$ donc $U \subset V$. De même, $V \subset U$, donc $U = V$.
 \Leftarrow trivial. Pour \Rightarrow : On suppose $U \cap V = U + V$. Puisque $U \subset U + V$, on a

◆ **AL.12** (★★)
 Soient a_1, \dots, a_p des éléments distincts de $[0; 1]$. On pose $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E ; f(a_1) = \dots = f(a_p) = 0\}$. Montrer que F est un s.e.v. de E et montrer qu'un supplémentaire de F dans E est $\mathbb{K}_{p-1}[X]$.

◇ [Divers/evexo.tex/ev:54] On pose donc $H = \text{Vect}(P_1, \dots, P_p) = \mathbb{K}_{p-1}[X]$ et $E = F \oplus H$.
 Si $f \in E$, alors on pose $g = f - f(a_1)P_1 - \dots - f(a_p)P_p$, où les P_i sont les polynômes interpolateurs de Lagrange vérifiant

$$P_i(a_j) = \delta_{ij}.$$

◆ **AL.13** (★)
 On pose $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E ; \int_0^1 f = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer un supplémentaire dans E.

◇ [Divers/evexo.tex/ev:55] ce qui fournit une décomposition $E = F \oplus H$
 On pose $H = \{\lambda \mathbf{1}\}$ alors pour tout $f \in E$, on a

$$f = (f - \bar{f}\mathbf{1}) + \bar{f}\mathbf{1} \quad \text{avec} \quad \bar{f} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_0^1 f,$$

◆ **AL.14** (★)
 On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. On pose $U \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{P \in E ; P(a) = 0\}$ et $V \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{P \in E ; P(b) = 0\}$. Montrer que U et V sont des s.e.v. Leur somme est-elle directe ?

◇ [Divers/evexo.tex/ev:57]

Non.

◆ **AL.15** (♣)
 Soient A, B, C, D quatre sous-espaces vectoriels de E tels que $E = A \oplus B = C \oplus D$. On suppose que $A \subset C$ et $B \subset D$. Montrer que $A = C$ et $B = D$.

◇ [Divers/evexo.tex/ev:74] donc $a \in C$, ce qui prouve que $b = x - a$ est élément de C. Mais de plus, $b \in B \subset D$ donc $b \in C \cap D = \{0\}$ donc $b = 0$. Donc $x = a$ et $x \in A$. □
 Montrons que $C \subset A$.
 □ Soit $x \in C$. Alors $x \in E$ et comme $E = A \oplus B$, $x = a + b$. Or $a \in A \subset C$ On procède de même pour démontrer que $D \subset B$.

◆ **AL.16** (★)
 On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on note $f_k : x \mapsto |x - k|$. Montrer que, si $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$, la famille $(f_{k_1}, \dots, f_{k_n})$ est libre dans E.

◇ [Divers/evexo.tex/ev:53] donné, et en regardant la fonction combinaison linéaire sur $[\lambda_{n-1}, \lambda_n]$ puis sur $[\lambda_n, +\infty]$, on obtient $\lambda_n = 0$.

◆ **AL.17** (**) Soit $(f_a)_{a \in J}$ une famille de fonctions $\mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur un même intervalle $[1; +\infty]$, indexée par les éléments d'un ensemble $J \subset \mathbb{R}$ (*a priori* quelconque). On suppose que, pour tout $a, b \in J$, on a

$$a < b \implies f_a = \underset{+\infty}{0}(f_b).$$

Montrer que la famille $(f_a)_{a \in J}$ est libre.
Application aux familles définies par $f_a(x) = e^{-ax}$ et $g_a(x) = x^a$.

◇ [Divers/evexo.tex/ev:56] où les $a_1 < \dots < a_n$, et on regarde $F(x)/f_{a_n}(x)$ qui tend vers λ_n en l'infini, ce qui montre $\lambda_n = 0$.

On considère une combinaison linéaire

$$F = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i} = 0,$$

◆ **AL.18** (*) Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R} . On note E_f l'espace vectoriel

$$E_f \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \text{Vect} \{ f_t : x \mapsto f(x+t) ; t \in \mathbb{R} \}.$$

D\u00e9terminer E_f et sa dimension si $f = \exp$, si $f = \sin$, si $f : x \mapsto x^2$ et si $f : x \mapsto x e^x$.
Montrer que, pour $f = x \mapsto e^{x^2}$, alors E_f est de dimension infinie.

◇ [Divers/evexo.tex/ev:58] Si $f : x \mapsto x e^x$, alors dimension 2 ($x \mapsto e^x, x \mapsto x e^x$ est une base).
Si $f = \exp$, alors dimension 1.
Si $f = \sin$, alors dimension 2 (engendr\u00e9e par \sin et \cos).
Si $f : x \mapsto x^2$, alors dimension 3 ($x \mapsto 1, x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$).

◆ **AL.19** (♣) Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soient u, v et w trois vecteurs de E . Montrer que si $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u, w)$, alors la famille (u, v, w) est li\u00e9e.

◇ [Divers/evexo.tex/ev:83] $w = \alpha u + \gamma v$ donc la combinaison lin\u00e9aire non nulle $(1)w - \alpha u - \gamma v$ est nulle.
On a $w \in \text{Vect}(u, v)$ donc $w \in \text{Vect}(u, v)$ donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que

◆ **AL.20 (Famille positivement g\u00e9n\u00e9ratrice)** (**) Soit E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie $n \geq 1$. Une famille $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ de vecteurs de E est dite **positivement g\u00e9n\u00e9ratrice** si, et seulement si, tout vecteur de E est combinaison lin\u00e9aire \u00e0 coefficients positifs ou nuls des \u00e9l\u00e9ments de \mathcal{E} .
Calculer le cardinal minimum d'une famille positivement g\u00e9n\u00e9ratrice de E .

◇ [Divers/evexo.tex/ev:84] □ Soit $x \in E$. Il admet une d\u00e9composition $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans la base \mathcal{B} . Pour tout $\lambda > 0$, on a donc

Donc $p \geq n + 1$.

$$x = \lambda e_{n+1} + \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda) e_i.$$

Maintenant, soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Notons $e_{n+1} = -\sum_{i=1}^n e_i$ Pour $\lambda \geq \sup_i x_i$, on a donc une d\u00e9composition positive de x dans \mathcal{E} .
et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_{n+1})$. Ainsi le cardinal minimal est $n + 1$.

◆ **AL.21 (Nombres alg\u00e9briques)** (**) Montrer que la famille $(\ln p)_{p \in \mathbb{P}}$ o\u00f9 p parcourt l'ensemble des nombres premiers, est libre dans le \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} .

◇ [Divers/evexo.tex/ev:85] en les multipliant par une constante bien sentie. Le th\u00e9or\u00e8me de l'unicit\u00e9 de la d\u00e9composition en nombre premiers (apr\u00e8s passage \u00e0 l'exponentielle) permet de conclure.

Soit $\sum_{k=1}^n \lambda_k \ln p_k$ une combinaison lin\u00e9aire nulle de cette famille. Tout d'abord, on note que l'on peut se restreindre au cas o\u00f9 tous les λ_k sont entiers,

◆ **AL.22 (Exercice astucieux)** (***) Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ et 2π -p\u00e9riodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et D l'endomorphisme qui, \u00e0 $f \in E$, associe sa d\u00e9riv\u00e9e seconde f'' . Montrer que $E = \text{Ker}(D) \oplus \text{Im}(D)$.

◇ [Divers/evexo.tex/ev:86] On montre d'abord $\text{Ker } D \cap \text{Im } D = \{0\}$ (puisque $\text{Ker } D$ est l'ensemble des fonctions constantes).

Ensuite, une fonction de $\text{Im } D$ \u00e9tant la d\u00e9riv\u00e9e seconde d'une fonction p\u00e9riodique, elle est aussi d\u00e9riv\u00e9e d'une fonction p\u00e9riodique. Donc elle doit \u00eatre d'int\u00e9grale nulle. Ainsi, on est amen\u00e9 \u00e0 poser

$$f = (f) + (f - (f)) \quad \text{avec} \quad \langle f \rangle \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f.$$

On v\u00e9rifie ensuite que, en notant F une primitive de $f - \langle f \rangle$, F est bien 2π -p\u00e9riodique.

Pour cela, on utilise le lemme simple :

LEMME 1 Soit h une fonction 2π -p\u00e9riodique et continue. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^{2\pi} h = \int_x^{x+2\pi} h.$$

D\u00e9monstration : On note H une primitive de h , alors

$$\begin{aligned} \int_x^{x+2\pi} h - \int_0^{2\pi} h &= H(x+2\pi) - H(x) - H(2\pi) + H(0) \\ &= H(x+2\pi) - H(2\pi) + H(0) - H(x) \\ &= \int_{2\pi}^{x+2\pi} h - \int_0^x h \\ &= 0 \quad \text{par } 2\pi\text{-p\u00e9riodicit\u00e9.} \end{aligned}$$

◆ **AL.23**

Soit E un espace vectoriel de dimension quelconques, et A, B, A', B' des sous-espaces vectoriels de E .

- 1) On suppose que $E = A \oplus B = A \oplus B'$. Montrer que B est isomorphe \u00e0 B' .
- 2) On suppose $E = A \oplus B = A' \oplus B'$, et que de plus A est isomorphe \u00e0 A' .
 - a) Montrer que, si E est de dimension finie, B et B' sont isomorphes.
 - b) En consid\u00e9rant $E = \mathbb{R}[X]$ et en montrant que $\mathbb{R}[X]$ et $X\mathbb{R}[X]$ sont isomorphe, montrer que cette conclusion n'est plus valable en dimension quelconque.

◇ [Divers/evexo.tex/ev:89]

- 1) Notons p et q les projecteurs sur A et B' ($p+q=1$). Pour tout $b \in B$, on peut \u00e9crire $b = a + b'$ avec $a = p(b)$ et $b' = q(b)$. On va montrer que la restriction de q \u00e0 B est un isomorphisme entre B et B' .
Posons donc $\phi = q|_B$, c'est-\u00e0-dire que, pour tout $b = a + b'$, on pose $\phi(b) = b'$.
• **Injectivit\u00e9 de ϕ** : soit $b \in B$ tel que $\phi(b) = 0$. Alors $b \in A$, donc $b \in A \cap B$ donc $b = 0$.

• **Surjectivit\u00e9 de ϕ** : commencer par faire un dessin pour avoir la bonne id\u00e9e.

□ Soit $b' \in B'$. On d\u00e9compose b' dans $E = A \oplus B$ ce qui s'écrit $b' = a + b$. Alors $b = -a + b'$, ce qui montre que l'on a l'unique d\u00e9composition de b sur $A \oplus B'$, et donc $\phi(b) = b'$. □

- 2) On suppose $E = A \oplus B = A \oplus B'$.
 - a) \u00c9galit\u00e9 des dimensions.
 - b) $E = \mathbb{R}[X] \oplus \{0\} = X\mathbb{R}[X] \oplus \{X^0\}$.

◆ **AL.24 (Vect($\cos(n \cdot)$) $_n = \text{Vect}(\cos^n)$)** (*) On pose $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \text{Vect}((f_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et $G = \text{Vect}((g_n)_{n \in \mathbb{N}})$ o\u00f9 $f_n : x \mapsto \cos nx$ et $g_n : x \mapsto (\cos x)^n$. Montrer que $F = G$.

◇ [Divers/evexo.tex/div:80]

◆ **AL.25** (♣) Soit I un intervalle de \mathbb{R} . L'ensemble des fonctions monotones sur I est-il un espace vectoriel ?

◇ [Divers/evexo.tex/ev:71]

◆ **AL.26** (♣) On travaille dans $E = \mathbb{R}^n$. On pose $e = (1, 0, \dots, 0)$, $D = \text{Vect}(e)$ et $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 + \dots + x_n = 0\}$. Montrer que $E = D \oplus H$.

◇ [Divers/evexo.tex/div:81]

◆ **AL.27** On note E l'espace vectoriel des fonctions d\u00e9rivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On note

$$F = \{f \in E ; f(0) = f'(0) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathbb{R}_1[X].$$

Montrer que $E = F \oplus G$.

◇ [Divers/evexo.tex/div:82]

◆ **AL.28** ENSAE MP – 2001
 Soit E un \mathbb{R} -e.v. Soit $(F_i)_{i \in [1,p]}$ une famille de sous-espaces vectoriels stricts de E.
 Montrer que $\bigcup_{i=1}^p F_i \neq E$.

◇ [Rec01/ev-r1.tex/al-r:16] (Cf. exercice AL.32).

◆ **AL.29** Mines MP – 2001
 On pose $A(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 2 \operatorname{sh} x & e^{-x} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $G = \{A(x) + yB; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
 1) Montrer que G est un groupe.
 2) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de dimension 2 d'un espace de dimension 3.

◇ [Rec01/ev-r1.tex/al-r:25]

◆ **AL.30** Mines MP – 2001
 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x - a|$. Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

◇ [Rec01/ev-r1.tex/al-r:20]

◆ **AL.31** (★★★) Mines PC – 2002
 Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ n réels distincts deux à deux, et de même pour $(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Montrer que la famille $(f_{ij})_{ij}$ définie par $f_{ij}(x, y) = e^{\alpha_i x} e^{\beta_j y}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

◇ [Rec02/ev-r2.tex/al-r:12] composée de réels distincts si et seulement si μ n'est pas racine du polynôme
 On commence par démontrer le résultat classique :

THÉORÈME 2 Soient g_1, \dots, g_n des fonctions telles que

$$g_i = \sum_{+\infty}^{\infty} (g_{i+1}) \quad \text{pour tout } i \in [1; n-1].$$

 Alors la famille (g_1, \dots, g_n) est libre.

Soit $(\lambda_{i,j})_{i,j}$ une famille de réels telle que

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} f_{ij} = 0. \quad (*) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e^{(\alpha_i + \mu\beta_j)x} = 0.$$

Ensuite, on choisit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que la famille $(\alpha_i + \mu\beta_j)_{i,j}$ soit une famille de réels distincts. Pour montrer qu'un tel μ existe, il suffit de noter que la famille est composée de réels distincts si et seulement si μ n'est pas racine du polynôme

$$P(X) = \prod_{(i,j) \neq (i',j')} [(\alpha_i - \alpha_{i'}) + (\beta_i - \beta_{j'})X],$$

qui est un polynôme non nul car produit de polynômes non nuls. On peut évidemment choisir de plein de manières différentes un μ qui ne soit pas racine du polynôme P.

Alors, on évalue l'équation (*) en tout $(x, \mu x)$, ce qui donne

◆ **AL.32** Centrale MP – 2003
 Soit E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} (qui peut être \mathbb{Q}, \mathbb{R} ou \mathbb{C} — l'hypothèse fondamentale étant que c'est un corps infini).
 1) Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $F_1 \cup F_2$ soit un sous-espace vectoriel de E.
 2) Soit $(F_i)_{i \in [1,p]}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E différents de E lui-même.
 a) Dans le cas $p = 2$, montrer que $F_1 \cup F_2 \neq E$.
 b) Formuler l'hypothèse de récurrence dans le cas général et la démontrer.
 On pourra considérer, au cours du raisonnement, les cas suivants :
 i) $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{p-1} \subset F_p$;
 ii) $F_p \subset F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{p-1}$.
 3) Application : soit (a_1, \dots, a_p) une famille de points de \mathbb{R}^n . Montrer qu'il existe un hyperplan de \mathbb{R}^n ne contenant aucun des points a_1, \dots, a_p . On introduira

$$F_i = \{\phi \in (\mathbb{R}^n)^* ; \phi(a_i) = 0\}.$$

◇ [Rec03/ev-r3.tex/r3:146]

◆ **AL.33 (Famille positivement génératrice)** Centrale PC – 2003
 Soit E un \mathbb{R} -e.v. de dimension n . Déterminer le cardinal minimal des familles positivement génératrices de E (tout vecteur de E est combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls des éléments de cette famille).

◇ [Rec03/ev-r3.tex/r3:322] □ Soit $x \in E$. Il admet une décomposition $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans la base \mathcal{B} . Pour tout $\lambda > 0$, on a donc
 Tout d'abord, puisque \mathcal{E} est génératrice, $\operatorname{Card} \mathcal{E} \geq n$. De plus, si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est de dimension n et génératrice, $-e_1$ n'admet pas de décomposition positive dans \mathcal{E} .

Donc
$$p \geq n + 1. \quad x = \lambda e_{n+1} + \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda) e_i.$$

Maintenant, soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Notons $e_{n+1} = -\sum_{i=1}^n e_i$. Pour $\lambda \geq \sup x_i$, on a donc une décomposition positive de x dans \mathcal{E} .
 et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_{n+1})$. Ainsi le cardinal minimal est $n + 1$.

◆ **AL.34** (*) Centrale MP – 2003
 On considère la famille $\{X^n + X^{n+1}; n \in \mathbb{N}\}$. Est-elle libre? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}[X]$?

◇ [Rec03/ev-r3.tex/r3:152] son linéaire, et ce pour tout $k \in \mathbb{N}$!
 Elle est clairement libre mais non génératrice puisque X^k n'est pas combinai-

◆ **AL.35** (**) INT PC – 2003
 Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension n . Soient $x \in E$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. À quelle condition existe-t-il une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$?

◇ [Rec03/ev-r3.tex/r3:108] conque (b_1, \dots, b_n) et une bijection qui amène $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ (qui est non nul) sur x (il y en a plein). On note alors $e_i = f(b_i)$ et c'est gagné!
 On suppose $x \neq 0$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$. On choisit une base quel-

◆ **AL.36** (*) Centrale PC – 2004
 Soit E un \mathbb{K} -e.v., soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient E_1, \dots, E_n et F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E tels que

$$\bigoplus_{i=1}^n E_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i \quad \text{et} \quad \forall i \in [1; n] \quad E_i \subset F_i.$$

 Montrer que $E_i = F_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

◇ [Rec04/ev-r4.tex/r4:24]

◆ **AL.37** (*) CCP PC – 2005
 On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(0) = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires.

◇ [Rec05/ev-r5.tex/r5:4] nômes de Lagrange.
 Utiliser $F \cap G = \{0\}$ puis la décomposition de tout polynôme avec des poly-

◆ **AL.38** (♣) CCP PC – 2005
 Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -e.v. E. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 (a) $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E ;
 (b) $F \subset G$ ou $G \subset F$.

◇ [Rec05/ev-r5.tex/r5:103]

Applications linéaires

◆ **LIN.1 (Caractérisation d'une homothétie)** (★★)
 Soit E un \mathbb{K} -e.v.. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.

◇ [Divers/applineo.tex/ev:2bis] et donc
 On choisit $a \neq 0$; il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(a) = \lambda a$.
 □ Soit $x \in \text{Vect}(\{a\})$, alors $x = \mu a$ et $f(x) = \mu f(a) = \mu \lambda a = \lambda x$. □
 □ Soit $x \in E, x \notin \text{Vect}(\{a\})$. Il existe $\nu \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \nu x$. Par ailleurs il existe $\xi \in \mathbb{K}$ tel que $f(x+a) = \xi(x+a)$. On a ainsi

$$f(x+a) = \nu x + \lambda a = \xi(x+a),$$

 Or la famille (x, a) est libre, donc $\xi = \nu = \lambda$. □
 On a donc bien montré que pour tout $x \in E$, on a $f(x) = \lambda x$.

◆ **LIN.2** (★)
 Soit E un \mathbb{K} -e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les équivalences suivantes :

$$\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\} \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2;$$

$$\text{Im } f + \text{Ker } f = E \iff \text{Im } f = \text{Im } f^2.$$

◇ [Divers/applineo.tex/ev:3bis] $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$. Alors
 Seule la deuxième formule dans le sens \Leftarrow est délicate.
 □ Soit $x \in E$. Puisque $f(x) \in \text{Im } f$, on en déduit $f(x) \in \text{Im } f^2$ donc il existe

$$x = \underbrace{f(y)}_{\in \text{Im } f} + \underbrace{x - f(y)}_{\in \text{Ker } f}.$$

◆ **LIN.3** (♣)
 Soient E, F, G trois \mathbb{K} -e.v., soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker } g)$.

◇ [Divers/applineo.tex/ev:13ter]

◆ **LIN.4** (♣)
 Soit E un \mathbb{K} -e.v. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f(\text{Ker } g \circ f) = \text{Ker } g \cap \text{Im } f$.

◇ [Divers/applineo.tex/ev:100] □ Soit $x \in \text{Ker } g \cap \text{Im } f$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et de plus
 □ Soit $x \in f(\text{Ker } g \circ f)$. Alors $x \in \text{Im } f$, et de plus il existe $y \in \text{Ker } g \circ f$ tel que $x = f(y)$, donc $g(x) = 0$ et $x \in \text{Ker } g$. □
 $g(x) = 0$, donc $g \circ f(y) = 0$, donc $y \in \text{Ker } g \circ f$ et donc $x \in f(\text{Ker } g \circ f)$. □

◆ **LIN.5** ENSI
 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u \circ u = 0$. Montrer que u est de rang 0 ou 1. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a $u(x) = f(x)v$. L'application f est-elle linéaire ?

◇ [Divers/applineo.tex/ev:17] Si $\text{rg } u = 0$, f est quelconque, sinon f est linéaire.
 De $u \circ u = 0$ on tire $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ donc $\text{rg } u \leq 3 - \text{rg } u$, donc $\text{rg } u \leq 3/2$.

◆ **LIN.6** (★★)
 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, montrer que

- f est injective si et seulement si pour tout endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$, on a $((f \circ g = 0) \implies (g = 0))$.
- f est surjective si et seulement si pour tout endomorphisme $g \in \mathcal{L}(F)$, on a $((g \circ f = 0) \implies (g = 0))$.

◇ [Divers/applineo.tex/ev:20] 2) Supposons la propriété de droite. On définit g La projection parallèlement à $\text{Im } f$ sur un supplémentaire. Alors $g \circ f = 0$ donc $g = 0$ donc $\text{Im } f = E$.
 La réciproque est immédiate.

◆ **LIN.7** (★)
 Soit E un \mathbb{R} -e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + 2f - 3\text{Id} = 0$. Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + 3\text{Id})$.

◇ [Divers/applineo.tex/ev:27] $(f - \text{Id})(x) \in \text{Ker}(f + 3\text{Id})$ et $(f + 3\text{Id})(x) \in \text{Ker}(f - \text{Id})$, et on peut écrire
 Ces deux s.e.v. sont en somme directe. Par ailleurs, pour tout $x \in E$, on a

$$x = \frac{1}{4}[(f + 3\text{Id})(x) - (f - \text{Id})(x)].$$

◆ **LIN.8** (★★)
 Soit E un \mathbb{K} -e.v., et f un endomorphisme de E . On note \tilde{f} l'endomorphisme de $\text{Im } f$ induit par f . Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- $\tilde{f} \in \mathcal{GL}(\text{Im } f)$
- $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

INDICATION : On pourra donner une démonstration valable en dimension finie (plus aisée) ou en dimension quelconque (plus difficile).

◇ [Divers/applineo.tex/ev:39] existe $z \in \text{Im } f$ tel que $f(x) = \tilde{f}(z) = f(z)$, alors $f(x - z) = 0$ donc
 Si $\tilde{f} \in \mathcal{GL}(\text{Im } f)$, on vérifie que la somme est directe. En dimension finie, on s'en tire alors avec les dimensions. Sinon, soit $x \in E$. Alors $f(x) \in \text{Im } f$ dont il

$$x = \underbrace{x - z}_{\in \text{Ker } f} + \underbrace{z}_{\in \text{Im } f}.$$

◆ **LIN.9**
 Soit E un \mathbb{C} -e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\text{Id}_E$. On pose

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E; f(x) = ix\} \quad \text{et} \quad W \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E; f(x) = -ix\}.$$

Montrer que V et W sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
 INDICATION : On montrera par exemple que $(\text{Id} + if) \circ (\text{Id}_E - if) = 0$ pour commencer.

◇ [Divers/applineo.tex/ev:46] On a d'abord trivialement $V \cap W = \{0\}$.
 □ Soit $x \in E$. On pose $y = x - if(x)$. Alors on peut calculer $f(y) = f(x) - if^2(x) = f(x) + ix = iy$, ce qui prouve que $y \in V$. Par ailleurs, $f(x - y) = f(x) - f(y) = -ix$, ce qui prouve que $x - y \in W$. Au total, $x = y + (x - y) \in V + W$. □
 On a donc $E = V + W = V \oplus W$.

◆ **LIN.10** (♣)
 Soit E un espace vectoriel, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrer que, si f est injective, alors pour tous sous-espaces vectoriels U et V en somme directe, $f(U)$ et $f(V)$ sont en somme directe.
- La réciproque est-elle vraie ?

◇ [Divers/applineo.tex/ev:56bis] 1) Il suffit d'écrire.
 2) Si on suppose f non injective, il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que $f(x) = 0$. On regarde en dimension plus grande que 2 (sinon c'est absolument trivial : puisque U ou V est forcément réduit à $\{0\}$ donc la prémisse est vraie, et si $f \neq 0$, alors $\text{Ker } f$ n'est pas E donc est $\{0\}$: la conclusion est vraie).
 On choisit y non nul tel que $f(y) \neq 0$, alors (x, y) est libre, et on pose $z = x + y$. On pose ensuite $V = \text{Vect}(y)$ et $W = \text{Vect}(z)$. Ces deux s.e.v. sont en somme directe, et $f(y) = f(z)$ donc leurs images sont identiques : contradiction. Donc en dimension ≥ 2 , la réciproque est vraie.

◆ **LIN.11** (♣)
 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E , F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de F . Que pouvez-vous dire de $f(E_1 + E_2)$, $f(E_1 \cap E_2)$, $f^{-1}(F_1 + F_2)$, $f^{-1}(F_1 \cap F_2)$?

◇ [Divers/applineo.tex/ev:67]

◆ **LIN.12** (♣)
 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

- f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F ;
- f est surjective si et seulement si il existe une famille génératrice de E dont l'image est génératrice dans F .

◇ [Divers/applineo.tex/ev:68]

◆ **LIN.13** (★)
 Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ est surjective.

$$P \mapsto P(X+1) + P(X)$$

◇ [Divers/applineo.tex/ev:73] Sa restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ est surjective, car injective, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◆ **LIN.14 (Suites exactes)** (♣)

Soient E, F, G trois espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F), g \in \mathcal{L}(F, G)$. On dit que

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

est une **suite exacte** si et seulement si $\text{Im } f = \text{Ker } g$.

- 1) Que peut-on dire alors de $g \circ f$?
- 2) Que signifie le fait que $\{0\} \rightarrow F \xrightarrow{g} G$ soit une suite exacte ?
- 3) Que signifie le fait que $E \xrightarrow{f} F \rightarrow \{0\}$ soit une suite exacte ?

◇ [Divers/applinxo.tex/ev:75]

- 1) $g \circ f = 0$.
- 2) $\text{Ker } g = \{0\}$: g est injective.
- 3) $\text{Im } f = F$: f est surjective.

◆ **LIN.15** (★)

Soient E, F, G trois espaces vectoriels et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On définit

$$\Phi: \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(F, G) \\ f & \longmapsto & \Phi(f) = g \circ f. \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E, F), \mathcal{L}(F, G))$.
- 2) On suppose g injective. Que peut-on dire de Φ ?

◇ [Divers/applinxo.tex/ev:76]

- 1) \top .
- 2) Montrons que Φ est injective. \square Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\Phi(f) = 0$. Alors $g \circ f = 0$, ce qui se traduit par $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$. Or g est injective donc $\text{Ker } g = \{0\}$ donc $\text{Im } f = \{0\}$ donc $f = 0$. \square

◆ **LIN.16** (★★)

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

- 1) Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } g = \text{Ker } g \oplus \text{Im } f$.
- 2) Montrer que $f(\text{Im } g) = \text{Im } f$.

◇ [Divers/applinxo.tex/ev:77]

1) **1^{re} possibilité : analyse-synthèse.**

- **Analyse.** On suppose qu'il existe une décomposition $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker } g$ et $z \in \text{Im } g$. Alors il existe $w \in E$ tel que $z = g(w)$. Mais alors $f(x) = f(z) = f \circ g(w)$ et donc $g \circ f(x) = g \circ f \circ g(w) = g(w) = z$, donc $y = x - g \circ f(x)$.
- **Synthèse.** On pose $y = x - g \circ f(x)$ et $z = g \circ f(x)$. Alors $x = y + z$, $z \in \text{Im } g$ et $y \in \text{Ker } f$: tout baigne. Cela montre que la décomposition existe, et qu'elle est unique ; donc la somme est directe.

2) **2^e possibilité :**

on cherche à décomposer x sur $\text{Ker } f + \text{Im } g$. On essaye d'abord $x = x - g(x) + g(x)$ qui ne donne rien. On essaye ensuite

$$x = \underbrace{x - g \circ f(x)}_{\in \text{Ker } f} + \underbrace{g \circ f(x)}_{\in \text{Im } g}$$

qui marche bien, ce qui montre $E = \text{Ker } f + \text{Im } g$. On montre ensuite facilement que $\text{Ker } f \cap \text{Im } g = \{0\}$.

2) On sait que $f(\text{Im } g) \subset \text{Im } f$. Montrons l'inclusion réciproque. \square Soit $w \in \text{Im } f$, alors il existe $x \in E$ tel que $w = f(x) = f \circ g \circ f(x)$, donc $w \in f(\text{Im } g)$. \square

◆ **LIN.17 (Id - f o g inversible ⇒ Id - g o f aussi)** (♣)

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $\text{Id} - f \circ g$ est inversible, alors

$$(\text{Id} - g \circ f) \circ (\text{Id} + g \circ (\text{Id} - f \circ g)^{-1} \circ f) = \text{Id}.$$

En déduire que $\text{Id} - f \circ g$ est inversible si et seulement si $\text{Id} - g \circ f$ l'est.

◇ [Divers/applinxo.tex/ev:93]

Cf. aussi les exercices **RNG.1, DIA.17, DIA.21** et **ALG.57**.

◆ **LIN.18** (♣)

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : E' \rightarrow F'$ deux applications linéaires équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe des isomorphismes $e : E \rightarrow E'$ et $v : F \rightarrow F'$ tels que $g = v \circ f \circ u^{-1}$. Montrer que

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ E' & \xrightarrow{f'} & F' \end{array}$$

$\text{Ker } g = u(\text{Ker } f)$
 $\text{Im } g = v(\text{Im } f)$.

◇ [Divers/applinxo.tex/ev:107]

On a $\text{Ker}(v \circ (f \circ u^{-1})) \supset \text{Ker } f \circ u^{-1}$. Or $\text{Ker } f \circ u^{-1} = u(\text{Ker } f)$ ce qui montre $\text{Ker } g \supset u(\text{Ker } f)$.

\square Si $x \in \text{Ker } g$, alors $g(x) = 0$ donc $v(f(u^{-1}(x))) = 0$ donc v étant iso-morphisme, $f(u^{-1}(x)) = 0$ donc $u^{-1}(x) \in \text{Ker } f$ donc $u(x) \in \text{Ker } f$. \square On a donc bien montré la première égalité.

◆ **LIN.19**

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soient $A \subset E, B \subset F$, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$f^{-1}(f(A)) = A + \text{Ker } f \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(B)) = B \cap \text{Im } f.$$

◇ [Divers/applinxo.tex/ev:108]

◆ **LIN.20**

◇ [Divers/applinxo.tex/div:84]

◆ **LIN.21** X PC - 2003

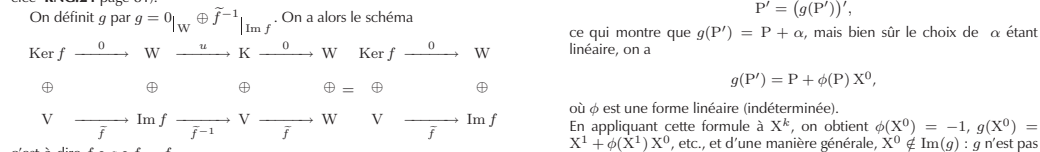
Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe $g \in \mathcal{G}(E)$ tel que $f \circ g \circ f = f$. Le résultat est-il toujours valable en dimension quelconque ?

◇ [Rec03/applin-r3.tex/r3:440]

On décompose $E = \text{Ker } f \oplus V = \text{Im } f \oplus W$, alors f établit par restriction un isomorphisme $\tilde{f} : V \rightarrow \text{Im } f$.

- **Si l'on est en dimension finie**, on choisit de plus un isomorphisme $W \xrightarrow{u} \text{Ker } f$ (on peut aussi utiliser une solution matricielle, voir l'exercice **RNG.24** page 81).

On définit g par $g = 0|_W \oplus \tilde{f}^{-1}|_{\text{Im } f}$. On a alors le schéma



- **Si l'on est en dimension infinie**, il se peut que W et $\text{Ker } f$ ne soient pas isomorphes. Par exemple, $f = D$ (dérivation canonique) sur $\mathbb{R}[X]$, on a $\text{Im}(f) = \mathbb{R}[X]$ donc $W = \{0\}$ mais $\text{Ker } f = \mathbb{R}X^0$. En revanche, entre W et $\text{Ker } f$, il est toujours possible de créer soit une injection, soit une bijection. Ainsi, par la même technique, on a prouvé que : **il existe une injection ou une surjection $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f = f \circ g \circ f$.** Nous pouvons donner ici deux exemples où la bijection n'existe pas, mais où l'on a une injection (premier cas) ou une surjection (deuxième cas).

- **Premier contre-exemple.** On considère $E = \mathbb{R}[X]$, f la dérivation canonique. Alors $\text{Im}(f) = \mathbb{R}[X]$, qui admet comme unique supplémentaire $W = \{0\}$, tandis que $\text{Ker } f = (X^0)$, qui admet comme supplémentaire $V = X\mathbb{R}[X]$. Bien sûr, $W = \{0\}$ et $\text{Ker } f$ ne sont pas isomorphes. Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f = f \circ g \circ f$, alors pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$P' = (g(P'))',$$

ce qui montre que $g(P') = P + \alpha$, mais bien sûr le choix de α étant linéaire, on a

$$g(P') = P + \phi(P)X^0,$$

où ϕ est une forme linéaire (indéterminée).

En appliquant cette formule à X^k , on obtient $\phi(X^0) = -1$, $g(X^0) = X^1 + \phi(X^1)X^0$, etc., et d'une manière générale, $X^0 \notin \text{Im}(g)$: g n'est pas surjective (elle est en revanche injective).

- **Second contre-exemple.** On définit, toujours dans $E = \mathbb{R}[X]$, l'application $f : P \mapsto X \cdot P$. On suppose qu'il existe $g = f \circ g \circ f$, ce qui veut dire que $XP = Xg(XP)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, ou encore

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad P = g(XP).$$

Par conséquent, $g(X\mathbb{R}[X]) = \mathbb{R}[X]$; or $g(X^0) \in \mathbb{R}[X]$, ce qui montre que g n'est pas injective (elle est en revanche surjective).

◆ **LIN.22** (♣) CCP PC - 2003

On considère E et F deux espaces vectoriels et f un homomorphisme (i.e. une application linéaire) non nul de E dans F . Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) f est injective ;
- (b) pour tous sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E , on a

$$E_1 \cap E_2 = \{0\} \Leftrightarrow f(E_1) \cap f(E_2) = \{0\}.$$

◇ [Rec03/applin-r3.tex/r3:87]

◆ **LIN.23** (★) Centrale MP - 2004

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u \neq 0$. Montrer que $\text{Ker } u \neq \text{Ker } u^2$.

◇ [Rec04/applin-r4.tex/r4:212]

Si $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$, alors il est aisé de montrer, par récurrence, que $\text{Ker } u = \text{Ker } u^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Projecteurs

◆ **LIN.24 (p(V))** (★)

Soient $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur et V un sous-espace vectoriel de E . Montrer que V est stable si et seulement si il est somme d'un sous-espace vectoriel du noyau de p et d'un sous-espace vectoriel de l'image de p .

◇ [Divers/projecteursexo.tex/ev:105] montre aisément $V = A \oplus B$. La réciproque est immédiate.
On pose $A = V \cap \text{Ker } p$ et $B = V \cap \text{Im } p$. Si V est stable par p , alors on

◆ **LIN.25** (♣)
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
(a) f et g sont deux projecteurs de même image ;
(b) $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.

◇ [Divers/projecteursexo.tex/ev:106] Cf. également l'exercice **LIN.26**.

◆ **LIN.26** (♣)
Soit E un espace vectoriel. Montrer que des projecteurs p et q ont même noyau si et seulement si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

◇ [Divers/projecteursexo.tex/ev:65] $p \circ q(z) = p(z) = p(z) + p(y) = p(x)$. Ainsi $p \circ q = p$. De même, $q \circ p = q$. □
Cf. également l'exercice **LIN.25**.
□ On suppose que $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$. Soit $x \in \text{Ker } p$, alors $q(x) = q \circ p(x) = 0$ donc $x \in \text{Ker } q$, ce qui montre $\text{Ker } p \subset \text{Ker } q$, et de même dans l'autre sens. □

◆ **LIN.27** (★)
Soient p, q des projecteurs tels que $pq = 0$. On pose $r \stackrel{\text{def}}{=} p + q - qp$.
Montrer que r est un projecteur et que $\text{Ker } r = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$ tandis que $\text{Im } r = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$.
(Variante plus difficile : montrer que r est un projecteur et trouver son image et son noyau.)

◇ [Divers/projecteursexo.tex/ev:10] et on obtient $p^2(x) = p(x) = 0$, donc $x \in \text{Ker}$. En composant à droite par q , on obtient $q(x) = 0$ donc $x \in \text{Ker } q$. Au total, $x \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$. □
On calcule $r^2 = r$.
□ Soit $x \in \text{Ker } r$, alors $p(x) + q(x) - pq(x) = 0$. On compose par p à gauche □ Soit $x \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$. Alors $p(x) = q(x) = 0$, et $r(x) = 0$. □

◆ **LIN.28**
Soient p et q des projecteurs, et on suppose que $pq = \alpha pq$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$. Montrer que $pq = qp = 0$.

◇ [Divers/projecteursexo.tex/ev:11] $pqp = q(pq) = \alpha q(pq) = \alpha pq$ ce qui montre que $qp = \alpha pq$, et donc $qp = 0$.
On suppose $pq = \alpha pq$ avec et on calcule qpq par deux méthodes. On De la même façon, on calcule de deux manières différentes pqp et on trouve a d'abord $qpq = (qp)q = \alpha^{-1}(pq)q = \alpha^{-1}pq = qp$, et d'autre part $pqp = 0$.

◆ **LIN.29** (★)
Soit p un projecteur non nul d'un espace vectoriel E . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\text{Id}_E + \lambda p$ est injectif si et seulement si $\lambda \neq -1$.

◇ [Divers/projecteursexo.tex/ev:49] Ceci montre que $\text{Id}_E + \lambda p$ est injective. □
□ On suppose $\lambda \neq -1$.
► Soit $x \in \text{Ker}(\text{Id}_E + \lambda p)$, alors $x = -\lambda p(x)$ donc $p(x) = -\lambda p^2(x) = -\lambda p(x)$ ce qui montre que $(1 + \lambda)p(x) = 0$ et donc $p(x) = 0$ et donc $x = -\lambda p(x) = 0$. ◀
□ On suppose $\lambda = -1$. Puisque $p \neq 0$, on a donc $\text{Im } p \neq \{0\}$. On choisit alors $x \in \text{Im } p$ non nul. Il est facile de voir que $p(x) = x$. Alors $(\text{Id}_E - p)(x) = x - p(x) = 0$, ce qui montre que $\text{Id}_E + \lambda p$ est non injective. □

◆ **LIN.30** (★★)
Soient (p_1, \dots, p_q) des projecteurs de E , \mathbb{K} -e.v. de dimension n . On suppose que
$$p_1 + \dots + p_q = \text{Id}_E.$$

Montrer que
$$E = \bigoplus_{k=1}^q \text{Im}(p_k).$$

◇ [Divers/projecteursexo.tex/ev:87] or on a
On note $E_k = \text{Im}(p_k)$.
Puisque Id est un projecteur, on a
$$n = \text{rg } \text{Id} = \text{tr}(\text{Id}) = \sum_{k=1}^q \text{tr } p_k = \sum_{k=1}^q \text{rg } p_k,$$

ce qui montre que $E = \sum_{k=1}^q E_k$. De plus, on a montré que $\dim E = \sum_{k=1}^q \dim E_k$, ce qui finit de prouver que la somme est directe.

◆ **LIN.31** (♣)
Soit k un entier naturel et soient p_1, \dots, p_k des projecteurs de E . On note
$$P \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k p_i.$$

1) On suppose que P est un projecteur. Montrer que
$$\text{Im}(P) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Im}(p_i).$$

2) Montrer que P est un projecteur si et seulement si
$$\forall (i, j) \in [1; n]^2 \quad p_i \circ p_j = \delta_{ij} p_i.$$

◇ [Divers/projecteursexo.tex/ev:88] 2) • Si la formule est vraie, alors
(C'est une généralisation de **LIN.42**)
1) On note $E_i = \text{Im}(p_i)$.
Puisque P est un projecteur, on a

$$\dim(P(E)) = \text{rg } P = \text{tr}(\text{Id}) = \sum_{i=1}^k \text{tr } p_i = \sum_{i=1}^k \text{rg } p_i,$$

or on a
$$P(E) = \left(\sum_{i=1}^k p_i \right) (E) \subset \sum_{i=1}^k p_i(E),$$

or on a montré que $\dim P(E) = \sum_{i=1}^k \dim p_i(E)$, donc on a égalité

$$P(E) = \sum_{i=1}^k p_i(E).$$

De plus, l'égalité $\dim P(E) = \sum_{i=1}^k \dim p_i(E)$ montre que cette somme est directe.

donc P est un projecteur.
• Réciproquement, supposons que P est un projecteur. Montrons la formule pour $i \neq j$ (le cas $i = j$ est trivial).
On se choisit donc $i \in [1, n]$.
□ Soit $x \in E$. Notons $x = p_i(z)$. Alors $x \in \text{Im } p_i \subset \text{Im}(P)$, donc d'une part on a

$$x = p_i(x);$$

mais d'autre part on peut décomposer

$$x = P(x) = \sum_{j=1}^k p_j(x).$$

Par unicité de la décomposition, on a nécessairement $p_j(x) = 0$ pour tout $j \neq i$, c'est-à-dire $p_j \circ p_i(z) = 0$. □
Cela montre que $p_j \circ p_i = 0$ pour tout $j \neq i$. •

◆ **LIN.32**
Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie.
Soit f un endomorphisme de rang 1 et de trace 1. Montrer que f est un projecteur.

◇ [Divers/projecteursexo.tex/div:30] Ainsi, $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$. En prenant une base adaptée, on voit que f est un projecteur.
On note que $\text{Im}(f)$ n'est pas inclus dans $\text{Ker } f$, car sinon la trace de f serait nulle (prendre une base adaptée à $\text{Ker } f$).

◆ **LIN.33** ($\sum p_i = 0$)
Soit E un \mathbb{C} -e.v..
1) Soient p, q et r trois projecteurs vérifiant $p + q + r = 0$. Montrer que $p = q = r = 0$.
2) On suppose que E est de dimension finie, et que p_1, \dots, p_k sont des projecteurs vérifiant $\sum_{i=1}^n p_i = 0$. Montrer que $p_i = 0$ pour tout $i \in [1; k]$.

◇ [Divers/projecteursexo.tex/div:51] 2) On a l'astuce des traces :
$$1) \quad r = r^2 = (-p - q)^2 = -r + (pq + qp) \dots$$

À FINIR !!!
donc $p_i = 0$ pour tout $i \in [1; k]$.

◆ **LIN.34**

◇ [Divers/projecteursexo.tex/div:52]

◆ **LIN.35** (★)
Soit E un \mathbb{R} -e.v. et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Soit p un projecteur de E . Montrer que $p - \lambda \text{Id}_E$ est injective.

◇ [Rec03/projcteurs-r3.tex/r3:246] Or on sait que $E_1(f) \subset \text{Im}(f)$; puisqu'il y a égalité des dimensions, on en déduit l'égalité des espaces :

$$\text{Im}(f) = E_1(f) = \text{Ker } g.$$

On a $g = \text{Id} - f$ donc $\text{Ker } g = E_1(f) = \text{Ker}(f - \text{Id})$. Le théorème du rang donne

$$\dim \text{Ker } g = \dim E_1(f) = n - \text{rg } g = \text{rg } f.$$

◆ **LIN.49** (*) CCP – 2003
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit f un projecteur de E . Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $t \in \mathbb{K}$ pour que $f + t \text{Id}$ soit inversible. Trouver alors son inverse.

◇ [Rec03/projcteurs-r3.tex/r3:92] On cherche bien sûr g^{-1} sous la forme $\mu f + \lambda$ et donc, en injectant, on obtient

$$(f + t \text{Id})^{-1} = \frac{1}{t} \left(\text{Id} - \frac{1}{t+1} f \right).$$

Il faut que $t \notin \text{Sp}(f)$ donc $t \notin \{0, -1\}$ dans le cas où f n'est pas un projecteur trivial.

◆ **LIN.50** (*) CCP PC – 2005
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $f \circ f = f$. On définit $E = \{t \in \mathbb{R}; \text{Id}_E + t f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)\}$.

- Déterminer E .
- Déterminer $(\text{Id} + t f)^{-1}$ pour tout $t \in E$.

◇ [Rec05/projcteurs-r5.tex/r5:118] On traite à part les cas triviaux $f \in \{0, \text{Id}_E\}$. Sinon, $E = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. L'inverse de f est de la forme $\text{Id}_E + \alpha f$ et on calcule aisément $\alpha = -t/(1+t)$:

$$(\text{Id} + t f)^{-1} = \text{Id}_E - \frac{t}{1+t} f.$$

Endomorphismes nilpotents

◆ **LIN.51** (*)
Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose alors $\Phi_f : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et que

$$g \longmapsto f \circ g + g \circ f.$$

f est nilpotent $\iff \Phi_f$ est nilpotent.

◇ [Divers/nilpotentexo.tex/ev:13bis] Réciproquement, si Φ est nilpotent, la formule précédente appliquée à Id montre que

$$0 = \Phi_f^k(\text{Id}) = 2^k f^k.$$

pour $\Phi_f^k(g) :$

$$\Phi_f^k(g) = \sum_{i=0}^k C_k^i f^{k-i} \circ g \circ f^i.$$

◆ **LIN.52** (♣)
Soit E un \mathbb{K} -e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit $\Phi_f : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ Montrer que f est nilpotent si et seulement si Φ_f est nilpotent.

$$g \longmapsto f \circ g.$$

◇ [Divers/nilpotentexo.tex/ev:78] alors $\Phi_f^n(\text{Id}) = f^n = 0$.
Si f est nilpotent d'indice n , alors Φ_f l'est aussi. Si Φ_f est nilpotent d'indice n ,

◆ **LIN.53** (**)
On rappelle qu'un endomorphisme est dit **nilpotent** s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = f \circ f \circ \dots \circ f = 0$. On appelle alors **indice** de nilpotence de f le plus petit entier vérifiant cette propriété.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent, et notons p son indice de nilpotence.

- Montrer que $\text{Ker } f^{p-1} \subsetneq E$ et que si $x \in E \setminus \text{Ker } f^{p-1}$, alors la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
- En déduire que si E est de dimension finie n , alors $f^n = 0$.
- Soit $g \in \mathcal{G}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'alors $f + g \in \mathcal{G}(E)$.

INDICATION : On montrera que $g^{-1} \circ f$ est nilpotent et on utilisera la formule des anneaux $1 + x^p = \dots$.
On peut, alternativement, montrer que $(g^{-1} \circ f + \text{Id})$ est injectif.

- On considère le cas $E = \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$, les endomorphismes f et g étant donnés par les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que f est nilpotent, que g est un automorphisme, mais qu'en revanche $f + g \notin \mathcal{G}(\mathbb{K}^2)$.

◇ [Divers/nilpotentexo.tex/ev:21] Or on a $g(\text{Id} + g^{-1}f) = g + f$ inversible car g inversible.
Montrons que $f + g \in \mathcal{G}(E)$. Pour cela, montrons d'abord que $(\text{Id} + g^{-1}f)$ est inversible. On commence par noter que f et g^{-1} commutent. On a alors

$$(\text{Id} + g^{-1}f)[1 - g^{-1}f - (g^{-1}f)^2 - \dots - (g^{-1}f)^{p-1}] = \text{Id} - (g^{-1}f)^p = \text{Id} - (g^{-1})^p f^p = \text{Id}.$$

◆ **LIN.54**
Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension $n > 0$ et f un endomorphisme nilpotent. Montrer que son indice de nilpotence $p \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{k \in \mathbb{N}; f^k = 0\}$ vérifie : $p \leq n$. En déduire que $f^n = 0$.
On suppose que $\dim(E) = 3$ et que $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont tels que $(u \circ v)^3 = 0$. Montrer que $(v \circ u)^3 = 0$.

◇ [Divers/nilpotentexo.tex/ev:61] 1) Une élégante démonstration de $p \leq n$ est dans **LIN.53** : si $x \in E \setminus \text{Ker } f^{p-1}$, alors la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
2) $u \circ v$ étant nilpotent, alors il est facile de voir que $v \circ u$ l'est aussi, puisque $(v \circ u)^{k+1} = v \circ (u \circ v)^k \circ u = 0$.

◆ **LIN.55**
Soit E un \mathbb{R} -e.v. de dimension 3, et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non nul tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

◇ [Divers/nilpotentexo.tex/mat:19] On note que la rang de f est forcément 1, parce que si c'est 2, alors $\text{rg } f^2 \geq 1$.
De plus, si $x \neq 0$ est élément de $\text{Im } f$, alors $f(x) = 0$ donc $f(x) \notin \text{Im } f$. Donc la famille $(x, f(x))$ est libre, on la complète en une base et on vérifie que celle-ci convient.

◆ **LIN.56** (*)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que

$$\forall x \in E \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad f^p(x) = 0.$$

Montrer que f est nilpotent.

◇ [Divers/nilpotentexo.tex/div:149] $\max_i p_i$ est l'indice de nilpotence de E .
On choisit une base (b_1, \dots, b_n) , on trouve des entiers (p_1, \dots, p_n) , on alors

◆ **LIN.57** (***) X PC – 2001
Soit f un endomorphisme nilpotent d'ordre n de \mathbb{C}^n . Trouver tous les sous-espaces stables de \mathbb{C}^n stables par f .
Soient f_1, \dots, f_n , n endomorphismes nilpotents d'ordre n de \mathbb{C}^n , qui commutent deux à deux. Montrer que $f_1 \circ \dots \circ f_n = 0$.

◇ [Rec01/nilpotent-r1.tex/ev:81] Puisque $f^{n-1} \neq 0$, il existe $a \in \mathbb{C}^n$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$. Alors $\text{Im } f^{n-1} = \langle a \rangle$. En fait, $\text{rg } f^k = n - k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. De plus, $f^{n-1}(a) \in \text{Ker } f$. Comme $\text{Ker } f$ est de dimension 1, $\text{Ker } f = \langle f^{n-1}(a) \rangle$, et c'est un sous-espace vectoriel stable par f . De plus, $\text{Im } f$ est bien évidemment stable par f .
En effet, soit V un sev stable, alors il contient les images itérées de lui-même. Je pense que V est de la forme $\text{Vect}(u^k(a), u^{k+1}(a), \dots, u^{n-1}(a))$.
Lorsque deux endomorphismes commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.
Posons $F_k = \text{Im}(f_k \circ \dots \circ f_n)$. Alors $\dim F_{k+1} < \dim F_k$ car f_k étant nilpotent, sa restriction à F_k ne saurait être bijective étant nilpotente elle-même. En particulier, puisque $\dim F_n < n$ on a $\dim F_k < k$ donc $\dim F_1 = 0$ donc $f_1 \circ \dots \circ f_n = 0$.
Remarque : les sous-espaces vectoriels de E tels que $f(V) \subset V$ sont exactement les noyaux $\text{Ker}(f^k)$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ (en effet, f est cyclique, les sous-espaces vectoriels stables par f sont les noyaux des polynômes en f).

◆ **LIN.58** (***) X PC – 2001
1) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $f^n = 0$. Trouver tous les sous-espaces vectoriels $E \subset \mathbb{C}^n$ tels que $f(E) = E$.
2) Soient $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ nilpotents et commutant entre eux. Montrer que $f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n = 0$.

◇ [Rec01/nilpotent-r1.tex/red-r:8] Seul $E = \{0\}$ vérifie $f(E) = E$ sinon $f|_E$ serait un automorphisme. Puisque $f_i^n = 0$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a donc les inégalités strictes

$$n > \text{rg } f_n > \text{rg } f_{n-1} \circ f_n > \dots > \text{rg } f_1 \circ \dots \circ f_n,$$

ce qui montre que le dernier rang est nul.

◆ **LIN.59** (*) INT PC – 2001
Soit u un endomorphisme nilpotent d'ordre 3 de \mathbb{R}^3 . Montrer que $\text{Ker } u = \text{Im } u^2$ et $\text{Ker } u^2 = \text{Im } u$.

◇ [Rec01/nilpotent-r1.tex/ev:80] On a $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$. On peut donc trouver $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $u^2(x) \neq 0$ et bien sûr $u^3(x) = 0$.
tandis que $\text{mat}_{\mathbb{B}} u^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui montre les relations désirées.
Alors $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x))$ est une base de E et $\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

◆ **LIN.60** TPE MP – 2001
 Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension 3, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$, $f^3 = 0$. Trouver tous les endomorphismes de E qui commutent avec f .

◇ [Rec01/nilpotent-r1.tex/al-r:21]

Cf. exercice **RNG.34**

On choisit un x tel que $f^2(x) \neq 0$, et dans la base $(x, f(x), f^2(x))$, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $AM = MA$ avec $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$, alors en posant

$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$, on trouve $M = \begin{pmatrix} a & & \\ a' & a & \\ a'' & a' & a \end{pmatrix}$ qui est bien engendré par les matrices de Id, f, f^2 .

◆ **LIN.61 (Endomorphisme nilpotent)** CCP MP – 2002

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

- 1) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ forme une base de E .
- 2) Déterminer le rang de f .
- 3) Montrer que les endomorphismes qui commutent avec f sont les polynômes en f .

◇ [Rec02/nilpotent-r2.tex/al-r:2-26]

Un grand classique : il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$, et la famille suggérée est trivialement libre. La matrice de f dans cette base est de rang $n-1$: c est

une sur-diagonale de 1.

De plus, on réfléchit matriciellement pour montrer que, si une matrice commutée avec la matrice de f , c est un polynôme en la matrice de f .

◆ **LIN.62 (Endomorphismes nilpotents)** CCP MP – 2003

Soit E un \mathbb{C} -e.v. de dimension finie n .

- 1) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = u$. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad u^p v - v u^p = p u^p.$$

En utilisant $\phi: \begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ w \longmapsto wv - vw \end{cases}$, montrer que u est nilpotent.

- 2) Soit $e \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\text{tr}(u^k)$ en fonction des valeurs propres non-nulles de u et de leur ordre de multiplicité.
- 3) Montrer que, si $\text{tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in [1; n]$, alors u est nilpotent.

◇ [Rec03/nilpotent-r3.tex/r3:301]

2) T.

- 1) Récurrence. Si u non nilpotent, tous les u^k sont vecteurs propres de ϕ avec la valeur propre k , or $\text{Sp}(\phi)$ est fini.

- 3) On utilise une seule fois chaque valeur propre et on forme un déterminant de Vandermonde.

◆ **LIN.63 (Matrices nilpotentes)** ENS Cachan MP – 2004

Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

- 1) Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) A est nilpotente ;
- (b) $\forall k \in [1; n] \quad \text{tr}(A^k) = 0$.

- 2) On suppose que $A + \lambda B$ est nilpotente pour $n+1$ valeurs distinctes de λ . Montrer que A et B sont nilpotentes.
- 3) On suppose $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. On suppose que B est une matrice qui commute avec A . Déterminer B en fonction de A .

Question subsidiaire : et si on suppose seulement A nilpotente ?

◇ [Rec04/nilpotent-r4.tex/r4:191]

- 1) (b) \Rightarrow (a) est trivial.

Pour (a) \Rightarrow (b), trigonaliser A , utiliser une seule fois chaque valeur propre et former une matrice de Vandermonde ce qui montre que les valeurs propres sont toutes nulles.

- 2) On utilise le fait que A est nilpotente si et seulement si $\chi_A = X^n$. Alors $\chi_{M+\lambda N} = X^n$ pour $n+1$ valeurs de distinctes ; les coefficients de $\chi_{M+\lambda N}$ étant des polynômes en λ de degré $\leq n$, ceux-ci sont nuls, donc $(M+\lambda N)$

est nilpotente pour toute valeur de λ . Notamment, M est nilpotente. Enfin, on en déduit que $(\lambda M + N)$ est nilpotente pour une infinité de valeurs de λ donc, par le même raisonnement, pour toutes les valeurs de λ , notamment pour $\lambda = 0$, donc N est également nilpotente.

- 3) On géométrise. $u^{n-1} \neq 0$ donc il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E . On note U sa matrice dans cette base (matrice compagnon de X^n). Ensuite, on écrit que v commute avec u , et sa matrice dans la base en question est manifestement un polynôme en U .

◆ **LIN.64** Mines MP – 2004

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $(A + \lambda_k B)^n = 0$ pour tout $k \in [0; n]$. Montrer que A et B sont nilpotents.

◇ [Rec04/nilpotent-r4.tex/r4:202]

(Cf. **LIN.63**)

À quoi sert le fait que A et B commutent ?

On utilise le fait que M est nilpotente si et seulement si $\chi_M = X^n$.

Alors $\chi_{A+\lambda B} = X^n$ pour $n+1$ valeurs de distinctes ; les coefficients de $\chi_{A+\lambda B}$

étant des polynômes en λ de degré $\leq n$, ceux-ci sont nuls, donc $(A + \lambda B)$ est nilpotente pour toute valeur de λ . Notamment, A est nilpotente.

Enfin, on en déduit que $(\lambda A + B)$ est nilpotente pour une infinité de valeurs de λ donc, par le même raisonnement, pour toutes les valeurs de λ , notamment pour $\lambda = 0$, donc B est également nilpotente.

Dimension finie, rang

Généralités

◆ **RNG.1** (★★)
Soit f un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{Id}_E - fg$ est inversible si et seulement si $\text{Id}_E - gf$ est inversible.

◇ [Divers/appfinexo.tex/ev:32] On peut donc écrire $y = g \circ f(y) + k$, avec $k \in \text{Ker } f$ et donc

(Cf aussi les exercices **ALG.57**, **DIA.21** et **LIN.17**.)

Montrons que : $\text{Id} - fg$ non inversible $\Rightarrow \text{Id} - gf$ non inversible.

□ On suppose que $\text{Id} - fg$ est non inversible, donc non injective, donc il existe $x \in E$, $x \neq 0$ tel que $(\text{Id} - fg)(x) = 0$ donc $f(g(x)) = x$. On pose $y = g(x)$, alors $y \notin \text{Ker } f$ car $x = f(y)$. On obtient donc $f \circ g \circ f(y) = f(y)$ donc $f \circ g \circ f(y) - y = 0$ donc $g \circ f(y) - y \in \text{Ker } f$.

avec $z \stackrel{\text{def}}{=} y - k \neq 0$, et donc $z = g \circ f(z)$, soit encore $(\text{Id} - g \circ f)(z) = 0$ donc $\text{Id} - g \circ f$ non inversible. □

En échangeant les rôles de f et g , on prouve la réciproque, et par contraposition la propriété demandée.

$$\underbrace{y - k}_{z} = g \circ f(y) = g \circ f(\underbrace{y - k}_{z}),$$

◆ **RNG.2** (★)
Soit E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(f(x), f^2(x), \dots, f^n(x))$ soit une base de E . Montrer que f est un automorphisme de E .

◇ [Divers/appfinexo.tex/ev:34] jective.
Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base, en déduire que f est bi-

◆ **RNG.3**
Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \text{Id}$.
1) Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Im}(f - \text{Id}) = E$.
2) Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{Im}(f^2 + f + \text{Id})$ et que $\text{Im}(f - \text{Id}) = \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id})$.

◇ [Divers/appfinexo.tex/ev:29] □ Soit $x \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \cap \text{Im}(f - \text{Id})$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = (f - \text{Id})(y)$, et par ailleurs $(f - \text{Id})(x) = x$ soit $f(x) = x$. Or $(f^2 + f + \text{Id})(f - \text{Id}) = 0$ identiquement, donc notamment $(f^2 + f + \text{Id})(x) = (f^2 + f + \text{Id})(f - \text{Id})(y) = 0$ donc $(f^2 + f + \text{Id})(x) = 3x = 0$ donc $x = 0$. □
Donc ces deux espaces sont en somme directe. Par un argument dimension-

nel, leur somme directe est égale à E .
Sinon, on a bien sûr $\text{Im}(f^2 + f + \text{Id}) \subset \text{Ker}(f - \text{Id})$.
□ Soit $x \in \text{Ker}(f - \text{Id})$. Alors $f(x) = x$, et notamment $\frac{1}{3}(f^2 + f + \text{Id})x = x$ donc $x \in \text{Im}(f^2 + f + \text{Id})$ □ Donc on a bien égalité.
Puis inclusion et dimension.

◆ **RNG.4** ($\mathcal{L}(E) = \mathcal{U}(E) + \mathcal{G}(E)$)
Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On veut montrer que f est la différence de deux automorphismes de E .
1) Traiter le cas où $f \in \mathcal{U}(E)$.
2) Considérer le cas où $f \neq 0$, non inversible et $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$. (On comparera alors les images et noyaux de f et de f^2).
3) Montrer que, si $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe $\phi \in \mathcal{U}(E)$ tel que $g = f \circ \phi$ vérifie : $E = \text{Im } g \oplus \text{Ker } g$. En déduire le cas général.
4) Trouver une démonstration simple utilisant des matrices.

◇ [Divers/appfinexo.tex/ev:51] **C'est bien compliqué tout ça !** $\psi : \text{Ker } f \rightarrow V$ quelconque, et $\psi : \text{Im } f \rightarrow W$. On a donc

- 1) On a $f = 2f - f$.
- 2) On suppose $f \in \mathcal{U}(E)$ et $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$. Alors $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ et $\text{Im } f = \text{Im } f^2$. On pose

$$g = \text{Id}|_{\text{Ker } f} \oplus 2f|_{\text{Im } f} \text{ et } h = \text{Id}|_{\text{Ker } f} \oplus f|_{\text{Im } f}.$$

Alors $g, h \in \mathcal{U}(E)$ et $f = g - h$.

- 3) On choisit V un supplémentaire de $\text{Im } f$ dans E et W un supplémentaire de $\text{Ker } f$. Alors $\dim V = \dim \text{Ker } f$. On choisit alors un automorphisme

$$\begin{aligned} E &= \text{Ker } f \oplus W \\ &\uparrow \phi \quad \uparrow \psi \\ &= V \oplus \text{Im } f \end{aligned}$$

Alors $\text{Ker } f \circ \phi = V$ et $\text{Im } f \circ \phi = \text{Im } f$ donc en posant $g = f \circ \phi$, on a $E = \text{Ker } g \oplus \text{Im } g$, et g est inversible non nulle. D'après la question précédente, on peut donc écrire $g = b - d$, et donc $f = b \circ \phi^{-1} - d \circ \phi^{-1}$.

- 4) Toute matrice est somme de deux matrices triangulaires, une supérieure et une inférieure, dont les coefficients diagonaux sont indéterminés ; il suffit de montrer que tout réel est la somme de deux réels non nuls et c' est fini.

◆ **RNG.5** (Endomorphisme cyclique) (★★)
Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie n , et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $u \in E$ tel que la famille $(f^k(u))_{k \in \mathbb{N}}$ engendre E .
1) Montrer que $(u, f(u), \dots, f^{n-1}(u))$ est une base de E .
INDICATION : On considère p maximal tel que la famille $\mathcal{F} = (u, \dots, f^{p-1}(u))$ est libre, et on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(u)$ est combinaison linéaire de \mathcal{F} .
2) Montrer que si f est de plus nilpotent, alors un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f si et seulement si c'est un polynôme en f .
3) Montrer que ce résultat est encore vrai même sans supposer f nilpotent.

◇ [Divers/appfinexo.tex/ev:72] et donc g est bien un polynôme en f .
1) On a $f^p(u) = \sum \lambda_k f^k(u)$, donc $f(p+1)$ est Cl d'éléments de \mathcal{F} . Une récurrence immédiate permet de conclure. On en déduit que \mathcal{F} est génératrice, donc c'est une base et $p = n$.
2) Dans la base \mathcal{F} , la matrice de f est une sous-diagonale de 1. On écrit que la matrice de g commute avec celle de f , et alors

$$\text{mat}_{\mathcal{F}} g = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ c & b & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ z & \dots & b & c & a \end{pmatrix}$$

◆ **RNG.6**
Soit E un espace vectoriel de dimension n , et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $F = \{v \in \mathcal{L}(E) ; u \circ v = 0\}$.
Calculer la dimension de F .

◇ [Divers/appfinexo.tex/ev:60] dimension $n \times \dim \text{Ker } u$.
Il faut que $\text{Im } v \subset \text{Ker } u$, donc F est isomorphe à l'espace $\mathcal{L}(E, \text{Ker } u)$ de

◆ **RNG.7** ($f \text{ tq } \text{Im } f \text{ et } \text{Ker } f \text{ sont imposés}$)
Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie et H, K deux sous-espaces vectoriels fixés de E .
1) À quelle condition existe-t-il un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im } f = H$ et $\text{Ker } f = K$?
2) On note $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{L}(E) ; \text{Im } f = H \text{ et } \text{Ker } f = K\}$. Montrer que \mathcal{E} est un groupe pour \circ si et seulement si $H \oplus K = E$.
◇ [Divers/appfinexo.tex/ev:91] 2) Si $H \oplus K \neq E$ alors \mathcal{E} n'est pas stable pour \circ .
1) $\dim H + \dim K = \dim E$.

◆ **RNG.8** (Fonctions affines par morceaux) (★)
Soit $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ une subdivision de $[0; 1]$ et F l'ensemble des fonctions $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues dont la restriction à chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ est affine.
Montrer que F est de dimension finie et trouver une base de F .

◇ [Divers/appfinexo.tex/ev:92]

◆ **RNG.9** (★★)
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que :
1) si V est un s.e.v. de E , $\dim f(V) = \dim V - \dim(V \cap \text{Ker } f)$;
2) si W est un s.e.v. de F , $\dim f^{-1}(W) = \dim(W \cap \text{Im } f) + \dim \text{Ker } f$.

◇ [Divers/appfinexo.tex/ev:69] formule du rang à $f|_V : f(V) = \text{Im } f \cap W$, donc
1) $\dim V = \dim(\text{Ker } f \cap V) + \dim(\text{Im } f \cap W) = \dim \text{Ker } f + \dim(\text{Im } f \cap W)$.
2) On pose $V = f^{-1}(W)$, on remarque que $\text{Ker } f \subset V$ et on applique la

◆ **RNG.10** (★★★)
Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un automorphisme $g \in \mathcal{U}(E)$ et un projecteur p tels que $f = g \circ p$.

◆ **RNG.21** CCP PC – 2002

On note $d: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto P'. \end{cases}$

1) Trouver une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de d soit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Calculer N^{n+1} .

3) Existe-t-il d'autres bases de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lesquelles la matrice de d est N ? Si non, prouvez-le, si oui, trouvez-les toutes.

◇ [Rec02/appfin-r2.tex/al-r2:31]

1) $\{1, X, \frac{1}{2}X^2, \dots, \frac{1}{n!}X^n\}$ convient.

2) $N^{n+1} = 0$ car $P^{(n+1)} = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

3) Toute telle base doit être de la forme $d^n(P), d^{n-1}(P), \dots, P$, avec $d^n(P) \neq 0$ donc P de degré exactement n . Réciproquement, ces bases conviennent.

◆ **RNG.22** TPE MP – 2002

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec toutes les isométries de E . Montrer que f est une homothétie.

◇ [Rec02/appfin-r2.tex/bil-r2:16]

Il doit y avoir une erreur d'énoncé ! Toute matrice commutant avec toute matrice orthogonale (sur \mathbb{R}) est une homothétie. Il suffit de remarquer que les matrices orthogonales engendrent $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, pour cela on peut utiliser des matrices de permutations (avec signes) pour voir que chaque matrice élémentaire $E_{i,j}$ est demi-somme de deux telles matrices.

◆ **RNG.23** TPE PC – 2002

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soient W_1 et W_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Trouver sur condition nécessaire et suffisante sur W_1 et W_2 pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $W_1 = \text{Ker } f$ et $W_2 = \text{Im } f$.

◇ [Rec02/appfin-r2.tex/al-r2:40]

des bases adaptées. Unique condition de dimension, ensuite on construit un f explicitement avec

◆ **RNG.24** Centrale PC – 2003

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

1) Montrer qu'il existe un automorphisme $g \in \mathcal{G}(E)$ tel que $f \circ g \circ f = f$.

2) Application : on note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Trouver B telle que $ABA = A$.

◇ [Rec03/appfin-r3.tex/r3:21]

On a alors trivialement

$$M = P \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix} Q \cdot \underbrace{Q^{-1} \cdot P^{-1}}_A \cdot P \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix} Q.$$

On peut le faire de deux manières. La première manière, la plus simple, est de passer aux matrices. On munit E d'une base \mathcal{B} et on note

$$M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

Si l'on note $r = \text{rg } f$, il existe deux matrices $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$M = P \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix} Q.$$

Si l'on note g l'unique endomorphisme vérifiant $\text{mat}_{\mathcal{B}}(g) = A = Q^{-1}P^{-1}$, alors on a bien $f \circ g \circ f = f$.
La deuxième méthode consiste à prendre des supplémentaires ainsi :

$$E = \text{Ker } f \oplus S = \text{Im } f \oplus T.$$

◆ **RNG.25** CCP MP – 2003

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. On note également

$$f: \begin{cases} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto AM. \end{cases}$$

Déterminer $\text{Ker } f$. L'endomorphisme f est-il surjectif?

◇ [Rec03/appfin-r3.tex/r3:75]

AM = 0 si et seulement si M est composé des colonnes de $\text{Ker } A$, donc

$$M = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -x & -y \end{pmatrix}.$$

Du coup, f n'est pas surjective !

◆ **RNG.26** Centrale MP – 2003

Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = P - P'$. Montrer que f est bijective

1) sans utiliser la matrice de f ;

2) en utilisant la matrice de f .

◇ [Rec03/appfin-r3.tex/r3:273]

Quel scandale encore !

2) $\text{mat}_{\text{can}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & n-1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ de déterminant 1.

1) Si $f(P) = 0$ alors $P = P'$ donc $P = 0$: f est donc injective donc bijective car dimension finie.

◆ **RNG.27** Centrale MP – 2004

Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Chercher toutes les applications linéaires $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(u, x, f(x))$ soit une famille liée.

◇ [Rec04/appfin-r4.tex/r4:243]

◆ **RNG.28 (Endomorphisme cyclique)** S¹ Cyr PC – 2004

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), u^2(x_0))$ soit une famille libre de E .

1) Montrer qu'il existe des scalaires a, b, c tels que $u^3(x_0) = a u^2(x_0) + b u(x_0) + c x_0$.

2) Montrer que u^3 est un polynôme en u de la forme $du^2 + eu + f \text{ Id}$.

3) Déterminer les endomorphismes qui commutent avec u .

◇ [Rec04/appfin-r4.tex/r4:17]

T. Les endomorphismes qui commutent avec u sont les polynômes en u .

◆ **RNG.29** INT Télécom MP – 2004

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe deux automorphismes g et h de E tels que $f = g + h$.

◇ [Rec04/appfin-r4.tex/r4:148]

◆ **RNG.30** Centrale PC – 2005

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{Id}_E$.

1) Montrer que si $(x_1, \dots, x_p, f(x_1), \dots, f(x_{p-1}))$ est une famille libre, alors il en est de même pour la famille $(x_1, \dots, x_p, f(x_1), \dots, f(x_p))$.

2)

◇ [Rec05/appfin-r5.tex/r5:107]

◆ **RNG.31** Centrale PC – 2005

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les équivalences suivantes :

1) $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g) \Leftrightarrow E = \text{Im } f + \text{Ker } g$.

2) $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f) \Leftrightarrow \text{Im } g \cap \text{Ker } f = \{0\}$.

◇ [Rec05/appfin-r5.tex/r5:136]

Rang

◆ **RNG.32**

Soient (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) deux familles d'éléments distincts non nuls. Alors montrer que la matrice $A = (a_i b_j)_{i,j}$ est de rang 1.

◇ [Divers/rangexo.tex/ev:15]

◆ **RNG.33**

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ telles que

$$\text{Ker } f + \text{Ker } g = \text{Im } f + \text{Im } g = E.$$

Montrer que ces sommes sont directes.
Ce résultat est-il toujours valable en dimension infinie ?

◆ **RNG.45 (Endomorphisme de rang 1)** (**) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) $\lambda = 1$;
- (b) $\text{Id} - f$ est non injective ;
- (c) $\text{Id} - f$ est non surjective.

◇ [Divers/rangexo.tex/ev:82] λ l'unique scalaire tel que $f(a) = \lambda a$. Alors pour tout $x \in E$, $f(x) \propto a$ donc $f^2(x) = \lambda f(x)$.
 (Voir aussi l'exercice **RNG.44**) Si $\lambda \neq 1$, $(\text{Id} - f)^{-1} = \text{Id} + \frac{1}{1-\lambda}f$, ce qui montre que f est bijective.
 Im f est un s.e.v. de dimension 1. Choisissons $a \in \text{Im } f$, $a \neq 0$. On note

◆ **RNG.46** (♣) Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\text{Ker } f = \text{Im } f \iff (f^2 = 0 \text{ et } \dim E = 2 \text{ rg } f).$$

◇ [Divers/rangexo.tex/ev:41] □ On suppose $\text{Ker } f = \text{Im } f$. Alors $\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f = 2 \text{ rg } f$.
 □ On suppose $f^2 = 0$ et $\dim E = 2 \text{ rg } f$. Alors $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$, et de plus ces deux ensembles sont de même dimension. □
 De plus, pour tout $x \in E$, $f^2(x) = f(f(x))$, or $f(x) \in \text{Im } f = \text{Ker } f$ donc $f^2(x) = 0$. □

◆ **RNG.47** E étant un espace vectoriel de dimension 4, et $f \in \mathcal{L}(E)$, est-il possible que $\text{rg } f = 3$, $\text{rg } f^2 = 2$ et $\text{rg } f^3 = 0$?

◇ [Divers/rangexo.tex/ev:37] des dimensions aux restrictions successives de f .
 Non, la différence des rangs ne peut que décroître, en prenant des formules

◆ **RNG.48** (**) Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie n .

- 1) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$. Montrer que $\text{rg } f + \text{rg } g \leq n$.
- 2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = 0$ et $\text{rg } f + \text{rg } g = n$.
- 3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $f \neq 0$ et $\text{rg } f < n$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = 0$, $g \circ f \neq 0$ et $\text{rg } f + \text{rg } g = n$.

◇ [Divers/rangexo.tex/ev:50] 3) Ker $f \neq \{0\}$. On choisit une base (e_1, \dots, e_k) de Ker f et on la complète en (e_1, \dots, e_n) .
 1) $\text{Im } g \subset \text{Ker } f$ + formule des dimensions.
 2) On pose g : projecteur sur Ker f .

◆ **RNG.49 (Décomposition de Fitting)** (***) Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note

$$N_p = \text{Ker } f^p, \quad I_p = \text{Im } f^p, \quad d_p = \dim(N_{p+1}) - \dim(N_p).$$

- 1) Montrer que la suite $(N_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante pour l'inclusion jusqu'à un entier $p \leq n$, puis qu'elle est constante.
- 2) Montrer que la suite $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
- 3) Montrer que la suite $(d_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 4) Montrer que $E = \text{Ker } f^p \oplus \text{Im } f^p$. Le sous-espace vectoriel $\text{Im } f^p$ est appelé **cœur** de f tandis que $\text{Ker } f^p$ est appelé le **nilepace** de f .
- 5) En déduire que toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} N & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & P \end{pmatrix}$ où N est carrée nilpotente et P carrée inversible.

◇ [Divers/rangexo.tex/ev:42] est libre et à éléments dans N_{p+1} ce qui donne

- 1) T.
- 2) T.
- 3) **Une démonstration avec base.** On note $k = \dim N_p$. On prend une base (e_1, \dots, e_p) de N_p , on la complète avec $(e_{k+1}, \dots, e_{k+d_p})$ en une base de N_{p+1} et celle-ci avec $(e_{k+d_p+1}, \dots, e_{k+d_p+d_{p+1}})$ en une base de N_{p+2} .
 On montre ensuite que la famille $(e_1, \dots, e_k, f(e_{k+d_p+1}), \dots, f(e_{k+d_p+d_{p+1}}))$

Une démonstration géométrique. Regarder f restreint à $\text{Im } f^p$ et la formule du rang. On remarque ensuite que $d_p = \dim I_p - \dim I_{p+1}$.

- 4) Il suffit de montrer que $\text{Ker } f^p$ et $\text{Im } f^p$ sont en somme directe. □ Soit $x \in \text{Ker } f^p \cap \text{Im } f^p$. Alors $x = f^p(y)$. Donc $f^p(x) = f^{2p}(y) = 0$ donc $y \in \text{Ker } f^{2p} = \text{Ker } f^p$ donc $x = f^p(y) = 0$. □
- 5) Appliquer les résultats précédents.

◆ **RNG.50** (♣) Petites Mines MPSI – 1999 On pose $E = \mathbb{R}_3[X]$, et on pose

$$f: \begin{cases} E \longrightarrow E \\ P \longmapsto P(X+2) + P(X) - P(X+1). \end{cases}$$

- 1) Montrer que $f(E) \subset E$ et que $f \in \mathcal{L}(E)$.
- 2) Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.
- 3) Existe-t-il une base \mathcal{B} de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

◇ [Rec00/rang-r0.tex/ev:27bis] L'image de la base canonique est étagée, donc f est surjectif, donc bijectif, sa matrice ne saurait être de rang 2.

◆ **RNG.51** CCP PC – 2001 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\dim \text{Ker } u \leq 1$. Montrer que $\text{rg}(u^k) \geq n - k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

◇ [Rec01/rang-r1.tex/al-r:27] Formule du rang sur u restreint à $\text{Im } u^{k-1}$.

◆ **RNG.52** Mines MP – 2002 Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(A + B)$ inversible et $AB = 0$. Montrer que $\text{rg } A + \text{rg } B = n$.

◇ [Rec02/rang-r2.tex/al-r:2:46] donc, puisque on a $\text{rg}(f+g) \leq \text{rg } f + \text{rg } g$ (car $(f+g)(E) \subset f(E) + g(E)$), on en déduit $\text{rg } f + \text{rg } g \geq n$. Conclusion, $\text{rg } f + \text{rg } g = n$.
 On géométrise : $f \circ g = 0$ donc $\text{rg } g \leq n - \text{rg } f$. De plus, $(f+g)$ est inversible

◆ **RNG.53** CCP PC – 2002 Calculer, en fonction de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, le rang de

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

◇ [Rec02/rang-r2.tex/al-r:2:4] $a + bj^2 + cj = (a - b) + (c - b)j$. Comme 1 et j sont libres sur \mathbb{R} , on déduit que $\text{rg } A = 0$ ssi $a = b = c = 0$, $\text{rg } A = 1$ ssi $a = b = c \neq 0$, $\text{rg } A = 2$ ssi $a + b + c = 0$ avec $(a, b, c) \neq 0$ et $\text{rg } A = 3$ dans les autres cas.
 On remarque que $A = a \text{Id} + bJ + cJ^2$ où J est diagonalisable sur \mathbb{C} (le rang ne dépend pas du corps) et semblable à $\text{diag}(1, j, j^2)$. A est aussi diagonalisable de valeurs propres $a + b + c, a + bj + cj^2 = (a - c) + (b - c)j$ et

◆ **RNG.54** Centrale MP – 2003 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de rang 1.

- 1) Montrer que $\text{rg}(f + g) \leq 2$ et qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 - (a) $\text{rg}(f + g) \leq 1$;
 - (b) $(\text{Im } f = \text{Im } g)$ ou $\text{Ker } f = \text{Ker } g$.
- 2) Soit V un sous-espace vectoriel de E tel que, pour tout $f \in V$, on a $\text{rg } f \leq 1$. Soit $f_0 \in V \setminus \{0\}$. Montrer que $V \subset \{f \in E ; \text{Ker } f \subset \text{Ker } f_0\} \cup \{f \in E ; \text{Im } f_0 \supset \text{Im } f\}$.
- 3) Donner l'ensemble des endomorphismes de rang 1.

◇ [Rec03/rang-r3.tex/r:3:323]

◆ **RNG.55** (***) Centrale MP – 2003 On travaille dans un sous-corps \mathbb{K} de \mathbb{C} .

- 0) Soit $U = \begin{pmatrix} V & 0 \\ W & S \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{r+t, s+t}(\mathbb{K})$ avec $S \in \text{GL}_t(\mathbb{K})$ et $V \in \mathfrak{M}_{r,s}(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{rg}(U) = \text{rg}(V) + \text{rg}(S)$.
- 1) Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de p matrices telles que $\sum_{i=1}^p A_i = U \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. En notant $B_1 = (A_1 A_2 \dots A_p)$ (matrice par blocs, élément de $\mathfrak{M}_{n, pn}(\mathbb{K})$), montrer que $\text{rg}(B_1) = n$.
- 2) En notant $B_2 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{p-1} & A_p & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & A_1 & \dots & \dots & A_{p-1} & A_p \end{pmatrix}$, montrer que $\text{rg}(B_2) = 2n$.

◊ [Rec03/rang-r3.tex/r3:298]

◆ **RNG.56** (**) Centrale PC – 2003
 Soient E, F et G des \mathbb{K} -e.v. de dimensions finies respectivement égales à m, n et p . Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

- 1) Montrer que $\text{rg } f + \text{rg } g - n \leq \text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg } f, \text{rg } g)$.
- 2) Trouver toutes les matrices $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = 0$.

◊ [Rec03/rang-r3.tex/r3:180] et $\text{Ker } \tilde{g} = \text{Ker } (g|_{\text{Im } f}) = \text{Ker } g \cap \text{Im } f \subset \text{Ker } g$

1) On a $\text{rg}(g \circ f) = \dim g(g(E)) \subset g(F)$ donc $\text{rg } g \circ f \leq \text{rg } g$. De plus $\dim g(f(E)) \leq \dim g(F) = \text{rg } g$, ce qui achève de montrer la seconde inégalité.
 On considère maintenant la restriction

$$\tilde{g}: \text{Im } f \longrightarrow G$$

$$x \longmapsto \tilde{g}(x) = g(x).$$

Alors la formule des dimensions nous donne

$$\text{rg } \tilde{g} + \dim \text{Ker } \tilde{g} = \text{rg } f.$$

Or $\text{rg } \tilde{g} = \dim \text{Im } \tilde{g} = \dim g(\text{Im } f) = \text{rg } g \circ f$,

2) Il faut $2 \text{rg}(A) - 3 \leq 0 \leq \text{rg } A$ donc $\text{rg}(A) \leq \frac{3}{2}$ donc A est de rang 1 (ou 0).
 A est donc de la forme $X^t Y$, et il faut de plus $Y^t X = (Y|X) = 0$.
 Les matrices vérifiant $A^2 = 0$ sont donc les matrices de la forme $A = X^t Y$ avec $Y \cdot {}^t X = 0$.

◆ **RNG.57** (*) CCP MP – 2003
 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$|\text{rg } f - \text{rg } g| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg } f + \text{rg } g.$$

◊ [Rec03/rang-r3.tex/r3:206] ce qui montre $\text{rg}(f) - \text{rg}(g) \leq \text{rg}(f + g)$.

Eh ben, il y a des examinateurs des ENSI qui ne se font pas chier !
 On a $\text{Im}(f + g) = (f + g)(E) \subset f(E) + g(E)$ ce qui montre la deuxième inégalité. On applique ensuite cette relation à $f + g$ et $-g$:

$$\text{rg}(f + g - g) \leq \text{rg}(f + g) + \text{rg } g,$$

En échangeant les rôles de f et g on obtient l'autre inégalité et donc l'inégalité avec la valeur absolue.

◆ **RNG.58** CCP PC – 2003
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geq 2$) la matrice de coefficients $a_{ij} = \cos(i - j)$. Trouver le rang de A .

◊ [Rec03/rang-r3.tex/r3:225] on effectue

$$\text{rg } 2 \text{ grâce aux formules trigonométriques : } \cos(k + 2) + \cos k = 2 \cos 1 \cdot \cos(k + 1),$$

$$L_{k+2} \leftarrow L_{k+2} + L_k - 2 \cos(1) L_{k+1}.$$

◆ **RNG.59** (**) Navale MP – 2003
 Soit E un \mathbb{C} -e.v. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(u^2) = 1$. Montrer que

$$\text{Ker}(u^2) = \text{Ker } u \iff \text{rg}(u) = 1.$$

◊ [Rec03/rang-r3.tex/r3:130] morphisme de S_1 sur $\text{Im}(u)$ et u^2 un isomorphisme de S_2 sur $\text{Im}(u)$, ce qui montre que S_1 et S_2 sont deux droites vectorielles, donc $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u^2)$ sont deux hyperplans. Puisque l'un est inclus dans l'autre, ils sont égaux.

En dimension quelconque, c'est plus difficile.
Supposons $\text{rg}(u) = 1$. On a alors $\text{Im}(u^2) = \text{Im}(u)$ (puisque l'un est inclus dans l'autre et que les dimension sont égales). On note S_1 un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ et S_2 un supplémentaire de $\text{Ker}(u^2)$. On sait que u réalise un iso-

Supposons $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$. Alors en notant S un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$, u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(u)$ et u^2 un isomorphisme de S sur $\text{Im}(u)$, donc les images sont isomorphes, donc $\text{rg}(u) = 1$.

◆ **RNG.60 (Noyaux itérés)** (**) Centrale PC – 2004
 Soit E un \mathbb{C} -e.v. de dimension finie $s \geq 1$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) Montrer que les suites $(\text{Ker } f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Im } f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir d'un même rang $p \leq s$.
- 2) Montrer que $\text{Ker}(f^p) \oplus \text{Im}(f^p) = E$.

◊ [Rec04/rang-r4.tex/r4:109] morphisme de $\text{Im}(f^p)$ sur $\text{Im}(f^{p+1})$ et donc que $f^p|_{\text{Im}(f^p)}$ réalise un isomorphisme sur $\text{Im}(f^{2p}) = \text{Im}(f^p)$. Ainsi, $\text{Ker}(f^p) \cap \text{Im}(f^p) = \{0\}$ et on conclut par la formule du rang.

- 1) Montrer que la suite des images est décroissante : elle est donc stationnaire à cause des dimensions qui décroissent.
- 2) Puisque $\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+1})$, on en déduit que $f|_{\text{Im } f^p}$ est un iso-

◆ **RNG.61** (*) CCP MP – 2004
 (8 pt) — Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) Montrer que si $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$, alors $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$.
- 2) Montrer que si $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$, alors $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

◊ [Rec04/rang-r4.tex/r4:182]

Tout est trivial en dimension finie.

◆ **RNG.62 (Un classique du rang)** (♣) CCP MP – 2004
 Soient E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie n et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = 0$ et $u + v$ est inversible. Montrer que $n = \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.

◊ [Rec04/rang-r4.tex/r4:209]

Trace

◆ **RNG.63** (**) Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $(v, w) \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$\text{tr}(uvw) = \text{tr}(vuw).$$

Montrer que u est une homothétie.

◊ [Divers/traceexo.tex/ev:99] donc, en passant aux traces

$$u_{ii} \delta_{ij} = u_{ij}$$

On passe aux matrices représentatives, et on calcule

$$E_{ij} U E_{ij} = u_{ji} E_{ij}$$

ce qui prouve que U est diagonale.
 De plus $u_{ii} = \text{tr}(U E_{ij} E_{ji}) = \text{tr}(E_{ij} U E_{ji}) = u_{jj}$, donc U est une matrice scalaire.

et $U E_{ij} E_{ij} = \delta_{ij} U E_{ij}$

◆ **RNG.64** (***) On prend $p \in \mathbb{N}$, p premier. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\text{tr}(M^p) = \text{tr}(M) [p]$.

INDICATION : On se place dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où l'on rappelle que $a^p = a$ pour tout $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. prenez $n = 2$ et calculez $\text{tr } M^2$, puis $\text{tr } M^3, \dots$ et vous verrez pourquoi dans le calcul de $\text{tr } M^p$, la somme

$$\text{tr } M^p = \sum_{i_1, \dots, i_p} M_{i_1, i_2} M_{i_2, i_3} \dots M_{i_p, i_1}$$

se réduit à $M_{11}^p + \dots + M_{nn}^p$.

◊ [Divers/traceexo.tex/mat:15]

◆ **RNG.65** (*) Soit $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $V, W \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on ait

$$\text{tr}(UVW) = \text{tr}(VUW).$$

Montrer que U est une matrice scalaire.

◊ [Divers/traceexo.tex/mat:61] $u_{ii} \delta_{ij} = u_{ij}$

$$E_{ij} U E_{ij} = u_{ji} E_{ij}$$

ce qui prouve que U est diagonale.
 De plus $u_{ii} = \text{tr}(U E_{ij} E_{ji}) = \text{tr}(E_{ij} U E_{ji}) = u_{jj}$, donc U est une matrice scalaire.

et $U E_{ij} E_{ij} = \delta_{ij} U E_{ij}$

donc, en passant aux traces

◆ **RNG.66** (***) Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie n . Soient $f \in \mathcal{G}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg } g = 1$.

- 1) Montrer que $f + g$ est un automorphisme si et seulement si $\text{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$.
- 2) Calculer $(f + g)^{-1}$.

◊ [Divers/traceexo.tex/red:72] Posons $k = g \circ f^{-1}$. On calcule ensuite $k^2 = \alpha_1 k = (\text{tr } k) k$ ce qui donne un annulateur de $h = \text{Id} + k$: en effet

$$h^2 = \text{Id} + k^2 + 2k = (\text{tr } k + 1)h - (\text{tr } g - 1)\text{Id}$$

l'endomorphisme $g \circ f^{-1}$ est de rang 1. On choisit une base \mathcal{B} adaptée à $E = V \oplus \text{Ker } f$, où V est un supplémentaire, de dimension 1, de $\text{Ker } f$. Alors

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} g \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

donc $h^{-1} = \frac{h - (\text{tr } g + 2)\text{Id}}{\text{tr } g + 1}$.

Notamment, $\text{tr } g \circ f^{-1} = \alpha_1$.
 Par ailleurs $f + g = (\text{Id} + g \circ f^{-1}) \circ f$, donc $f + g \in \mathcal{G}(E)$ si et seulement si $\det(\text{Id} + g \circ f^{-1}) \neq 0$, donc si $\text{tr } g \circ f^{-1} \neq -1$.

On a alors $f + g = f \circ h$ donc

$$(f + g)^{-1} = -f^{-1} + \frac{g \circ f^{-1}}{1 + \text{tr } g \circ f^{-1}}.$$

◆ **RNG.67 (Matrices anticommutable)** (*) Centrale MP – 2003
 Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = B^2 = -I_n$ et $AB + BA = 0$. Que dire de $\text{tr}(A)$ et de $\text{tr}(B)$?

◇ [Rec03/trace-r3.tex/r3:153] On prend la trace et on utilise $\text{tr}(PQ) = \text{tr}(QP)$:
 On part de $AB + BA = 0$, on multiplie par A à gauche : $\text{tr } B = \text{tr}(ABA) = \text{tr}(BA^2) = -\text{tr } B$,
 $0 = A^2B + ABA = -B + ABA$. ce qui montre que $\text{tr } B = 0$ et de même $\text{tr } A = 0$. On peut même en déduire, puisque $\text{Sp}(A) \subset \{-i, i\}$, que n est pair !

◆ **RNG.68** (**) Centrale MP – 2003
 On note $E = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) ; {}^tM = -M\}$. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On définit

$$f : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ M \longmapsto {}^tAM + MA. \end{cases}$$

1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
 2) Déterminer $\text{tr}(f)$ en fonction de $\text{tr}(A)$.

◇ [Rec03/trace-r3.tex/r3:408] générale $\text{tr } f = \sum e^{*i}(f(e_i))$.
 On remarque que la famille des $F_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, pour $i < j$, forme une base de E . La base duale est (eh oui !) la famille des E_{ij}^* . On sait que d'une manière
 Alors $\text{tr } f = \sum_{i < j} f(F_{ij})_{ij} = \sum_{i < j} a_{ii} + a_{jj} = (n - 1) \text{tr } A$.

◆ **RNG.69** (**) Navale MP – 2003
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n et on définit

$$u : \begin{cases} S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto AM + M^tA. \end{cases}$$

1) Calculer la trace de u .
 2) On suppose que A est antisymétrique. Montrer que 0 est la seule valeur propre de u .

◇ [Rec03/trace-r3.tex/r3:116] ce qui donne

$$\begin{aligned} \text{tr}(u) &= \sum_{i \leq j} F_{ii}^*(u(F_{ij})) = \sum_{i \leq j} a_{ii} + a_{jj} \\ &= 2 \text{tr } A + \sum_{i < j} a_{ii} + a_{jj} \\ &= 2 \text{tr } A + \underbrace{\sum_{i \neq j} a_{ii}}_{(n-1) \text{tr } A} = (n + 1) \text{tr } A. \end{aligned}$$

1) Un peu pénible. On commence par définir la base $(F_{ij})_{i \leq j}$ de $S_n(\mathbb{R})$ par $F_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$ si $i \neq j$ et $F_{ii} = E_{ii}$. On vérifie aisément que $F_{ij}^* = E_{ij}^*$ avec des notations abusives, c'est-à-dire plus précisément

$$F_{ij}^*(M) = M_{ij}.$$

Ensuite on bourrine un max pour avoir, pour tout couple (i, j) :

$$F_{ij}^*(u(F_{ij})) = a_{ii} + a_{jj},$$

2) On suppose $A \neq 0$ et $u(M) = AM - MA = \lambda M$ avec $\lambda \neq 0$. Alors une simple récurrence montre que $A^k M - MA^k = k\lambda M^k$. On en déduit que M est nilpotente, or elle est symétrique donc diagonalisable donc $M = 0$: absurde. Donc $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de u .

◆ **RNG.70** (*) CCP PC – 2005
 Montrer qu'en dimension finie, il ne peut pas exister deux endomorphismes f et g tels que $f \circ g - g \circ f = \text{Id}_E$. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

◇ [Rec05/trace-r5.tex/r5:143]

Dualité

◆ **DUA.1** (★★)
 On pose $E = \mathbb{K}[X]$, et on le munit de sa base canonique $\mathcal{B} = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$. On définit ensuite la famille duale $\mathcal{B}^* \stackrel{\text{def.}}{=} (e_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$e_i^*(X^j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Montrer qu'on définit ainsi une famille *libre*, mais non génératrice de E^* .

◇ [Divers/dualiteexo.tex/ev:4] sur presque tous les X^i sauf au plus un nombre fini. Une forme telle que $\text{Vect } \mathcal{B}^*$ est formée des CL (finies!) des e_j^* . De telles formes s'annulent donc $P \mapsto P(1)$ ne s'annule sur *aucun* X^i , donc elle n'appartient pas à $\text{Vect } \mathcal{B}^*$.

◆ **DUA.2** (♣)
 On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit les formes linéaires $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall P \in E \quad \phi_k(P) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{-1}^{+1} x^k P(x) dx.$$

Montrer que $\mathcal{B}^* = (\phi_k)_{k=0, \dots, n}$ est une base de E^* .
 Dans le cas $n = 3$, trouver la base \mathcal{B} dont \mathcal{B}^* est duale. Écrire ϕ_4 dans la base (ϕ_0, \dots, ϕ_3) .

◇ [Divers/dualiteexo.tex/ev:5] On a $P_0 = \frac{3}{8}(3 - 5X^2)$, $P_1 = \frac{15}{8}(5X - 7X^3)$, $P_2 = -\frac{15}{8}(1 - 3X^2)$,
 Supposons $\sum \alpha_i \phi_i = 0$. On pose $P = \sum \alpha_i X^i$. On obtient $f P^2 = 0$ donc $P_3 = -\frac{35}{8}(3X - 5X^3)$ et $\phi_4 = -\frac{1}{10}\phi_0 + \frac{9}{14}\phi_2$.
 $P = 0 \dots$

◆ **DUA.3** (★★) MP
 Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v. de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $\text{Im } {}^t f = (\text{Ker } f)^\perp$ et $\text{Ker } {}^t f = (\text{Im } f)^\perp$. En déduire que f est surjective $\Leftrightarrow {}^t f$ est injective, et que f est injective $\Leftrightarrow {}^t f$ est surjective.

◇ [Divers/dualiteexo.tex/ev:26]

◆ **DUA.4**
 On pose $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et pour $k = 0, \dots, n-1$, on définit $\phi_k : P \mapsto P^{(k)}(0)$. Montrer que $(\phi^0, \dots, \phi^{n-1})$ est une base de E^* . Base réciproque?

◇ [Divers/dualiteexo.tex/ev:28]

◆ **DUA.5**
 On pose $E = \mathbb{K}^n$ et si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, on pose

$$f_i(\mathbf{x}) = x_i + x_{i+1} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1$$

$$f_n(\mathbf{x}) = x_n + x_1.$$

La famille (f_1, \dots, f_n) est-elle une base? Le cas échéant, donner la base duale.

◇ [Divers/dualiteexo.tex/ev:30] où le saut est à la place j .
 C'est une famille libre si n est impair seulement, et une base duale est formée des éléments de la forme

$$\mathbf{x}_j \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, 1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, -1)$$

◆ **DUA.6**
 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soient u et v deux formes linéaires sur E telles que $\text{Ker } u \neq \text{Ker } v$. Déterminer les dimensions de $\text{Ker } u + \text{Ker } v$ et de $\text{Ker } u \cap \text{Ker } v$.

◇ [Divers/dualiteexo.tex/ev:40] dimension $n - 2$.
 On fait un joli dessin pour avoir $\text{Ker } u + \text{Ker } v = E$ et $\text{Ker } u \cap \text{Ker } v$ de

◆ **DUA.7** (★★)
 Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , de dimension finie, et soit $f \in E^*$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit (ϕ_1, \dots, ϕ_n) une famille de n formes linéaires, telle que $f \in \text{Vect}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Montrer que

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } \phi_i \subset \text{Ker } f.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit (ϕ_1, \dots, ϕ_n) une famille *libre* de n formes linéaires, telle que $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } \phi_i \subset \text{Ker } f$. En utilisant une base \mathcal{B}^* de E^* convenablement choisie, et en considérant la base \mathcal{B} dont \mathcal{B}^* est la base duale, montrer que $f \in \text{Vect}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$.

3) En déduire que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in E^*$ et $(\phi_1, \dots, \phi_n) \in (E^*)^n$, alors il y a équivalence entre les énoncés :

(a) $f \in \text{Vect}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$;
 (b) $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } \phi_i \subset \text{Ker } f$.

◇ [Divers/dualiteexo.tex/ev:43] Il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que $f = \sum_k \lambda_k \phi_k$. On a alors, pour
 Si (ϕ_1, \dots, ϕ_n) est une famille libre, on la complète en une base (ϕ_1, \dots, ϕ_p) , $k = n + 1, \dots, p$, $\lambda_k = f(e_k) = 0$ donc $f \in \text{Vect}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$.
 et on prend (e_1, \dots, e_p) la base préduale.

◆ **DUA.8**
 On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$, et on pose $\phi_1(P) = P(0)$, $\phi_2(P) = P'(0)$ et $\phi_3(P) = \int_0^1 P$ pour tout $P \in E$. Montrer que (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) forme une base de E^* . Déterminer la base préduale dans E . Exprimer la forme $\phi : P \mapsto P(1)$ dans la base (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) .

◇ [Divers/dualiteexo.tex/ev:44]

◆ **DUA.9**
 On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in [0, n]$, on pose $P_k = (X - a)^k$. Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E .
 Déterminer la base \mathcal{B}^* duale de \mathcal{B} et calculer les composantes sur \mathcal{B}^* de la forme linéaire $\phi : P \mapsto \int_0^a P(t) dt$.

◇ [Divers/dualiteexo.tex/ev:62]

◆ **DUA.10** (★★★)
 Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit (ϕ_1, \dots, ϕ_n) une famille de n forme linéaires. Montrer que cette famille est liée si et seulement si il existe un $x \in E$ non nul tel que $\phi_i(x) = 0 \quad \forall i \in [1; n]$.

◇ [Divers/dualiteexo.tex/ev:63] donc cette intersection n'est pas réduite à $\{0\}$, on peut donc choisir un $x \neq 0$ dedans. □
 On est en dimension finie donc on pourrait passer par l'isomorphisme entre E et E^* , ce qui rend la question essentiellement triviale, mais il y a élémentaire.
 □ **Supposons la famille liée.** Quitte à changer l'ordre, on peut supposer $\phi_n \in \text{Vect}\{\phi_1, \dots, \phi_{n-1}\}$. D'après la formule des dimensions d'intersection de sous-espaces vectoriels, si H est un hyperplan et si U est un sous-espace vectoriel de E , alors $\dim U \cap H \geq \dim U - 1$. Notamment, on montre de proche en proche que

$$\dim \bigcap_{i=1}^{n-1} \text{Ker } \phi_i \geq 1$$

◆ **DUA.11**
 On note E l'espace vectoriel engendré par les quatre fonctions suivantes :

$$f_1 : t \mapsto \sin t \quad f_2 : t \mapsto \cos t \quad f_3 : t \mapsto \sin 2t \quad f_4 : t \mapsto \cos 2t.$$

On définit ensuite sur E les formes linéaires ψ_1, \dots, ψ_4 par

$$\psi_k : \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \psi_k(t) dt. \end{array} \right.$$

Montrer que (f_1, \dots, f_4) est une base de E et que (ψ_1, \dots, ψ_4) est sa base duale.

◇ [Divers/dualiteexo.tex/ev:64]

◆ **DUA.12** (★★)
 Soit $\phi \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^*$ une forme linéaire vérifiant $\phi(XY) = \phi(YX)$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que ϕ est proportionnelle à la trace.

[Divers/dualiteexo.tex]

◇ [Rec02/dualite-r2.tex/nl-r2:24]

Tout d'abord, on remarque qu'il n'y a pas de problèmes de convergence des intégrales ; en fait,

$$\phi(Q) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Q(\cos(x)) dx$$

en posant $t = \cos x$. On note ϕ l'application linéaire associée.

2) On remarque que ϕ est paire : si P est impair alors $\phi(P) = 0$. L'espace des formes linéaires paires sur $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 2 (il suffit de connaître $f(1)$ et $f(X^2)$). On remarque que $s : Q \mapsto Q(1) + Q(-1)$ et $t : Q \mapsto Q(0)$ sont paires non nulles et non colinéaires ($s(X^3) = 1 \neq 0 = t(X^3)$), c'est donc une base des formes linéaires paires. En conclusion, comme précédemment, $b = 0$ convient.

3) Guidé par la question précédente, on cherche une valeur de a pour laquelle sur $\mathbb{R}_4[X]$, ϕ est de la forme $A(Q(a) + Q(-a)) + BQ(0)$. En résolvant les systèmes associés, on trouve $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $A = B = \frac{1}{3}$. On peut bien sûr rajouter un terme en X^5 puisque $a^5 + (-a)^5 = 0$. La formule fonctionne donc sur $\mathbb{R}_5[X]$.

◆ **DUA.31**

Mines MP – 2003

Notons $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient (B_0, \dots, B_n) des réels. On définit $u_i : P \mapsto P(B_i)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) la famille (u_0, \dots, u_n) est libre ;
- (b) les réels B_0, \dots, B_n sont distincts.

◇ [Rec03/dualite-r3.tex/r3:305]

(a) \Rightarrow (b) est trivial par contraposée.

(b) \Rightarrow (a) est immédiat en trouvant la base préduale de (u_0, \dots, u_n) , qui est la famille des polynômes élémentaires de Lagrange associée à (B_0, \dots, B_n) .

◆ **DUA.32**

CCP PC – 2004

Notons E_{ij} les matrices élémentaires de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Soit H un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

- 1) Montrer que H est le noyau d'une forme linéaire φ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) On suppose dans cette question que les E_{ij} pour $i \neq j$ sont dans H . Montrer que H admet au moins une matrice inversible de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$
- 3) Montrer qu'il existe une matrice inversible dans H .

◇ [Rec04/dualite-r4.tex/r4:419]

- 1) Cours.
- 2) Par exemple $\sum_{i \neq j} E_{ij}$ ($= J - I$) ou encore plus simple avec les matrices cycliques.

3) Supposons qu'il existe un E_{ij} avec $i \neq j$ tel que $\varphi(E_{ij}) \neq 0$, c'est-à-dire $E_{ij} \notin H$. Supposons de plus que $\varphi(I_n) \neq 0$, c'est-à-dire $I_n \notin H$ — sinon, on a répondu à la question. On a supposé que $\varphi(I_n) \neq 0$, il suffit alors de considérer $I_n - \frac{\varphi(I_n)}{\varphi(E_{ij})} E_{ij} \in H \cap GL_n(\mathbb{R})$

◆ **DUA.33**

(★)

CCP PC – 2005

Soit E un \mathbb{C} -e.v. de dimension ≥ 3 . Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E . Calculer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

◇ [Rec05/dualite-r5.tex/r5:66]

Matrices, calcul matriciel

◆ MAT.1 (Matrices centrosymétriques)

Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **centrosymétrique** si

$$a_{n+1-i, n+1-j} = a_{ij} \quad \text{pour tout } i, j \in [1; n].$$

Montrer que cet ensemble, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? Montrer que si on le munit de plus de la multiplication des matrices, c'est également une algèbre unitaire.

◆ [Divers/matricesexo.tex/mat:1] est $n^2/2$. Si n est impair, elle vaut $(n^2 + 1)/2$.
Les axiomes des e.v. se vérifient trivialement. Si n est pair, alors la dimension

◆ MAT.2 (A nilpotente \Leftrightarrow A \sim triang. sup. stricte) (★★)

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure stricte, alors $A^n = 0$.
- 2) Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, il existe un hyperplan H tel que $\text{Im } f \subset H$.
- 3) Montrer que si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il y a équivalence entre les énoncés :
 - (a) il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$;
 - (b) A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

◆ [Divers/matricesexo.tex/mat:3] et puisque H est stable, on peut considérer $f|_H$ qui est un endomorphisme nilpotent. On applique l'hypothèse de récurrence au rang $(n-1)$, ce qui nous donne une nouvelle base $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_{n-1}, b_n)$ dans laquelle f est triangulaire supérieure stricte, ce qui prouve l'hypothèse au rang n .

- 1) Trivial.
- 2) Si f nilpotent, alors $\text{rg } f \leq n-1$ d'où existence de H (compléter une base de $\text{Im } f$ par exemple).
- 3) On effectue une récurrence sur la dimension de E . Pour $n=1$, c'est immédiat. On se place au rang $n > 1$. Il existe H hyperplan tel que $\text{Im } f \subset H$. On prend une base adaptée $\mathcal{B} = (\underbrace{b_1, \dots, b_{n-1}}_H, b_n)$. Alors

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

◆ MAT.3

On note $I_{p,q} \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} I_p & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -I_q \end{pmatrix}$.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) $A^2 = I_n$;
- (b) il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = p + q$ et tels que A est semblable à $I_{p,q}$.

◆ [Divers/matricesexo.tex/mat:4] $W = \text{Ker}(f+1)$. Alors $E = V \oplus W$.
On géométrise, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $f^2 = I_E$. On pose $V = \text{Ker}(f-1)$ et

◆ MAT.4 (Centre de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$) (★)

On note $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

- 1) Montrer que $I_n + E_{ij} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ pour tout $i, j \in [1; n]$.
- 2) En déduire que $\text{Vect}(\text{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
- 3) Quel est le centre de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$?
- 4) Trouver une démonstration géométrique de ce résultat, valable en dimension quelconque, en montrant dans un premier temps que toute droite vectorielle est stable par f .

◆ [Divers/matricesexo.tex/mat:5] tant avec tous les éléments de $\mathcal{A}(E)$.
Puisque $I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, alors les E_{ij} sont éléments de $\text{Vect}(\text{GL}_n(\mathbb{K}))$ donc $\text{Vect}(\text{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
Supposons que A commute avec E_{ij} . Alors on en déduit que $A_{k\ell} = 0$ si $k \neq \ell$, et que de plus $A_{kk} = A_{\ell\ell}$. Donc au total A est une matrice scalaire.
Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension quelconque et f un endomorphisme commu-

◆ [Divers/matricesexo.tex/mat:6] Soit $x \in E \setminus \{0\}$ et H un hyperplan tel que $H \oplus \mathbb{K}x = E$. Posons $g = \text{Id}_E - \text{Id}_H$. Alors $g \in \mathcal{A}(E)$ et puisque $f \circ g = g \circ f$, on en déduit que $\text{Ker}(g - \text{Id}_E) = \mathbb{K}x$ et $\text{Ker}(g + \text{Id}) = H$ sont stables par f .
En conséquence de quoi toute droite vectorielle est stable par f . On est alors ramené à un exercice connu, qui dit que f est une homothétie.

◆ MAT.5 (Matrice idempotente)

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant $A^k = I_n$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $B = I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$, et on note u, v les endomorphismes de \mathbb{K}^n dont les matrices dans la base canonique sont respectivement A et B .

Montrer que $\text{Ker}(u-1) = \text{Im } v$, $\text{Im}(u-1) = \text{Ker } v$, $\mathbb{K}^n = \text{Ker } v \oplus \text{Im } v$ et $\text{tr } B = k \text{rg } B$.

◆ [Divers/matricesexo.tex/mat:6] On note que $(u-1)(1+u+u^2+\dots+u^{k-1}) = (u-1) \circ v = 0$ et donc que $\text{Im } v \subset \text{Ker}(u-1)$.
□ Soit $x \in \text{Ker}(u-1)$. Alors $u(x) = x$. Donc notamment
$$v(x) = (1+u+\dots+u^{k-1})(x) = kx, \quad \text{donc } x = v\left(\frac{x}{k}\right),$$

ce qui montre que $x \in \text{Im } v$. □
Comme $v \circ (u-1) = 0$, on en déduit $\text{Im}(u-1) \subset \text{Ker } v$, on conclut avec les dimensions, puisque d'après le résultat précédent, $\dim \text{Ker } v = n - \text{rg } v = n - \dim \text{Ker}(u-1) = \text{rg}(u-1)$.
□ Soit $x \in \text{Ker } v \cap \text{Im } v$. Alors $x \in \text{Ker}(u-1)$ donc $u(x) = x$. De $x \in \text{Ker } v$ on tire $kx = 0$ donc $x = 0$. □

◆ MAT.6

Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. On note N la matrice obtenue en échangeant dans M les colonnes i et j . Montrer que $N \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Comment obtient-on N^{-1} en fonction de M^{-1} ?

◆ [Divers/matricesexo.tex/mat:7]

◆ MAT.7

(★)

Notons $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Q})$ la matrice de coefficients $a_{ij} = C_{j-1}^{i-1}$. Déterminer la matrice inverse A^{-1} .

INDICATION : On interprètera A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{Q}_{n-1}[X]$.

◆ [Divers/matricesexo.tex/mat:9] On considère

$$f: \begin{cases} \mathbb{Q}_n[X] \rightarrow \mathbb{Q}_{n-1}[X] \\ P \mapsto Q(X) = P(X+1). \end{cases}$$

Alors la matrice représentative de f dans la base $(X^i)_i$ est A . La matrice inverse est donc celle de l'endomorphisme $P \mapsto P(X-1)$ dont les coefficients sont $(-1)^{i+j} C_{j-1}^{i-1}$.

◆ MAT.8

En posant

$$A \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} a & b & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & b \\ & & & a \end{pmatrix},$$

calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

◆ [Divers/matricesexo.tex/mat:10]

On a $A = aI + bJ$, or $J^{n-1} = 0$ et donc

$$A^k = \sum_{p=0}^k C_k^p a^p b^{k-p} J^{k-p}$$

◆ MAT.9

Trouver les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

INDICATION : On notera $A = J - 2I$ où J est la matrice ne comportant que des 1, et on utilisera la formule du binôme de Newton.

◆ [Divers/matricesexo.tex/mat:11]

On peut diagonaliser, certes. Il est plus simple de noter que $A = J - 2I$ avec J la matrice ne contenant que des 1. Avec la formule $J^k = 3^{k-1}J$ et le binôme de Newton, on calcule aisément A^k , puis

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, \quad A^n = (-2)^n I_3 + \sum_{k=1}^n 3^{k-1} (-2)^{n-k} J,$$

soit $A^n = (-2)^n I_3 + \frac{1}{3} [1 + (-1)^{n+1} 2^n] J$, et donc

$$u_n = \left[(-1)^n \frac{2^{n+1}}{3^n} + \frac{1}{3} \right] u_0 + \frac{1}{3} [1 + (-1)^{n+1} 2^n] (v_0 + w_0),$$

et de même en échangeant les rôles de u, v et w .

◆ MAT.10

Calculer A^n avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & \\ & & \mathbb{O} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:14]

◆ **MAT.11** (★)
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On note $p = \deg P$, $P = \sum_{i=0}^p \alpha_i X^i$ et on note

$$P(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^p \alpha_i A^i, \quad \text{avec } A^0 \stackrel{\text{def}}{=} I_n.$$

Montrer que si $\alpha_0 \neq 0$ et $P(A) = 0$, alors A est inversible.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:17]

◆ **MAT.12**
 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $a \in \mathbb{K}$. On note A la matrice $A = (a_{ij})_{i,j \in [1;n]}$ définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } i + j \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $A^3 = \lambda A^2 + \mu A$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:20] - Si $n = 2p$, alors $A^2 = paA$ donc $A^3 = paA^2$.
 - Si $n = 2p + 1$ alors $A^3 = (2p + 1)aA^2 - p(p + 1)a^2A$.
 Cela dépend de la parité de n .

◆ **MAT.13**
 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = I_n$. Montrer que $\text{rg}(A - I_n) + \text{rg}(A + I_n) = n$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:21] 0, pareil dans l'autre sens et le coup des dimensions.
 On montre d'abord que $\text{Im}(I_n - A) = \text{Ker}(I_n + A)$ car $(A + I_n) \cdot (A - I_n) =$

◆ **MAT.14**
 1) Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice vérifiant $M^2 + aM + bI_n = 0$, trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que M soit inversible.
 2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}).$$

La matrice A est-elle inversible? Dans l'affirmative, trouver l'inverse de A .
 On posera pour cela $J = (1)_{i,j \in [1;n]}$ et on calculera J^2 .

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:22] ce qui montre que
 1) On a $M(M + aI_n) = -bI_n$. Donc si $b = 0$, on a les deux matrices M et $M + aI_n$ qui ne sont pas inversibles, sauf si $M = -aI_n$ (dans quel cas M est inversible).
 Si $b \neq 0$, alors M est inversible.
 Au total, M est inversible si $M = -aI_n$ ou si $b \neq 0$.
 2) On peut écrire $A = (\alpha - \beta)I_n + bJ$. Alors $J^2 = nJ$ et
 $A^2 = (\alpha - \beta)^2 I_n + (2(\alpha - \beta)\beta + n\beta^2)J$,
 A est donc inversible si et seulement si $\alpha \neq \beta$ et $\alpha + (n - 1)\beta \neq 0$, et dans ce cas
 $A^{-1} = A - (2(\alpha - \beta) + n\beta)I_n$.

◆ **MAT.15**
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

(a) $A^2 = I_n$;
 (b) il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $p \in [1; n]$ tels que $A = P^{-1} \begin{pmatrix} I_p & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -I_{n-p} \end{pmatrix} P$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:23] x \in E s'écrit sous la forme 2x = (x + f(x)) + (x - f(x)) = y + z, avec f(y) = y et f(z) = -z. De plus la somme est directe.
 On géométrise et on montre $E = \text{Ker}(f - 1) \oplus \text{Ker}(f + 1)$. En effet, tout

◆ **MAT.16** (♣)
 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note u l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice représentative dans la base canonique est A , et ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par

$$\phi: \begin{cases} \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \\ f \longmapsto \phi(f) \stackrel{\text{def}}{=} u \circ f. \end{cases}$$

Déterminer la matrice représentative de ϕ dans la base canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:25] On a $\phi(e_1) = e_1 + e_2$, etc., donc
 Notons

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mat}_B \phi = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

◆ **MAT.17** (♣)
 On définit $f: \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$, $P \longmapsto P'$. Quelle est la matrice représentative de f dans la base $(X^i)_{i=0,\dots,n}$? f est-elle inversible?

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:26] Bien sûr que non!

◆ **MAT.18**
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice, et $\alpha \in \mathbb{K}$. On pose

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha I_n & A \\ \mathbb{O} & \alpha I_n \end{pmatrix}$$

qui est une matrice carrée d'ordre $2n$. Calculer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:27] puis par une récurrence immédiate
 On calcule d'abord

$$B^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 I_n & 2\alpha A \\ \alpha^2 I_n & \end{pmatrix} \quad B^k = \begin{pmatrix} \alpha^k I_n & k\alpha^{k-1} A \\ \alpha^k I_n & \end{pmatrix}.$$

◆ **MAT.19** (★)
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1) Prouver qu'il existe $X, Y \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = X^t Y$. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \alpha A$.
 2) On suppose $\alpha \neq -1$. Montrer que $(I + A)^{-1} = I - (I + \alpha)^{-1} A$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:28] De plus
 1) On note (C_1, \dots, C_n) les colonnes de A . Comme $\text{rg } A = 1$, A possède une colonne non nulle X et, pour $1 \leq i \leq n$, il existe $y_i \in \mathbb{K}$ tel que $C_i = y_i X$. On a alors $A = X^t Y$.
 2) Pour $\alpha \neq -1$, on calcule immédiatement
 $(I + A) \cdot (I - (I + \alpha)^{-1} A) = I$.

Autre solution plus élégante : $A = P \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} Q$, donc

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0) Q = X^t Y.$$

◆ **MAT.20** (♣)
 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} .

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:30] On écrit le système correspondant, et on en déduit très facilement A^{-1} .

◆ **MAT.21**
 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:31]

puis par récurrence :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a(1-a) & \dots & -a(1-a)^{n-2} \\ 0 & 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -a(1-a) \\ \vdots & & & 1 & -a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note (V_1, \dots, V_n) les colonnes de A et (e_1, \dots, e_n) les vecteurs de la base canonique, alors $V_1 = e_1, V_2 = e_2 + ae_1, \dots, V_k = e_k + ae_{k-1} + \dots + ae_1$ etc. Bon ben on inverse : $e_1 = V_1, e_2 = V_2 - aV_1, e_3 = V_3 - aV_2 - a(1-a)V_1,$

◆ **MAT.22** (★★)

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta + \gamma & \gamma + \alpha & \alpha + \beta \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \mathbb{O} \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \beta & \mathbb{O} & \beta \end{pmatrix}$$

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:32]

et

$$\text{rg } B = \begin{cases} n & \text{si } \forall \omega \in \mathbf{U}_n, \alpha + \beta\omega \neq 0 \\ n-1 & \text{si } \alpha \neq 0 \text{ et } \exists \omega \in \mathbf{U}_n, \alpha + \beta\omega = 0, \\ 0 & \text{si } \alpha = \beta = 0. \end{cases}$$

$$\text{rg } A = \begin{cases} 3 & \text{si } \alpha, \beta, \gamma \text{ deux à deux distincts,} \\ 2 & \text{si } \alpha = \beta \neq \gamma \text{ ou permutation,} \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta\gamma. \end{cases}$$

◆ **MAT.23** (★★)

Quel est le rang de la matrice $A = (\sin(i+j))_{i,j} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:33]

d'annuler la dernière ligne. On continue ainsi de proche en proche

$$\text{rg } A = \text{rg} \begin{pmatrix} \sin 2 & \dots & \sin n+1 \\ \sin 3 & \dots & \sin n+2 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

rg 2 grâce aux formules trigonométriques : $\sin(k+2) + \sin k = 2 \cos 1 \cdot \sin(k+1)$. Dans la matrice A , on effectue $L_n \leftarrow \frac{L_n + L_{n-2}}{2 \cos 1}$, ce qui permet et on vérifie que $\begin{vmatrix} \sin 2 & \sin 3 \\ \sin 3 & \sin 4 \end{vmatrix} \neq 0$ donc cette matrice est de rang 2, ainsi que A .

◆ **MAT.24** (★)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*, B \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\text{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ \mathbb{O} & C \end{pmatrix} = n + \text{rg } C.$$

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:34]

et géométriser.

Regarder les lignes indépendantes, ou prendre la transposée ($\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$)

◆ **MAT.25** (★)

Montrer que l'ensemble des matrices $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$, vérifiant $M = {}^t\overline{M}$ et de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. En donner une base.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:35]

Si $M \in E$, alors $M = \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & -a \end{pmatrix}$ d'où les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

◆ **MAT.26**

Montrer que

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} ; x \in]-1, 1[\right\}$$

est un groupe multiplicatif (appelé **groupe de Lorentz**; c'est le groupe fondamental des transformations de la relativité restreinte).

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:36]

Montrer que $A(x) \cdot A(y) = A\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ et $A(-x) = A(x)^{-1}$. Ça vous rappelle quelque chose? Eh oui, de la relativité restreinte, et des tangentes hyperboliques.

◆ **MAT.27**

Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} \text{ch } \psi & \text{sh } \psi \\ \text{sh } \psi & \text{ch } \psi \end{pmatrix} ; \psi \in \mathbb{R} \right\}$$

est un groupe multiplicatif (on l'appelle **groupe de Lorentz** et c'est le groupe fondamental des transformations de la relativité restreinte).

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:37]

◆ **MAT.28** (★)

Calculer A^k avec $A = \text{antiDiag}(1, \dots, 1) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:38]

On note que $A^2 = I_n$, donc $A^k = I_n$ si k pair et $A^k = A$ si k impair.

◆ **MAT.29** (★)

Soient $A, B, C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ trois matrices non nulles, telles que $ABC = 0$. Montrer qu'au moins deux de ces matrices sont non inversibles.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:39]

Supposons $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $C = B^{-1}A^{-1}(ABC) = 0$ contradiction. Supposons $A, C \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $B = A^{-1}(ABC)C^{-1} = 0$: contradiction. itou.

◆ **MAT.30** (★)

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices telles que $AB = A + B$. Montrer que $(A - I_n) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et calculer $(A - I_n)^{-1}$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:40]

On calcule $(A - I_n)(B - I_n) = I_n$.

◆ **MAT.31**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $(XA)^2 = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A = 0$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:41]

$$\text{et } (E_{ij}A)^2 = a_{ji} \begin{pmatrix} \mathbb{O} & & \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \mathbb{O} & & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

On applique avec E_{ij} :

donc notamment $a_{ii}^2 = 0$ donc $A = 0$.

Autre solution si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: on pose $B = {}^tA \cdot A$, alors $B^2 = 0$, or $B = {}^tB \cdot B = 0$, donc $B = 0$ d'après l'exercice **MAT.71**, donc $A = 0$ d'après le même résultat.

$$E_{ij}A = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & & \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \mathbb{O} & & \mathbb{O} \end{pmatrix} \leftarrow i$$

◆ **MAT.32**

Soit $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$, et posons $r = \text{rg } A$. Montrer qu'il existe $A_1, \dots, A_r \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$, r matrices de rang 1 telles que $A = A_1 + \dots + A_r$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:42]

On utilise $A = P J_r Q$, et $A = P \cdot (E_{11} + \dots + E_{rr}) \cdot Q$.

◆ **MAT.33**

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $x, y \in \mathbb{K}$ deux scalaires non nuls tels que $AB + xA + yB = 0$. Montrer que $AB = BA$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:43]

l'une de l'autres à xy près, donc elles commutent, et

On calcule

$$(A + yI)(B + xI) = xyI$$

$$(B + xI)(A + yI) = BA + xA + yB + xyI = xyI$$

or $xy \neq 0$ donc les deux matrices $(A + yI)$ et $(B + xI)$ sont inversibles et inverses ce qui montre que $BA + xA + yB = 0$ donc $BA = AB$.

◆ **MAT.34** (★)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -a \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

dont le coefficient a_{ii} vérifie

$$a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

L'ensemble Ω_t est convexe. Posons maintenant $\Omega = \bigcap_{i=1}^n \Omega_i$, ensemble des matrices à diagonale strictement dominante. Alors Ω est convexe et donc connexe. Or la fonction \det est continue et à valeurs dans \mathbb{R}^* , donc elle est de signe constant. Puisqu'elle vaut 1 sur la matrice $A = I_n$, elle est positive sur tout Ω .

Preuve simple : on multiplie tous les coefficients hors diagonale par $t \in [0; 1]$, ce qui donne une nouvelle matrice A_t . On vérifie que $t \mapsto A_t$ est continue, $A_0 = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ et $A_1 = A$. De plus, l'application

$$\phi : \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^* \\ t \mapsto \det A_t \end{cases}$$

est continue et à valeurs dans \mathbb{R}^* car tous les A_t sont à diagonale strictement dominante, donc inversibles. Donc ϕ garde un signe constant. Or $\phi(0) > 0$. Donc $\phi(1) = \det A > 0$.

◆ **MAT.48** (♣)
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA \cdot A = I_n$. Montrer que $A \cdot {}^tA = I_n$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:60] de A!
Eh eh eh, piège à cons! C'est d'après la propriété bien connue de l'inverse

◆ **MAT.49** (★)
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
(a) A est une matrice de projection ($A^2 = A$);
(b) il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la suite $(B^p)_{p \in \mathbb{N}}$ tende vers A .

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:62] (b) \Rightarrow (a) : si (B^p) tend vers A , la suite (B^{2p}) tend vers A et aussi vers A^2 , donc $A = A^2$.
(a) \Rightarrow (b) : poser $B = A$.

◆ **MAT.50** (♣)
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A \notin \text{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si A est équivalente à une matrice nilpotente.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:63] Si $\text{rg}(A) = r < n$, A est équivalente à $\text{srdiag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

◆ **MAT.51 (Matrices de type M)** (★)
Une matrice réelle M est dite **positive** (et on note $M \geq 0$) si et seulement si tous ses coefficients sont positifs. On dit qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est **de type M** si et seulement si A est inversible et A^{-1} est positive. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
(a) A est de type M;
(b) pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0)$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:64] ▶ Supposons enfin, en notant $B = (b_{ij}) = A^{-1}$, qu'il existe un couple $(i, j) \in [1; n]^2$ tel que le coefficient b_{ij} soit strictement négatif. On considère le vecteur

$$Y = {}^t(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-ième place}}, 0, \dots, 0)$$

LEMME Si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $M \geq 0$ et $Y \geq 0 \Rightarrow AY \geq 0$.

(a) \Rightarrow (b) : Soit X un vecteur colonne tel que $AX \geq 0$, alors $A^{-1}AX \geq 0$, c'est-à-dire $X \geq 0$.
(b) \Rightarrow (a) : On commence par montrer que A est inversible.
□ Soit $X \in \mathfrak{M}_n, 1(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$. Alors $AX \geq 0$, donc $X \geq 0$. De plus, $A(-X) = 0$ donc $A(-X) \geq 0$ donc $-X \geq 0$. On en déduit $X = 0$. □
Ainsi, A est inversible.

qui vérifie $Y \geq 0$, mais $BY \not\geq 0$.
En posant $X = BY$ ou $Y = AX$, on a donc $AX \geq 0$ mais $X \not\geq 0$. **contradiction** ◀
Ainsi, $A^{-1} \geq 0$.

◆ **MAT.52 (Sous-matrice carrée)** (♣)
On considère un \mathbb{R} -v.e. E de dimension 3, muni d'une base (a, b, c) et on définit l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ par $f(a) = a + 2b + 3c$, $f(b) = 2a - c$, $f(c) = -a - 7b - 2c$.
1) Expliciter $F = \text{mat}_{(a,b,c)}(f)$.
2) On note $V = \text{Vect}(a)$ et $W = \text{Vect}(b, c)$. On note (p_V, p_W) la famille de projecteurs associée à la décomposition $E = V \oplus W$. Enfin, on définit $g = p_W \circ f|_W$.
a) Expliciter $F' = \text{mat}_{(b,c)}(f|_W)$.
b) Montrer que g définit, par restriction de l'espace d'arrivée, un endomorphisme de W . Calculer $g(b)$ et $g(c)$. En déduire $G = \text{mat}_{(b,c)} g$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:65]

1) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -7 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2) a) $F' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
b) $G = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

◆ **MAT.53**
Résoudre dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, puis dans $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{1,2}(\mathbb{R})$, l'équation $XY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
INDICATION : On sa ramènera au cas où $\text{rg}(X) = 1$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:66]

◆ **MAT.54**
On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
1) Calculer $(I_n - J)(I_n + J + J^2 + \dots + J^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2) Calculer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3) En déduire que $(I_n - J)$ est inversible et calculer son inverse.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:67]

◆ **MAT.55**
On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:68] moitié des coefficients de $(a + b)^n \dots$
 $A = aI_2 + bJ$ avec $J^2 = I_2$, puis binôme de Newton. On voit apparaître la

◆ **MAT.56**
On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/mat:69]

◆ **MAT.57 (${}^t\bar{A} \cdot A$)** (♣)
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
(a) ${}^t\bar{A} \cdot A = 0$;
(b) $A = 0$.

◇ [Divers/matricesexo.tex/div:95]

◆ **MAT.58**
Soient $A \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{R})$. Montrer que AB ou BA n'est pas inversible.
◇ [Divers/matricesexo.tex/div:96] Géométriser.

◆ **MAT.59**
On note $E = \mathbb{R}[X]$ et \mathcal{B} la base canonique de E . Enfin, on note $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et, si $k \in [1; n]$:
$$P_k = X \cdot (X - 1) \cdots (X - k + 1)$$

1) Montrer que $\mathcal{C} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de E .
2) On note D la dérivation canonique. Déterminer la matrice M représentative de D dans \mathcal{B} .
3) On note Δ l'application définie sur E par $\Delta : P \mapsto P(X + 1) - P(X)$.
a) Vérifier que $\Delta \in \mathcal{L}(E)$.
b) Déterminer la matrice A de Δ dans \mathcal{C} .
c) En déduire (sans calculer directement) la matrice de Δ^2 .

◇ [Rec01/matrices-r1.tex/mat:24]

On calcule $\text{tr}^t A A = \sum A_{kk}^2$, nulle si et seulement si A est nulle.◆ **MAT.72** Mines MP – 2001Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

◇ [Rec01/matrices-r1.tex/al-r:11]

(Voir aussi **MAT.70**.) On cherche trois vecteurs (I, J, K) de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ tels que $J = f(K)$, $f(J) = f(I) = 0$. Clairement, puisque $f^2 = 0$, on peut prendre K quelconque. Par exemple

$$K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad J = f(K) = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix},$$

et il suffit maintenant de choisir I dans $\text{Ker } f$, par exemple $I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on vérifie que (I, J, K) est bien une base.◆ **MAT.73** TPE MP – 2001On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -12 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ à partir de A^2 , A et I_3 .

◇ [Rec01/matrices-r1.tex/al-r:23]

◆ **MAT.74** TPE MP – 2001On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Calculer A^n en fonction de A^2 , A et I.

◇ [Rec01/matrices-r1.tex/al-r:6]

◆ **MAT.75** (*) CCP PC – 2001Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\sup |a_{ij}| < 1/n$. Montrer que $A + I_n$ est inversible.

◇ [Rec01/matrices-r1.tex/al-r:4]

Montrons que $\text{rg}(A + I) = n$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = 0$, où les C_i désignent les colonnes de $A + I$. On note k un indice tel que $|\lambda_k|$ est maximal (c'est un **indice d'Hadamard**). Alors, si $\lambda_k \neq 0$,

$$\text{donc} \quad |\lambda_k| \cdot |1 + a_{kk}| \leq \sum_{i \neq k} |\lambda_i| |a_{ik}|,$$

d'où une contradiction en divisant par $|\lambda_k| \neq 0$.

$$\lambda_k C_k = - \sum_{i \neq k} \lambda_i C_i$$

◆ **MAT.76** INT MP – 2001On pose $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = 1 + \delta_{ij}$. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

◇ [Rec01/matrices-r1.tex/al-r:22]

◆ **MAT.77** Mines MP – 2001

Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices de rang 1.

◇ [Rec01/matrices-r1.tex/red-r:33]

matrices $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $M \cdot E_{ij} = E_{ij} \cdot M$ pour tout $i, j \in [1, n]$ sont les matrices scalaires.Les matrices élémentaires E_{ij} sont de rang 1. On vérifie explicitement que les◆ **MAT.78**

Centrale MP – 2002

On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On décompose M en morceaux :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$C = (2 \quad 2 \quad 2) \quad \text{et} \quad D = (1).$$

On décompose de même $M^{-1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$.

- 1) Résoudre dans le cas général les équations reliant A, B, C et D à P, Q, R et S (en supposant A inversible).
- 2) Calculer P, Q, R, S dans le cas particulier de la matrice M.
- 3) En déduire un algorithme de calcul de l'inverse d'une matrice.

◇ [Rec02/matrices-r2.tex/al-r:27]

◆ **MAT.79** TPE MP – 2002Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente qui commute avec sa transposée. Montrer que $A = 0$.

◇ [Rec02/matrices-r2.tex/al-r:9]

Un joli théorème hors-programme montre que toute matrice commutant avec sa transposée (resp. tout endomorphisme commutant avec son adjoint) est diagonalisable dans \mathbb{C} . Puisque A est nilpotente, elle est donc forcément nulle.

Il doit y avoir un moyen de rester dans la limite du programme : un calcul

rapide montre que si $\text{tr } A^t A = 0$ alors $A = 0$. Or si A et ${}^t A$ commutent, $A^t A$ est nilpotent donc de trace nulle et $A = 0$.◆ **MAT.80** TPE PC – 2002On pose $A = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ [Rec02/matrices-r2.tex/al-r:33]

On remarque, en posant $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$ et $\alpha_3 = c$, que $a_{ij} = \alpha_i \alpha_j$ donc

$$A^2 = \beta A \text{ avec } \beta = a^2 + b^2 + c^2 \text{ donc } A^n = \beta^{n-1} A.$$

◆ **MAT.81** (*) TPE MP – 2002On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(tM)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

◇ [Rec02/matrices-r2.tex/al-r:2]

Il suffit d'écrire $M = J - I$, on en déduit M^n puis l'exponentielle. Ou bien on

$$\text{diagonalise. } \exp(tM) = e^{-t} \left(\frac{1}{3}(e^{3t} - 1)J + I \right).$$

◆ **MAT.82** CCP MP – 2002Soient $A \in \mathfrak{M}_{mn}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathfrak{M}_{nm}(\mathbb{R})$ telles que $A = AXA$. Montrer que

$$XA = I_n \iff \text{rg}(A) = n.$$

◇ [Rec02/matrices-r2.tex/al-r:32]

Comme $A \in \mathfrak{M}_{mn}(\mathbb{R})$, on a $\text{rg}(A) = n$ ssi A est injective. Donc si $XA = I_n$

alors XA est injective donc A est injective. Réciproquement, si A est injective,

alors comme on suppose $A(I_n - XA) = 0$, on peut simplifier par A et $XA = I_n$.◆ **MAT.83** Mines MP – 2003Soit $M \in S_3(\mathbb{R})$. On pose

$$\begin{cases} M_1 = M \\ a_1 = \text{tr}(M) \\ P_1 = M_1 - a_1 I_3 \end{cases} \quad \begin{cases} M_2 = M_1 P_1 \\ a_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(M_2) \\ P_2 = M_2 - a_2 I_3 \end{cases} \quad \begin{cases} M_3 = M_2 P_2 \\ a_3 = \text{tr}(M_3). \end{cases}$$

Montrer que $M_3 = a_3 I_3$.INDICATION : On pourra s'intéresser aux fonctions symétriques en remarquant que $s_3 - \sigma_1 s_2 + \sigma_2 s_1 - 3\sigma_3 = 0$ où $s_p = x_1^p + x_2^p + x_3^p$.

◊ [Rec03/matrices-r3.tex/r3:201]

◆ **MAT.84** (★★★) Centrale MP – 2003

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose que $A, A+B, A+2B, A+3B$ et $A+4B$ sont inversibles dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ $A+kB \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$.

◊ [Rec03/matrices-r3.tex/r3:24]

On rappelle que $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$ est inversible si et seulement si $\det(M) \in \{-1, 1\}$.
On note $P(X) = \det(A + XB)$; c'est un polynôme à coefficients entiers, de degré ≤ 2 . De plus, il prend la valeur ± 1 en 5 points distincts; il existe donc au

moins trois points en lesquels il a la même valeur (+1 ou -1); par conséquent, il est constant. On a donc (par exemple) $\det(A+tB) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; notamment, pour $t \in \mathbb{Z}$, la matrice $(A + tB)$ est à coefficients entiers, et est inversible dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$.

◆ **MAT.85** (★★★) Centrale MP – 2003

Soit $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non constante telle que $\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad f(AB) = f(A)f(B)$.

- Donner un exemple de telle fonction.
- Calculer $f(0)$ et $f(I_n)$.
- Trouver l'ensemble des matrices A telles que $f(A) = 0$.

◊ [Rec03/matrices-r3.tex/r3:168]

- La fonction déterminant.
- $f(0^2) = f(0)^2 = f(0)$ donc $f(0) = 0$ ou 1. Si $f(0) = 1$, alors $1 = f(0 \cdot A) = f(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ donc f est constante : contradiction. Ainsi : $f(0) = 0$.
De même, $f(I_n^2) = f(I_n)^2 = f(I_n)$ donc $f(I_n) = 0$ ou 1. Si $f(I_n) = 0$, alors f est la fonction nulle : contradiction. Donc $f(I_n) = 1$.
- Si A est inversible, alors $f(A) \cdot f(A^{-1}) = 1$ donc $f(A) \neq 0$. On en déduit que la nullité de l'image est un invariant d'équivalence.

donc $f(J_1) = 0$.

Par ailleurs,

$$\text{diag}(1, 1, 0, \dots, 0) \cdot \text{diag}(1, 0, 1, 0, \dots, 0) = J_1$$

ce qui montre que $f(J_2) = 0$ dont toutes les matrices de rang 2 sont d'image nulle.

On continue ainsi de proche en proche pour montrer que toutes les matrices de rang $k \geq n-1$ ont une image nulle.

Conclusion :

$$f(M) = 0 \iff \text{rg } M < n \iff M \notin \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

2^e solution (plus simple)

Toute matrice non inversible, dont on note r le rang ($r < n$) est semblable à une matrice

$$H_r = \text{surdiag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r})$$

qui est nilpotente, et qui vérifie donc

$$f(H_r)^n = f(H_r^n) = f(0) = 0.$$

Notons $J_k = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, \dots, 0)$

et $J'_k = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Alors $f(J_k^2) = f(J_k)^2 = f(J_k)$ donc $f(J_k) = 0$ ou 1. Si $f(J_k) \neq 0$, toutes les matrices de rang 1 ont une image non nulle. Or

$$J_1 \cdot J'_1 = \text{diag}(1, 0, \dots, 0) \cdot \text{diag}(0, 1, 0, \dots, 0) = 0,$$

◆ **MAT.86** (*) Centrale PC – 2003

Inverser la matrice de coefficients $a_{ij} = C_{j-1}^{i-1}$ pour $j \geq i$ et $a_{ij} = 0$ sinon. Interprétation en termes de polynômes.

◊ [Rec03/matrices-r3.tex/r3:346]

C'est la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endo-

morphisme $P \mapsto P(X+1)$. On l'inverse en prenant $P \mapsto P(X-1)$.

◆ **MAT.87** CCP PC – 2003

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A est-elle inversible? Si oui, calculer A^{-1} . Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

◊ [Rec03/matrices-r3.tex/r3:174]

On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $B^4 = 0$ et $A = I_4 + B + B^2 + B^3$. Ah ah, on voit se profiler un résultat connu, et on a bien

$$(I_4 - B)(I_4 + B + B^2 + B^3) = I_4 - B^4 = I_4,$$

À FINIR !!!

◆ **MAT.88** (♣) CCP PC – 2003

On note $M = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◊ [Rec03/matrices-r3.tex/r3:234]

Le plus simple, puisque A n'est pas diagonalisable, est d'écrire $M^n = 2^n(I_2 + 4N)^n$ où N est nilpotente d'ordre 1 et d'utiliser la formule du binôme de Newton.

On peut aussi diviser X^n par le polynôme caractéristique $(X-2)^2$:

$$X^n = Q(X-2)^2 + \alpha_n X + \beta_n,$$

alors $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_2$.

◆ **MAT.89** CCP PC – 2003

Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ de coefficients $a_{kl} = \exp\left(\frac{2i\pi}{3} kl\right)$. Calculer $A \cdot A$.

◊ [Rec03/matrices-r3.tex/r3:239]

◆ **MAT.90** INT PC – 2003

Soit $T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure. Montrer que $T^t T = {}^t T T$ si et seulement si T est diagonale.

◊ [Rec03/matrices-r3.tex/r3:367]

◆ **MAT.91** (★★) Centrale MP – 2004

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients dans $\{0, 1\}$ telle que $a_{ii} = 0$ pour tout $i \in [1; n]$ et $a_{ij} + a_{ji} = 1$ si $i \neq j$.

On définit l'hyperplan $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}); \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$.

- Déterminer $\text{Ker}(A) \cap H$.
- En déduire que $\text{rg}(A) \geq n-1$.
- Pour quelle(s) valeur(s) de $n \geq 2$ a-t-on toujours $\text{rg}(A) = n-1$?

◊ [Rec04/matrices-r4.tex/r4:266]

◆ **MAT.92** ($A \underset{\mathbb{C}}{\sim} B \Rightarrow A \underset{\mathbb{R}}{\sim} B$) (★★) Centrale MP – 2004

Soient A et B deux matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, semblables dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A et B sont aussi semblables dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Est-ce encore vrai pour une dimension n quelconque? Est-ce encore vrai si on veut que $A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Q})$ soient semblables dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Q})$?

◊ [Rec04/matrices-r4.tex/r4:219]

On écrit $A = P^{-1}BP$ donc $PA = BP$. On note $P = R + iJ$, et on montre aisément que $RA = BR$ et $JA = BJ$. On définit $\psi : \lambda \mapsto R + \lambda J$, alors ψ est un polynôme non nul, il admet une racine réelle λ^* ; on note $P^* = R + \lambda^* J$ et

on vérifie que $P^*A = BP^*$ ce qui permet de conclure.

C'est vrai en dimension quelconque. En revanche c'est faux pour \mathbb{Q} .

À FINIR !!!

◆ **MAT.93** (*) Centrale MP – 2004

Soit $a \neq 0$. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^q pour tout $q \in \mathbb{Z}$.

◊ [Rec04/matrices-r4.tex/r4:184]

◆ **MAT.94 (Matrices de trace nulle)** (★★★) Centrale MP – 2004

- Soit D une matrice diagonale d'ordre n , dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont supposées être non nuls et distincts deux à deux.
On considère l'application $\phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\phi : M \mapsto DM - MD$.
Montrer que ϕ est linéaire et calculer $\text{Ker } \phi$ et $\text{Im } \phi$.
- Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{tr}(A) = 0$.
 - Dans le cas $n = 2$, montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$.
 - Dans le cas général, montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.
- Montrer que, pour tout $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il y a équivalence entre les énoncés :
 - $\text{tr}(A) = 0$;
 - il existe $X, Y \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $A = XY - YX$.

◊ [Rec04/matrices-r4.tex/r4:151]

♦ **MAT.95** (**) Mines PC – 2004
 Soit $n \geq 3$. Calculer, si $x \in \mathbb{R}$, le rang de la matrice M de coefficients $M_{i,j} = (i + j - x)^2$.

◊ [Rec04/matrices-r4.tex/r4:69]

♦ **MAT.96** (♣) TPE PC – 2004
 Soit M une matrice nilpotente d'ordre p. On note $P = I_n + M + \dots + M^{p-1}$.
 1) Montrer que $I - M$ est inversible et calculer son inverse.
 2) Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

◊ [Rec04/matrices-r4.tex/r4:105]

2) 1) $(I - M) \cdot P = P \cdot (I - M) = I$.

♦ **MAT.97** (*) TPE PC – 2004
 Calculer l'inverse de la matrice de coefficients $a_{ij} = 1 + \alpha \delta_{ij}$.

◊ [Rec04/matrices-r4.tex/r4:116]

On remarque que $A - \alpha I_n = J$ donc $(A - \alpha I_n)^2 = n(A - \alpha I_n)$, ou encore ce qui montre que l'inverse de A est

$$A^2 - (2\alpha + n)A = -\alpha(1 + \alpha)I_n \quad \frac{1}{\alpha(1 + \alpha)}((2\alpha + n)I_n - A).$$

♦ **MAT.98** (**) Navale PC – 2004
 Trouver toutes les matrices M $\in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

◊ [Rec04/matrices-r4.tex/r4:133]

M doit être de rang 1. De plus M^2 n'étant pas nul, on en déduit que $E = \text{Ker}(M) \oplus \text{Im}(M)$. Donc $\text{Ker}(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche donc des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$, qui doivent de plus vérifier $a(a + b) = 1$ donc $b = \frac{1 - a^2}{a}$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

♦ **MAT.99** (**) TPE PC – 2005
 Soit $a \neq 1$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 = a x_n + b \\ x_2 = a x_1 + b \\ \vdots = \vdots \\ x_n = a x_{n-1} + b. \end{cases}$$

◊ [Rec05/matrices-r5.tex/r5:29]

On doit résoudre $X = AX + B$.
 Ou alors on pose $y_k = x_k - \frac{b}{1-a}$ et on trouve que $y_i = a y_{i-1}$ pour tout i (avec cyclicité), ce qui n'est possible que si a est une racine n-ième de l'unité. Dans ce cas, les solutions sont de la forme $(y_1, \dots, y_n) = \lambda(1, a, \dots, a^{n-1})$.
 Conclusion :

- Si $a \notin \mathbf{U}_n$, alors $\mathcal{S} = \left\{ \frac{b}{1-a} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{b}{1-a} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ \vdots \\ a^{n-1} \end{pmatrix} \right\}.$$

♦ **MAT.100** CCP PC – 2005
 Soit $a \neq 0$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◊ [Rec05/matrices-r5.tex/r5:49]

♦ **MAT.101** (♣) CCP PC – 2005
 Soit A une matrice triangulaire supérieure stricte. Montrer, sans calculs matriciels, que $A^n = 0$.

◊ [Rec05/matrices-r5.tex/r5:120]

♦ **MAT.102** (*) CCP PC – 2005
 On suppose que (X_1, \dots, X_n) et (Y_1, \dots, Y_n) sont des bases de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $(X_i^t Y_j)_{ij}$ est une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

◊ [Rec05/matrices-r5.tex/r5:133]

Équations matricielles

♦ **MAT.103** (**) Résoudre et discuter l'équation $X + (\text{tr } X)A = B$, d'inconnue $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, en fonction de $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

◊ [Divers/eqmatexo.tex/mat:29]

En prenant la trace de cette équation, on obtient $\text{tr } X = \text{tr } B / (1 + \text{tr } A)$, et on trouve donc $X = B - \frac{\text{tr } B}{1 + \text{tr } A} A$ si $\text{tr } A \neq -1$.
 Si $\text{tr } A = -1$ et $\text{tr } B \neq 0$, il n'y a pas de solutions.
 Si $\text{tr } A = -1$ et $\text{tr } B = 0$, alors B est une solution particulière.
 Soit Y une solution de l'équation, alors $Z = Y - B$ est solution de l'équation homogène $Z + (\text{tr } Z)A = 0$, donc Z est un multiple de A, donc $Z = \lambda A$.

♦ **MAT.104 (Équation $X^2 + X = A$)** (**) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On veut résoudre dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ l'équation : $X^2 + X = A$. On note X une solution, et ϕ_A et ϕ_X les endomorphismes de \mathbb{K}^2 de matrices A et X dans la base canonique.

- 1) Montrer que X ou $(X + I_2)$ n'est pas inversible.
- 2) Si X n'est pas inversible, montrer que X est proportionnelle à A. Pour cela, on montrera l'égalité des images de ϕ_A et ϕ_X , ainsi que l'égalité de leurs noyaux.
- 3) Résoudre complètement l'équation.

◊ [Divers/eqmatexo.tex/mat:45]

- 1) Si X et $(X + I_2)$ étaient inversibles, alors leur produit le serait ce qui n'est pas vrai puisque A est de rang 1.
 - 2) De $A = X(I_2 + X)$ on tire que $\text{Im } \phi_A \subset \text{Im } \phi_X$. De $A = (I_2 + X)X$ on tire $\text{Ker } \phi_X \subset \text{Im } \phi_A$. De plus, $\text{Ker } \phi_X$ est de dimension 0, 1 ou 2; mais 0 ne convient pas car X non inversible, 2 ne convient pas car X n'est pas nul attendu que A ne l'est pas; donc $\dim \text{Ker } \phi_X = 1$ et donc $\dim \text{Im } \phi_X = 1$ également. Puisque $\text{rg } A = 1$, on en déduit l'égalité des noyaux et des images. Enfin, A étant non nilpotente (manifestement !), on
- montre aisément que $\mathbb{K}^2 = \text{Ker } \phi_A \oplus \text{Im } \phi_A$, on prend une base adaptée et miracle les matrices de ϕ_X et ϕ_A sont forcément proportionnelles vu qu'il n'y a qu'un seul coefficient non nul.
- 3) Si $(X + I_2)$ n'est pas inversible, on fait le même travail et on montre que $(X + I_2)$ est proportionnelle à A.
 Puis on résume :
 - a) Si X n'est pas inversible, $X = \alpha A$ et on doit résoudre $2\alpha^2 + \alpha = 1$ donc $\alpha = \frac{1}{2}$ ou $\alpha = -1$.
 - b) Sinon $X = \alpha A - I_2$.

♦ **MAT.105** (*) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $X + {}^t X = (\text{tr } X) A$.

◊ [Divers/eqmatexo.tex/mat:50]

Si X est solution alors $2 \text{tr } X = (\text{tr } X)(\text{tr } A)$.
 Si $\text{tr } X = 0$, alors ${}^t X = -X$ et X est antisymétrique. Réciproquement toute matrice antisymétrique est solution de l'équation.
 Si $\text{tr } X \neq 0$, alors $\text{tr } A = 2$ et $A = \frac{1}{\text{tr } A}(X + {}^t X)$ est symétrique. Alors

$$\left(X - \frac{\text{tr } X}{2} A \right) + {}^t \left(X - \frac{\text{tr } X}{2} A \right) = 0,$$

donc la matrice $\left(X - \frac{\text{tr } X}{2} A \right)$ est antisymétrique, donc il existe B antisymétrique telle que

$$X = \frac{\text{tr } X}{2} A + B.$$

Réciproquement, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si B est antisymétrique, $X = \lambda A + B$ est solution.

Conclusion. Si $\text{tr } A \neq 2$ ou si A n'est pas symétrique, alors les seules solutions sont les matrices antisymétriques. Si $\text{tr } A = 2$ et A est symétrique, les solutions s'écrivent $\lambda A + B$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et B antisymétrique.

♦ **MAT.106 (Équation $M^n = I_n$)** (**) On note $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A} = \{aU + bI, a, b \in \mathbb{R}\}$ (on supposera $n \geq 2$).

- 1) Montrer que \mathcal{A} est une sous-algèbre commutative de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) Soit $M \in \mathcal{A}$ qu'on notera $M = aU + bI$. Montrer que M possède un inverse dans A si et seulement si $b(b + na) \neq 0$. Si cette condition est vérifiée, calculer M^{-1} .
- 3) Montrer que, si $b(b + na) = 0$, alors M n'est pas inversible dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
- 4) Résoudre dans \mathcal{A} l'équation $M^n = I$.

◇ [Divers/eqmatexo.tex/mat:57]

1) On commence par calculer M^2 , et on trouve

$$M^{-1} = -\frac{a}{b(na+b)}U + \frac{1}{b}I.$$

3)
 4) $M^n = \frac{(na+b)^n - b^n}{n}U + b^n I$ donc

$$\begin{cases} n \text{ pair} : a = 0, \text{ ou } -\frac{2b}{n}, b = \pm 1 \\ n \text{ impair} : a = 0, b = 1. \end{cases}$$

◆ **MAT.107** CCP MP – 2002

Trouver les solutions de $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

◇ [Rec02/eqmat-r2.tex/al-r:2:8] n alors $X^n = 0$. Une éventuelle solution X est nilpotente $X^6 = A^3 = 0$, donc il n'y en a pas. On utilise le résultat classique : si X est nilpotente de taille $0 = X^3 = X^4 = A^2 \neq 0$.

◆ **MAT.108** CCP PC – 2002

Déterminer les matrices carrées vérifiant $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$.

◇ [Rec02/eqmat-r2.tex/al-r:2:10] $\mathbb{K}^2 = \text{Ker } \Phi_A \oplus \text{Im } \Phi_A$, on prend une base adaptée et miracle les matrices de Φ_X et Φ_A sont forcément proportionnelles vu qu'il n'y a qu'un seul coefficient non nul.

Cf. **MAT.104**.

1) Si X et $(X + I_2)$ étaient inversibles, alors leur produit le serait ce qui n'est pas vrai puisque A est de rang 1.

2) **On suppose X non inversible.** De $A = X(I_2 + X)$ on tire que $\text{Im } \Phi_A \subset \text{Im } \Phi_X$. De $A = (I_2 + X)X$ on tire $\text{Ker } \Phi_X \subset \text{Im } \Phi_A$. De plus, $\text{Ker } \Phi_X$ est de dimension 0, 1 ou 2; mais 0 ne convient pas car X non inversible, 2 ne convient pas car X n'est pas nul attendu que A ne l'est pas; donc $\dim \text{Ker } \Phi_X = 1$ et donc $\dim \text{Im } \Phi_X = 1$ également. Puisque $\text{rg } A = 1$, on en déduit l'égalité des noyaux et des images. Enfin, A étant non nilpotente (manifestement!), on montre aisément que

3) **Si $(X + I_2)$ n'est pas inversible,** on fait le même travail et on montre que $(X + I_2)$ est proportionnelle à A.

Puis on résume :

a) Si X n'est pas inversible, $X = \alpha A$ et on doit résoudre $2\alpha^2 + \alpha = 1$ donc $\alpha = \frac{1}{2}$ ou $\alpha = -1$.

b) Sinon $X = \alpha A - I_2$.

◆ **MAT.109** CCP PC – 2002

Résoudre l'équation matricielle suivante

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

après avoir discuté du rang de X et Y.

◇ [Rec02/eqmat-r2.tex/al-r:2:42] Ker Y = $\text{Im } X = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on vérifie alors que $X = \begin{pmatrix} c & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ Clairement, X et Y sont non inversibles et non nulles, donc de rang 1. De plus avec $ac + db = 1$.

◆ **MAT.110** ENTPE MP – 2002

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $\alpha > 0$ et A, B $\in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Discuter de l'existence de X $\in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\alpha X + (\text{tr } X)A = B.$$

◇ [Rec02/eqmat-r2.tex/al-r:2:36] - Si $\text{tr } B = 0$ et $\alpha = -\text{tr } A$, alors $X = \alpha^{-1}B$ convient manifestement. De plus, si Y vérifie la même équation, alors $Z = X - Y$ vérifie $\alpha Z = (\text{tr } Z)A$ donc Z est proportionnel à A. En prenant $Y = \alpha^{-1}BB + \lambda A$, on s'aperçoit que cette solution marche tout le temps. Ainsi, les solutions sont les $\alpha^{-1}B + \lambda A$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

En prenant la trace de cette équation, on trouve

$$(\alpha + \text{tr } A) \text{tr } X = \text{tr } B.$$

- Si $\text{tr } B \neq 0$ et que $\alpha = -\text{tr } A$, alors l'équation n'admet aucune solution.

- Si $\alpha \neq -\text{tr } A$, alors $\text{tr } X = \frac{\text{tr } B}{\alpha + \text{tr } A}$ donc on peut écrire

$$X = \frac{1}{\alpha} \left[B - \left(\frac{\text{tr } B}{\alpha + \text{tr } A} \right) A \right].$$

◆ **MAT.111** Mines MP – 2003

Résoudre dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

◇ [Rec03/eqmat-r3.tex/r3:280] ça c'est faux. Notons A la matrice de l'énoncé. Alors $X^6 = A^3 = 0$ ce qui montre que X est nilpotente, donc notamment $X^3 = 0$ donc notamment $A^2 = X^4 = 0$, mais il n'y a aucune solution.

◆ **MAT.112** Centrale MP – 2003

On considère l'équation d'inconnue $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$:

$$M^2 - (\text{tr } M)M + (\det M)I_n = 0_n. \quad (E_n)$$

Résoudre E_2, E_3 et puis E_n pour $n \geq 4$.

◇ [Rec03/eqmat-r3.tex/r3:74] - Si $\alpha \neq 0$, on obtient $\alpha^{p-1} = \beta^{1-q}$ puis, puisque $p \neq 1$ (quitte à échanger α et β),

1) **Dans le cas $n = 2$,** toutes les matrices marchent! On le voit soit par calcul direct soit en écrivant que M est jordanisable, ou plus simplement en remarquant que (E_2) n'est rien d'autre que $\text{PoCa}(M)(M) = 0$, ce qui est donné par Cayley-Hamilton.

2) **Pour $n \geq 3$,** il faut séparer en plusieurs cas.

a) **Si $(\text{tr } X)^2 - 4 \det X \neq 0$,** alors X est annulée par un polynôme scindé simple, donc est diagonalisable, et ses valeurs propres sont dans l'ensemble des racines du polynôme (en Y) :

$$Y^2 - (\text{tr } X)Y + \det X.$$

Notons α et β ces racines, et p et q leur multiplicité. Alors

$$\text{tr } X = p\alpha + q\beta \quad \text{et} \quad \det X = \alpha^p \beta^q?$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \alpha^2 - (p\alpha + q\beta)\alpha + \alpha^p \beta^q &= 0 \\ \beta^2 - (p\alpha + q\beta)\beta + \alpha^p \beta^q &= 0. \end{aligned}$$

Puisque $\alpha \neq \beta$, on peut supposer pour fixer les idées que $\beta \neq 0$.

- Si $\alpha = 0$, alors $q = 1$ et $p = n - 1$, et réciproquement toute matrice diagonalisable admettant 0 comme valeur propre d'ordre $n - 1$ et une autre β de multiplicité 1 convient.

Uuf!!!

Si A est une matrice diagonalisable ayant pour valeur propre β racine de

$$(1-q)^{p-1} \beta^{p-1} = (p-1) \beta^{q-1}$$

avec la multiplicité q, et α donné par $\alpha = \frac{(1-q)\beta}{p-1}$ avec la multiplicité $n - q$, alors elle satisfait (E_n) .

b) **Si $(\text{tr } X)^2 - 4 \det X = 0$,** notons α l'unique racine du polynôme $Y^2 - (\text{tr } X)Y + \det X$, alors $\text{tr}(X) = n\alpha$ et $\det X = \alpha^n$ par trigonalisation, donc

$$\alpha^n + (1-n)\alpha^2 = 0.$$

Réciproquement, si α est une des $n - 1$ racines de cette équation et X une matrice telle que $(X - \alpha I_n)^2 = 0$, alors elle est solution de (E_n) .

◆ **MAT.113** Centrale MP – 2003

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On considère $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et on suppose qu'il existe $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AM - MA = A$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

1) **Exemple :** on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$. Trouver l'ensemble des matrices Y $\in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AY - YA = A$.

2) Calculer $\text{tr}(A)$.

3) Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p M - M A^p$.

4) Calculer le polynôme caractéristique de A.

5) On suppose $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur X $\in \mathbb{K}^n$ tel que $(X, AX, \dots, A^{n-1}X)$ est une base de \mathbb{K}^n .

◇ [Rec03/eqmat-r3.tex/r3:288] 3)
4)
5) On trouve $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et on vérifie qu'il convient.

◆ **MAT.114** CCP PC – 2003

Résoudre l'équation $M^3 + I_n = 0$ où $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

◇ [Rec03/eqmat-r3.tex/r3:278] $GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_i \in \{-1, -j, -j^2\}$.

M est donc diagonalisable, donc $M = P^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P$ où $P \in$

◆ **MAT.115** Centrale MP – 2004

On considère l'équation d'inconnue $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$:

$$M^2 - (\text{tr } M)M + (\det M)I_n = 0_n. \quad (E_n)$$

Résoudre E_2, E_3 et puis E_n pour $n \geq 4$.

◇ [Rec04/eqmat-r4.tex/r4:242] direct soit en écrivant que M est jordanisable, ou plus simplement en remarquant que (E_2) n'est rien d'autre que $\chi_M(M) = 0$, ce qui est donné par Cayley-Hamilton.

(Déjà donné en 2003 : **MAT.112**)

Dans le cas $n = 2$, toutes les matrices marchent! On le voit soit par calcul

◆ **MAT.116** CCP PC – 2004

Déterminer les matrices carrées vérifiant $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$.

◇ [Rec04/eqmat-r4.tex/r4:31]

Cf. **MAT.104**, et donné en 2002 **MAT.108**.

- 1) Si X et $(X + I_2)$ étaient inversibles, alors leur produit le serait ce qui n'est pas vrai puisque A est de rang 1.
- 2) **On suppose X non inversible.** De $A = X(I_2 + X)$ on tire que $\text{Im } \Phi_A \subset \text{Im } \Phi_X$. De $A = (I_2 + X)X$ on tire $\text{Ker } \Phi_X \subset \text{Im } \Phi_A$. De plus, $\text{Ker } \Phi_X$ est de dimension 0, 1 ou 2 ; mais 0 ne convient pas car X non inversible, 2 ne convient pas car X n'est pas nul attendu que A ne l'est pas ; donc $\dim \text{Ker } \Phi_X = 1$ et donc $\dim \text{Im } \Phi_X = 1$ également. Puisque $\text{rg } A = 1$, on en déduit l'égalité des noyaux et des images. Enfin, A étant non nilpotente (manifestement !), on montre aisément que

$\mathbb{K}^2 = \text{Ker } \Phi_A \oplus \text{Im } \Phi_A$, on prend une base adaptée et miracle les matrices de Φ_X et Φ_A sont forcément proportionnelles vu qu'il n'y a qu'un seul coefficient non nul.

- 3) **Si $(X + I_2)$ n'est pas inversible**, on fait le même travail et on montre que $(X + I_2)$ est proportionnelle à A .

Puis on résume :

- a) Si X n'est pas inversible, $X = \alpha A$ et on doit résoudre $2\alpha^2 + \alpha = 1$ donc $\alpha = \frac{1}{2}$ ou $\alpha = -1$.

- b) Sinon $X = \alpha A - I_2$.

◆ **MAT.117**

(★)

Centrale PC – 2005

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \textcircled{0} & \ddots & \vdots \\ \textcircled{0} & & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Inverser A .
- 2) Déterminer le coefficient d'indice (i, j) de ${}^t A \cdot A$.
- 3) Résoudre l'équation ${}^t A A \cdot X = B$ d'inconnue $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

◇ [Rec05/eqmat-r5.tex/r5:54]

◆ **MAT.118**

Mines PC – 2005

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \textcircled{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \\ \textcircled{0} & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$.

◇ [Rec05/eqmat-r5.tex/r5:59]

On a alors $X^{2n} = 0$ donc X est nilpotente donc $X^n = 0$, ce qui prouve $A^m = 0$ avec $m = n/2$ ou $m = (n+1)/2$ selon la parité de n . Mais $m < n$

donc contradiction.

L'équation $X^2 = A$ n'admet aucune solution.

Déterminants

Généralités

◆ **DET.1** (**)
 On se place dans le corps $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse dans $GL_3(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$.

◇ [Divers/determinantexo.tex/det:3] corps donc $A^{-1} = (\det A)^{-1}t \text{com } A$ avec $1/3 = 5$.
 On calcule le déterminant : $\det A = 3 \neq 0$ donc inversible (car $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est un

◆ **DET.2 (Exercice astucieux)** (*)
 Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$.
 Soient $A \in \mathfrak{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{qp}(\mathbb{K})$. Alors $AB \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ et $BA \in \mathfrak{M}_q(\mathbb{K})$.
 Montrer que $(p \neq q) \Rightarrow (\det AB = 0 \text{ ou } \det BA = 0)$.

◇ [Divers/determinantexo.tex/det:6] et si $p < q$, c'est $\det BA$ qui est nul.
 On géométrise. Si $p > q$, puisque $\text{rg } AB \leq \min(p, q) < p$, on a $\det AB = 0$,

◆ **DET.3** (**)
 Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente telles que $AN = NA$; montrer que $\det(A + N) = \det A$.
 INDICATION : Montrer que $A^{-1}N$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure puis que, pour toute matrice M nilpotente, $\det(I_n + M) = 1$.

◇ [Divers/determinantexo.tex/det:7] **2° solution** — on a $\det(A + B) = \det A \det(I + A^{-1}B) = \det A \cdot \chi_{A^{-1}B}(-1)$, Or $\chi_{A^{-1}B}(-1) = \det A \det(I + A^{-1}N)$. Or N et $A^{-1}N$ commutent, et de plus $A^{-1}N$ est nilpotente, donc semblable à N' , donc $I + A^{-1}N$ est semblable à $I + N'$ de déterminant 1.
 ou le polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente est $(-X)^p$, donc $\det(A + B) = \det A$.

◆ **DET.4**
 Montrer que, si $A, B, C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $D \in GL_n(\mathbb{K})$, telles que $CD = DC$, on a

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)$$

 Que se passe-t-il si D n'est pas inversible ?

◇ [Divers/determinantexo.tex/det:8] Si D est non inversible, on utilise un argument de densité.
 On remarque que

$$\begin{vmatrix} A & B & | & D & \mathbb{O} \\ C & D & | & -C & D^{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ \mathbb{O} & I_n \end{vmatrix}$$

◆ **DET.5** (***)
 Soit $A = (A_{ij}) \in GL_n(\mathbb{K})$, on pose $b_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial A_{ji}} \ln |\det A|$. Montrer que la matrice $B = (b_{ij})_{ij}$ vérifie $B = A^{-1}$.

◇ [Divers/determinantexo.tex/det:8bis] On utilise la formule donnant l'inverse en fonction de la comatrice.

◆ **DET.6 (Étude de $\text{rg com}(A)$)** (*)
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Étudier le rang de $\text{com}(A)$ en fonction du rang de A .

◇ [Divers/determinantexo.tex/det:11] (L_1, \dots, L_{n-1}) le sont (quitte à changer l'ordre des lignes ou des colonnes).
 Si $\text{rg } A = n$ alors A est inversible donc de déterminant non nul. Par conséquent, la formule $A^t \text{com } A = \det A I_n$, montre que $\text{com } A$ est inversible, donc de rang n .
 Si $\text{rg } A = n - 1$, de $A^t \text{com } A = 0$ on déduit que $\text{Im } t^t \text{com } A \subset \text{Ker } A$ qui est de dimension 1, donc le rang de $\text{com } A$ est égal à 0 ou 1.
 De plus, on peut trouver $n - 1$ colonnes indépendantes dans A et de même $n - 1$ lignes indépendantes donc au moins un cofacteur de A est non nul. Pour le montrer, la manière élémentaire est la suivante. On suppose que les colonnes (C_1, \dots, C_{n-1}) sont indépendantes et de même que les lignes
 On note (C'_1, \dots, C'_{n-1}) la famille des colonnes dont on a enlevé le n -ième coefficient. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ une famille de scalaires telle que $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i C'_i = 0$.
 Puisque L_n est une combinaison linéaire des L_i , on peut écrire $L_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i L_i$.
 Alors clairement cela permet de compléter la relation précédente en $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i C_i = 0$, donc tous les λ_i sont nuls. Donc le mineur d'incide (n, n) est non nul.
 Si $\text{rg } A < n - 1$ alors $n - 1$ colonnes de A sont toujours liées, donc $B = 0$.

◆ **DET.7 (Comatrice d'une matrice triangulaire)**
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure. Que peut-on dire de $\text{com } A$?

◇ [Divers/determinantexo.tex/det:12] Triangulaire supérieure aussi, faire un dessin.

◆ **DET.8 (Argument de densité)** (***)
 Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
 1) Montrer que $\text{com}(AB) = \text{com}(A) \text{com}(B)$.
 2) En déduire que si A et B sont semblables, $\text{com } A$ et $\text{com } B$ le sont.

◇ [Divers/determinantexo.tex/det:13] La perturbation peut se faire en disant que l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ soient inversibles toutes deux est un ensemble dense (il y a au maximum un nombre fini de points où ce n'est pas vrai... puisque $\det(A - \lambda I_n)$ est un polynôme de degré exactement n en λ .)
 Sans problème si A et B sont inversibles, sinon on les perturbe un peu en ajoutant du εI à chacune (le même ε , c'est possible, et aussi petit qu'on veut.) Un argument de continuité permet de conclure.

◆ **DET.9** (♣)
 Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $M \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$. Montrer que $\det M = \det(A + iB) \det(A - iB)$.

◇ [Divers/determinantexo.tex/det:14] On manipule des blocs

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + iB & B \\ -B + iA & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + iB & B \\ \mathbb{O} & A - iB \end{vmatrix}$$

◆ **DET.10** (♣)
 Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $a_{ij} = (-1)^{i+j} b_{ij}$. Comparer $\det A$ et $\det B$.

◇ [Divers/determinantexo.tex/det:15] Dans le cas général, il faut changer le signe de m lignes (avec $m = n/2$ si n est pair et $(n - 1)/2$ si n est impair) et changer le signe de m colonnes. Donc le déterminant est multiplié par $(-1)^{2m} = 1$.
 On voit que les déterminants sont égaux pour $n = 2$ et pour $n = 3$ avec la règle de Sarrus.

◆ **DET.11**
 Dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , discuter et résoudre, suivant les valeurs des paramètres a, b, c, d le système

$$\mathcal{S} \begin{cases} x & + y & + z & = 1 \\ ax & + by & + cz & = d \\ a^2x & + b^2y & + c^2z & = d^2 \end{cases}$$

◇ [Divers/determinantexo.tex/det:18]

◆ **DET.12**
 Soient $a, b, c, d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. On pose

$$f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$$

 Montrer que f est dérivable et que

$$f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$$

 Généraliser à un déterminant $n \times n$, et calculer, si $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x + \alpha) & \sin(x + \alpha) \\ 1 & \cos(x + \beta) & \sin(x + \beta) \end{vmatrix}$$

◇ [Divers/determinantexo.tex/det:22] \mathbb{C}^{ls} , on l'a d'ailleurs en calculant $D(0) \dots$
 On a clairement, en posant $D(x)$ ce déterminant, $D'(x) = 0$, donc $D(x) =$

◆ **DET.13 (dét(M ↦ AM))** (***)
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de l'application $f_A : M \mapsto AM$.

◇ [Divers/determinantexo.tex/det:23] dans l'ordre E_{11}, E_{21}, \dots , et on note que la matrice de f est $A \otimes A \otimes \dots \otimes A$ et donc son déterminant est $(\det A)^n$.
 On se place dans une base convenablement choisie, la base canonique mais

◆ **DET.14** (**)
 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
 1) Calculer $\text{com}(\text{com } A)$ dans le cas où A est inversible.
 2) Si $\text{rg } A \leq n - 2$, montrer que $\text{com } A = 0$.
 3) Si $\text{rg } A = n - 1$, montrer que $\text{rg } \text{com } A = 1$.

3^e solution : on passe aux matrices, et on écrit que $A = PJ_rQ$, puis on écrit

$$J_r = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}\operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, -1, \dots, -1).$$

◆ DET.27 (Similitude dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$) (★★)
Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

- 1) On note R et J les uniques matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = R + iJ$. Justifier leur existence. On les note alors $R = \Re(M)$ et $J = \Im(M)$. Si on suppose que $M \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$, que peut-on dire de $\Re(M)$ et de $\Im(M)$?
- 2) Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$: il existe donc une matrice $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}BP$. On veut montrer qu'en fait A et B sont semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = Q^{-1}BQ$.
On note $R = \Re(P)$ et $J = \Im(P)$.
Montrer que $RA = BR$ et $JA = BJ$.
- 3) Montrer que, si $P \notin \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$, l'application $\psi : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ \lambda \mapsto \det(R + \lambda J) \end{cases}$ est une fonction polynomiale non nulle.
- 4) En déduire l'existence d'un nombre réel λ^* tel que $R + \lambda^*J \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$; conclure.
- 5) Application : montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

◆ [Divers/determinantexo.tex/det:26]

- 1) On ne peut certainement pas conclure que les parties réelle et imaginaire sont dans $\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$! (Prendre $M = I_n$ par exemple).
- 2) On écrit $PA = BP$ et on prend les parties réelle et imaginaire.
- 3) Fonction polynomiale de degré $\leq n$. Par ailleurs, $\psi(i) \neq 0$ donc ψ n'est pas une fonction polynomiale nulle.
- 4) ψ n'a pas une infinité de racines réelles ; on choisit donc $\lambda^* \in \mathbb{R}$ telle que $\psi(\lambda^*) \neq 0$.
- 5) Elles ont toutes les deux pour polynôme caractéristique $X^2 + 1$, qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$; elles sont donc diagonalisables dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ et sont semblables toutes deux à la matrice $\operatorname{diag}(i, -i)$: elles sont donc semblables dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. Le résultat de l'exercice prouve qu'elles sont semblables dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

◆ DET.28 (*)
Soit (a_1, \dots, a_n) une famille de scalaires. On pose $M(x) = (M_{ij}(x))_{ij}$ avec $M_{ij}(x) = a_i a_j - x \delta_{ij}$. Rechercher les conditions d'annulation du déterminant $\Delta(x) = \det(M(x))$.

◆ [Divers/determinantexo.tex/det:57]
On développe chaque colonne en $C_i + xE_i$, où E_i est la colonne élémentaire de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Ensuite, chaque colonne $C_i = a_i C$ avec $C = {}^t(a_1, \dots, a_n)$, donc chaque fois qu'il y a deux C ou plus, ça s'annule, il ne reste que

$$\Delta(x) = (-x)^n + (-x)^{n-1} \sum a_i^2.$$

On n'a annulation que pour $x = 0$ et $x = \sum_{i=1}^n a_i^2$.
Autre méthode : la matrice $A = (a_i a_j)_{ij}$ est de rang 1 donc 0 est de multiplicité $n - 1$; par ailleurs le vecteur ${}^t(a_1, \dots, a_n)$ est vecteur propre pour la valeur propre $\sum_{i=1}^n a_i^2$.

◆ DET.29 (*)
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On note B la matrice dont la i -ième colonne est la somme des colonnes de A d'indice différent de i . Calculer $\det B$ en fonction de $\det A$.

◆ [Divers/determinantexo.tex/det:58]
On note que $B = AM$ où $M = J_n - I_n$. Il faut donc calculer le déterminant de M . Or chaque ligne a la même somme, donc le vecteur ${}^t(1, 1, \dots, 1)$ est propre pour la valeur propre $n - 1$. Par ailleurs, les vecteurs ${}^t(1, -1, 0, \dots, 0)$ jusqu'à

${}^t(1, 0, \dots, 0, -1)$ sont propres pour la valeur propre -1 , donc le déterminant de M est $(-1)^{n-1}(n - 1)$. On en déduit que

$$\det B = (-1)^{n-1}(n - 1) \det A.$$

◆ DET.30 (Déterminant d'une matrice circulante) (*)
On considère la matrice circulante

$$C_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

Pour $k = 0, \dots, n - 1$, on pose $\omega_k = e^{2i\pi k/n}$ et on note Z_n la matrice de coefficients $Z_n = (Z_{ij})_{ij}$ avec $Z_{ij} = \omega_j^{i-1}$. Enfin, on note $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$.

- 1) Montrer que $C_n \cdot Z_n = Z_n \cdot \operatorname{diag}(P(\omega_0), \dots, P(\omega_{n-1}))$.
- 2) En déduire $\det C_n$.

◆ [Divers/determinantexo.tex/det:59] **2)** On a $\det C_n = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k)$ car $\det Z_n \neq 0$ (Vandermonde).

1) Calcul.

◆ DET.31
Soient $A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose que $A + kB \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{Z})$ pour $k = 0, \dots, 4$. Montrer que $A + B \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{Z})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
INDICATION : On commencera par montrer que, si $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$, alors $M \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det M \in \{-1, 1\}$.

◆ [Divers/determinantexo.tex/det:61]
On utilise le sens direct de l'indication pour commencer. Posons $P(\lambda) = \det(A + \lambda B)$, alors $P \in \mathbb{R}_2[X]$. De plus, P vaut 1 ou -1 sur cinq points, donc il existe au moins trois points sur lequel il a une valeur constante, donc P est constant égal à ± 1 .
On conclut avec la réciproque de l'indication.

◆ DET.32 (★★★)
Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que, pour $k \in [0; 2n]$, on a
$$A + kB \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{Z}).$$

1) Montrer que, pour tout $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$, on a $M \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) \in \{-1, 1\}$.
2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $A + kB \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{Z})$.

◆ [Divers/determinantexo.tex/div:23]
1) Utiliser la formule $M \cdot {}^t \operatorname{com} M = \det(M) I_n$ et le fait que les inversibles de \mathbb{Z} sont ± 1 et 1 .
2) On pose $P(X) = \det(A + XB)$, alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et prend les valeurs ± 1 en $2n + 1$ points ; notamment, il prend au minimum $n + 1$ fois la même valeur (1 ou -1), donc il est constant.
De plus, A est à coefficients entiers (prendre $k = 0$), et B aussi (prendre $k = 1$ et retrancher A).
Donc $A + kB$ est à coefficients entiers et à déterminant dans $\{-1, 1\}$.

◆ DET.33 (Un calcul sans complexes) (*)
Soient A et B deux matrices réelles carrées, telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$. Cette propriété subsiste-t-elle si A et B ne commutent pas ?

◆ [Divers/determinantexo.tex/det:62]
Si A et B commutent, alors $(A^2 + B^2) = (A + iB)(A - iB)$, donc $\det(A^2 + B^2) = |\det(A + iB)|^2 \geq 0$.
En revanche, en prenant $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de déterminant -1 .

◆ DET.34 (★★) Mines
Soient A et B deux matrices semblables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les transposées des comatrices de A et B sont aussi semblables.

◆ [Rec00/determinant-r0.tex/det-r:16]
On a $A {}^t \operatorname{com} A = {}^t \operatorname{com} A = \det A I_n$, donc si A est inversible, ${}^t \operatorname{com} A = A^{-1} \det A$.
* Si A est inversible et semblable à B , $\det A = \det B$ et A^{-1} est semblable à B^{-1} , donc pareil pour les comatrices.
* $A \mapsto {}^t \operatorname{com} A$ est une application continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ muni de la norme infinie par exemple, par continuité, on utilise une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices inversibles tendant vers A (densité de $\operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$).

◆ DET.35 (★★) Centrale MP – 2000
Soit $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice vérifiant : $\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \quad \det(C + X) = \det X$. Montrer que $C = 0$.

◆ [Rec00/determinant-r0.tex/det-r:5]
On a $\det(C - C) = \det(-C) = 0$ donc C n'est pas inversible. Si C est de rang r , alors on écrit $C = PJ_rQ$ avec $P, Q \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ ce qui montre que $\det(C + PJ'_{n-r}Q) = \det(PQ) \neq 0$ (car $J_r + J'_{n-r} = I_n$) et $\det(C + PJ'_{n-r}Q) = \det(PJ'_{n-r}Q)$ par la propriété invoquée, ce qui montre que J'_{n-r} est de déterminant non nul, donc $n = n - r$ et $r = 0$ (on a posé bien sûr $J_{n-r} = I_n - J_r$).

◆ DET.36 ICNA PC – 2001
Soient $x < y < z$ trois réels. Déterminer le signe de $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 1 & y & e^y \\ 1 & z & e^z \end{vmatrix}$.

◆ [Rec01/determinant-r1.tex/det-r:1]
On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, puis on écrit l'égalité des accroissements finis. Ou bien on se reporte à l'exercice **DET.24**.

◆ DET.37 CCP PC – 2001
Discuter et résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + (1 + a)z = 2(1 + a), \\ (1 + a)x - (1 + a)y + z = 0, \\ 2x + 2ay + 3z = 2(1 + a). \end{cases}$$

◇ [Rec01/determinant-r1.tex/det-r:2]

◆ **DET.38** CCP MP – 2001
Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix}$. Montrer que $\Delta \geq 0$.

◇ [Rec01/determinant-r1.tex/det-r:3] viale ! car \det n'est pas linéaire ; il faut effectuer une récurrence en PC...). Donc
On passe en complexe, et on montre par combinaisons que $\Delta = \det(A + iB) \det(A - iB)$. Or $\det(\tilde{M}) = \overline{\det M}$ (attention : ce n'est pas une propriété tri-

◆ **DET.39** CCP PC – 2001
Soit $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. Alors $\det M$ peut s'écrire sous la forme de la somme de 6 termes, chacun étant constitué du produit de trois coefficients. Montrer que, quelle que soit la répartition des signes des coefficients, au moins un des six termes est négatif.

◇ [Rec01/determinant-r1.tex/det-r:4] Le produit de ces termes est $-\prod_{i \neq j} a_{ij}^2 < 0$.

◆ **DET.40** (★★) Mines MP – 2002
On note $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(a, t) \mapsto e^{at} \cos at$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n(t) = \frac{\partial_1^n f}{e^{at} \cos at}$. Par exemple, $c_1(t) = t - \tan a$. On définit enfin la matrice $M_n \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ par $M_n = (c_{i+j}(t))_{i,j \in [0,n]}$. Calculer $\det M_n(t)$.
(Calculatrice autorisée).

◇ [Rec02/determinant-r2.tex/al-r:2:43] $c_n(t) = \mathcal{A}e \left(\partial_1^n e^{a(t+i)} \right) = \frac{1}{2} \left((t+i)^n e^{a(t+i)} + (t-i)^n e^{a(t-i)} \right)$.
 $\det M_n = 0$ pour $n \geq 3$. Pour montrer cela, on peut oublier la division par $e^{at} \cos a$ et passer en complexe. On a alors La matrice M_n est alors somme de deux matrices de la forme (z^{i+j}) (donc de rang 1) et M_n est de rang au plus 2.

◆ **DET.41** CCP MP – 2002
Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à p . Sans calculs, en raisonnant sur la dimensions de certains espaces vectoriels, montrer que le déterminant suivant est nul pour tout $x \in \mathbb{R}$ si $n > p + 1$:

$$\begin{vmatrix} P(x+1) & P(x+2) & \cdots & P(x+n) \\ P(x+2) & P(x+3) & \cdots & P(x+n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(x+n) & P(x+n+1) & \cdots & P(x+2n-1) \end{vmatrix}$$

◇ [Rec02/determinant-r2.tex/al-r:2:34] (a_i), telle que $\sum_{i=1}^n a_i P(y+i) = 0$, pour tout y dans \mathbb{R} . En particulier pour $y = x, x+1, \dots, x+n-1$, on en déduit que les colonnes de la matrices sont liées (par les mêmes coefficients) et donc le déterminant est nul.
Les n polynômes $P(X+1), \dots, P(X+n)$ vivent dans un espace de dimension $p+1 < n$, ils sont donc liés. Ainsi, il existe une famille non nulle de réels

◆ **DET.42** S' Cyr PC – 2002
(Avec Maple)
On pose

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x^n & (x+1)^n & \cdots & (x+n)^n \\ (x+1)^n & (x+2)^n & \cdots & (x+n+1)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x+n)^n & (x+n+1)^n & \cdots & (x+2n)^n \end{vmatrix}$$

Calculer (avec MAPLE) $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ et Δ_3 .
En déduire une conjecture sur Δ_n .

◇ [Rec02/determinant-r2.tex/al-r:2:14] $(-1)^{n(n+1)/2} V(0, 1, \dots, n) \prod_{k=0}^n C_n^k$.
On effectue quelques calculs, on voit que ça avance très vite, on songe à de la factorielle, mais ça n'est pas assez, donc de la factorielle à un certaine puissance, puis puissance n , puis puissance $n+1$ et là ça marche au signe près, on ajoute du $(-1)^{n(n+1)/2}$.
Si on note V le déterminant de Vandermonde, le résultat est
 $(-1)^{n(n+1)/2} V(0, 1, \dots, n)^2 \prod_{k=0}^n C_n^k$.
On calcule $D_n P^{-1} = ((x+i)^j)$ et donc
 $\Delta_n = (-1)^{n(n+1)/2} V(x, x+1, \dots, x+n) V(0, 1, \dots, n) \prod_{k=0}^n C_n^k$,
mais la formule de V montre que ça ne dépend pas de x , le résultat final est

$$\Delta_n = (-1)^{n(n+1)/2} (n!)^{n+1}.$$

L'idée consiste à remarquer que $(X^n, \dots, (X+n)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice de passage dans la base canonique P est (C_n^j, i^{n-j}) , son déterminant est

◆ **DET.43** ESIM PC – 2002
Prouver que toute matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme de la différence de deux matrices inversibles.

◇ [Rec02/determinant-r2.tex/det:53] terminant, il existe un voisinage de 0 sur lequel $I - \lambda A$ est toujours inversible. (Voir aussi les exercices MAT.42 page 105 et RNG.4 page 77.)
Notons λ_0 un tel réel. Alors $I - \lambda_0 A = B$ donc $A = \frac{1}{\lambda_0} (I - B)$ est bien somme de deux matrices inversibles.
1^{er} solution : $A = P J_r Q$, puis on écrit

$$J_r = \frac{1}{2} I_n + \frac{1}{2} \underbrace{\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)}_r.$$

2^e solution : $I - \lambda A$ est inversible pour $\lambda = 0$. Donc par continuité du dé-

◆ **DET.44** (★★) X PC – 2003
Soit A une matrice carrée nilpotente. Soit B une matrice inversible commutant avec A . Montrer que $\det(A+B) = \det(B)$.

◇ [Rec03/determinant-r3.tex/r3:342] plus $B^{-1}A$ est nilpotente, donc semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte A' , donc $I + B^{-1}A$ est semblable à $I + A'$ de déterminant 1.
On a $\det(A+B) = \det B \det(I + B^{-1}A)$. Or A et B^{-1} commutent, et de

◆ **DET.45 (Pfaffien)** Centrale MP – 2003
Soit M une matrice antisymétrique. Montrer qu'il existe une fonction f des coefficients $(m_{ij})_{ij}$ de M dont le carré vaut le déterminant. (Autre que $f = \sqrt{\det \dots}$)

◇ [Rec03/determinant-r3.tex/r3:334] Exercice très mal posé. Sans doute l'examineur veut-il un pfaffien ?

◆ **DET.46** (*) INT MP – 2003
Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $P(t) = \det(A + tB)$. Montrer que $\deg P \leq \text{rg } B$.

◇ [Rec03/determinant-r3.tex/r3:90] On choisit Q, R telles que $B = QJ_rR$ et $P(t) = C^{\text{le}} \cdot \det(C + tJ_r) \dots$

◆ **DET.47** CCP PC – 2003
Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $r = \text{rg}(B)$. Montrer que $\det(A - BX) \in \mathbb{C}_r[X]$.

◇ [Rec03/determinant-r3.tex/r3:231] On choisit Q, R telles que $B = QJ_rR$ et $\det(A - BX) = C^{\text{le}} \cdot \det(C - XJ_r)$.

◆ **DET.48** (*) École de l'Air PC – 2003
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Notons \tilde{A} la transposée de sa comatrice. Quelles sont les valeurs possibles pour $\text{rg } A + \text{rg } \tilde{A}$.

◇ [Rec03/determinant-r3.tex/r3:44] colonnes dont on a enlevé le n -ième coefficient. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ une famille de scalaires telle que $\sum \lambda_i C_i^j = 0$. Puisque L_n est une combinaison linéaire des L_i , on peut écrire $L_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i L_i$. Alors clairement cela permet de compléter la relation précédente en $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i C_i^j = 0$, donc tous les λ_i sont nuls. Donc le mineur d'incide (n, n) est non nul.
Si $\text{rg } A = n - 1$, de A^t com $A = 0$ on déduit que $\text{Im } A^t$ com $A \subset \text{Ker } A$ qui de dimension 1, donc le rang de com A est égal à 0 ou 1. De plus, on peut trouver $n - 1$ colonnes indépendantes dans A et de même $n - 1$ lignes indépendantes donc au moins un cofacteur de A est non nul. Pour le montrer, la manière élémentaire est la suivante. On suppose que les colonnes (C_1, \dots, C_{n-1}) sont indépendantes et de même que les lignes (L_1, \dots, L_{n-1}) le sont (quitte à changer l'ordre des lignes ou des colonnes). On note (C'_1, \dots, C'_{n-1}) la famille des
Si $\text{rg } A < n - 1$ alors $n - 1$ colonnes de A sont toujours liées, donc $B = 0$.
Au total, $\text{rg } A + \text{rg } \tilde{A} \in \{1, 2, \dots, n, 2n\}$.

◆ **DET.49** (★★) Centrale PC – 2004
Soit E un espace vectoriel de dimension n et \mathcal{E} une base de E . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'application f définie par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n).$$

- 1) On suppose qu'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$. Montrer que $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.
- 2) Montrer :

$$\sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, u(x_i), \dots, x_n) = \text{tr}(u) \cdot \det_{\mathcal{E}}(x)$$

en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$,

- a) dans le cas où x est liée ;
- b) dans le cas où x est libre.

◇ [Rec04/determinant-r4.tex/r4:33]

b) On écrit la matrice de u dans la base x , et on calcule plutôt

1) On suppose par exemple que $x_1 = x_2$. Il suffit donc de montrer que

$$\det(x_1, u(x_1), \dots) + \det(u(x_1), x_1, \dots) = 0$$

ce qui résulte de l'antisymétrie.

2) a) Conséquence de la première question.

$$\sum_{i=1}^n \det(x_1, \dots, u(x_i), \dots, x_n) = \text{tr}(u)$$

puis on complète avec la formule de changement de base.

◆ **DET.50** Mines PC – 2005

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit la matrice C_n par $C_{ij} = a_i + a_j$ pour $i \neq j$ et $C_{ii} = 0$. Calculer $\Delta_n = \det(C_n)$.

◇ [Rec05/determinant-r5.tex/r5:34]

◆ **DET.51 (Résultant de deux polynômes)** Centrale PC – 2005

1) Notons \mathcal{P} l'ensemble des polynômes homogènes de degré 4 :

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{i+j=4} c_{ij} U^i V^j ; c_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Calculer la dimension de \mathcal{P} .

2) On définit

$$q(U, V) = a_0 U^2 + a_1 UV + a_2 V^2 \quad \text{et} \quad c(U, V) = b_0 U^3 + b_1 U^2 V + b_2 UV^2 + b_3 V^3$$

et on définit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Montrer que si q et c admettent un zéro commun $(u, v) \neq (0, 0)$, alors $\det A = 0$.

INDICATION : On pourra montrer que la famille composée des vecteurs U^2q, UVq, V^2q, Uc, Vc n'engendre pas \mathcal{P} .

3) Réciproque ?

(La matrice A est le **matrice de Sylvester** des deux polynômes, ou encore le **résultant** de ces polynômes. On parle également de **déterminant de Sylvester** pour $\det A$.)

◇ [Rec05/determinant-r5.tex/r5:128]

◆ **DET.52** TPE PC – 2005

Soit A une matrice dont tous les coefficients sont dans $\{-1, 1\}$. Montrer que $\det A$ est divisible par 2^{n-1} .

◇ [Rec05/determinant-r5.tex/r5:37]

Calcul de déterminants

◆ **DET.53** (Z)

Calculer

$$D_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \textcircled{0} & & \lambda_n \\ & \ddots & \\ \lambda_1 & & \textcircled{0} \end{vmatrix}$$

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:2]

$(-1)^{n(n+1)/2}$ par des permutations ou une récurrence.

◆ **DET.54** (★★)

Soit $k \in [1, n-1]$, soient (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) deux familles de réels. On pose $M_{ij} = (x_i + y_j)^k$. Écrire la matrice $M = (M_{ij})_{ij}$ sous la forme d'un produit de deux matrices et calculer son déterminant.

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:54]

$\det M = 0$ et si $k = n-1$ on a

$$\text{On peut écrire } M = (x_i^{j-1})_{ij} \times (C_k^{i-1} y_j^{k-i+1})_{ij} \text{ donc si } k < n-1 \text{ on a} \quad \det M = \varepsilon_n C_{n-1}^0 C_{n-1}^1 \dots C_{n-1}^{n-1} V(x_1, \dots, x_n) V(y_1, \dots, y_n).$$

◆ **DET.55 (Factorisation de polynômes)**

Déterminer les cas d'annulation des déterminants suivants, puis les calculer :

$$1) \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} a & b & c & \dots & z \\ b & b & c & & z \\ c & c & c & & z \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \dots & z \end{vmatrix}$$

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:55]

$$1) (x-a_1) \dots (x-a_n)(x+a_1+\dots+a_n).$$

$$2) z(y-z)(x-y) \dots (a-b).$$

◆ **DET.56** (★★)

On note A la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont $A_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ pour $i, j \in [1, n]$.

Calculer $\det A$ et trouver l'inverse de A .

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:5]

On fait $\ell_1 \leftarrow \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n$, ce qui donne $\det A = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & (1) \\ (1) & \ddots & & 0 \end{vmatrix}$, puis $\ell_i \leftarrow \ell_i - \ell_1$ ce qui donne $\det A = (-1)^{n-1}(n-1)$.
On a ensuite en posant $B = A + I_n$ la relation $B^2 = nB$ donc $A^2 - (n-2)A = (n-1)I_n = A[A - (n-2)I_n]$ ce qui montre que $A^{-1} = \frac{1}{n-1}[A - (n-2)I_n]$.

◆ **DET.57**

On pose $a_{ij} = |i - j|$. Calculer $\det A$ avec $A = (a_{ij})$.

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:9]

3, ..., n, on met la colonne C_1 tout à droite, on développe par rapport à la première ligne et on trouve un déterminant triangulaire $\Delta = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.
On fait $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$ pour $j = 2, \dots, n$, puis $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$ pour $j =$

◆ **DET.58**

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & \dots & x_1+y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n+y_1 & \dots & x_n+y_n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} xy & x^2 & y^2 \\ x^2 & y^2 & xy \\ y^2 & xy & x^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a+b & b & \dots & b \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} s_1 & s_1 & s_1 & \dots & s_1 \\ s_1 & s_2 & s_2 & \dots & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \end{vmatrix}$$

avec $s_q \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 2 + \dots + q$

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:10]

trouve : $\Delta_n = a\Delta_{n-1} + b\delta_{n-1}$. Dans δ_n , on fait $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ et on trouve : $\delta_n = b\delta_{n-1}$, ce qui veut dire que $\delta_n = b^n$ et donc

Pour $n \geq 3$, $\Delta_2 = 0$ en manipulant des lignes et colonnes, mais si $n = 2$, il vaut $(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)$.

$$\Delta_3 = -(x^3 - y^3)^2.$$

Pour le quatrième, on pose Δ_n = le truc, et δ_n = le même truc sauf le coefficient (1, 1) qui est remplacé par b . Dans Δ_n , on fait $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ et on

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \quad \text{si } a \neq b.$$

♦ **DET.59 (Application de Vandermonde)** (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$ et on rappelle que l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = 1$ est l'ensemble $\mathcal{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega^k; k \in [0, n-1]\}$. On considère alors la matrice $\Omega_n = (\alpha_{ij})$ définie par

$$\alpha_{k,\ell} = \omega^{(k-1)(\ell-1)} \quad \text{pour } k, \ell = 1, \dots, n.$$

- 1) Soit $m \in \mathbb{Z}$. Calculer $s_m = \sum_{p=1}^n \omega^{m(p-1)}$. On séparera les cas $m \in n\mathbb{Z}$ et $m \notin n\mathbb{Z}$.
- 2) Calculer $\det(\Omega_n \cdot \overline{\Omega_n})$, en déduire $|\det \Omega_n|$.
- 3) Calculer $\det(\Omega_n^2)$.
- 4) En utilisant le déterminant de Vandermonde, montrer que

$$\det \Omega_n = \prod_{0 \leq k < \ell \leq n} (\omega^\ell - \omega^k).$$

- 5) Calculer $\sum_{0 \leq k < \ell \leq n} (k + \ell)$. (On rappelle que $\sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.)
- 6) Déduire de ceci la valeur de $\det \Omega_n$.

♦ [Divers/calcdetexo.tex/det:17]

- 1) $s_m = n$ si $m \in n\mathbb{Z}$, et 0 sinon.
- 2) $|\det \Omega| = n^{n/2}$.
- 3) $\det \Omega^2 = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} n^n$.
- 4) $\det \Omega = \prod_{0 \leq k < \ell \leq n} (\omega^\ell - \omega^k)$.
- 5) $\sum_{0 \leq k < \ell \leq n} (k + \ell) = \frac{n(n-1)^2}{2}$.
- 6) $\det \Omega = n^{n/2} e^{i(n-1)(3n-2)\pi/4}$.

♦ **DET.60 ($a_i + b_j$)** (*)

Soient (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) deux familles d'éléments de \mathbb{K} . On pose $A_{ij} = a_i + b_j$. Calculer $\det A$.

♦ [Divers/calcdetexo.tex/det:19] Par ailleurs, le coefficient de x^n est manifestement $(-1)^n$, donc $\Delta_n(x) = (-1)^n \prod_{p=0}^{n-1} (X - p)$.
 On effectue $C_i \leftarrow C_i - C_1$ puis $L_i \leftarrow L_i - L_1$. On trouve alors un déterminant nul si $n \geq 2$ et égal à $(a_2 - a_1) \cdot (b_1 - b_2)$ pour $n = 2$.

♦ **DET.61**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer les cas d'annulation du déterminant suivant, puis le calculer, en fonction de la valeur de x :

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1-x & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-x \\ (1) & & & & \end{vmatrix}$$

♦ [Divers/calcdetexo.tex/det:20] C'est un polynôme de degré n en x , et qui s'annule pour $x = 0, \dots, n-1$.
 Donc c'est $\alpha \prod_{p=0}^{n-1} (X - p)$.

♦ **DET.62 (Déterminant de Jacobi)** (★★)

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, et posons $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. On notera $\text{com } A = (\alpha_{ij})_{ij}$.

- 1) Montrer que $\det(A + \alpha U) = \det A + \alpha \sum_{i,j} \alpha_{ij}$.
- 2) En déduire, si $a, b, c \in \mathbb{K}$, la valeur du déterminant

$$D(a, b, c) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix},$$

en séparant les cas où $b = c$ et $b \neq c$.

♦ [Divers/calcdetexo.tex/det:21] (Cf. aussi exercice **DET.85** page 137.)
 Calcul essentiellement immédiat pour 1).
 □ On suppose $b = c$.
1^{re} méthode : alors on pose $A = (a-b)I_n$ et $\alpha = b$. Alors

$$\det(A + bU) = D(a, b, b) = (a-b)^n + b \sum_{i,j} a_{ij}.$$

On calcule les cofacteurs par la formule $A^t \text{com } A = (\det A)I_n$ ils valent tous $(a-b)^{n-1}$ sur la diagonale et 0 ailleurs, donc $\det A = (a-b)^n + bn(a-b)^{n-1}$.

2^e méthode : (utilisant la réduction). On note que les vecteurs de la forme $(0, \dots, 0, 1, -1)$ sont propres pour la valeur propre $(a-b)$ et il y en a $n-1$. Puisque le vecteur $(1, \dots, 1)$ est également propre pour la valeur propre $a + (n-1)b$, on a pu diagonaliser A et on enonait son spectre; le produit des valeurs propres (avec leur ordre de multiplicité) donne le déterminant, soit $(a-b)^{n-1} \cdot (a-b+nb)$, ce qui est identique. (Ouf.)
 □ On suppose $b \neq c$. On utilise $\det(A + \alpha U) = \det A + \alpha \cdot C^{\text{be}}$ est un polynôme du premier degré. On le calcule pour $\alpha = -b$, ce qui donne $P(-b) = (a-b)^n$, et pour $\alpha = -c$, ce qui donne $P(-c) = (a-c)^n$. Alors $\det A = P(0) = \frac{x(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$. On vérifie (par un DL) que cette expression a pour limite l'expression précédente quand $b \rightarrow c$.

♦ **DET.63** (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On pose $a_{i,j} = i + j - 1$ pour $i, j \in [1, n]$. Calculer $\det A$ où A est la matrice $A = (a_{ij})_{ij}$. Même question avec $B = (b_{ij})_{ij} = (a_{ij}!)_{ij}$.

♦ [Divers/calcdetexo.tex/det:25] On retire ℓ_2 à ℓ_3 et ℓ_1 à ℓ_2 , ce qui donne deux lignes identiques. Résultat nul.
 Pour B : mettre $k!$ en facteur dans C_k pour $k = 2, \dots, n$, puis effectuer $C_k \leftarrow C_k - C_{k-1}$ pour $k = 2, \dots, n$, puis encore une fois $C_k \leftarrow C_k - C_{k-1}$ pour $k = 2, \dots, n$. Mettre $(n-1)!$ en facteur, etc. en réitérant, ou bien poser une relation de récurrence.
 Alors $\det B = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (k!)^2$.

♦ **DET.64 (Déterminant de Jacobi)**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ une famille de n scalaires, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, avec $\alpha \neq \beta$. Calculer le déterminant

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta & \dots & \beta \\ \alpha & \gamma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \alpha & \dots & \alpha & \gamma_n \end{vmatrix}$$

INDICATION : On considérera le polynôme $P(X) = \det(A + XU)$ où J est la matrice $(1)_{i,j}$.

♦ [Divers/calcdetexo.tex/det:27] On montre $\deg P \leq 1$, on calcule $P(-\alpha)$ et $P(-\beta)$, cela donne P , et on en déduit $P(0)$:

$$D = \frac{\alpha \prod_i (\gamma_i - \beta) - \beta \prod_i (\gamma_i - \alpha)}{\alpha - \beta}.$$

♦ **DET.65**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant $\Delta_n = \det((a^{|i-j|})_{ij})$.

♦ [Divers/calcdetexo.tex/det:28] On développe bêtement sur la première ligne, et on trouve $\Delta_n = \Delta_{n-1} - a^2 \Delta_n + 0 + \dots + 0$, donc $\Delta_n = (1 - a^2)^{n-1}$.

♦ **DET.66**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) deux familles de scalaires. Calculer le déterminant de la matrice de terme général $A_{ij} = \delta_{ij} + a_i b_j$.

♦ [Divers/calcdetexo.tex/det:30] linéarité, s'écrit sous la forme de n^2 termes, qui sont tous nuls sauf les suivants :

$$\Delta = \det(e_1, \dots, e_n) + \det(a_1 B, e_2, \dots, e_n) + \dots + \det(e_1, \dots, e_{n-1}, a_n B)$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^n a_i \det(e_1, \dots, B, \dots, e_n) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

♦ **DET.67**

Calculer le déterminant

$$\Delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$$

en établissant une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1} .

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:31]

obtenir une relation de récurrence $\Delta_n = (x-1)\Delta_{n-1} + (-1)^n(1-x)^{n-1}$ ce qui doit donner quelque chose du genre $\Delta_n(x) = (x-1)^n(x-(n-3))$.
Le polynôme s'annule en $x=1$ et avec la multiplicité $(n-1)$. On peut aussi

◆ **DET.68 (Déterminant de Cauchy $1/(a_i + b_j)$)** (***)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) deux familles de scalaires vérifiant : $a_i + b_j \neq 0$ pour tout $i, j \in [1, n]$. On pose $a_{ij} = 1/(a_i + b_j)$ pour $i, j \in [1, n]$ et $A = (a_{ij})_{ij}$. Calculer $D_n = \det A$.

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:32]

par antisymétrie du déterminant, et donc

$$D_n = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \dots & R(b_n) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \dots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & \dots & 0 & R(b_n) \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne pour avoir

$$D_n = \frac{R(b_n)}{\lambda_n} D_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(b_n - b_i)(a_i - a_n)}{(b_n + b_i)(a_n + b_i)} D_{n-1},$$

et une récurrence simple, amorcée avec $D_1 = 1/(a_1 + b_1)$, donne

$$S_n = \frac{\prod_{i < j} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i,j} (a_j + b_i)}$$

Si les a_i ne sont pas distincts deux à deux, le déterminant est nul.

Supposons-les distincts deux à deux. On peut écrire

$$R(X) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(b_1 - X) \dots (b_{n-1} - X)}{(C + a_1) \dots (C + a_n)} = \frac{\lambda_1}{X + a_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{X + a_n},$$

avec

$$\lambda_k = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (b_j + \alpha_k)}{\prod_{j=1}^n (a_j - \alpha_k)} \neq 0.$$

Si on note (L_1, \dots, L_n) les lignes de D_n , alors on peut écrire

$$D_n = \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{n-1} \\ L_n \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{n-1} \\ \sum_{i=1}^n L_i \end{vmatrix}$$

◆ **DET.69 (Une application de Vandermonde)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une famille de scalaires. Calculer le déterminant de la matrice $A = (\text{sh}(\alpha_i + \alpha_j))_{ij}$.

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:33]

◆ **DET.70 (Une application de Vandermonde)** (*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une famille de scalaires. Calculer le déterminant de la matrice $A = (\cos((i-1)\alpha_j))_{ij}$ en le mettant sous la forme d'un déterminant de Vandermonde.

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:34]

On sait que $\cos((i-1)\alpha_k)$ est un polynôme en $\cos \alpha_k$ de degré $(i-1)$ et de terme de plus haut degré $2^{i-2} \cos^{i-1} \alpha_k$. Par multilinéarité et alternance, il reste

le déterminant de Vandermonde de la famille $\cos \alpha_i$, multiplié par $2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2^{n-2}$.

$$D = 2^{(n-1)(n-2)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \alpha_j - \cos \alpha_i).$$

◆ **DET.71 (Une application de Vandermonde)** (***)

Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $A = (P(i+j))_{ij} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. En développant $P(i+j)$ grâce à la formule de Taylor, écrire A comme un produit de deux matrices. En déduire la valeur de $\det A$.

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:35]

On peut écrire

$$A_{ij} = P(i+j) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(i)}{k!} j^k$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[P^{(k-1)}(i) \right] \dots \left[\frac{j^{k-1}}{(k-1)!} \right]$$

ce qui montre que $A = B \cdot C$ avec $B_{ij} = P^{(j-1)}(i)$ et $C_{ij} = \frac{j^{i-1}}{(i-1)!}$.

Pour calculer $\det B$, on effectue $C_i \leftarrow C_i - C_{i+1}$; une récurrence permet de calculer...

Quant à $\det C$, il suffit de sortir les facteurs $1/2!, 1/3!, \dots, 1/n!$, et on reconnaît une matrice de Vandermonde.

On obtient *in fine*, en notant α le coefficient dominant de P :

$$\det A = (-1)^{E(n/2)} ((n-1)! \alpha)^n.$$

◆ **DET.72** (♣)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det A$ en fonction de n .

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:44]

On développe par rapport à la première ligne, et on trouve 0 si n est pair et 2

si n est impair.

◆ **DET.73** (♣)

Que vaut $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$?

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:45]

◆ **DET.74**

Pour chacune des matrices suivantes, calculer $\det A$, $\text{rg } A$ et, si A est inversible, A^{-1} :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 8 & -9 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:46]

$\det A_1 = 10$ et $A^{-1} =$

◆ **DET.75 (Système linéaire)**

Discuter et résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 3x & -y & +z & = a, \\ x & +y & -z & = b, \\ -x & +2y & +z & = c. \end{cases}$$

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:47]

Déterminant 12 donc inversible : il n'existe qu'une solution.

◆ **DET.76 (Escarminant)** (*)

1) Quelle est l'action, du point de vue du déterminant, de l'application qui à une matrice M associe la matrice « tournée de $\pi/2$ » ?

$$A = \begin{pmatrix} \spadesuit & \dots & \heartsuit \\ \vdots & & \vdots \\ \clubsuit & \dots & \diamondsuit \end{pmatrix} \xrightarrow{\circlearrowleft} A \stackrel{\text{def}}{\circlearrowleft} = \begin{pmatrix} \clubsuit & \dots & \spadesuit \\ \vdots & & \vdots \\ \diamondsuit & \dots & \heartsuit \end{pmatrix}$$

2) Calculer l'escarminant

$$E_1 = (1) \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 1 & \dots & \dots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:56]

1) Pour passer de A à A° , il faut transposer la matrice (ce qui ne modifie pas le déterminant) puis échanger la colonne i avec la colonne $n - i$ pour $i = 1, \dots, E(n/2)$ où $E(\cdot)$ désigne la partie entière. Donc $\det A^\circ = (-1)^{E(n/2)} \det A$.

2) En développant selon la dernière ligne, on voit que $E_n = (-1)^{n+1} E_{n-1}$, où E'_{n-1} est l'escaraminant tourné de $-\pi/2$. En développant E_n par rapport à la première colonne, on obtient $E_n = E_{n-1}^\circ = (-1)^{E((n-1)/2)} E_{n-1}$.

Donc

$$E_n = (-1)^{\sigma_n} \quad \text{avec} \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n-1} E(k/2).$$

Or σ_n est pair sauf si $n \equiv 3 \pmod{4}$, donc

$$E_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

◆ DET.77 (★★)

Calculer le déterminant de Zorro :

$$Z_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad Z_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad Z_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

◇ [Divers/calcdetexo.tex/det:60]

Soustrayons la première colonne à l'avant-dernière puis la dernière colonne à la deuxième. Il vient

$$Z_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rapport à l'avant-dernière. On obtient ainsi que

$$\det Z_n = (-1)^{n+2} (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = -(-1)^{E(n/2-2)} = (-1)^{E(n/2-1)}$$

Développons ensuite successivement par rapport à la deuxième colonne puis par $n - 2 - i$ pour $i = 2, \dots, E(n/2 - 1)$.

◆ DET.78 (★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

1) Montrer que $P_n = X^n - X + 1$ admet n racines complexes deux à deux distinctes. On les notera z_1, \dots, z_n .

$$2) \text{ Calculer le déterminant } \Delta_n = \begin{vmatrix} 1+z_1 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1+z_n \end{vmatrix}.$$

◇ [Divers/calcdetexo.tex/div:53]

1) On scinde P en notant z_1, \dots, z_n ses racines.
 ► Supposons que l'une des racines, notées z , soit au moins double. Alors $P_n(z) = P'_n(z) = 0$, donc $z^n - z + 1 = 0$ et $n z^{n-1} - 1 = 0$. Alors $z^n = z/n$, donc $z/n - z + 1 = 0$ donc $z = \frac{n}{n-1}$. Ce qui montre que $|z| > 1$, or $|z^{n-1}| = \frac{1}{n} < 1$: **contradiction.** ◀

2) Notons $U = {}^t(1, \dots, 1)$ la colonne de 1 et (E_1, \dots, E_n) la base cano-

nique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Alors en développant

$$\Delta_n = z_1 \cdots z_n + z_2 \cdots z_n + z_1 z_3 \cdots z_n + \dots + z_1 \cdots z_{n-1} = \sigma_n + \sigma_{n-1}$$

en notant σ les fonctions symétriques élémentaires. On sait de plus que $\sigma_n = (-1)^n$ et $\sigma_{n-1} = -(-1)^{n-1} = (-2)^n$. Ainsi, $\Delta_n = 2(-1)^n$.

◆ DET.79 (Perturbation de rang 1) (★★)

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\text{rg}(H) = 1$. Montrer que

$$\det(A + H) \det(A - H) \leq (\det(A))^2.$$

◇ [Divers/calcdetexo.tex/div:54]

On commence par montrer que la propriété est vraie si $H = E_{11}$. En effet, $\det(B + H) = \det B + \det(B_{11})$, où B_{11} est le cofacteur de b_{11} dans B .

De même, $\det(B - H) = \det B - \det(B_{11})$.

$$\text{Alors } \det(B + H) \det(B - H) = (\det B)^2 - (\det B_{11})^2 \leq (\det B)^2.$$

Enfin, on écrit que $H = PE_{11}Q$ et on applique à $B = P^{-1}AQ^{-1}$.

◆ DET.80 (★★★)

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}^n$. Montrer que

$$\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)}{\prod_{1 \leq j < i \leq n} (i - j)}$$

est un entier. On évaluera pour cela le déterminant de la matrice de coefficient général $m_{ij} = \binom{x_j}{i-1}$.

◇ [Divers/calcdetexo.tex/div:55]

On commence par calculer

$$\binom{x_j}{i-1} = \frac{x_j(x_j-1) \dots (x_j-i+2)}{(i-1)!} = \frac{x_j^{i-1}}{(i-1)!} + \text{puissances inférieures.}$$

Par multilinéarité du déterminant, on obtient alors

$$\det(M) = \frac{1}{1!2! \dots (n-1)!} V(x_1, \dots, x_n),$$

où l'on a noté $V(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de Vandermonde. Puisque M est à coefficients entiers, on en déduit que $\det M$ est un entier. Enfin, on finit par $1!2! \dots (n-1)! = \prod_{1 \leq j < i < n} (i-j)$.

◆ DET.81 (★)

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$. Calculer le déterminant de la matrice de coefficients $m_{ij} = 1 + \delta_{ij} \alpha_i$.

◇ [Divers/calcdetexo.tex/div:128]

$$\alpha_1 \cdots \alpha_n + \sum_i \alpha_1 \cdots \widehat{\alpha_i} \cdots \alpha_n.$$

◆ DET.82 (CCP MP – 2002)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 \cos \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos(n\alpha).$$

◇ [Rec02/calcdet-r2.tex/al-r2:23]

Par récurrence. Le résultat est vrai pour $n = 1, 2$. Pour $n \geq 2$, en développant par rapport à la dernière colonne, il vient

$$D_{n+1} = 2 \cos \alpha D_n - D_{n-1},$$

les formules de trigonométrie font le reste.

◆ DET.83 (CCP PC – 2002)

Soient x, a_0, \dots, a_n des réels.

Calculer
$$\begin{vmatrix} a_n & \dots & \dots & a_0 \\ 1 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & x \end{vmatrix}.$$

◇ [Rec02/calcdet-r2.tex/al-r2:13]

Effectuer une récurrence. Ou alors pour éviter les calculs ($x = 0$ pour simplifier), on remarque que si l'on transpose la matrice, l'endomorphisme associé u vérifie $u^k(e_n) = e_{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$ si (e_i) est la base cano-

nique et $u(e_0) = u^{n+1}(e_n) = a_n e_0 + \dots + a_0 e_n$. On vérifie alors que $(-1)^n (X^{n+1} - a_n X^n - \dots - a_0)$ est annulateur minimal, c'est donc le polynôme caractéristique...

◆ DET.84 (S¹ Cyr MP – 2002)

On pose $P(x) = \begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & & \\ a_1 & a_2 & x & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$ où les coefficients a_i sont des complexes. Calculer $P(a_1), \dots, P(a_n)$. Déterminer une

expression de $P(x)$ en étudiant la fraction rationnelle

$$\frac{P(X)}{(X - a_1) \cdots (X - a_n)}.$$

◇ [Rec02/calcdet-r2.tex/rl-r2:15]

P est un polynôme unitaire de degré n . Par combinaison de lignes,

$$P(a_i) = a_i \prod_{j \neq i} (a_i - a_j).$$

On en déduit

$$P(x) = \prod_{j=1}^n (x - a_j) + \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j \neq i} (x - a_j).$$

En supposant les a_i tous distincts, la fraction rationnelle a pour pôles les (a_i) et comme $\deg P = n$, elle se décompose sous la forme $1 + \sum \frac{b_i}{x - a_i}$ avec

Le cas général est le même par continuité.

$$b_i = \frac{P(a_i)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)} = a_i.$$

◇ [Rec04/calcdet-r4.tex/r4:129]

◆ **DET.85 (Déterminant de Jacobi)** (★) Mines PC – 2003

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On pose

$$D(a, b) = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

et $\psi(x) = D(a + x, b + x)$. Calculer $D(a, b)$.

◇ [Rec03/calcdet-r3.tex/r3:115]

(Cf. aussi exercice **DET.62** page 131.)

On montre que $\deg \psi \leq 1$, par exemple en retranchant L_1 à toutes les lignes. On obtient donc $\psi(x) = \alpha x + \beta$ donc $\psi(-b) = (a - b)^n = -b\alpha + \beta$. Posons $B = (a - b) I_n$, alors $A(a, b) = B + bJ$ et $D(a, b) = (a - b)^n + b \sum_{i,j} (\text{com } A)_{ij}$;

or tous les cofacteurs non diagonaux sont nuls, et les autres valent $(a - b)^{n-1}$, donc

$$D(a, b) = (a - b)^n + bn(a - b)^{n-1}.$$

On peut aussi mettre des c à la place des b au-dessus de la diagonale, calculer $D(a, b, c)$ pour tout $c \neq b$, puis prendre la limite $c \rightarrow b$ en utilisant la continuité du déterminant !

◆ **DET.86** TPE PC – 2003

Soient a, b, c, d quatre complexes. Calculer

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix}.$$

◇ [Rec03/calcdet-r3.tex/r3:78]

◆ **DET.87** TPE MP – 2003

Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 + x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 + x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & x & 1 + x^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1 + x^2 \end{vmatrix}.$

◇ [Rec03/calcdet-r3.tex/r3:96]

◆ **DET.88** CCP PC – 2003

Calculer $D_n = \begin{vmatrix} a & & \textcircled{0} & \cdots & x \\ & a & \ddots & & \vdots \\ \textcircled{0} & & a & x & \textcircled{0} \\ & x & & \ddots & \\ x & \ddots & \textcircled{0} & & a \\ & & & & & a \end{vmatrix}.$

◇ [Rec03/calcdet-r3.tex/r3:378]

◆ **DET.89** (★★) Centrale PC – 2004

On définit la matrice A de coefficients $a_{ij} = 1 + 2 + \cdots + \min(i, j)$. Calculer $\det(A)$.

Diagonalisabilité d'endomorphismes et de matrices

Polynômes d'endomorphismes

◆ **DIA.1** (♣) Centrale MP – 2003
 Si P est un polynôme vérifiant $P(0) \neq 0$ et $P(A) = 0$, alors A est inversible.

◇ [Divers/polendoexo.tex/red:01]
 On a $P = \sum_{k=1}^n \alpha_k X^k$ donc $\sum_{k=1}^n \alpha_k A^k = -\alpha_0 I_n$ donc $A \left(-\frac{1}{\alpha_0} \sum_{k=1}^n \alpha_k A^{k-1} \right) = I_n$ et A est donc inversible.

◆ **DIA.2** (♣) CCP MP – 2003
 Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $x \in E$, on pose

$$F_u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n ; \exists P \in \mathbb{R}[X], y = P(u)(x)\}.$$

Montrer que, pour tout $x \in E$, $F_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de E stable par u.

◇ [Divers/polendoexo.tex/red:30] T.

◆ **DIA.3 (Sous-espace caractéristique)** (★) Mines PC – 2004
 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **sous-espace caractéristique** associé à λ le s.e.v.

$$F_\lambda(f) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^n.$$

Montrer que $E_\lambda(f) \neq \{0\} \Leftrightarrow F_\lambda(f) \neq \{0\}$. Montrer que $F_\lambda(f)$ est stable par f.

◇ [Divers/polendoexo.tex/red:02] (★) Soit maintenant $x \in F_\lambda(f)$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(f - \lambda \text{Id})^n(x) = 0$, donc $(f(x) - \lambda x) \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^{n-1}$, ce qui peut s'écrire sous la forme

$$(f - \lambda \text{Id})^{n-1}(f(x) - \lambda x) = 0$$

On a $n \geq 1$ puisque $x \neq 0$. Alors $(f - \lambda \text{Id})^n(x) = 0$ mais $(f - \lambda \text{Id})^{n-1}(x) \neq 0$. On pose donc $y = (f - \lambda \text{Id})^{n-1}(x)$, donc $y \neq 0$ et $y \in E_\lambda(f)$ donc $E_\lambda(f) \neq \{0\}$. □

donc, en composant par $(f - \lambda \text{Id})$ on a, en tenant compte du fait que $x \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^n$:

$$(f - \lambda \text{Id})^n(f(x)) = 0$$

donc $f(x) \in F_\lambda(f)$. □

◆ **DIA.4** (♣) TPE MP – 2002
 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Montrer que l'ensemble

$$C(x; f) \stackrel{\text{def}}{=} \{P(f)(x) ; P \in \mathbb{K}[X]\}$$

est stable par f.

◇ [Divers/polendoexo.tex/red:25] $f(x) = (XP)(f)(x)$.
 Soit $y \in C(x; f)$. Il existe un polynôme P $\in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(f)(x)$. Alors

◆ **DIA.5** (★) TPE MP – 2002
 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et D :

$$\begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ P \longmapsto P' \end{array}$$

◇ [Rec02/polendo-r2.tex/red-r2:6] On a $D^n = 0$ et $D^{n-1}(X^{n-1}) \neq 0$ donc le polynôme minimal est X^n .

◆ **DIA.6** (♣) Centrale MP – 2003
 On se place dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ muni de sa topologie habituelle. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. On considère $\mathcal{E}_P = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) ; P(M) = 0\}$. On cherche les points isolés de \mathcal{E}_P .

- 1) Soit $M \in \mathcal{E}_P$. Montrer qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de 0 tel que

$$\forall H \in \mathcal{V} \quad (I_n + H)M(I_n + H)^{-1} = M.$$

- 2) En déduire que M commute avec tous les éléments de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ puis que M est une homothétie. Donner une propriété sur son rapport.
- 3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Construire une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda I_n$ et $(M_k - \lambda I_n)^2 = 0$.
 En déduire que, si $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$, alors λI_n n'est pas un point isolé de \mathcal{E}_P .
- 4) On suppose $P(\lambda) = 0$ et $P'(\lambda) \neq 0$. Montrer que λI_n est un point isolé de \mathcal{E}_P .

◇ [Rec03/polendo-r3.tex/r3:250]

◆ **DIA.7 ($u \circ v - v \circ u = \text{Id}$)** (★) CCP MP – 2003
 Soit E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie non nulle. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, deux endomorphismes non nuls tels que $u \circ v - v \circ u = \text{Id}_E$.

- 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u \circ v^n - v^n \circ u = n v^{n-1}$.
- 2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Calculer $u \circ P(v) - P(v) \circ u$.
- 3) En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphismes u et v tels que $u \circ v - v \circ u = \text{Id}_E$.

◇ [Rec03/polendo-r3.tex/r3:317] phisme admet au moins un polynôme minimal.
 (Cf. exercice **RTH.6** page 201)

1) Une simple récurrence.
 2) Par linéarité : $P(u) \circ v - v \circ P(u) = P'(u)$.
 3) Si P est un polynôme minimal annulateur de u, alors $P'(u) = 0$ or $\deg P' < \deg P$: contradiction. Or en dimension finie tout endomor-

Remarque : en prenant la trace de cette expression, on avait $0 = \text{tr}(\text{Id}) = \dim E$ et donc contradiction.
Remarque 2 : en dimension infinie, on peut ainsi trouver des endomorphismes n'admettant pas de polynôme minimal (prendre par exemple $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et les opérateurs position et impulsion).

◆ **DIA.8** (★) Mines PC – 2004
 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - 3u + 2\text{Id}_E = 0$.

- 1) Exprimer u^n en fonction de u et Id_E .
- 2) Montrer que $E = \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$.

◇ [Rec04/polendo-r4.tex/r4:89] $u^n = X^n(y) = R^n(u) = (2^n - 1)u + (2 - 2^n)$.

- 1) On écrit $X^n = Q_n(X - 2)(X - 1) + R_n$, on obtient $R(1) = 1$ et $R(2) = 2^n$ donc
- 2) Il suffit de décomposer $x = (u(x) - x) - (u(x) - 2x)$.

Éléments propres

◆ **DIA.9 (Classique)** (★) TPE MP – 2002
 Soient p et n deux entiers non nuls, $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = I_n$, et ω une racine p-ième de l'unité dans \mathbb{C} telle que $\omega^{-1} \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \omega^k A^k = 0.$$

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:1] Or $\omega^{-1} \notin \text{Sp} A$ donc $1 \notin \text{Sp}(\omega A)$ donc $0 \notin \text{Sp}(I - \omega A)$ donc $(I - \omega A)$ est inversible.
 Puisqu'il faut calculer une somme $\sum M^k$ avec $M = \omega A$, on pense bien sûr à la formule du seigneur des anneaux !

$$(I_n - \omega A) \sum_{k=0}^{p-1} \omega^k A^k = I_n - \omega^p A^p = 0.$$

◆ **DIA.10** (♣) TPE MP – 2002
 On pose $E = \mathbb{K}[X]$ et on pose f :

$$\begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ P \longmapsto XP' \end{array}$$

Quels sont les éléments propres, le noyau et l'image de f ?

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:2] Le noyau est donc $\mathbb{K}_0[X] = \langle X^0 \rangle$. L'image de f est l'ensemble des polynômes dont le coefficient constant est nul.
 On suppose $XP' = \lambda P$. Alors, si on pose $q = \deg P$, on a en égalant le coefficient dominant : $q = \lambda$. Les autres coefficients doivent être nuls, donc $P = X^q$.

◆ **DIA.11** (♣)
Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Peut-on affirmer que AB et BA ont au moins un vecteur propre commun ?

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:3] Certainement pas.

◆ **DIA.12 (Hors-programme PC)** (**)
Soit E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie et *impaire*. Montrer qu'il existe au moins une droite *et* un hyperplan de E qui sont stables par f .

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:4]
Le polynôme caractéristique est de degré impair, il possède donc une valeur propre réelle (et de multiplicité égale à 1 si l'on veut, même, en poussant un peu les choses.) Il existe donc un $x \in E, x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. Alors $\mathbb{R}x$ est stable par f .
Pour avoir l'hyperplan, on considère l'endomorphisme ${}^t f \in \mathcal{L}(E^*)$, dont le polynôme caractéristique admet aussi une valeur propre réelle λ et donc un vecteur de E^* propre, c'est-à-dire une forme linéaire $\phi \neq 0$ telle que ${}^t f(\phi) = \lambda \phi$, soit encore $\phi \circ f = \lambda \phi$.
On pose maintenant $H = \text{Ker } \phi$ et montrons que H est stable par f .
□ Soit $x \in H$. Alors $\phi(x) = 0$ et $\phi(f(x)) = \phi \circ f(x) = \lambda \phi(x) = 0$, ce qui montre que $f(x) \in H$. □
 H est bien un hyperplan stable par f .

◆ **DIA.13 (AM = λM)** (♣)
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Quels sont les $\lambda \in \mathbb{K}$ et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AM = \lambda M$?

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:14] Valeurs propres, et matrices formées de vecteurs de l'espace propre associé.

◆ **DIA.14** (**)
On note $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, espace vectoriel des fonctions continues sur $[0; 1]$. Pour tout $f \in E$, on définit la fonction $F : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \in]0; 1] \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que $F \in E$ et que l'application $\phi : f \mapsto F$ est un endomorphisme de E . Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ .

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:40]
Soit f un vecteur propre de ϕ , alors $F = \lambda f$ donc $\int_0^x f = \lambda x f(x)$ soit, en dérivant, $f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x)$, ce qui donne
$$f(x) = \frac{\lambda}{1-\lambda} x f'(x),$$

dont on trouve les solutions en $x \mapsto \alpha x^p$ pour $p = \frac{1-\lambda}{\lambda}$, et pour $\lambda \neq 1$ on pose $f(0) = 0$ et pour $\lambda = 1$ ce sont les fonctions constantes ; ce sont les seules solutions pour une équation linéaire homogène de degré 1. Ainsi, tout réel $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est valeur propre associée au vecteur propre $x \mapsto x^p$.

◆ **DIA.15** (*)
Soit $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les produits

$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & \mathbb{O} \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ \mathbb{O} & -xI_p \end{pmatrix},$$

montrer que A^tA et tAA ont même valeurs propres non nulles, avec le même ordre de multiplicité. En déduire également que $\text{rg } A^tA = \text{rg } {}^tAA$

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:37]
On note U la première matrice ; en prenant le déterminant du premier produit, on obtient : $(-1)^n \det U = \chi_{A^tA}$; en prenant le déterminant du second produit,

on obtient $x^p \det U = (-x)^n \chi_{{}^tAA}$. Donc, par égalité : $\chi_{{}^tAA} = \chi_{A^tA} X^{p-n}$. On en déduit que les valeurs propres non nulles sont égales. La multiplicité de 0 peut en revanche varier si $p \neq n$.

◆ **DIA.16** (*)
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 invariants par A .
- Déterminer le noyau et l'image, ainsi que les éléments propres de A .
- Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- On suppose $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Calculer le déterminant de A . Reconnaître l'endomorphisme associé.

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:46]
On vérifie que $A^2 = (a^2 + b^2 + c^2)A$, donc A est la composée d'une homothétie et d'une projection.

◆ **DIA.17 (Sp(u ◦ v) = Sp(v ◦ u))** (*)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que λ est valeur propre de $u \circ v$ si et seulement si λ est valeur propre de $v \circ u$.

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:47]
Une solution élémentaire :
Tout d'abord, c est évident si $\lambda = 0$ (au moins l'un de u et v est non inversible).
On suppose donc $\lambda \neq 0$. Soit x un vecteur propre pour $u \circ v : u \circ v(x) = \lambda x$.
Puisque $\lambda x \neq 0$; on en déduit $v(x) \neq 0$. On compose par u :
$$v \circ u(v(x)) = \lambda v(x)$$

donc $v(x)$ est vecteur propre de $v \circ u$ pour la valeur propre λ !
Une solution moins élémentaire :
On sait que $\text{Id} - u \circ v$ est inversible si et seulement si $\text{Id} - v \circ u$ l'est. (Démonstration dans les exercices **ALG.57** et **RNG.1**, **DIA.21** et **LIN.17**, cf. plus bas).
On suppose λ valeur propre de $u \circ v$. Alors $\lambda \text{Id} - u \circ v$ n'est pas inversible donc $(\text{Id} - \lambda^{-1}u \circ v)$ non plus donc $\text{Id} - \lambda^{-1}v \circ u$ non plus donc $\lambda \text{Id} - v \circ u$ non plus donc λ est valeur propre de $v \circ u$.
D'où l'égalité des valeurs propres *non nulles*.
Maintenant, si 0 est valeur propre, alors $u \circ v$ non inversible, donc au moins l'un des deux u ou v est non inversible, donc $v \circ u$ est non inversible, et 0 est valeur propre de $v \circ u$.
D'où l'égalité de toutes les valeurs propres.

Montrons maintenant le résultat annoncé en début de la solution moins élémentaire.
Première démonstration, dans le cas fini (démonstration linéaire).
Montrons que : $\text{Id} - fg$ non inversible $\Rightarrow \text{Id} - gf$ non inversible.

□ On suppose que $\text{Id} - fg$ est non inversible, donc non injective, donc il existe $x \in E, x \neq 0$ tel que $(\text{Id} - fg)(x) = 0$ donc $f(g(x)) = x$. On pose $y = g(x)$, alors $y \notin \text{Ker } f$ car $x = f(y)$. On obtient donc $f \circ g \circ f(y) = f(y)$ donc $f[g \circ f(y) - y] = 0$ donc $g \circ f(y) - y \in \text{Ker } f$.
On peut donc écrire $y = g \circ f(y) + k$, avec $k \in \text{Ker } f$ et donc
$$\underbrace{y - k}_{z} = g \circ f(y) = g \circ f(\underbrace{y - k}_{z}),$$

avec $z \stackrel{\text{def}}{=} y - k \neq 0$, et donc $z = g \circ f(z)$, soit encore $(\text{Id} - g \circ f)(z) = 0$ donc $\text{Id} - g \circ f$ non inversible. □
En échangeant les rôles de f et g , on prouve la réciproque, et par contraposition la propriété demandée.

Autre démonstration (purement algébrique)
Notons $u = (\text{Id} - f \circ g)^{-1}$. Alors $(\text{Id} - f \circ g) \circ u = \text{Id}$ c'est-à-dire
$$u = f \circ g \circ u + \text{Id}.$$

Notamment,
$$(\text{Id} - g \circ f) \circ (\text{Id} + g \circ (\text{Id} - f \circ g)^{-1} \circ f) = \text{Id} - g \circ f + g \circ u \circ f - g \circ \underbrace{f \circ g \circ u \circ f}_{u - \text{Id}} = \text{Id}.$$

Ce qui prouve que $(\text{Id} - g \circ f)$ est inversible.

◆ **DIA.18** (***)
Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel complexe E . On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $u \circ v = au + bv$. Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:65]

◆ **DIA.19** (*)
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)$ admette -1 comme valeur propre double et 3 comme valeur propre simple.

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:43]
Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ alors $P(\lambda) \in \text{Sp}[P(A)]$, or on veut que $\text{Sp}[P(A)]$ contienne -1 et 3. On calcule $\chi_A = (1 - X)(X^2 - 2X - 9)$ de racines 1 et $1 \pm \sqrt{10}$. On va donc chercher P qui prenne la valeur 3 en 1 et la valeur -1 en $1 \pm \sqrt{10}$. Par le résultat de Lagrange, on sait qu'il existe une unique solution de degré ≤ 2 .
On pose donc $P = ax^2 + bx + c$, avec $a + b + c = 3$ et $a(11 + \varepsilon\sqrt{10}) + b(1 + \varepsilon\sqrt{10}) + c = -1$, c'est-à-dire $11a + b + c = -1$ et $2a + b = 0$. On trouve
$$P = \frac{1}{5}(-2X^2 + 4X + 13), \quad \text{et } P(A) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -13 & 40 & -112 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & -10 & 23 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $\chi_{P(A)} = (1 + X)^2(3 - X)$.

◆ **DIA.20 (Localisation du spectre)** (**)
On pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$
On suppose que $a_i > |b_i| + |b_{i-1}|$ pour tout $i \in [1; n]$, en posant $b_0 = b_n = 0$. Montrer que toutes les valeurs propres de M vérifient $0 < \lambda < 2 \sup_{i \in [1; n]} a_i$.

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:51]
 M est symétrique donc admet ses valeurs propres réelles. On note λ l'une d'elles et $X = (x_i)$ un vecteur propre associé.
On note i un indice tel que $x_i = \|X\|_\infty$ (indice d'Hadamard). Alors $x_i > 0$ quitte à changer X en $-X$. Alors
donc $|a_i - \lambda| \cdot |x_i| \leq (|b_{i-1}| + |b_i|) |x_i|$
et comme $x_i > 0$ $|a_i - \lambda| \leq |b_{i-1}| + |b_i|$
ce qui montre $|a_i - \lambda| < a_i$ donc $0 < \lambda < 2a_i$ et, notamment :

$$(a_i - \lambda)x_i = -b_{i-1}x_{i-1} - b_ix_{i+1}, \quad \boxed{0 < \lambda < 2 \sup_{j \in [1, n]} a_j}.$$

◆ **DIA.21** ($\text{Sp}(fg) = \text{Sp}(gf)$) (♣)
 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $\text{Id} - f \circ g$ est inversible, alors

$$(\text{Id} - g \circ f) \circ (\text{Id} + g \circ (\text{Id} - f \circ g)^{-1} \circ f) = \text{Id}.$$

En déduire que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:66]
Une solution élémentaire :
 Tout d'abord, c'est évident si $\lambda = 0$ (au moins l'un de u et v est non inversible). On suppose donc $\lambda \neq 0$. Soit x un vecteur propre pour $u \circ v : u \circ v(x) = \lambda x$. Puisque $\lambda x \neq 0$, on en déduit $v(x) \neq 0$. On compose par u :

Notamment,

$$(\text{Id} - g \circ f) \circ (\text{Id} + g \circ (\text{Id} - f \circ g)^{-1} \circ f) = \text{Id} - g \circ f + g \circ u \circ f - \underbrace{g \circ f \circ g \circ u \circ f}_{u - \text{Id}} = \text{Id}.$$

$x \circ v(v(x)) = \lambda v(x)$
 donc $v(x)$ est vecteur propre de $v \circ u$ pour la valeur propre λ !
Une solution moins élémentaire :
 Cf. aussi les exercices **DIA.17**, **ALG.57** page 32, **RNG.1** page 77 et **LIN.17** page 67.

Ce qui prouve que $(\text{Id} - g \circ f)$ est inversible.
 On suppose λ valeur propre de $f \circ g$. Alors $\lambda \text{Id} - f \circ g$ n'est pas inversible donc $(\text{Id} - \lambda^{-1} f \circ g)$ non plus donc $\text{Id} - \lambda^{-1} g \circ f$ non plus donc $\lambda \text{Id} - g \circ f$ non plus donc λ est valeur propre de $g \circ f$.
 D'où l'égalité des valeurs propres *non nulles*.
 Maintenant, si 0 est valeur propre, alors $f \circ g$ non inversible, donc au moins l'un des deux f ou g est non inversible, donc $f \circ g$ est non inversible, et 0 est valeur propre de $g \circ f$.
 D'où l'égalité de toutes les valeurs propres.

◆ **DIA.22** (***)
 Soient $A, B, C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ avec $C \neq 0$ telles que $AC = CB$. Montrer que A et B ont au moins une valeur propre en commun.

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:69]
1^{re} méthode : On note que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A) \cdot C = C \cdot P(B)$. De plus, il existe un polynôme P annulateur de B ; prenons même le polynôme minimal. Alors $P(B) = 0$ donc $P(A) \cdot C = 0$. Ainsi, $\text{Im } C \subset \text{Ker } P(A)$. Or, puisque $C \neq 0$, on en déduit que $\text{Im } C \neq \{0\}$ donc $\text{Ker } P(A) \neq \{0\}$. Autrement dit, $\text{Sp}(A) \cap \text{Zero}(P) = \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) \neq \emptyset$.
 On a utilisé le

$$P(A) = (A - \alpha_1 \text{Id}) \circ \dots \circ (A - \alpha_n \text{Id}).$$

Alors il y a équivalence entre les énoncés :
 (a) $P(A)$ injectif ou bijectif;
 (b) chaque produit est bijectif;
 (c) $\alpha_i \notin \text{Sp}(A)$ pour tout $i \in [1; n]$.

LEMME 1 *Dans \mathbb{C} , si $\text{Ker } P(A) \neq \{0\}$, alors $\text{Sp}(A) \cap \text{Zero}(P) \neq \emptyset$.*
 Démonstration : On scinde P dans \mathbb{C} :

◆ **DIA.23** (**Tt vecteur propre de A l'est pour ${}^t \text{com } A$**) (★★)
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $B = {}^t \text{com } A$. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B .

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:70]
 Si $\text{rg } A = n - 1$, alors $AB = BA = (\det A)I_n = 0$ donc $\text{Im } B \subset \text{Ker } A$ donc $\text{rg } B = 1$ et $\text{Im } B = \text{Ker } A$.
 Soit $X \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. Si $\lambda \neq 0$ on peut écrire

$$BAX = BAX = (\det A)IX = (\det A)X,$$
 ce qui nous permet d'écrire

$$BX = \frac{\det A}{\lambda} X.$$

 Si $\lambda = 0$, alors $A \notin \text{GL}_n(\mathbb{C})$ donc on peut considérer deux cas.
 - Si $\text{rg } A = n - 1$ alors de $X \in \text{Ker } A = \text{Im } B$ qui est de dimension 1 donc $BX \propto X$.
 - Si $\text{rg } A < n - 1$ alors $B = 0$ et tout vecteur est vecteur propre de B .

◆ **DIA.24** (**Endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$**) (★)
 On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On définit $f \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\forall u \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (f(u))_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n^2}.$$

Déterminer l'ensemble des valeurs propres de f .

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:78]
 Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un vecteur propre : $v = f(u) = \lambda u$.
 Si $u_1 \neq 0$, on a $v_1 = u_1 = \lambda u_1$ donc $\lambda = 1$; en construisant un u_1 intelligemment, on voit que $\lambda \in \text{Sp}(f)$.
 Si $u_1 = 0$ mais $u_2 \neq 0$, on a $v_2 = \frac{1}{2}u_2 = \lambda u_2$ donc $\lambda = \frac{1}{2}$; par ailleurs on

construit u_2, \dots
 Et ainsi de suite : le spectre de f est donc

$$\text{Sp}(f) = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

◆ **DIA.25** (***)
 Posons $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ et $u : E \rightarrow E$

$$f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt. \right)$$

Déterminer les éléments propres de f .

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:79]
 Posons $F = u(f)$. On a bien sûr

$$F(x) = \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt.$$

Cela montre que F est de classe \mathcal{C}^1 . Donc si f est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda \neq 0$, f est nécessairement de classe \mathcal{C}^2 et le raisonnement précédent montre qu'en fait f est de classe \mathcal{C}^∞ .
 Bon, calculons sa dérivée, on trouve

Si $\lambda > 0$, une solution est de la forme $f_\lambda : x \mapsto A \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$. On a

$$f'_\lambda(1) = \frac{A}{\sqrt{\lambda}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

La condition limite les valeurs de λ , puisqu'on doit avoir, pour éviter $A = 0$,
 $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \in \pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}$, soit

$$\lambda = \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}^*$$

(en fait, \mathbb{N}^* suffit).

$$\forall x \in [0; 1] \quad F'(x) = \int_x^1 f(t) dt,$$

ce qui montre que f vérifie l'équation différentielle $\lambda f'' + f = 0$. Le cas $\lambda = 0$ n'apporte aucune solution. De plus, on a clairement $F(0) = 0$ donc, si $\lambda \neq 0$, $f(0) = 0$. Les solutions de cette équation différentielle sont donc de la forme

Si $\lambda < 0$, un raisonnement similaire montre que si $g_\lambda = A \text{sh}\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right)$, sa dérivée vérifie $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \text{ch}\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right)$ et ne peut donc s'annuler nulle part, et donc en particulier pas en 1.
 Ainsi le spectre de u est

$$\text{Sp}(u) = \left\{ \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}, k \in \mathbb{N}^* \right\},$$

si λ est positif, et

$$f(x) = A \sin \frac{x}{\sqrt{\lambda}},$$

si λ est un nombre négatif.

Cependant, l'expression de la première dérivée montre que $u'(f)(1) = 0$, donc de même si f est vecteur propre, $f'(1) = 0$.
 Ce genre de condition en deux endroits différents engendre fréquemment une discrétisation du spectre, rendant certaines valeurs impossibles.

l'espace propre associé à $\lambda > 0$ est

$$E_\lambda = \left\{ A \sin \frac{x}{\sqrt{\lambda}} ; A \in \mathbb{C} \right\}.$$

◆ **DIA.26** (★)
 On note $E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$, $B = X^4 - X$ et ϕ l'application qui, à tout $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B . Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer les éléments propres de ϕ .

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:85]

◆ **DIA.27** (★★)
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est libre. Montrer que $\text{tr } A = 0$.

◇ [Divers/spectreexo.tex/red:89]
1^{re} solution : le polynôme $X^n - 1$, scindé simple, annule A , qui est donc diagonalisable. De plus, ses valeurs propres sont toutes des racines n -ièmes de l'unité. Par ailleurs, si la famille (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est libre, les racines sont distinctes. En effet, il y a équivalence entre les énoncés :

(a) (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est libre ;
 (b) (I_n, D, \dots, D^{n-1}) est libre ;
 (c) $((\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k))_{k=0, \dots, n-1}$ est libre ;

(d) $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$;
 (e) tous les λ_i sont distincts.
 Par conséquent les valeurs propres de A sont très exactement les racines n -ièmes de l'unité, dont la somme est réputée valoir 0.
2^e solution : le polynôme $X^n - 1$, scindé simple, annule A , qui est donc diagonalisable. Donc $\chi_A(A) = 0$. Or $\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)I_n$. On applique à A , on remplace A^n par I_n et on utilise la liberté de la famille odnnée ; on obtient la nullité de la plupart des coefficients, dont $\text{tr } A$.

◆ **DIA.28**
 On note $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$. Déterminer les éléments propres de la matrice $X^t X$.

◇ [Divers/spectreexo.tex/div:44]
 On suppose que $X \neq 0$, sans quoi $M = X^t X = 0$ et c'est trivial.
 C'est une matrice de rang 1, ce qui prouve que 0 est de multiplicité au moins égale à $n - 1$. On trouve comme éléments propres les $n - 1$ vecteurs suivants, en notant j un indice de $[1; n]$ tel que $x_j \neq 0$:

On remarque enfin que X lui-même est vecteur propre associé à la valeur propre ${}^t X \cdot X = \text{tr}(M) \neq 0$ puisque X est non nul.
 Au total, on a donc pu trouver une base d'éléments propres de M .

$$\text{ligne } j \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1/x_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ x_2/x_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n/x_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

◆ **DIA.29** (*)

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$.
- 2) En déduire que A est inversible.
- 3) Déterminer le spectre de A .

◆ [Divers/spectreexo.tex/r0:50]

1) On a $A = J - I$ donc $A^2 = J^2 - 2J + I = J + I$ ce qui montre que $A^2 - A - 2I = 0$: on pose donc $P = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$.

2) Les valeurs propres de A sont dans les racines de P , donc $0 \notin \text{Sp}(A)$.

3) $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 2\}$. Par ailleurs A est diagonalisable (P est scindé à racines simples), le spectre de A est non vide (dimension 3 impaire), et A ne saurait avoir une seule valeur propre (sans quoi, étant diagonalisable, elle serait scalaire, donc $\text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$).

◆ **DIA.30** (**)

Soit $a > 0$. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^3 + aA^2 + 4A + aI_n = 0$. Que peut-on dire de la trace de A ?

◆ [Divers/spectreexo.tex/div:196]

Cf. exercice **POL.99** page 54. Toutes les valeurs propres complexes de A ont une partie réelle strictement négative, les valeurs propres complexes sont conjuguées deux à deux donc $\text{tr}(A) < 0$.

◆ **DIA.31** (**)

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 - 3A + 4I_n = 0$. Déterminer le signe de $\det A$.

X PC - 2005

◆ [Rec00/spectre-r0.tex/red:166]

Un polynôme annulateur de A est $X^3 - 3X + 4 = (X - \lambda)(X - \mu)(X - \bar{\mu})$, où λ est une racine réelle $\lambda < 0$. On en déduit que $\det(A) = \lambda^p \cdot (\mu\bar{\mu})^{2q}$, où $p = n - 2q$. Ainsi, $\det A$ est du signe de $(-1)^p = (-1)^n$: $\text{sgn}(\det A) = (-1)^n$.

◆ **DIA.32 (Spectre dans un espace fonctionnel)** (***)

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $p \in]0; 1[$; on pose $q = 1 - p$. On définit alors $u : E \rightarrow E$ par $u(f) : x \mapsto f(px + q)$.

- 1) Étudier les suites définies par $x_0 \in \mathbb{R}$ et la relation $x_{n+1} = px_n + q$.
- 2) Montrer que les valeurs propres de u sont dans $] -1; 0[\cup]0; 1[$.
- 3) Soit λ une valeur propre de u telle que $\lambda \neq 1$. Soit f un vecteur propre associé. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$. Qu'en déduit-on sur f ?
- 4) Caractériser les éléments propres de u .

Mines MP

◆ [Rec00/spectre-r0.tex/red:103]

1) Un petit dessin et l'étude classique : $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

2) $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Si $u(f) = 0$, alors $f = 0$, donc 0 n'est pas valeur propre de u .
- Soit λ une valeur propre de u , f un vecteur propre associé et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Alors $u(f)(x_0) = \lambda f(x_0) = f(px_0 + q) = f(x_1)$, et par récurrence immédiate $f(x_n) = \lambda^n f(x_0)$. Or $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(1)$ par continuité de f , donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n f(x_0) = f(1)$.

Or si $|\lambda| > 1$ ou si $\lambda = -1$, la suite $(\lambda^n f(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge ; on en déduit que $\lambda \in] -1; 1[$.

- Au total, les valeurs propres de u sont dans $] -1; 0[\cup]0; 1[$.

3) Soit λ est une valeur propre (et il y en a : clairement 1 est valeur propre pour les fonctions $f = Cx$) et f un vecteur propre associé.

□ On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} \neq 0$. Or $u(f^{(k)}) = \lambda p^{-k} f^{(k)}$ ce qui montre que λ/p^k est valeur propre, et ce pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{p^k} = +\infty$, ce qui contredit le résultat précédent. □

On en déduit que f est une fonction polynomiale.

4) u induit donc sur $\mathbb{R}[X]$ un endomorphisme qui préserve le degré. Il induit donc sur $\mathbb{R}_n[X]$ un automorphisme ; sa matrice dans la base canonique est triangulaire supérieure, avec pour éléments diagonaux $1, p, p^2, \dots, p^n$. Cette matrice est donc diagonalisable (son polynôme caractéristique est scindé simple). Les espaces propres sont de dimension 1 et engendrés par $(X - 1)^k$ pour la valeur propre p^k :

$$(pX + q - 1)^k = p^k (X - 1)^k.$$

Au total, les valeurs propres sont $\{p^k ; k \in \mathbb{N}\}$ et l'espace propre associé à p^k est $\text{Vect} \{x \mapsto (x - 1)^k\}$.

◆ **DIA.33 (Un lemme de commutation)** (*)

Soit E un \mathbb{C} -e.v. de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que f et g commutent.

- 1) Montrer que tout espace propre pour f est stable par g .
- 2) Montrer qu'il existe un vecteur propre commun à f et g .

ENSI

◆ [Rec00/spectre-r0.tex/red:29]

2) f admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. L'espace $V = E_\lambda(f)$ est stable par g . Donc $g|_V$ est un endomorphisme de V , il admet une valeur propre, et il convient.

1) Cours.

◆ **DIA.34** (**)

On considère E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie égale à n , et on pose

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f \longmapsto f + (\text{tr } f) \text{Id}_E. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de ϕ . Calculer son déterminant, sa trace, son inverse.

Mines

◆ [Rec00/spectre-r0.tex/red:15]

On prend la base $(E_{ij})_{ij}$ ou, plus exactement, celle des endomorphismes dont les matrices dans une base donnée sont les (E_{ij}) , que l'on range ainsi : d'abord les matrices diagonales, puis les autres. Alors

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} \phi = \begin{pmatrix} I_n + J_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & I_{n(n-1)} \end{pmatrix}$$

où J est une matrice dont tous les coefficients valent 1.

On est donc ramenés à l'étude de la matrice $I_n + J_n$. On s'aperçoit que le vecteur ${}^t(1, 1, \dots, 1)$ est vecteur propre pour la valeur propre $n + 1$. Par ailleurs X est vecteur propre de $I + J$ avec la valeur propre λ si et seulement si X est vecteur propre de J pour la valeur propre $\lambda - 1$. Or on sait que $\dim \text{Ker } J = n - 1$ donc 1 est valeur propre de multiplicité $n - 1$ et on prend comme vecteur propres les $(1, -1, 0, \dots, 0)$ jusqu'à $(1, 0, \dots, 0, -1)$ par exemple. On a donc diagonalisé $I + J$.

Le reste est diagonal.

En résumé : les valeurs propres sont 1 (multiplicité $n - 1 + n^2 - n = n^2 - 1$), avec les vecteur propres susdits plus les E_{ij} avec $i \neq j$; et $n + 1$ avec le vecteur propre I_n . Le déterminant vaut donc $\det \phi = n + 1$ et la trace $\text{tr } \phi = n^2 + n = n(n + 1)$.

Enfin, on a besoin de l'inverse de $(I + J)$. Par expérience, on le sait de la forme $I_n + \alpha J_n$, on injecte et on trouve $\alpha = -(n + 1)^{-1}$. On obtient donc la matrice de f^{-1} et par analogie avec la première, cela donne

$$\phi : f \mapsto f - \frac{\text{tr } f}{n + 1} \text{Id}.$$

On peut également remarquer que, dans la base canonique rangée dans cet ordre astucieux, la matrice est symétrique donc diagonalisable.

◆ **DIA.35** (**)

On pose $E = \mathbb{K}_n[X]$, et on définit l'application

$$u : P \mapsto u(P) = -a(X - b)P' - nP.$$

Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$, et déterminer les éléments propres de u .

Mines

◆ **DIA.36**

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & n \end{pmatrix}$. Montrer que les valeurs propres de A sont dans $]0; 1[$, $]1; 2[$, \dots , $n - 1$; $+\infty[$.

CCP MP - 2000

◆ **DIA.37**

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n - 1 & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n - 1 & n \\ 1 & 2 & 0 & \dots & n - 1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n - 1 & n \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que les valeurs propres de A sont réelles et vérifient $\sum_{k=1}^n \frac{k}{\lambda + k} = 1$.
- 2) Calculer la somme et le produit des valeurs propres, ainsi que la somme des carrés des valeurs propres.
- 3) On note R_n la plus grande des valeurs propres. Montrer que $R_n \sim Cn^2$, où C est une constante à déterminer.

Centrale MP - 2000

◆ **DIA.38** (***)

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Que dire de son spectre ? Réciproque ?

X PC - 2005

◊ [Rec00/spectre-r0.tex/r0:38] Si M nilpotente, $\text{Sp}(M) \subset \{0\}$; de plus M n'est pas inversible donc $0 \in \text{Sp}(M)$. Moralité : $\text{Sp}(M) = \{0\}$.
 Si $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \{0\}$, on ne peut rien dire, comme le montre l'exemple

$M = \begin{pmatrix} 0 & \\ & R_\theta \end{pmatrix}$ où R_θ est une matrice de rotation.
 Si $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$, on trigonalise M qui est alors sous forme PTP⁻¹ et T triangulaire supérieure stricte, donc T est nilpotente et M aussi.

◆ **DIA.39 (Localisation du spectre)** ENS Cachan MP – 2001
 Soit $F \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont la diagonale est nulle. Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et soit $\lambda \in \text{Sp}(F + D)$.

- 1) Montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|\lambda - \lambda_i| \leq \sum_{j=1}^n |F_{ij}|$.
- 2) Soit $X \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, on pose $A = XDX^{-1}$. Prouver qu'il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ne dépendant que de X , tel que $\forall E \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(A + E) \quad \exists \mu \in \text{Sp}(A) \quad |\lambda - \mu| \leq k \|E\|$.

◊ [Rec01/spectre-r1.tex/red-r:21] ◆ **DIA.40** (★) CCP PC – 2001
 Donner le rang de la famille $(\cos^3, \cos^2 \sin, \cos \sin^2, \sin^3)$. Donner le spectre de l'endomorphisme $f \mapsto f'$ restreint au sous-espace vectoriel engendré par cette famille.

◊ [Rec01/spectre-r1.tex/ev:79] Φ ne saurait avoir de valeur propre réelle : en effet, si $f' = \lambda f$ alors Grâce, par exemple, à un DL en 0, on montre que cette famille est de rang 4. $f : x \mapsto e^{\lambda x} + K$.
 De plus, si on note $\Phi : E \rightarrow E, f \mapsto f'$, on calcule que

$$\text{mat}_B \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

◆ **DIA.41** Centrale PC – 2001
 Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$, on considère la matrice réelle $M_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & & \\ \vdots & & \textcircled{0} & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que 0 est valeur propre et donner son ordre de multiplicité.
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$, on définit $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ par : $a_n \leq b_n \leq c_n$ et a_n, b_n et c_n sont les trois valeurs propres non nulles de M_n . Montrer que a_n, b_n et c_n sont solutions de $x^2 - x - 1 - \frac{1}{x-1} = n - 2$.
- 3) Donner un équivalent de a_n et c_n lorsque $[n \rightarrow \infty]$. Montrer que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.

◊ [Rec01/spectre-r1.tex/red-r:12] ◆ **DIA.42** ENS UL MP – 2002
 Soit $n \geq 2$. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, de spectre $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ avec $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$.
 On note $B(z) = (b_{ij}(z)) = (\text{Id} - zA)^{-1}$ quand cela est possible (on l'appelle la **résolvante** de A).

- 1) Montrer que $b_{ij}(z)$ est une fraction rationnelle en z . Étudier ses pôles et donner une information sur le degré du numérateur.
- 2) ...

◊ [Rec02/spectre-r2.tex/red-r2:49] On trouve $b_{ij}(z) = \frac{f_{ij}(\text{Id} - zA)}{\prod_{k=1}^r (1 - \lambda_k z)^{m_k}}$ où $f_{ij}(M)$ est le mineur (déterminant de la matrice privé de la ligne i et de la colonne j).

◆ **DIA.43 (CNS pour Card(Sp f) = n)** (★) Centrale MP – 2002
 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E .

◊ [Rec02/spectre-r2.tex/red-r2:39] On choisit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ diagonalisante, associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
 On note génériquement $x = \sum \alpha_i e_i$. Alors $\det(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod V_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
 donc est non nul si et seulement si tous les λ_i sont distincts et tous les α_i sont non nuls.
 Ainsi la condition nécessaire et suffisante recherchée est $\text{Card}(\text{Sp} f) = n$. Un vecteur x possible est un vecteur quelconque ne faisant pas partie de n hyperplans (chacun étant d'équation $\alpha_i = 0$), par exemple $x = \sum_{i=1}^n e_i$.

◆ **DIA.44** (★) CCP MP – 2002
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A - I_n = 0$.

- 1) Montrer que $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \leq |\det A| \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
- 2) Trouver l'ensemble des matrices A et en donner le nombre de classes d'équivalence (pour la relation de similitude).

◊ [Rec02/spectre-r2.tex/red-r2:3] Le polynôme $P = X^2 - X - 1$ étant scindé simple, et annulant A , la matrice A est diagonalisable, de plus $\text{Sp}(A) \subset \{\rho', \rho\}$ où $\rho = (1 + \sqrt{5})/2$ est le nombre d'or et $\rho' = 1/\rho$ la seconde racine. Donc $\det A = \rho'^p \rho^{n-p}$ où $p = \text{mult}(\rho', A)$.
 2) Il y a essentiellement $n + 1$ types de matrices.

◆ **DIA.45** Mines PC – 2002
 On définit la matrice $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j \text{ pair} \\ 0 & \text{si } i - j \text{ impair} \end{cases}$

Calculer les valeurs propres de A et donner la dimension des espaces propres.

◊ [Rec02/spectre-r2.tex/red-r2:5] Si on note $J = (\delta_{ij} + i + 1(2n))$, on vérifie que $A = \sum_{k=0}^{n-1} J^{2k}$. J est diagonalisable : tout ses valeurs propres sont simples et sont $\{e^{k\pi/n}; k = 0 \dots 2n - 1\}$, les valeurs propres de A sont donc n avec multiplicité 2 et 0 avec multiplicité $2n - 2$.

◆ **DIA.46** Centrale PC – 2002
 (Avec Maple) On pose $S_0 = 1, S_1 = X$ et, pour tout entier $p \geq 2$: $S_p = \prod_{k=0}^{p-1} (X + 2k)$.

- 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(S_p)_{0 \leq p \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Afficher, à l'ordinateur, les polynômes S_p pour p variant de 1 à 10.
- 3) On note $f(P)(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(-2n)}{n!} x^n$ (★)
 - a) Montrer que $f(P)(x)$ existe pour tout polynôme P et tout réel x .
 - b) Afficher à l'ordinateur les valeurs de $f(S_p)(x)$ pour p allant de 1 à 10.
 - c) Montrer que (*) induit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- 4) Trouver les valeurs propres de l'endomorphisme f .

◊ [Rec02/spectre-r2.tex/red-r2:30] 1) Ce sont des polynômes échelonnés.
 2) Et puis quoi encore !
 a) Par linéarité, il suffit de le faire pour les monômes X^k : on vérifie que les séries convergent normalement.
 b) On calcule $f(S_p)(x) = (-1)^p 2^p x^p$.
 c) Clair par linéarité et le fait que (S_p) est une base.
 3) Les valeurs propres sont $\{(-2)^p; p \in \mathbb{N}\}$: on vérifie que f laisse $\mathbb{R}_n[X]$ invariant puis on utilise $X^p = S_p + a_{p,p-1}S_{p-1} + \dots + a_{p,0}S_0$. La matrice de f est diagonale dans la base S_p .

◆ **DIA.47** TPE MP – 2002
 Soit $A \in \mathfrak{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $12A^3 - 8A^2 + 7A - I_5 = 0$. Montrer que $0 < \text{tr} A < 2$.

◊ [Rec02/spectre-r2.tex/red-r2:26] Le polynôme $12X^3 - 8X^2 + 7X - 1$ n'a qu'une seule racine réelle, qui est $1/6$. Il possède deux autres racines conjuguées λ et $\bar{\lambda}$. On trigonalise A : ses coefficients μ_1, \dots, μ_5 sont donc éléments de $\{1, \lambda, \bar{\lambda}\}$ et cet ensemble est stable par conjugaison. De plus on sait que $1 + \lambda + \bar{\lambda} = 2/3$. La trace de A vaut alors suivant les cas $5/6, 3/6 + \lambda + \bar{\lambda}$ ou $1/6 + 2(\lambda + \bar{\lambda})$...

◆ **DIA.48** CCP MP – 2002
 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les éléments propres de

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & b & c \\ b & a & b & b & b \\ b & b & a & b & b \\ b & b & b & a & b \\ c & b & b & b & a \end{pmatrix}$$

INDICATION : *L'examineur a admis que la résolution était assez longue !*

◇ [Rec02/spectre-r2.tex/red-r2:27] propres évidents $e_1 - e_5, e_2 - e_3, e_2 - e_4$ pour les valeurs propres $-c, 0, 0$. Reste à en trouver deux autres, on peut déterminer les autres vp...

◆ **DIA.49** CCP MP – 2002
 Soit E un \mathbb{C} -e.v. et soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $u \circ v - v \circ u = \alpha u$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun (on commencera par le cas $\alpha = 0$).

◇ [Rec02/spectre-r2.tex/al-r2:16] Supposons désormais $\alpha \neq 0$. En multipliant à gauche par u^{k-1} et en prenant la trace, il vient $u^k = 0$, donc, ceci étant vrai pour tout $k \in [1; n]$, u est nilpotent (considérer la matrice de Vandermonde...). De plus, pour tout $x \in \text{Ker } u$, on a $uv(x) = 0$ et donc $\text{Ker } u$ est stable par v , donc v admet un vecteur propre dans $\text{Ker } u$...

◆ **DIA.50** CCP MP – 2002
 Déterminer les valeurs propres de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux des deux diagonales, valant 1.

◇ [Rec02/spectre-r2.tex/red-r2:7] d'ordre k avec vecteurs propres $e_i + e_{n+1-i}$ et $e_i - e_{n+1-i}$. Pour $n = 2k + 1$, on rajoute e_{k+1} comme vecteur propre pour 1.

◆ **DIA.51** CCP MP – 2002
 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$f(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$$

Trouver les éléments propres de f (valeurs propres et sous-espaces vectoriels associés).

◇ [Rec02/spectre-r2.tex/red-r2:14] propre de dimension 1 (par linéarité). La restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$ a pour trace 3, la valeur propre est donc 1. On trouve $P = 2X^2 + 1$

◆ **DIA.52 (Disques de Gershgorin et ovales de Cassini)** (♣) ENS PC – 2003
 Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $r_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$.

1) On note \mathcal{D}_i le disque de centre a_{ii} et de rayon $r_i(A)$ (**disque de Gershgorin**). Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{D}_i$.

2) Pour tout $i \neq j$, on note

$$B_{ij}(A) = \{z \in \mathbb{C} ; |z - a_{ii}| \cdot |z - a_{jj}| \leq r_i(A) r_j(A)\}$$

(ce que l'on appelle un **ovale de Cassini**). Posons $B(A) = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} B_{ij}(A)$. Montrer que $\text{Sp}(A) \subset B(A)$.

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:348] 2) On fait la même chose en choisissant les deux indices i et j tels que $|X_i| \geq |X_j| \geq |X_k|$ pour tout $k \in [1; n]$. Deux cas sont à considérer :
 - Si $X_j = 0$, alors X n'a qu'une coordonnée non nulle, et on obtient $\lambda = a_{ii}$, ce qui montre que $\lambda \in B_{ij}$.
 - Si $X_j \neq 0$, alors les lignes i et j du système $AX = \lambda X$ s'écrivent, après réorganisation et inégalités triangulaires :

$$|\lambda - a_{ii}| \cdot |X_i| \leq \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \cdot |X_k| \quad (**)$$

$$|\lambda - a_{jj}| \cdot |X_j| \leq \sum_{\ell \neq j} |a_{j\ell}| \cdot |X_\ell| \quad (**)$$

Dans la première équation, tous les $|X_k|$ sont majorés par $|X_j|$ (puisqu'il est le plus gros, $|X_i|$ est fort opportunément absent) ; dans la seconde, on

ne peut en revanche majorer les $|x_\ell|$ que par $|x_i|$. Les deux inégalités s'écrivent donc

$$|z - a_{ii}| \cdot |x_i| \leq R_i |x_j| \quad \text{et} \quad |z - a_{jj}| \cdot |x_j| \leq R_j |x_i|.$$

Le produit de ces deux équations et la simplification par $|x_i x_j|$ montre que $\lambda \in B_{ij}$.

◆ **DIA.53** (**) ENS Cachan MP – 2003
 Soit E un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^5 = \text{Id}$ et 1 n'est pas valeur propre de u . Montrer que $4|n|$.

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:313] Le spectre de u est inclus dans $\{\omega, \omega^2, \bar{\omega}, \bar{\omega}^2\}$ où $\omega = e^{2\pi i/5}$. De plus les racines sont présentes par paires conjuguées (pour que le polynôme de u soit réel) et par paires « (ω, ω^2) » (pour qu'il soit rationnel) ! Donc au total n est divisible par 4.

◆ **DIA.54** X MP – 2003
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit λ une valeur propre de A . On suppose que

$$\begin{aligned} AX &= \lambda X & {}^t Y A &= \lambda {}^t Y \\ {}^t Y X &\neq 0 & \text{rg}(A - \lambda I) &= n - 1. \end{aligned}$$

Montrer que λ est valeur propre de multiplicité 1.

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:421] X et Y ne sont pas orthogonaux.

À FINIR !!!

◆ **DIA.55** (***) Mines MP – 2003
 On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \text{O} & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres de M .

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:415] M est symétrique réelle donc diagonalisable. De plus, $\text{rg}(M) = 2$ donc 0 est valeur propre de multiplicité $n - 2$ et il faut chercher les deux autres valeurs propres α et β (éventuellement égales). Tout d'abord, $\text{tr}(M) = \alpha + \beta = 2$. De plus, on peut calculer

ce qui montre que $\text{tr}(M^2) = 2(n - 2) + 2n = 4n - 4 = \alpha^2 + \beta^2$.

On doit donc résoudre $\begin{cases} \alpha + \beta = 2, \\ \alpha^2 + \beta^2 = 4n - 4. \end{cases}$

On en déduit $\alpha\beta = 4 - 2n$ et donc α et β sont racines de $X^2 - 2X + 4 - 2n$, donc

$$\{\alpha, \beta\} = \left\{ 1 + \sqrt{2n - 3}, 1 - \sqrt{2n - 3} \right\}.$$

On a donc au total

$$\text{Sp}(M) = \left\{ 0, 1 + \sqrt{2n - 3}, 1 - \sqrt{2n - 3} \right\}.$$

◆ **DIA.56** Mines MP – 2003
 Déterminer les éléments propres de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:274] La matrice étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. Cette matrice est la somme des matrices J et $K = J^{-1}$, matrices circulantes élémentaires. Ces deux matrices sont diagonalisables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ avec pour valeurs propres $\{\omega^k ; k = 0, \dots, n - 1\}$ et $\omega = e^{2\pi i/n}$. De plus, elles commutent donc sont simultanément diagonalisables. Le spectre de A est donc

on a donc $JX_k = \omega^k X_k$ et $KX_k = \bar{\omega}^k X_k$, donc $(J + K)X_k = (\omega^k + \bar{\omega}^k)X_k$ et $(J - K)X_k = (\omega^k - \bar{\omega}^k)X_k$. Notamment, les combinaisons linéaires de X_k et X_{n-k} sont vecteurs propres de M ; on peut donc choisir les combinaisons réelles

$$\text{Sp}(A) = \left\{ 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) ; k \in [0; n - 1] \right\}.$$

$$X_k + X_{n-1-k} = \left(1, 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \dots, 2 \cos\left(\frac{2(n-1)k\pi}{n}\right)\right)$$

Les vecteurs propres associés à la matrice J sont les vecteurs (complexes) de la forme

$$X_k = {}^t(1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{(n-1)k});$$

et le vecteur $X_0 = {}^t(1, 1, \dots, 1)$ (ce qui fait $E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ vecteurs), ainsi que les vecteurs

$$i(X_k - X_{n-1-k}) = \left(0, 2 \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \dots, 2 \sin\left(\frac{2(n-1)k\pi}{n}\right)\right)$$

ceux pour la matrice K sont de la même forme en transformant ω et $\omega^{-1} = \bar{\omega}$, c'est-à-dire de la forme

$$X'_k = {}^t(1, \bar{\omega}^k, \bar{\omega}^{2k}, \dots, \bar{\omega}^{(n-1)k}) = X_{n-1-k};$$

ce qui en fait encore $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

◆ **DIA.57** (*) Centrale MP – 2003
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det A > 0$.

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:25] en déduit que les multiplicités de ces racines sont p, q et q , donc
 $P = X^3 - X - 1$ annule A . Cela prouve que A est diagonalisable dans \mathbb{C} . Par ailleurs, P admet une racine réelle $\alpha > 0$ et deux racines conjuguées β et $\bar{\beta}$. On

$$\det A = \alpha^p \beta^q \bar{\beta}^q = \alpha^p |\beta|^{2q} > 0.$$

◆ **DIA.58** Centrale MP – 2003

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\text{Sp}(A)$ et $\text{Sp}(B)$ leur spectre, χ_A et χ_B leur polynôme caractéristique.

- 1) Comparer $\text{Sp}(B)$ et $\text{Sp}(^tB)$.
- 2) Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, alors $AC = \lambda C \Rightarrow \text{Im}(C) \subset \text{Ker}(A - \lambda I_n)$.
- 3) Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$, alors il existe $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC = \lambda C = CB$.
- 4) Montrer que, s'il existe une matrice $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $r \geq 1$ et telle que $AC = CB$, alors le pgcd de χ_A et de χ_B est de degré au moins r .
- 5) Réciproque ?

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:354] propre pour tB (puisque $\text{Sp}(^tB) = \text{Sp}(B)$ d'après 1...) On écrit donc $AX = \lambda X$ et $^tBY = \lambda Y$ ce qui donne $^tYB = \lambda^tY$. On pose $C = X^tY$ et on vérifie que $AC = CB = \lambda C$.

4) **À FINIR !!!**

5)

◆ **DIA.59** (***) Centrale MP – 2003

On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On définit $\phi : f \mapsto F$ par $F(x) = \int_0^\pi \sin(x-t) f(t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- 1) Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(E)$.
- 2) Déterminer son rang, ses valeurs propres, ses vecteurs propres.

INDICATION : Considérer les fonctions $x \mapsto e^{ikx}$.

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:355] On s'aperçoit que $F'' = -F$ donc $F \in \text{Vect}\{\sin, \cos\}$ — ou bien on écrit
 $F(x) = \sin x \int_0^\pi \cos(t) f(t) dt - \cos x \int_0^\pi \sin(t) f(t) dt$.

Une fonction propre ne saurait être combinaison linéaire que de \sin et \cos , et on remarque que l'image du sinus est $-\frac{\pi}{2} \cos$ et l'image du cosinus est $\frac{\pi}{2} \sin$. Il faut donc une combinaison linéaire complexe.
 On considère donc plutôt des fonctions $x \mapsto e^{ikx}$ avec $k = \pm 1$. Pour $k = 1$, valeur propre $-\pi/2$. Pour $k = -1$, valeur propre $\pi/2$.

◆ **DIA.60** (***) Mines MP – 2003

On note $E = \mathcal{C}([0; \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$. On note $\phi : E \rightarrow E$ l'application qui à $f \in E$ associe $g = \phi(f)$ définie par

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x+t) f(t) dt.$$

- 1) Montrer que ϕ est bien définie et que $\phi \in \mathcal{L}(E)$.
- 2) Que dire des valeurs propres de ϕ ? De $\text{Ker } \phi$ et $\text{Im } \phi$?

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:303] 2) On a $g'' = -g$, donc $\text{Im } \phi \subset \text{Vect}\{\sin, \cos\}$. On cherche donc des vecteurs propres combinaisons linéaires. Un peu de calcul...

1) T.

◆ **DIA.61 (Endomorphismes anticommutable)** (*) Centrale MP – 2003

Soit E un \mathbb{C} -e.v. de dimension $n \geq 2$. Soit $p \geq 2$, on suppose qu'il existe des endomorphismes u_1, \dots, u_p de E tels que

$$\forall k \in [1; p] \quad u_k^2 = -\text{Id}_E$$

$$\forall (k, \ell) \in [1; p]^2 \quad (k \neq \ell) \implies u_k \circ u_\ell = -u_\ell \circ u_k.$$

- 1) a) Montrer que, pour tout $k \in [1; p]$, u_k est un endomorphisme diagonalisable de E .
 b) Montrer que la dimension de E est paire.
- 2) Déterminer le spectre de u . Trouver l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de u_k . Que vaut $\det u_k$?

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:241] Soient k et ℓ deux entiers distincts (grâce à $p \geq 2$). Alors $u_k u_\ell + u_\ell u_k = 0$ donc $-u_\ell + u_k u_\ell u_k = 0$ et en prenant la trace, on obtient

1) a) $X^2 + 1 = (X+i)(X-i)$ est un polynôme scindé simple annulant u_k , donc celui-ci est diagonalisable.
 b) On a donc $\text{Sp}(u_k) \subset \{-i, i\}$ pour tout $k \in [1; p]$.

$\text{tr}(u_\ell) = \text{tr}(u_k u_\ell u_k) = -\text{tr}(u_\ell)$,

donc $\text{tr}(u_\ell) = 0$; il y a donc autant de i que de $-i$ dans le spectre, donc $n = 2k$.

2) Bon ben du coup $\text{Sp}(u_k) = \{-i, i\}$, la multiplicité est $n/2$ pour chaque et $\det u_k = (-1)^{n/2}$.

◆ **DIA.62** Centrale MP – 2003

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & & & & 2 \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Q})$.

- 1) Déterminer le polynôme minimal de A .
- 2) Déterminer les éléments propres de A en tant que matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
- 3) Démontrer que le polynôme minimal est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. En déduire que $\mathbb{Q}[A]$ est un corps.
- 4) Déterminer les espaces stables par l'application linéaire canoniquement associée à A .

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:253] dire $\lambda = \sqrt[2]{2} e^{2ik\pi/n}$. Le vecteur propres associés sont de la forme $(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n)$.

1) On reconnaît la matrice compagnon associée au polynôme $X^n - 2$ qui est scindé simple, donc $\mu = \chi_Q = X^n - 2$. De plus, A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

2) Le spectre de A est l'ensemble des racines n -ièmes de 2, c'est-à-dire

3) μ est bien sûr évidemment irréductible.
À FINIR !!!

4) **À FINIR !!!**

◆ **DIA.63** Centrale MP – 2003

Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 2 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ n & & & & 0 \end{pmatrix}$

- 1) Déterminer le polynôme caractéristique de A_n .
- 2) A_3 est-elle diagonalisable dans \mathbb{R} ? Dans \mathbb{C} ?
- 3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n > 0$ tel que $\text{Sp}(A_n) \cap]0; +\infty[= \{a_n\}$.
- 4) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:295]

◆ **DIA.64** Mines MP – 2003

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on définit l'application $\phi : E \rightarrow E$ par $\phi(P) = R(X)$, reste de la division euclidienne de $(X^4 - 1) \cdot P$ par $X^4 - X$. Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(E)$, déterminer $\text{Ker } \phi$, $\text{Im } \phi$ et les éléments propres de ϕ .

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:145]

◆ **DIA.65** Centrale MP – 2003

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $P \in E$, on note $u(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$.

- 1) Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.
- 2) Déterminer les valeurs propres de u .

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:409]

◆ **DIA.66** (***) CCP PC – 2003

On définit $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ par : $f(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 32X + 7$.

- 1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
- 2) Montrer que $f^2 = f$. En déduire que f est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:164] Ceux vérifiant $f(P) = P$ sont ceux de degré ≤ 1 :

1) Trivial grâce à l'unicité du reste.
 2) Puisque $\deg f(P) \leq 1$, on a $f(f(P)) = f(P)$ donc $f^2 = f$. Donc $X(X-1)$ annule f qui est donc diagonalisable.
 Les endomorphismes vérifiant $f(P) = 0$ sont les multiples de $A = X^2 - 32X + 7$:

$E_0(f) = A \mathbb{R}[X]$.

$E_1(f) = \mathbb{R}_1[X]$.

On retrouve ainsi la formule bien connue du cours : $\mathbb{R}_n[X] = A \mathbb{R}[X] \oplus \mathbb{R}_1[X]$.

◆ **DIA.67** ($a_{ij} = i/j$) (♣) CCP PC – 2003
 On note $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de coefficients $a_{ij} = i/j$. Déterminer le rang et le spectre de A .

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:172] teur propre pour la valeur propre n , alors on a la diagonalisabilité de A et $\dim E_0(A) = n - 1$. Si l'on remarque de plus que ${}^t(1, 2, \dots, n)$ est vec-
 On note que $\text{rg } A = 1$ ce qui nous donne immédiatement $0 \in \text{Sp}(A)$ (A) = $\{0, n\}$.

◆ **DIA.68** CCP PC – 2003
 Soit $(k, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. On définit l'application $f : \mathbb{R}_{2n}[X] \rightarrow \mathbb{R}_{2n}[X]$ par

$$f(P) = (X^2 - 1)P'(X) - (2nX + k)P(X).$$

1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{2n}[X])$.
 2) Trouver les valeurs et les vecteurs propres de f .
 3) f est-il diagonalisable? Bijectif?

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:224]

◆ **DIA.69** CCP PC – 2003
 On définit $f(P) = (X^2 - 1)P' - 2XP$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.
 2) Déterminer $\text{deg } f(P)$ en fonction de $\text{deg } P$.
 3) Trouver les polynômes propres de f .
 4) f est-elle injective? Surjective?

◇ [Rec03/spectre-r3.tex/r3:53]

◆ **DIA.70** (**) Centrale MP – 2004
 On note $E = \mathbb{R}_2[X]$. Soit $k \in \mathbb{R}$. On définit $u : P \mapsto (X^2 - 1)P' - (2nX + k)P$.

1) Vérifier que u est un endomorphisme de E .
 2) Déterminer le spectre de u et ses sous-espaces propres. u est-il diagonalisable?
 3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que u soit bijective.

◇ [Rec04/spectre-r4.tex/r4:237]

◆ **DIA.71** (*) Mines MP – 2004
 On note ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P \mapsto (X - 1)P' + P''(0)$. Déterminer le noyau, l'image et l'ensemble des valeurs propres de ϕ .

◇ [Rec04/spectre-r4.tex/r4:167] Remarquer que les $\mathbb{R}_n[X]$ sont stables.

◆ **DIA.72** (***) Mines MP – 2004

$$\text{On pose } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ (1) & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de M .
 2) Montrer que M admet une unique valeur propre réelle > 1 , notée λ_n .
 3) Déterminer le comportement de $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis montrer que $\lambda_n \sim \frac{n}{2 \ln n}$.

◇ [Rec04/spectre-r4.tex/r4:193]

◆ **DIA.73** ($\text{Sp}(f \circ g)$ et $\text{Sp}(g \circ f)$) (**) Centrale PC – 2004
 Soient E un \mathbb{K} -e.v. de dimension n et F un \mathbb{K} -e.v. de dimension p . Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$. On suppose $n \geq p$.

1) Montrer que les valeurs propres non nulles de $f \circ g$ et de $g \circ f$ sont communes.
 2) On suppose $n > p$. Montrer que 0 est valeur propre de $g \circ f$ mais pas forcément de $f \circ g$.
 3) On suppose $n = p$. Montrer que $\text{Sp}(f \circ g) = \text{Sp}(g \circ f)$.

◇ [Rec04/spectre-r4.tex/r4:73] $\lambda \in \text{Sp}(g \circ f)$.

1) Soit $\lambda \in \text{Sp}(g \circ f)$ telle que $\lambda \neq 0$. Alors $g \circ f(x) = x$ donc $f g f(x) = \lambda f(x)$, or $f(x) \neq 0$ (puisque $g \circ f(x) \neq 0$), ce qui prouve que $f(x)$ est vecteur propre de $f \circ g$ pour la valeur propre λ , donc $\lambda \in \text{Sp}(f \circ g)$.

2) $\text{rg}(g \circ f) \leq p < n$ donc $g \circ f \notin \mathcal{M}(E)$ donc $0 \in \text{Sp}(g \circ f)$.
 3) Supposons que $0 \in \text{Sp}(g \circ f)$. Alors g ou f n'est pas un isomorphisme donc $0 \in \text{Sp}(f \circ g)$.

◆ **DIA.74** (*) Mines PC – 2004
 Soit E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie d et $j \in \mathcal{L}(E)$ tel que $j^2 = -\text{Id}$. Montrer que d est paire.

◇ [Rec04/spectre-r4.tex/r4:77] On passe aux matrices, on diagonalise dans \mathbb{C} , on utilise la réalité de la trace.

◆ **DIA.75** (Déterminant d'une matrice circulante) (**) Mines PC – 2004
 On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de J .
 2) On note $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \delta & \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \delta & \alpha \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A)$.

◇ [Rec04/spectre-r4.tex/r4:108] et le déterminant de A est le produit de ces nombres, c'est-à-dire

1) On note que $J^n = I_n$; on calcule également que, en posant $\omega = e^{2i\pi/n}$, on a $\text{Sp}(J) = \{1, \omega, \dots, \omega^{n-1}\}$.
 2) On remarque que $A = \alpha I_n + \beta J + \gamma J^2 + \delta J^3$ et que la même base diagonalise toutes ces matrices (ce sont des multiples de J). Les valeurs propres de A sont donc toutes de la forme

$$\lambda_k = \alpha + \beta \omega^k + \gamma \omega^{2k} + \delta \omega^{3k},$$

où l'on a noté $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3$.

$\det(A) = \prod_{k=1}^n P(\omega^k)$,

◆ **DIA.76** (*) Mines PC – 2004
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que A est de rang pair.

◇ [Rec04/spectre-r4.tex/r4:88] la multiplicité de j est égale à celle de \bar{j} .
 A est annihilée par $X(X^2 + X + 1)$, son spectre est inclus dans $\{0, j, \bar{j}\}$, mais

◆ **DIA.77** (♣) TPE MP – 2004
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = 4A$. Montrer que $\text{tr}(A)$ est paire.

◇ [Rec04/spectre-r4.tex/r4:181] ses valeurs propres sont paires.
 $X^3 - 4X = X(X - 2)(X + 2)$ annule A donc A est diagonalisable et toutes

◆ **DIA.78** (Matrices anticommutantes) (**) CCP PC – 2004
 Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, inversibles, telles que $AB + BA = 0$. Montrer que n est pair.

◇ [Rec04/spectre-r4.tex/r4:114] $-\lambda$ l'est aussi, avec la même multiplicité. Comme les valeurs propres ne sont jamais nulles, on conclut à la parité.
 On a $A = -B^{-1}AB$, ce qui prouve que A et $-A$ sont semblables. On trigonalise A dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) : A \sim \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Mais à chaque λ valeur propre,

◆ **DIA.79** CCP PC – 2004
 M matrice colonne de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On pose $A = M \cdot {}^tM$. Valeurs propres et vecteurs propres de A ?

◇ [Rec04/spectre-r4.tex/r4:431] de $[1; n]$ tel que $x_j \neq 0$:

$$\text{ligne } j \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1/x_j, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2/x_j, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} x_n/x_j.$$

On suppose M non nulle, $M = {}^t(x_1, \dots, x_n)$. Alors A est de rang 1, M est vecteur propre pour la valeur propre $\text{tr}(A) = \|M\|_2^2$ et on trouve une famille de $n - 1$ vecteurs propres pour la valeur propre 0 (cf. **DIA.28**) en notant j un indice

◆ **DIA.80** (♣) CCP PC – 2004
 Soit n un entier impair. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^t A = {}^t A A = I_n$. Montrer que 1 ou -1 est valeur propre de A .

◊ [Rec04/spectre-r4.tex/r4:66]

que : $\|X\|^2 = {}^tX \cdot X = 1$. On a alors

$$1 = {}^tX \cdot X = {}^tX {}^tA \cdot AX = \|\lambda X\|^2 = \lambda^2,$$

Puisque n est impair, on sait déjà que A admet une valeur propre réelle, que nous noterons λ . Choisissons un vecteur propre X associé, et normons-le pour

donc $\lambda \in \{-1, 1\}$.

◆ **DIA.81 (Spectre d'une convolution)** (**) Centrale PC – 2005

On pose $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; on définit $T \in \mathcal{L}(E)$ en posant, pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$T(f)(x) = \int_0^\pi \sin(x-t) f(t) dt.$$

- 1) On définit $c : t \mapsto \cos t$ et $s : t \mapsto \sin t$ et on pose $P = \text{Vect}(c, s)$. Quelle est la dimension de P ? Déterminer l'image de P par T .
- 2) Déterminer $\text{Ker } T$ et $\text{Im } T$.
- 3) Quels sont les vecteurs propres et les valeurs propres de T ?

INDICATION : *Le cours ne définit pas la notion de valeur propre en dimension infinie. On dira que λ est valeur propre si et seulement si $T - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injectif, c'est-à-dire s'il existe une fonction $f \in E$ non nulle telle que $T(f) = \lambda f$.*

◊ [Rec05/spectre-r5.tex/r5:43]

◆ **DIA.82** (**) Centrale PC – 2005

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{C}_n[X]$ et on définit sur E l'application ϕ par :

$$\forall P \in E \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \phi(P)(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(k)}{k!} x^k.$$

Enfin, on définit $C_0 = 1$ et $C_p = \prod_{j=0}^n (X-j)$ pour tout $p \in [1; n]$.

- 1) Calculer $\phi(C_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et en déduire que $\phi \in \mathcal{G}(E)$.
- 2) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ .
- 3) Cas particulier : $n = 2$.

◊ [Rec05/spectre-r5.tex/r5:55]

Diagonalisabilité

◆ **DIA.83**

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C}$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

◊ [Divers/diagonalisabiliteexo.tex/red:88]

◆ **DIA.84 ($a_{ij} = i/j$)** (*)

On note $A = (a_{ij})_{ij}$ avec $a_{ij} = i/j$. Étudier la diagonalisabilité de A .

◊ [Divers/diagonalisabiliteexo.tex/red:6]

$\dim E_0(A) = n - 1$. Si l'on remarque de plus que $(1, 2, \dots, n)$ est vecteur propre pour la valeur propre n , alors on a la diagonalisabilité de A .

◆ **DIA.85** (♣)

On suppose que $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^3 = f^2$. Est-ce que f est diagonalisable?

◊ [Divers/diagonalisabiliteexo.tex/red:86]

conclure, il existe des exemples et des contre-exemples.

$X^3 - X^2 = X^2(X-1)$ est scindé non simple et annule f ; on ne peut pas

◆ **DIA.86** ENSI

Donner les conditions sur $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.

◊ [Divers/diagonalisabiliteexo.tex/red:8]

Calculer le polynôme caractéristique ?

◆ **DIA.87**

On reprend l'exercice **MAT.16**. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

◊ [Divers/diagonalisabiliteexo.tex/red:10]

◆ **DIA.88** (*)

Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que M^2 soit diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.

◊ [Divers/diagonalisabiliteexo.tex/red:50]

distincts, tous les $\pm \mu_k$ le sont aussi.

Il existe un polynôme scindé simple $P \in \mathbb{C}[X]$ annihilant M . Or toutes les valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de M sont non nulles. On peut prendre $P = \prod (X - \lambda)_k$. On note ensuite μ_k et $-\mu_k$ les racines de λ_k . Alors, les λ_k étant

En posant $Q = \prod (X - \mu_k)(X + \mu_k)$, Q est scindé simple et annule M . Donc M diagonalisable.

Évidemment, ça ne marche pas sur \mathbb{R} . (Rotation d'angle $\pi/2$.)

◆ **DIA.89** (**) Soit E un \mathbb{K} -e.v., et $u, v, f \in \mathcal{L}(E)$ tels qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$f^n = \alpha^n u + \beta^n v \quad \text{pour } n = 1, 2, 3.$$

Montrer que f est diagonalisable.

◊ [Divers/diagonalisabiliteexo.tex/red:16]

Si $\alpha = \beta = 0$, c'est trivial. Sinon, (f, f^2, f^3) est une famille de $\mathcal{L}(E)$ de rang inférieur ou égal à 2 (puisque Cl de u, v), on peut donc exprimer f^3 en fonction des autres. De plus, en calculant f^3 , on note que

$$f^3 - (\alpha + \beta)f^2 + \alpha\beta f = 0.$$

On pose donc $P = X^2 - (\alpha + \beta)X^2 + \alpha\beta X$, et $P(f) = 0$. Le polynôme P a pour racines α, β et 0, donc si $\alpha \neq \beta$ et si $\alpha\beta \neq 0$, P a trois racines simples $\Rightarrow f$ diagonalisable.

Si $\beta = 0$, on a $f^2 - \alpha f = 0$, et si $\beta = \alpha \neq 0$, les relations de départ montrent que $f^2 - \alpha f = 0$ également, donc f annule $X^2 - \alpha X = X(X - \alpha)$ qui est simple, donc f est diagonalisable.

◆ **DIA.90** (*)

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ des réels, et posons $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = \mathcal{C}^t \mathcal{C} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Quel est le rang de A ? Quel est le

polynôme caractéristique de A ?
 A est-elle diagonalisable ?

◊ [Divers/diagonalisabiliteexo.tex/red:22]

On suppose $\mathcal{C} \neq 0$. Le rang de A est $\text{rg } A = 1$, donc $\dim \text{Ker } A = n - 1$. Donc $\text{mult}(0, A) \geq n - 1$. De plus, \mathcal{C} est vecteur propre pour la valeur propre

$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum a_i^2 \neq 0$, ce qui montre que $\text{mult}(0, A) = n - 1$ et finalement tous les espaces propres ont la bonne dimension : A est diagonalisable.

◆ **DIA.91** (*) ENSI

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\text{rg } u = 1$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$;
- (b) u n'est pas diagonalisable.

◊ [Divers/diagonalisabiliteexo.tex/red:23]

Cf. l'exercice **DIA.95**.
 $a \Rightarrow b$: $u^2 = 0$ donc u est nilpotente; si u était diagonalisable, il serait nul, contradiction.

$b \Rightarrow a$: par contraposée. On suppose que $\text{Im } u \not\subset \text{Ker } u$, ils sont donc en fait supplémentaires. Puisque $\text{Im } u$ est de dimension 1, on écrit la matrice de u dans une base adaptée et, miracle, elle est diagonale.

◆ **DIA.92** (♣)

Soit E un \mathbb{K} -e.v., $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, et V un s.e.v. de E , stable par f . Montrer qu'alors $f|_V$ est diagonalisable.

◊ [Divers/diagonalisabiliteexo.tex/red:28]

Il existe un polynôme scindé simple qui annule f , il annule donc $f|_V$.

◆ **DIA.93** (♣)

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$, des projecteurs $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{L}(E)$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que

$$\begin{cases} f = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_k p_k \\ p_i \circ p_j = 0 \quad \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

◊ [Rec00/diagonalisabilite-r0.tex/red:12] teurs colonne), et séparer les cas n pair/impair.
Faire des combinaisons $E_k \pm E_{n-k}$ (vecteurs de la base canonique des vec-

◆ **DIA.107** (★★★) Mines PC – 2001
Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, et posons $A = \text{AntiDiag}(a_1, \dots, a_n)$. Donner une CNS de diagonalisabilité de A .

◊ [Rec01/diagonalisabilite-r1.tex/red-r:14] On remarque ensuite que $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si
On note que les $\text{Vect}(E_k, E_{n-k})$ sont stables par A . Notons u un endomorphisme représenté par A et (e_1, \dots, e_n) la base choisie.

$$(a, b) = (0, 0) \quad \text{ou} \quad ab \neq 0.$$

LEMME u est diagonalisable si et seulement si $u|_{\text{Vect}(e_k, e_{n-k})}$ est diagonalisable pour $k = 1, \dots, n/2$.

Démonstration : Évident dans les deux sens. ■

◆ **DIA.108** Centrale MP – 2001
Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Donner une CNS pour que $\begin{pmatrix} \mathbb{O} & A \\ I_n & \mathbb{O} \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

◊ [Rec01/diagonalisabilite-r1.tex/red-r:31] base, on construit $W_n^{\pm} = \begin{pmatrix} V \\ \pm \mu_n V \end{pmatrix}$ où μ_n est une racine de λ_n , ce qui donne
On note P le polynôme caractéristique de A . Posons $B = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & I_n \\ A & \mathbb{O} \end{pmatrix}$. Soit $2n$ vecteurs propres distincts si tous les λ sont non nuls. On a donc montré qu'une condition suffisante était A diagonalisable (et inversible).

V un vecteur propre de A pour la valeur propre λ , et μ une racine carrée de λ .
Alors on vérifie aisément que $W = \begin{pmatrix} V \\ \mu V \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B .

De plus,

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda I_n & I_n \\ A & -\lambda I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda I_n & I_n \\ A - \lambda^2 I_n & \mathbb{O} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} A - \lambda^2 I_n & \mathbb{O} \\ -\lambda I_n & I_n \end{vmatrix} = (-1)^n \det(A - \lambda^2 I_n) = (-1)^n \chi_A(\lambda^2).$$

Si A est diagonalisable, on a donc n vecteurs propres (V_1, \dots, V_n) formant une

Montrons qu'elle est nécessaire. On suppose B diagonalisable. Alors tout vecteur propre de B , associé à une valeur propre λ , est de la forme $W \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ ce qui, inséré dans la relation $BW = \lambda W$ donne $U = \lambda V$ et $AV = \lambda^2 V$. Puisque $\text{rg } B = 2n$, $0 \notin \text{Sp}(B)$ donc $\lambda \neq 0$.

Considérons une base diagonalisante (W_1, \dots, W_{2n}) de B . Une fois la partie du bas formée, la partie du haut est entièrement déterminée, au signe près. Ainsi, on trouve au minimum n vecteur propres libres pour A , donc A est diagonalisable.

◆ **DIA.109 (Excellent exercice)** (★★) CCP PC – 2001
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Soit $b \in \mathbb{C}$ tel que $(f - b\text{Id})^3 = 0$. On suppose que f n'est pas une homothétie.
1) Montrer que f n'est pas diagonalisable.
2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer l'équivalence
 $(P(f) \in \text{GL}(\mathbb{C}^n)) \iff (P(b) \neq 0)$.

◊ [Rec01/diagonalisabilite-r1.tex/red-r:11] Alors il y a équivalence entre les énoncés :
1) Si f était diagonalisable, en écrivant sa matrice dans une base propre on aurait $f = b\text{Id}$.
2) L'endomorphisme f n'admet que b comme valeur propre : $\text{Sp}(f) = \{b\}$.
On *trigonalise* f dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et c'est fini.
Ou bien : on scinde P dans \mathbb{C} :
 $P(f) = (f - \alpha_1 \text{Id}) \circ \dots \circ (f - \alpha_n \text{Id})$.

◆ **DIA.110** CCP PC – 2001
On définit récursivement la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$. Calculer explicitement u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

◊ [Rec01/diagonalisabilite-r1.tex/red-r:13]

◆ **DIA.111** (♣) CCP PC – 2000
La fonction $f : \mathfrak{M}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$, $X \mapsto {}^tX - X$ est-elle diagonalisable ? Déterminer les sous-espaces propres.

◊ [Rec01/diagonalisabilite-r1.tex/red-r:16] Évidemment, on peut penser du coup aux matrices antisymétriques, qui sont dans l'espace vectoriel propre pour $\lambda = -2$, et qui forment un espace vectoriel de dimension 6.
On écrit donc $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R}) = \text{Sym}_4(\mathbb{R}) \oplus \text{AntiSym}_4(\mathbb{R})$ (en vérifiant l'intersection et la somme des dimensions) donc on a diagonalisé f .

◆ **DIA.112** (♣) INT MP – 2001
 E est un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie, u et v des endomorphismes diagonalisables qui commutent. Montrer que u et v sont diagonalisables dans la même base.

◊ [Rec01/diagonalisabilite-r1.tex/red-r:5]

Cf. cours.

◆ **DIA.113** CCP – 2001
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Trouver l'ensemble S des points $M(x, y, z)$ tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & x & y & z \\ 0 & b & z & -y \\ 0 & 0 & a & x \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

◊ [Rec01/diagonalisabilite-r1.tex/red-r:27]

◆ **DIA.114** TPE MP – 2001
Pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on pose $A(a) = \begin{pmatrix} 0 & \sin a & \sin 2a \\ \sin a & 0 & \sin 2a \\ \sin 2a & \sin a & 0 \end{pmatrix}$. Trouver une CNS sur a pour que $A(a)$ soit diagonalisable.

◊ [Rec01/diagonalisabilite-r1.tex/red-r:34]

Si on met dans la diagonale les valeurs $\sin a$ et $\sin 2a$, on obtient maifestement une matrice de rang ≤ 2 , donc $\lambda = -\sin a$ et $\lambda = -\sin 2a$ sont valeurs propres; de plus, soit elles sont distinctes (pour $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pm\frac{\pi}{3}$), soit elles sont de multiplicité 2 (le rang de $A - \sin \theta$ vaudrait 1 pour $\theta = \pm\pi/3$).

Puisque $\text{tr } A = 0$, on en déduit que, $\sin a + \sin 2a$ est également valeur propre. Les valeurs propres sont distinctes dès que

$$|a| \notin \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \pi - \sin \text{Arc tan } \sqrt{15} \right\}.$$

Si $\theta = 0$, alors trivial. Si $a = \frac{\pi}{3}$ alors $\frac{1}{2}$ MAPLE arriver très bien à diagonaliser. En revanche, si $a = \pi - \sin \text{Arc tan } \sqrt{15}$, MAPLE ne diagonalise rien du tout et s'échoue en vain sur jordan (pour une raison qui m'échappe...)

◆ **DIA.115** CCP MP – 2001
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, avec $a^2 + b^2 \neq 0$. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & -d & -c \\ -c & d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$.
1) Calculer $M \cdot {}^tM$, $\det M$ et montrer que $\text{rg } M \in \{2, 4\}$.
2) On pose $\omega^2 = b^2 + c^2 + d^2$, on suppose $\omega^2 \neq 0$. Calculer le spectre de M et montrer que M est diagonalisable.

◊ [Rec01/diagonalisabilite-r1.tex/red-r:37]

◆ **DIA.116** (★★) Mines MP – 2000
Soit E un \mathbb{R} -e.v. de dimension $3n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f = 0$ et $\text{rg } f = 2n$.
1) Montrer que 0 est valeur propre de f et déterminer son ordre de multiplicité.
2) f est-elle diagonalisable ?
3) Montrer que la matrice représentative de f est semblable à $\begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I_n \\ \mathbb{O} & -I_n & \mathbb{O} \end{pmatrix}$.

◊ [Rec01/diagonalisabilite-r1.tex/al-r:13]

On a $f(f^2 + \text{Id}) = 0$. On en déduit par conséquent
– $\det(f^2 + \text{Id}) = 0$, puisque sinon cet endomorphisme est inversible et donc $f = 0$;
– $\det(f) = 0$, puisque sinon $f^2 = -\text{Id}$ et donc $\det f^2 = (-1)^{3n} = -1$, ce qui est impossible.

Ainsi, 0 est valeur propre, de multiplicité au moins égale à n . De plus, les autres valeurs propres sont complexes. On passe aux matrices : A est diagonalisable, son spectre est $\{0, i, -i\}$, la multiplicité de i et de $-i$ sont égales, donc $\text{mult}(0, f) = n$.

Ensuite, on prend X tel que $AX = iX$, alors $A^2X = -X$, ce qui prouve que -1 est valeur propre de f^2 et même de multiplicité n puisque i est de multiplicité n ; on peut donc trouver une famille libre de vecteurs réels telle que $f^2(b_i) = -b_i$ et on pose $c_i = f(b_i)$, ce qui nous donne une famille libre de $2n$ vecteurs, qui complète la base de $\text{Ker } f$.

Autre solution (RMS) : on peut remarquer que A et la matrice N de l'énoncé sont semblables, dans $\mathfrak{M}_{3n}(\mathbb{C})$, à $\text{diag}(1, \dots, 1, i, \dots, i, -i, \dots, -i)$; elles sont donc semblables entre elles dans \mathbb{C} et, puisqu'elles sont réelles, elles sont semblables entre elles dans \mathbb{R} (résultat classique).

◆ **DIA.117 (Diag. bilite d'une mat. de rang 1)** TPE PC – 2001
Donner une CNS pour qu'une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1 soit diagonalisable.

◊ [Rec01/diagonalisabilite-r1.tex/red:60]

(Se reporter à DIA.95 page 157.)

(Exercice donné également aux Mines PC (DIA.137) et CCP MP (DIA.128)...)

La CNS est $M^2 \neq 0$ ou, ce qui revient au même, $\text{tr } M \neq 0$, puisque $M^2 = (\text{tr } M)M$ (écrire $M = X \cdot {}^tY$).

Résolution géométrique En effet, soit $\text{Im } M \subset \text{Ker } M$, soit ces deux espaces sont en somme directe et alors M est diagonalisable.

Résolution algébrique Si $\text{tr } M \neq 0$, alors $X(X - \text{tr } M)$ est scindé simple et annule M donc M est diagonalisable.

Si M diagonalisable, alors M^2 est évidemment non nulle.

◆ **DIA.118 (Trigonalisation simultanée)** CCP MP – 2001
Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles simultanément trigonalisables ?

◊ [Rec01/diagonalisabilite-r1.tex/arc-r:6]

◆ **DIA.119 (CNS de diagonalisabilité)** X MP – 2001
 Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension n , avec \mathbb{K} un corps. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f .

◊ [Rec01/diagonalisabilite-r1.tex/red-r:22]

On suppose que tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire stable. On montre par récurrence que f est diagonalisable. C'est évident pour $n = 1$. On suppose que c'est vrai pour $n - 1$.

Soit F un hyperplan de E , $E = H \oplus \langle e \rangle$ avec $\langle e \rangle$ stable par f , et soit H un supplémentaire stable par f de $\langle e \rangle$. On montre maintenant que $f|_H \in \mathcal{L}(E)$ possède la même propriété : tout sous-espace vectoriel de H admet dans H un supplémentaire stable par $f|_H$.

Soit K un sous-espace vectoriel de H . Alors K admet un supplémentaire S dans E , stable par f , donc $H \cap S$ est un sous-espace vectoriel de H , et de plus il est stable par f . Il est en somme directe avec K .

Or $S \subset H$ car $K \subset H$ et $K \oplus S = E$. Donc $S + H = E$ (puisque H est un hyperplan : tout ce qui n'est pas inclus dedans suffit à remplir E par somme!).

◆ **DIA.120** Mines MP – 2002
 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -A \\ 2A & 3A \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A l'est.

◊ [Rec02/diagonalisabilite-r2.tex/red-r:2:37]

On vérifie que $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable (deux valeurs propres distinctes 1 et 2). Donc il existe P telle que $PCP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, en considérant P comme une matrice par blocs (avec l'identité), on a $PCP^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$.

De plus, la formule de Grassmann pour $E = S + H$ donne

$$\dim H \cap S = \dim H + \dim S - \dim E = \dim H - \dim K,$$

ce qui prouve que $H = K \oplus (H \cap S)$. On applique alors l'hypothèse de récurrence : $f|_H$ est diagonalisable, et comme $f(e) \in \langle e \rangle$, on a terminé.

Réciproquement, si f est diagonalisable, on prend $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base propre pour f . Soit F un sous-espace vectoriel de E . On montre que F admet un supplémentaire stable par f par récurrence descendante sur $\text{codim } F$:

- Si $F = E$, alors $\{0\}$ convient.
- Si $F \neq E$, notons $p = \dim F$, on peut trouver un indice i tel que $e_i \notin F$, et $F \oplus \langle e_i \rangle$ est un sur-espace strict de F de dimension $p + 1$, sur lequel on applique l'hypothèse : il admet un supplémentaire G stable ; alors $G \oplus \langle e_i \rangle$ est un supplémentaire stable de F .

◆ **DIA.121** Mines PC – 2002
 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice suivante soit diagonalisable :

$$M = \begin{pmatrix} \ulcorner & & \urcorner & a \\ & \mathbb{O}_{n-1} & \vdots & \\ \llcorner & & \llcorner & a \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

◊ [Rec02/diagonalisabilite-r2.tex/red-r:2:41]

On peut calculer le polynôme caractéristique $P_n = X[(-1)^{3n}aX^{n-2} - P_{n-1}] \dots$ et la réponse finale est

$$a > \frac{-1}{4(n-1)}.$$

Autre méthode (meilleure) : les vecteurs $e_2 - e_1, \dots, e_{n-1} - e_1$ sont dans le noyau. On remarque que l'image de la matrice est dans $x_1 = \dots = x_{n-1}$, s'il y a des vecteurs propres, ils sont de la forme $(\alpha, \dots, \alpha, \beta)$. On se ramène ainsi à des matrices de taille 2 et on regarde si on aboutit à une base (souvent inutile).

◆ **DIA.122** Centrale MP – 2002
 (Avec Maple)
 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a + \frac{1}{a} & a^2 + \frac{1}{a^2} \\ a + \frac{1}{a} & 1 & a + \frac{1}{a} \\ a^2 + \frac{1}{a^2} & a + \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{C}^*$.

- 1) Donner une condition sur a pour que A soit diagonalisable. (On pourra utiliser MAPLE).
- 2) Calculer la matrice de passage de A à la matrice diagonale.

◊ [Rec02/diagonalisabilite-r2.tex/red-r:2:38]

◆ **DIA.123** Centrale MP – 2002
 Soit $S = (s_{ij})_{ij}$ une matrice carrée d'ordre n vérifiant $\sum_{j=1}^n |s_{ij}| = 1$ pour tout $i \in [1, n]$.

- 1) Montrer que toute valeur propre λ de S vérifie $|\lambda| \leq 1$. Peut-il y avoir égalité ?
- 2) On suppose que S est diagonalisable. Calculer la limite, quand n tend vers l'infini, de $H_n(S) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n S^p$.
- 3) En utilisant le lemme des noyaux, étudier le cas général.

◊ [Rec02/diagonalisabilite-r2.tex/red-r:2:12]

- 1) Si (x_n) est vecteur propre, on prend k tel que $|x_k|$ est maximum, comme $\lambda x_k = \sum_j s_{k,j} x_j$ donc $|\lambda| |x_k| \leq \sum_j |s_{k,j}| |x_k| \leq |x_k|$. Il y a égalité si par exemple si tous les $s_{i,j}$ sont positifs et $x_i = 1$.
- 2) C'est la projection sur l'espace propre associé à 1.
- 3) On met sous forme de Jordan et on calcule tout. Résultat la somme converge vers la projection sur l'espace propre associé à 1 si la multiplicité de 1 est la dimension de cet espace sinon la série diverge.

◆ **DIA.124** CCP PC – 2002
 On note $A = (a_{ij})_{ij}$ la matrice définie par $a_{ij} = 1$ si $i = j$, $a_{ij} = j$ si $j - i = 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon. Calculer l'inverse de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?

◊ [Rec02/diagonalisabilite-r2.tex/red-r:2:30]

$A = I + J$ avec J nilpotent donc $A^{-1} = I - J + J^2 - \dots + (-J)^{n-1}$. A n'est pas diagonalisable si $n > 1$, car 1 étant la seule vp si A est diagonalisable alors $A = I!$

◆ **DIA.125** CCP PC – 2002
 On note $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ m & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Discuter, selon les valeurs de m , la diagonalisabilité de M .

◊ [Rec02/diagonalisabilite-r2.tex/red-r:2:35]

Voir **DIA.121** pour se ramener à des calculs sur des matrices de taille 2 pour trouver les vecteurs propres... Sur \mathbb{R} sauf erreur, $m \geq 1 - n^2/4$.

◆ **DIA.126** CCP PC – 2002
 On pose $E = \mathbb{R}^p$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'application

$$\phi_f: \begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ g \longmapsto f \circ g. \end{cases}$$

- 1) Montrer que ϕ_f est un endomorphisme de E .
- 2) Soit λ une valeur propre de f . Montrer que λ est également valeur propre de ϕ_f .
- 3) Si f est diagonalisable, montre que ϕ_f l'est également.

◊ [Rec02/diagonalisabilite-r2.tex/red-r:2:36]

Un grand classique!
 1° *No comment.*
 2° Prendre une projection p sur un vecteur propre de f alors $fp = \lambda p!$
 3° **1^{re} solution** : On remarque que, si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(\phi_f) = \phi_{P(f)}$. On choisit P scindé simple annulant f , il annule aussi ϕ_f .
2^e solution : On choisit une base (b_1, \dots, b_n) diagonalisant f ; on construit ensuite la famille d'endomorphismes $(h_{ij})_{ij}$ définie par

$$h_{ij}(b_i) = b_j \quad \text{et} \quad h_{ij}(b_k) = 0 \text{ si } k \neq i.$$

◆ **DIA.127** CCP MP – 2002
 (★★★)
 Soit E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $x_1 \in E$ est un vecteur non nul, on note $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc.

- 1) Montrer que, si F est l'espace vectoriel engendré par la famille $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, alors F est stable par f .
- 2) Si $F = E$, on dit que x_1 engendre E . Montrer que si f est diagonalisable, alors il y a équivalence entre les énoncés
 - (a) il existe un vecteur x qui engendre E ;
 - (b) les valeurs propres de f sont toutes simples.
- 3) Cette condition est-elle encore nécessaire si f n'est pas diagonalisable ?

◊ [Rec02/diagonalisabilite-r2.tex/red-r:2:11]

- 1) évident
- 2) On remarque que tout $y \in F$ est de la forme $P(f)x$ où P est un polynôme.
 $b \Rightarrow a$: si e_1, \dots, e_n est une base de vecteurs propres associée à des vp distinctes, alors $x = e_1 + \dots + e_n$ convient en utilisant des polynômes interpolateurs de Lagrange pour retrouver les e_i . On peut aussi utiliser Vandermonde.
 $a \Rightarrow b$: on décompose x sur cette base (tous les coefficients sont non nuls, sinon x ne peut pas engendrer E) ; quitte à normaliser on peut considérer que tous les coefficients sont égaux à 1 et alors $F \simeq \{(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))\}$ qui est de dimension n si et seulement si les vp sont toutes distinctes.
- 3) Non prendre $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

◆ **DIA.128 (Diag. ^{bilité} d'une mat. de rang 1)** CCP MP – 2002
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr } A \neq 0$.

◊ [Rec02/diagonalisabilite-r2.tex/red-r:2:9]

(Exercice donné également aux Mines PC (DIA.137) et TPE PC (DIA.117)...) Puisque A est de rang 1, elle peut s'écrire sous la forme $A = X^t Y$ où $X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. De plus, on note que $A^2 = X^t Y \cdot X^t Y = ({}^t Y \cdot X) A = \alpha A$ et que de plus $\alpha = \text{tr } A$.
 Supposons la trace nulle. Alors $A^2 = 0$ donc A est nilpotente. Si elle était diagonalisable, alors elle serait nulle, ce qui est faux. Donc A n'est pas diagonalisable.
 Supposons la trace α non nulle. Alors $A^2 = \alpha A$ donc A est annihilée par le polynôme $X^2 - \alpha X$ qui est scindé simple, donc A est diagonalisable.
 Remarque : on n'a pas eu besoin d'être sur \mathbb{C} . Cela marche aussi sur \mathbb{R} .

◆ **DIA.129** CCP PC – 2002
 Montrer qu'aucune matrice nilpotente non nulle n'est diagonalisable.
 Question supplémentaire : trouver toutes les matrices 2×2 de carré nul.

◆ [Rec02/diagonalisabilite-r2.tex/red-r2:16] Soit N une matrice nilpotente. Alors toutes ses valeurs propres sont nulles (théorème de Hilbert-Dirac par exemple). Si elle est diagonalisable, elle est donc nulle.
 A est de rang au plus 1. Avec l'exercice précédent, A est de rang inférieur à 1 et de trace nulle.

◆ **DIA.130** CCP PC – 2002
 On considère l'application $\Phi: \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

$$A \mapsto A - (\text{tr } A) \text{Id}.$$
 1) L'application Φ est-elle linéaire ?
 2) L'application Φ est-elle diagonalisable ?
 INDICATION : (à l'oral) — Cherchez les valeurs propres ; utilisez la dimension des sous-espaces propres.

◆ [Rec02/diagonalisabilite-r2.tex/red-r2:23] On prend la base $(E_{ij})_{i,j}$ ou, plus exactement, celle des endomorphismes dont les matrices dans une base donnée sont les (E_{ij}) , que l'on range ainsi : d'abord les matrices diagonales, puis les autres. Alors

$$\text{mat } \Phi = \begin{pmatrix} I_n + J_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & I_{n(n-1)} \end{pmatrix}$$

où J est une matrice dont tous les coefficients valent 1.
 On est donc ramenés à l'étude de la matrice $I_n + J_n$. On s'aperçoit que le vecteur ${}^t(1, 1, \dots, 1)$ est vecteur propre pour la valeur propre $n + 1$. Par ailleurs X est vecteur propre de $I + J$ avec la valeur propre λ si et seulement si X est vecteur propre de J pour la valeur propre $\lambda - 1$. Or on sait que $\dim \text{Ker } J = n - 1$ donc 1 est valeur propre de multiplicité $n - 1$ et on prend comme vecteur propres les $(1, -1, 0, \dots, 0)$ jusqu'à $(1, 0, \dots, 0, -1)$ par exemple. On a donc diagonalisé $I + J$.
 Le reste est diagonal.
 En résumé : les valeurs propres sont 1 (multiplicité $n - 1 + n^2 - n = n^2 - 1$), avec les vecteur propres susdits plus les E_{ij} avec $i \neq j$; et $n + 1$ avec le vecteur propre I_n . Le déterminant vaut donc $\det \Phi = n + 1$ et la trace $\text{tr } \Phi = n^2 + n = n(n + 1)$.
 Enfin, on a besoin de l'inverse de $(I + J)$. Par expérience, on le sait de la forme $I_n + \alpha J_n$, on injecte et on trouve $\alpha = -(n + 1)^{-1}$. On obtient donc la matrice de f^{-1} et par analogie avec la première, cela donne

$$\Phi: f \mapsto f - \frac{\text{tr } f}{n + 1} \text{Id}.$$

Remarque On peut également remarquer que, dans la base canonique rangée dans cet ordre astucieux, la matrice est symétrique donc diagonalisable.

Le candidat a proposé cette solution mais l'examinateur n'en a pas voulu ! (sans doute parce que cela trivialisait tout...)

◆ **DIA.131** CCP MP – 2002
 Soient M et $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables, de même polynôme caractéristique. Montrer qu'il existe deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = AB$ et $N = BA$.

◆ [Rec02/diagonalisabilite-r2.tex/red-r2:25] On vérifie que $BA = P(P^{-1}N) = N$.
 Bon, si elles sont diagonalisables de même polynôme caractéristiques, elles sont clairement semblables, donc on peut écrire $M = P^{-1}NP = (P^{-1}N)P = AB$.

◆ **DIA.132** ENSAI MP – 2002
 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & e & e^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & e \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

◆ [Rec02/diagonalisabilite-r2.tex/red-r2:24] Son polynôme caractéristique possède trois valeurs propres distinctes (une négative, une positive mais plus petite que 1, une plus grande que 1).

◆ **DIA.133** Navale MP – 2002
 Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.
 1) On pose $M = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Est-elle diagonalisable ?
 2) La matrice $N = \begin{pmatrix} A & bI \\ cI & A \end{pmatrix}$ avec $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ est-elle diagonalisable ?

◆ [Rec02/diagonalisabilite-r2.tex/red-r2:32] 2) Même raisonnement, il faut et suffit que pour $\forall \lambda$ de $A \begin{pmatrix} \lambda & b \\ c & \lambda \end{pmatrix}$ soit diagonalisable. On en déduit que oui si $bc > 0$ ou $b = c = 0$.

◆ **DIA.134** CCP MP – 2002
 Soit A un élément de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ tel que A^2 soit diagonalisable.
 1) On suppose que $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2$. Exhiber un polynôme à racines simples annulant A .
 2) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2$.

◆ [Rec02/diagonalisabilite-r2.tex/red-r2:48] Maintenant, $\prod_{k=2}^d (X - \lambda_k)(A^2)$ est annulé par A^2 ; puisque $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2$, il est annulé par A . Donc

1) A^2 étant diagonalisable, il existe un polynôme $P = \prod_{k=1}^d (X - \lambda_k)$, scindé simple, annulant A .
 Maintenant, soit les λ_i sont tous non nuls et dans ce cas A et A^2 sont inversibles, et en notant μ_i une racine carrée de λ_i , le polynôme

$$Q = X \prod_{i=1}^d (X - \mu_i)(X + \mu_i)$$

annule A puisque $A^2 - \lambda_i I_n = (A - \mu_i I_n)(A + \mu_i I_n)$. Puisqu'il est scindé simple, on en déduit que A est diagonalisable.
 Soit $0 \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et, quitte à les renommer, on peut écrire $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 2, \dots, n$.

$$Q' = X \prod_{i=2}^d (X - \mu_i)(X + \mu_i)$$

est scindé simple et annule A , donc A est diagonalisable.

2) On a montré précédemment que $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2$ implique que A est diagonalisable. La réciproque est triviale en se plaçant dans une base diagonalisante.

◆ **DIA.135** (★★★) X MP – 2003
 1) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\phi: \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

$$M \mapsto AM.$$
 Trouver le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de ϕ .
 2) Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. Montrer que l'application $\psi: M \mapsto AM + MB$ est diagonalisable.

◆ [Rec03/diagonalisabilite-r3.tex/r3:418] 1) $X_\phi = X_n^A$ (c'est vrai si A est diagonalisable, on étend par densité).
 De plus, si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(\phi): M \mapsto P(A)M$, ce qui montre que μ_A est un polynôme annulateur de ϕ . De plus, tout polynôme de degré moindre ne saurait annuler ϕ (il suffit de l'évaluer en I_n), donc $\mu_\phi = \mu_A$.
 2) **1^{re} méthode** : On remarque que ϕ est diagonalisable (son polynôme minimal est scindé simple puisque celui de A l'est). De même $\psi: M \mapsto MB$ est diagonalisable. De plus, ϕ et ψ commutent. Donc elles sont simultanément diagonalisables donc leur somme est diagonalisable dans la base commune.
2^e méthode : On note (C_1, \dots, C_n) une base de colonnes propres pour A et (L_1, \dots, L_n) une base de lignes propres pour B . Enfin, on pose $M_{ij} = C_i {}^t L_j$. Alors la famille $(M_{ij})_{i,j}$ est une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (calcul immédiat) et est une famille propre pour les valeurs propres $(\lambda_i + \mu_j)_{i,j}$.

◆ **DIA.136** (*) Mines PC – 2003
 Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d, e pour que
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
 soit diagonalisable.

◆ [Rec03/diagonalisabilite-r3.tex/r3:179] **1^{re} méthode** : Si $a \neq 0$, $E_1(A) = \{e_1\}$ donc, puisque 1 est de multiplicité 2, la matrice A n'est pas diagonalisable.
 On suppose $a = 0$. Alors les vecteurs ${}^t(b, d, 1, 0)$ et ${}^t(b, d, 0, 1)$ sont propres pour la valeur propre 2, ce qui montre que A est diagonalisable.
2^e méthode : on trouve les conditions pour que $\text{rg}(A - I_4) = \text{rg}(A - 2I_4) = 2$.
3^e méthode : on veut un polynôme scindé simple qui annule A , celui-ci doit avoir bien sûr 1 et 2, deux racines, et puis les autres sont inutiles ($A - \lambda I_4$ est inversible si $\lambda \notin \{1, 2\}$, donc on cherche quand $(X - 1)(X - 2)$ annule A .
Conclusion : A est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

◆ **DIA.137 (Diag. bilité d'une mat. de rang 1)** (**) Mines PC – 2003
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg}(A) = 1$ et $\text{tr}(A) = t_0$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur t_0 pour que A soit diagonalisable.

◆ [Rec03/diagonalisabilite-r3.tex/r3:393] (Exercice donné également aux CCP MP (DIA.128) et TPE PC (DIA.117)...)
 Si A est diagonalisable, alors $A = P^{-1}(t_0, 0, \dots, 0)P$ donc $t_0 \neq 0$.
 Réciproquement, si $t_0 \neq 0$, on peut écrire $A = X {}^t Y$ donc $A^2 = ({}^t Y X)A$ et on vérifie que $\text{tr}(A) = \sum a_{ii} = ({}^t Y X)$ ce qui montre que $A^2 = t_0 A$ donc $X(X - t_0)$ est un polynôme annulateur de A ; or il est scindé simple, donc A est diagonalisable.

◆ **DIA.138** (**) Mines PC – 2003
 On pose $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Prouver que $M(z)$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ sauf pour deux valeurs particulières à déterminer.

◆ [Rec03/diagonalisabilite-r3.tex/r3:329] $X_M = -X^3 + zX + z$. Pour que $M(z)$ soit non diagonalisable, il faut qu'il ait des racines doubles, or $X'_M = -3X^2 + z$, on injecte et on voit qu'il y a une racine commune si et seulement si $z = 0$ ou $z = \frac{27}{4}$.
 On vérifie ensuite que pour ces valeurs, $M(z)$ n'est effectivement pas diagonalisable.

◆ **DIA.139 (Endomorphisme de rang 1)** (♣) TPE MP – 2003

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1.

- 1) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\text{tr } f \neq 0$.
- 2) On suppose $\text{tr } f = 0$. Montrer que f est nilpotente et donner son indice de nilpotence.
- 3) On suppose $\text{tr}(f) = 1$. Montrer que f est un projecteur.

◇ [Rec03/diagonalisabilite-r3.tex/r3:247] Tout est extrêmement trivial.

◆ **DIA.140** (★) CCP MP – 2003

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

- 1) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $(f - \text{Id}) \circ (f - 2\text{Id}) = 0$.
- 2) Montrer que $f^n \in \text{Vect}(\text{Id}, f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ [Rec03/diagonalisabilite-r3.tex/r3:351] 2) On a donc $f^2 \in \text{Vect}(f, \text{Id})$, et on conclut par une récurrence élémentaire.
1) On vérifie que $\text{Sp}(f) = \{1, 2\}$. L'équivalence est alors triviale.

◆ **DIA.141** (★) CCP PC – 2003

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit

$$F: \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \longmapsto M + (\text{tr } M) I_n. \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
- 2) Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{rg } f$.
- 3) Trouver un polynôme annulateur de f ; f est-il diagonalisable?
- 4) f est-il inversible? Si oui, trouver f^{-1} .

◇ [Rec03/diagonalisabilite-r3.tex/r3:104] De plus, $f(I_n) = (n+1)I_n$, donc $n+1$ est de multiplicité 1. Donc f est diagonalisable et de polynôme caractéristique (annulateur)
Voir également **DIA.130** page 163 pour une résolution assez différente.

1) $\text{PoCa}(f) = (X-1)^{n+1}(X-n-1)$.
2) Si $M \in \text{Ker } f$, alors $M = -(\text{tr } M)I_n$ donc, en prenant la trace, on obtient $\text{tr } M = 0$ et donc $M = 0$.
3) On peut voir par exemple que $f(E_{ij}) = E_{ij}$ si $i \neq j$ et $f(E_{ii} - E_{jj}) = E_{ii} - E_{jj}$ si $i \neq j$,
ce qui montre que 1 est de multiplicité $n^2 - 1$, mais un peu d'intuition montre que $E_1(f) = \text{Ker}(\text{tr})$ est un hyperplan car tr est une forme linéaire.

◆ **DIA.142** (★★★) CCP PC – 2003

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ une matrice à coefficients entiers et de déterminant 1. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$.

- 1) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.
- 2) Montrer que $A^{12} = I_2$.

◇ [Rec03/diagonalisabilite-r3.tex/r3:111] $A^2 = I_2$;
- elles sont conjuguées deux à deux, mais puisque la trace est réelle et entière, ces valeurs propres ont une partie réelle entière ou demi-entière, donc $\text{Sp}(A) = \{-1, i\}$, et dans ce cas on a $A^4 = I_2$, ou bien $\text{Sp}(A) = \{\pm j, \pm j\}$ et alors $A^4 = I_2$ (resp. $A^6 = I_2$).
Dans tous les cas, on a bien $A^{12} = I_2$.

◆ **DIA.143** (★★) Centrale MP – 2004

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. La matrice $A = (a_{ij})_{ij}$ définie par

$$a_{n,n} = \alpha \quad \text{et} \quad a_{i,j} = 1 \text{ si } (i,j) \neq (n,n)$$

est-elle diagonalisable?

◇ [Rec04/diagonalisabilite-r4.tex/r4:03] Par suite, λ et μ sont racines du polynôme

$$X^2 - (n + \alpha - 1)X - (n - 1)(\alpha - 1),$$

dont le discriminant est nul seulement pour

$$\alpha = n - 1 \pm 2\sqrt{1 - n}.$$

Si ce discriminant est non nul, alors les valeurs propres λ et μ sont distinctes et la matrice est diagonalisable. Dans le cas contraire, à voir.
À FINIR !!!

Cette matrice est de rang 2, donc 0 est valeur propre de multiplicité $n - 2$ au moins, et on trouve que les vecteurs $(1, -1, 0, \dots, 0)$ jusqu'à $(1, 0, \dots, 0, -1, 0)$ sont propres pour la valeur propre 0.
On cherche ensuite deux autres valeurs propres λ et μ . En trigonalisant, on voit que $\text{tr}(A) = n + \alpha - 1$, d'où l'on tire $\lambda + \mu = n + \alpha - 1$.
On calcule ensuite $\text{tr}(A^2) = \lambda^2 + \mu^2 = \alpha^2 + n^2 - 1$, d'où l'on tire après calculs que $\lambda\mu = -1 + n + \alpha - n\alpha = -(n - 1)(\alpha - 1)$.

◆ **DIA.144** (★) Mines MP – 2004

On considère la matrice A de coefficient $a_{ij} = 1$ si $i = 1$ ou $j = 1$, et $a_{i,j} = 0$ sinon. Déterminer *rapidement* si elle est diagonalisable et, si oui, sa forme diagonale.

◇ [Rec04/diagonalisabilite-r4.tex/r4:155] découvrir deux autres valeurs propres. On peut de plus calculer $\lambda + \mu = 1$ et $\lambda^2 + \mu^2 = \text{tr}(A^2) = 2n - 1$ ce qui permet de conclure.
Elle est de rang 2, donc 0 est de multiplicité au moins égale à 2. Il reste à

◆ **DIA.145** (★) Mines PC – 2004

Soit A une matrice carrée d'ordre n , complexe, telle que A^2 soit diagonalisable et $\text{Ker}(A^2) = \text{Ker}(A)$. Montrer que A est diagonalisable.

◇ [Rec04/diagonalisabilite-r4.tex/r4:117] Un classique!

◆ **DIA.146** (★★) Navale PC – 2004

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?

◇ [Rec04/diagonalisabilite-r4.tex/r4:402] $\text{tr}(A^2) = \alpha^2 + \beta^2 = 8$ donc $\alpha = \beta = 2$. Or $\dim \text{Ker}(2 - 2I_n) = 1$, donc A n'est pas diagonalisable.
mult(0) = 2, il reste deux valeurs propres à trouver, $\text{tr}(A) = \alpha + \beta = 2$ et

◆ **DIA.147** CCP PC – 2004

On pose, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$: $\varphi(P) = (X - a)(P'(X) - P'(a)) - 2(P(X) - P(a))$.

- 1) φ est-elle linéaire?
- 2) Avec la formule de Taylor bien utilisée, déterminer $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$
- 3) Déterminer les éléments propres de φ
 φ est-elle diagonalisable?

◇ [Rec04/diagonalisabilite-r4.tex/r4:404]

◆ **DIA.148** (♣) CCP PC – 2004

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A l'est. Montrer que $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(A)$.

◇ [Rec04/diagonalisabilite-r4.tex/r4:75] lisable si et seulement si 'A l'est.
Que veut l'examineur exactement ???
Il est évident que si $P^{-1}AP = D$, alors ${}^tP^tA^tP^{-1} = D$ donc A est diagona- Pour le spectre, c'est la propriété du déterminant.

◆ **DIA.149** (★★) CCP MP – 2004

Soient a_1, \dots, a_n des complexes quelconques ; on note $A = \begin{pmatrix} \text{r} & & a_1 \\ \text{O} & \text{r} & \\ \text{L} & \text{J} & \vdots \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

- 1) Déterminer le rang de A .
- 2) Que peut-on dire des valeurs propres de A (étudier la trace)?
- 3) A est-elle diagonalisable?

◇ [Rec04/diagonalisabilite-r4.tex/r4:173] 2) On sait de plus que $\text{tr}(A) = \lambda + \mu = a_n$. De plus, $\text{tr}(A^2) = \lambda^2 + \mu^2 = 2 \sum_{i=1}^n a_i^2 - a_n^2$. On en déduit (a_1, \dots, a_n) .
1) $\text{rg}(A) = 2$ si $(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$; donc $\dim \text{Ker}(A) \geq n - 2$.
Il ne reste plus que deux valeurs propres à étudier, λ et μ ;

♦ DIA.150 (Matrice compagnon) (*) CCP MP – 2004

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que A soit diagonalisable. (On étudiera la dimension de E_λ pour toute valeur propre λ de A.)

[Rec04/diagonalisabilite-r4.tex/r4:216]

T.

♦ DIA.151 (*) Centrale PC – 2005

Soient $a, b \in \mathbb{C}^2$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit semblable à une matrice diagonale.

[Rec05/diagonalisabilite-r5.tex/r5:61]

♦ DIA.152 (**) Centrale PC – 2005

Soient E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie $n \geq 1$. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $u \circ v$ diagonalisable et $\text{Ker}(u \circ v) = \text{Ker}(v \circ u)$. Montrer que $v \circ u$ est diagonalisable. Donner une condition affaiblie sur $\text{Ker}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(v \circ u)$ pour que le résultat précédent reste vrai.

[Rec05/diagonalisabilite-r5.tex/r5:71]

♦ DIA.153 (**) Mines PC – 2005

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension n . Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension k . Soit p un projecteur sur F. On définit

$$\phi: \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

$$u \longmapsto p \circ u + u \circ p.$$

ϕ est-elle diagonalisable ?

INDICATION : Trouver un polynôme annulateur de degré 3 ; quel est le sous-espace propre associé à $\lambda = 2$?

[Rec05/diagonalisabilite-r5.tex/r5:96]

♦ DIA.154 (*) CCP PC – 2005

Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $MU = U$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable.

[Rec05/diagonalisabilite-r5.tex/r5:5]

De plus M admet 0 comme valeur propre puisqu'elle n'est pas inversible. Donc M est diagonalisable.

♦ DIA.155 (**) Petites Mines PC – 2005

On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \text{O} & \vdots \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer M^2 .

2) M est-elle diagonalisable ? (Deux méthodes demandées.)

[Rec05/diagonalisabilite-r5.tex/r5:7]

♦ DIA.156 (***) TPE PC – 2005

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B l'est.

[Rec05/diagonalisabilite-r5.tex/r5:114]

Cf. exercice DIA.108 page 159.

On note P le polynôme caractéristique de A. Posons $B = \begin{pmatrix} \text{O} & I_n \\ A & \text{O} \end{pmatrix}$. Soit V un vecteur propre de A pour la valeur propre λ , et μ une racine carrée de λ . Alors on vérifie aisément que $W = \begin{pmatrix} V \\ \mu V \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B. De plus,

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda I_n & I_n \\ A & -\lambda I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda I_n & I_n \\ A - \lambda^2 I_n & \text{O} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} A - \lambda^2 I_n & \text{O} \\ -\lambda I_n & I_n \end{vmatrix} \\ = (-1)^n \det(A - \lambda^2 I_n) = (-1)^n \chi_A(\lambda^2).$$

Si A est diagonalisable, on a donc n vecteurs propres (V_1, \dots, V_n) formant une

base, on construit $W_n^\pm = \begin{pmatrix} V \\ \pm \mu V \end{pmatrix}$ où μ_n est une racine de λ_n , ce qui donne $2n$ vecteurs propres distincts si tous les λ sont non nuls. On a donc montré qu'une condition suffisante était A diagonalisable (et inversible).

Montrons qu'elle est nécessaire. On suppose B diagonalisable. Alors tout vecteur propre de B, associé à une valeur propre λ , est de la forme $W \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ ce qui, inséré dans la relation $BW = \lambda W$ donne $U = \lambda V$ et $AV = \lambda^2 V$. Puisque $\text{rg } B = 2n, 0 \notin \text{Sp}(B)$ donc $\lambda \neq 0$.

Considérons une base diagonalisante (W_1, \dots, W_{2n}) de B. Une fois la partie du bas formée, la partie du haut est entièrement déterminée, au signe près. Ainsi, on trouve au minimum n vecteur propres libres pour A, donc A est diagonalisable.

Produits tensoriels

♦ DIA.157

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et diagonalisable. Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} M & M \\ M & M \end{pmatrix}$ et montrer que A est diagonalisable.

[Divers/tensorielexo.tex/red:38]

Rang n . Méthode habituelle : produit tensoriel.

♦ DIA.158 (**) On suppose que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable. La matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? (On supposera que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .)

[Divers/tensorielexo.tex/red:7]

de bases.

Méthode classique : diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis prendre un produit tensoriel

♦ DIA.159

Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 & & \\ & 2 & \text{O} & & 2 & \text{O} \\ & \text{O} & \ddots & & \text{O} & \ddots \\ & & & n & & n \\ 1 & & & & 1 & & \\ & 2 & \text{O} & & 2 & \text{O} \\ & \text{O} & \ddots & & \text{O} & \ddots \\ & & & n & & n \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, et la diagonaliser.

[Divers/tensorielexo.tex/red:32bis]

ce qui montre que A se diagonalise en

On utilise l'astuce du produit tensoriel : $A = \begin{pmatrix} B & B \\ B & B \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ se diagonalise en

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{O} & \text{O} \\ \text{O} & 2B \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}.$$

♦ DIA.160 (***) X PC – 2005

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$. Montrer par deux méthodes différentes que A est diagonalisable si et seulement si B l'est.

[Rec00/tensoriel-r0.tex/div:175]

On choisit une base (E_1, \dots, E_k) de $\text{Ker } A$, alors

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_k \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} E_k \\ \vdots \\ E_k \end{pmatrix}$$

est une famille libre de $K' = \text{Ker } B$, mais elle n'engendre pas K' a priori.

On choisit maintenant une base de V, dont nous notons les éléments

$$\begin{pmatrix} E_{k+1} \\ \vdots \\ E_{k+1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} E_n \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix},$$

et formée de vecteurs propres (pour des valeurs propres non nulles) de B. Alors, pour tout $i \in [k+1; n]$,

$$AE_i + AE_i' = \lambda_i E_i = \lambda_i E_i'$$

est une base propre pour B.

Supposons B diagonalisable. On note $K' = \text{Ker } B$ dont on note $n+k$ la dimension (vu que le rang de B est plus petit que n), alors K' admet un supplémentaire V stable par B (propriété classique et évidente des endomorphismes diagonalisables).

avec $\lambda_i \neq 0$, donc $E_i = E'_i$ et les vecteurs sont par conséquent de la forme

$$\begin{pmatrix} E_{k+1} \\ E_{k+1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} E_n \\ E_n \end{pmatrix},$$

et donc $AE_i = \frac{\lambda_i}{2}E_i$ ce qui nous donne les $n - k$ vecteurs propres qui nous manquaient pour diagonaliser A.

(Remarque : les vecteurs de la forme

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ -E_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} E_n \\ -E_n \end{pmatrix}$$

forment une famille libre de $\text{Ker } B$ qui donne la fin de la diagonalisation de B, même si ce n'est pas le but ici.)

2^e méthode

On commence par noter que

$$B^2 = \begin{pmatrix} A^2 & A^2 \\ A^2 & A^2 \end{pmatrix} \quad B^k = 2^{k-1} \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ A^k & A^k \end{pmatrix},$$

ce qui montre que si P est un polynôme dont le coefficient constant est nul (c'est-à-dire tel que $P(0) = 0$), alors

$$P(B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ P(A) & P(A) \end{pmatrix}.$$

Supposons A diagonalisable. Il existe alors P scindé racine simple qui annule A ; on peut même, quitte à multiplier P par X, supposer que $P(0) = 0$. En posant $Q = P(X/2)$, qui est aussi scindé simple, on a

$$Q(B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ P(A) & P(A) \end{pmatrix} = 0,$$

et donc B est diagonalisable.

Réciproquement, on fait exactement pareil : si Q annule B est scindé simple de coefficient constant nul, alors $P(X) = Q(2X)$ est tel que

$$2Q(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ P(A) & P(A) \end{pmatrix} = 0,$$

donc $P(A) = 0$ et A est diagonalisable.

◆ **DIA.161** Mines
 Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels, diagonalisable sur \mathbb{R} . Montrer que $B = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & A \\ -2A & 3A \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

◇ [Rec00/tensoriel-r0.tex/red:34] Diagonaliser $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et prendre un produit tensoriel des bases.

◆ **DIA.162** CCP MP – 2002
 Notons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$.

- Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de A.
- En déduire ceux de B en raisonnant sur les matrices blocs 2×2 .
- Diagonaliser A et B.

◇ [Rec02/tensoriel-r2.tex/red-r2:8] Un très grand classique !

◆ **DIA.163** Mines MP – 2003
 On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$.

- B est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses éléments propres ?
- Quel est le polynôme minimal de A ? Quel est le polynôme caractéristique de B ? Quel est le polynôme minimal de B ?
- Calculer $\exp A$ sans avoir recours à la diagonalisation.

◇ [Rec03/tensoriel-r3.tex/r3:425]

◆ **DIA.164** Centrale MP – 2003
 On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} A & A & A & A \\ A & \mathbb{O} & \mathbb{O} & A \\ A & \mathbb{O} & \mathbb{O} & A \\ A & A & A & A \end{pmatrix}$. Étudier la diagonalisabilité de B.

INDICATION : Chercher les éléments propres de B.

◇ [Rec03/tensoriel-r3.tex/r3:125] valeur propre est 0 (multiplicité 2 car $\text{rg}(M) = 2$). Les autres sont notées λ et μ . De $\text{tr}(M) = 2$ on tire $\lambda + \mu = 2$. De $\text{tr}(A^2) = 12$ on tire $\lambda^2 + \mu^2 = 12$ et donc $\lambda = 1 + \sqrt{6}$ et $\mu = 1 - \sqrt{6}$. De la diagonalisation de A et de M on tira la diagonalisation de $B = A \otimes M$, comme d'habitude.

On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On peut diagonaliser M (symétrique). Une

◆ **DIA.165** Éc. de l'Air PC – 2003
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Sous quelle(s) condition(s) B est-elle diagonalisable ?

◇ [Rec03/tensoriel-r3.tex/r3:229] Cela signifie que $P(A) = 0$, donc A est diagonalisable et P est annulateur de A, mais également que XP' est un polynôme annulateur de A. Par conséquent,

La réponse est : B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.
 □ **Supposons que $A \neq 0$ et que B est diagonalisable.** Alors il existe un polynôme scindé à racines simples P tel que $P(B) = 0$. On vérifie que

$$B^n = \begin{pmatrix} A^n & n A^n \\ 0 & A^n \end{pmatrix}$$

et, par combinaison linéaire :

$$0 = P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & A P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

puisque, P étant scindé simple, il n'a aucun zéro en commun avec P' . Or, A étant diagonalisable, cela implique $A = 0$. □

Réciproquement, si $A = 0$, B est trivialement diagonale !

◆ **DIA.166** (★★) CCP PC – 2004
 Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels diagonalisable. Notons B la matrice carrée d'ordre 2n définie par blocs par $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix}$. B est elle diagonalisable ? Généralisez.

INDICATION : Soit V un vecteur propre de A. On pourra chercher une condition sur (a, b) $\in \mathbb{R}^2$ telle que $W = \begin{pmatrix} aV \\ bV \end{pmatrix}$ soit vecteur propre de B.

◇ [Rec04/tensoriel-r4.tex/r4:420]

◆ **DIA.167** (★★) Centrale PC – 2005
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On note $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$.

- Montrer que B est semblable à $\begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$.
- Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

◇ [Rec05/tensoriel-r5.tex/r5:116]

◆ **DIA.168** (★★) TPE PC – 2005
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On note $B = \begin{pmatrix} A & A \\ \mathbb{O} & A \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

◇ [Rec05/tensoriel-r5.tex/r5:38] Cela signifie que $P(A) = 0$, donc A est diagonalisable et P est annulateur de A, mais également que XP' est un polynôme annulateur de A. Par conséquent,

Cf. exercice DIA.165 page précédente de l'École de l'Air 2003.
 La réponse est : B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.
 □ **Supposons que $A \neq 0$ B est diagonalisable.** Alors il existe un polynôme scindé à racines simples P tel que $P(B) = 0$. On vérifie que

$$B^n = \begin{pmatrix} A^n & n A^n \\ 0 & A^n \end{pmatrix}$$

et, par combinaison linéaire :

$$0 = P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & A P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

puisque, P étant scindé simple, il n'a aucun zéro en commun avec P' . Or, A étant diagonalisable, cela implique $A = 0$. □

Réciproquement, si $A = 0$, B est trivialement diagonale !

◆ **DIA.169** (★★) CCP PC – 2005
 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

- Diagonaliser A.
- Diagonaliser $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & 4A \end{pmatrix}$.

◇ [Rec05/tensoriel-r5.tex/r5:149]

Polynôme caractéristique

◆ **POCA.1 (Jeu)** (♣) Soit $A \in \mathfrak{M}_6(\mathbb{R})$ une matrice inversible vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\text{tr } A = 8$. Calculer le polynôme caractéristique de A .

◇ [Divers/pocaexo.tex/red:87] On note que $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ donc $\text{Sp}(A) \subset \{1, 2\}$. Donc $\chi = (X-2)^2(X-1)^4$.

◆ **POCA.2** (★★★) Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Exprimer les polynômes caractéristiques de A^{-1} et de A^2 en fonction de celui de A .

◇ [Divers/pocaexo.tex/red:12] $\chi_{A^{-1}} = \frac{1}{\det A}(-X)^n \chi_A\left(\frac{1}{X}\right)$. (Le faire dans le cas diagonalisable, puis par densité ?) On utilise aussi $\det(A^2 - \lambda I) = \det((A + \lambda I)(A - \lambda I)) = \chi_A(-\lambda)\chi_A(+\lambda)$.

◆ **POCA.3 (PoCa d'une mat. antisymétrique)** (♣) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice *antisymétrique*. Étudier la parité de χ_A en fonction de n .

◇ [Divers/pocaexo.tex/red:13] On a $\chi_A(-X) = \det(A + XI_n) = \det(-{}^tA - XI_n) = (-1)^n \det({}^tA - XI_n) = (-1)^n \chi_{tA} = (-1)^n \chi_A$.

◆ **POCA.4 (Matrice compagnon)** (★★) Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}^n$. On note

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}).$$

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A , montrer qu'il est égal à

$$\chi_A = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right).$$

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si ce polynôme est scindé simple.

◇ [Divers/pocaexo.tex/red:33] On développe sur la première colonne et on effectue une récurrence immédiate qui nous donne le polynôme caractéristique sous la forme demandée. ce qui montre que les valeurs propres de A sont les zéros de P (on le sait...) et que pour tout λ zéro de P , $E_\lambda(A)$ est de dimension 1 (engendré par $(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})$...) aussi A est-elle diagonalisable si et seulement si P est scindé et simple.

On suppose que $X = (x_1, \dots, x_n)$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ . Écrire $AX = \lambda X$ revient à écrire

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ P(\lambda) = 0 \end{cases}$$

◆ **POCA.5** (★) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$; notons P son polynôme caractéristique. Posons $B = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & I_n \\ A & \mathbb{O} \end{pmatrix}$. Calculer $\det B$ en fonction de $\det A$. Montrer que le polynôme caractéristique de B est $\chi_B(\lambda) = (-1)^n P(\lambda^2)$.

Soit V un vecteur propre de A pour la valeur propre λ , et μ une racine carrée de λ . Montrer que $W = \begin{pmatrix} V \\ \mu V \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B .

◇ [Divers/pocaexo.tex/red:39] Ensuite

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda I_n & I_n \\ A & -\lambda I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda I_n & I_n \\ A - \lambda^2 I_n & \mathbb{O} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{vmatrix} A - \lambda^2 I_n & \mathbb{O} \\ -\lambda I_n & I_n \end{vmatrix} = (-1)^n \det(A - \lambda^2 I_n) \\ &= (-1)^n \chi_A(\lambda^2). \end{aligned}$$

W est vecteur propre pour la valeur propre μ ,

Voir également **DIA.104**.

Pour calculer $\det B$, on échange les colonnes i et $n+i$, donc $\det B = (-1)^n \det A$.

◆ **POCA.6** Donner le polynôme caractéristique et les éléments propres de

$$A \stackrel{\text{dét.}}{=} \begin{pmatrix} a & b & a & \dots & b \\ b & a & b & \dots & a \\ a & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

◇ [Divers/pocaexo.tex/red:19]

◆ **POCA.7 ($\chi_{AB} = \chi_{BA}$)** (★★) Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$.

◇ [Divers/pocaexo.tex/red:53] Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ ont spectre réel est fini. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq N$, $1/p \notin \text{Sp}(A)$. Ainsi, la suite $(A - \frac{1}{p}I_n)_{p \geq N}$ est à valeurs dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ et converge vers A . Si A est inversible, la formule demandée est évidente. Les applications continues $A \mapsto \det(BA - xI_n)$ et $A \mapsto \det(AB - xI_n)$ coïncident sur un ouvert dense, elles sont donc égales.

◆ **POCA.8 (Matrices à spectres disjoints)** (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence

$$\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \iff \text{Sp } A \cap \text{Sp } B = \emptyset.$$

Peut-on généraliser à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

◇ [Rec01/poca-r1.tex/red-r:17] Il suffit d'écrire que χ_A est scindé : $\chi_A = \prod (X - \lambda_i)$, et de l'appliquer à B : En prenant les matrices réelles $A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on voit que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \emptyset$ mais $\chi_A(B) = 0$ par Cayley-Hamilton, donc on ne peut pas généraliser. (c) $\text{Sp } A \cap \text{Sp } B = \emptyset$.

◆ **POCA.9** Soient A, B, C, D quatre matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Centrale-Supélec PC - 2001

1) On suppose A inversible. Calculer $\begin{pmatrix} A^{-1} & \mathbb{O} \\ -B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$. On suppose que A et B commutent; montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

2) Étendre ce résultat au cas où A n'est pas inversible.

3) On note χ_M le polynôme caractéristique de M . Calculer χ_B en fonction de χ_A dans les cas suivants :

$$(a) \quad B = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & I_n \\ A & \mathbb{O} \end{pmatrix} \quad (b) \quad B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ A & I_n \end{pmatrix} \quad (c) \quad B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & 3A \end{pmatrix}$$

et, en fonction de $a, b \in \mathbb{C}$, dans le cas $B = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

◇ [Rec01/poca-r1.tex/red-r:35]

◆ **POCA.10** Soit E un espace vectoriel et G un sous-groupe fini de $\mathcal{G}(E)$. On note $p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$. Montrer que p est un projecteur. Trouver

$\text{Im } p$ (on montrera que c'est $\{x \in E; \forall g \in G, g(x) = x\}$) et en déduire $\text{tr } p$.

Application : soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \mathbb{O} & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et on note u l'endomorphisme associé à A .

Vérifier que $\langle A \rangle$ est fini. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Sans calculer $\det(A - X \text{Id})$, déterminer les polynômes caractéristique et minimal de A . Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A est-elle diagonalisable ? Et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

◊ [Rec01/poca-r1.tex/red-r:30] On note que $A^n = A$ et que la famille $(A^k)_{k=0, \dots, n-1}$ est libre, donc $\chi_A = \mu_A = X^n - 1$.
 Un peu de combinatoire et de théorie des groupes (l'application $g \mapsto ag$ est un automorphisme de groupe...) montre que $p^2 = p$.

◆ **POCA.11** (★) TPE MP – 2001

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer son polynôme caractéristique. Est-elle diagonalisable ?
- Quel est son polynôme minimal ? En déduire une autre étude de la diagonalisabilité de A ?
- Montrer que $\mathbb{R}^4 = \text{Ker}(I - A)^2 \oplus \text{Ker}(I + A)^2$.
- Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n .

◊ [Rec01/poca-r1.tex/red-r:10]

◆ **POCA.12** (★) Mines MP – 2001

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , stable par u . On appelle v l'endomorphisme induit par u sur F .

- Montrer que si u est diagonalisable, alors v est diagonalisable.
- Montrer que le polynôme caractéristique de v divise celui de u .

◊ [Rec01/poca-r1.tex/red-r:32]

1) Si u diagonalisable, alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé simple qui annule u . Il annule donc aussi v . Donc v est diagonalisable.
 2) On choisit une base \mathcal{B}_1 de F , que l'on complète en une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n .

Alors la matrice de u dans \mathcal{B} est de la forme $\begin{pmatrix} V & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où $V = \text{mat}_{\mathcal{B}_1} v$ et A une matrice carrée. On prend alors les polynômes caractéristiques et le résultat tombe.

◆ **POCA.13 (A + λ_iB nilpotente)** (★★★) X PC – 2003

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $A + \lambda B$ est nilpotente pour $n + 1$ valeurs distinctes de $\lambda \in \mathbb{C}$, alors A et B sont nilpotentes.

◊ [Rec03/poca-r3.tex/r3:373]

On remarque qu'une matrice M est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est $(-X)^n$ (en effet, on peut la mettre sous forme triangulaire supérieure stricte).
 Notons

$$P_\lambda(X) = \chi_{A+\lambda B}(X) = \sum_{i=0}^n a_i(\lambda) X^i,$$

où chaque coefficient $a_i(\lambda)$ est un polynôme en λ de degré au plus n . Ces polynômes, pour $i \in [0; n - 1]$, s'annulent en $n + 1$ valeurs, donc sont identiquement nuls.

◆ **POCA.14** (★★) CCP MP – 2003

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que g est nilpotent.

- Montrer que $f + g$ est bijective si et seulement si f est bijective.
- Montrer que $\det(f + g) = \det(f)$.
- Montrer que $f + g$ et f ont le même polynôme caractéristique.

◊ [Rec03/poca-r3.tex/r3:86]

mutent. On a alors

$$\begin{aligned} (\text{Id} + g^{-1}f)[\text{Id} - \dots - (g^{-1}f)^{p-1}] &= \text{Id} - (g^{-1}f)^p \\ &= \text{Id} - (g^{-1})^p f^p \\ &= \text{Id}. \end{aligned}$$

1) On note tout d'abord que $g^n = 0$ (par exemple en notant p l'indice de nilpotence, x tel que $g^{p-1}(x) = neq0$ et en montrant que $(x, g(x), \dots, g^{p-1}(x))$ est une famille libre...)

Montrons que $f + g \in \mathcal{GL}(E)$. Pour cela, montrons d'abord que $(\text{Id} + g^{-1}f)$ est inversible. On commence par noter que f et g^{-1} com-

mutent. Or on a $g(\text{Id} + g^{-1}f) = g + f$ inversible car g inversible.

2) On sait qu'il existe une base qui trigonalise f et g , et la diagonale de g est nulle.

3) On applique à $f' = f - \lambda \text{Id}$ et $g' = g - \lambda \text{Id}$.

◆ **POCA.15** (★★) CCP MP – 2004

Soit E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrer que le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont les mêmes racines.
- Montrer que λ est racine simple du polynôme minimal si et seulement si $E = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}) \oplus \text{Im}(f - \lambda \text{Id})$.

◊ [Rec04/poca-r4.tex/r4:150]

◆ **POCA.16 (A + λ_iB nilpotente)** (★★★) X PC – 2005

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $A + \lambda B$ est nilpotente pour $n + 1$ valeurs distinctes de $\lambda \in \mathbb{C}$, alors A et B sont nilpotentes.

◊ [Rec05/poca-r5.tex/r5:22]

On remarque qu'une matrice M est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est $(-X)^n$ (en effet, on peut la mettre sous forme triangulaire supérieure stricte).

Notons

$$P_\lambda(X) = \chi_{A+\lambda B}(X) = \sum_{i=0}^n a_i(\lambda) X^i,$$

où chaque coefficient $a_i(\lambda)$ est un polynôme en λ de degré au plus n . Ces polynômes, pour $i \in [0; n - 1]$, s'annulent en $n + 1$ valeurs, donc sont identiquement nuls.

◆ **POCA.17** (★★★) Centrale PC – 2005

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie $n \geq 1$. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$ et $v^n = 0$.

- Montrer que u est inversible si et seulement si $u + v$ est inversible.
- Montrer que $\chi_u = \chi_{u+v}$.

◊ [Rec05/poca-r5.tex/r5:33]

1) On suppose que u n'est pas inversible.

Soit $x \in \text{Ker}(u)$, $x \neq 0$. Puisque u et v commutent, $\text{Ker}(u)$ est stable par v donc $v^k(x) \in \text{Ker}(u)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note k le plus petit entier tel que $v^k(x) \neq 0$. Alors $(u + v)(v^k(x)) = 0$ ce qui montre que $u + v$ n'est pas inversible.

Pour la réciproque, il suffit de noter que l'on peut utiliser la propriété démontrée en changeant u en $u - v$ (qui commute avec v).

2) **1^{re} méthode** : On utilise la propriété démontrée pour $u - \lambda I_n$; ainsi, si u a n valeurs propres distinctes, la propriété est démontrée. Par densité des matrices scindées simples dans \mathbb{C} , on généralise à toutes les matrices, ce qui permet de revenir dans \mathbb{R} le cas échéant.

2^{de} méthode : on passe aux matrices, on trigonalise simultanément U et V dans \mathbb{C} pour obtenir une matrice V' triangulaire supérieure stricte et une matrice U' . La matrice $U' + V'$ a la même diagonale, et donc le même spectre, que U' . (Ça répond même aux deux questions.)

◆ **POCA.18** (★) CCP PC – 2005

Calculer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

◊ [Rec05/poca-r5.tex/r5:31]

$\{0_{n-1}, n\}$; ainsi le spectre de $A = M - I_n$ est $\{-1_{n-1}, n - 1\}$. Conclusion :

On note que $M \stackrel{\text{déf.}}{=} A + I$ vérifie $M^2 = nM$ donc le spectre de M est

$$\chi_A = (X + 1)^{n-1}(X - n + 1).$$

Réduction d'endomorphismes et de matrices

◆ **RED.1** ($M^2 = A$ donné)
Résoudre dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation

$$A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:18]

On commence par noter que $\det B = 0$, il ne reste que deux vp à trouver. L'une d'elle est trivialement 1. Mais surtout, un vecteur est propre si $y = z$, on se ramène donc à l'étude de la matrice $\begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$, dont les v.p. sont 1 (bien sûr) et

16.

B est donc diagonalisable en $B' = \text{diag}(0, 1, 16)$, on peut donc définir une matrice $C' = \text{diag}(0, \pm 1, \pm 4)$, ce qui nous donne un C puis un A. On vérifie que ce sont bien les seules matrices qui conviennent puisque les sous-espaces propres de A (de dimension 1) sont stables par C.

◆ **RED.2**
Diagonaliser, si c'est possible, la matrice

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}).$$

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:32]

On peut écrire

$$\text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}$$

et

$$D = \text{diag}(0, 1, 1).$$

◆ **RED.3** (★★★)
Soit E un \mathbb{C} -e.v. de dimension finie n et $a \in \mathcal{L}(E)$. On pose

$$\begin{aligned} \gamma_a &: f \mapsto af \\ \delta_a &: f \mapsto fa. \end{aligned}$$

Donner le spectre de δ_a et de γ_a en fonction de celui de a , et les ordres de multiplicité des racines. En déduire une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de γ_a et de δ_a .

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:20]

Soit λ une valeur propre de a . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\text{Im } f \subset E_\lambda(a)$, alors $af = \lambda f$ et f est vecteur propre de γ_a avec la valeur propre λ . $E_\lambda(\gamma_a) = \mathcal{L}(E, E_\lambda(a))$ de dimension $n \times \dim E_\lambda(a)$.

$\chi_{\gamma_a} = \chi_a^n$, puisque cette relation est vraie pour les endomorphismes diagonalisables qui sont densés.

Les spectres sont égaux, les multiplicités sont multipliées par n et d'ailleurs

γ_a et δ_a sont diagonalisables si et seulement si a l'est (il faut effectuer une décomposition de Dunford pour le montrer).

◆ **RED.4** (★★★)
Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension finie n sur \mathbb{C} . On note

$$\Phi: \begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ v \longmapsto \Phi(v) = u \circ v. \end{cases}$$

Montrer que toute valeur propre μ de u est aussi valeur propre de Φ . Déterminer $\text{Ker}(\Phi - \mu \mathbf{1}_{\mathcal{L}(E)})$
Qu'en déduit-on pour le polynôme caractéristique de Φ

- 1) si u est diagonalisable ?
- 2) dans le cas général ?

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:21bis]

Oral 92-93 p.157. Problème de concours également, plus géométrique.

◆ **RED.5**
Trouver une matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ telle que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:26]

◆ **RED.6**
La matrice

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:27]

◆ **RED.7**
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) $A^2 = I_n$;
- (b) il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p + q = n$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix} P.$$

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:30bis]

Pour (i) \Rightarrow ii), on géométrise, et on montre que

ii) \Rightarrow i) évident.

$$E = \text{Ker}(f - 1) \oplus \text{Ker}(f + 1).$$

◆ **RED.8** ($M^2 = A$ donnée) (★)
Trouver toutes les matrices $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ telles que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:35]

A étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux donc 1, 2, 3. On diagonalise avec

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche une matrice M telle que $M^2 = A$ soit, en posant $\Delta = P^{-1}MP$, $\Delta^2 = D$.

On ne sait pas encore que Δ est diagonale. En revanche, Δ et D commutent et D a ses valeurs propres distinctes donc, grâce au lemme de commutation, les vecteurs colonne élémentaire sont également propres pour Δ , donc Δ est diagonale.

nale, donc :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & & \\ & \pm\sqrt{2} & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc 8 « racines carrées » de D, et on a

$$M = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_3\sqrt{3} & & \\ & \varepsilon_2\sqrt{2} & \\ & & \varepsilon_1 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_3\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -5\varepsilon_3\sqrt{3} + 5\varepsilon_2\sqrt{2} & \varepsilon_2\sqrt{2} & 0 \\ 2\varepsilon_3\sqrt{3} - 2\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}.$$

◆ **RED.9**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f + 6\text{Id} = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle mat f est diagonale par blocs.

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:36]

$P(X) = X^2 - 5X + 6 = (X - 3)(X - 2)$ est scindé simple donc f est

diagonalisable.

◆ **RED.10** (★★)

Soit E un \mathbb{R} -e.v. et p un projecteur de E. On définit

$$\Phi: \begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f \longmapsto (p \circ f + f \circ p). \end{cases}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ .

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:42]

On calcule aisément

$$\Phi(f) = pf + fp$$

$$\Phi^2(f) = \Phi(f) + 2pfp$$

$$\Phi^3(f) = \Phi(f) + 6pfp$$

ce qui prouve que Φ annule le polynôme

$$X^3 - 3X^2 + 2X = X(X - 1)(X - 2).$$

Ainsi, $\text{Sp}(\Phi) \subset \{0, 1, 2\}$.

En fait, si p n'est pas un projecteur trivial ($p \neq 0$ et $p \neq \text{Id}_E$), alors en notant $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p = I \oplus K$, les sous-espaces vectoriels propres associés aux valeurs propres 0, 1 et 2 sont respectivement

$E_0 = \{f \in \mathcal{L}(E) ; f|_1 = 0 \quad f(K) \subset K\}$
 $E_1 = \{f \in \mathcal{L}(E) ; f(K) \subset I \quad f(I) \subset K\}$
 $E_2 = \{f \in \mathcal{L}(E) ; f|_K = 0 \quad f(I) \subset I\}$

et on a bien tout !
 On peut aussi prendre une base \mathcal{B} adaptée à $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$, alors si $\text{mat}_{\mathcal{B}} Cf = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, on a

$\text{mat}_{\mathcal{B}} \Phi(f) = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}C & 0 \end{pmatrix}$

On notera que, en posant $r = \text{rg } p = \text{tr } p$, on a $\dim E_0 = (n - r)^2$ $\dim E_1 = 2(n - r)r$ $\dim E_3 = r^2$
 d'où l'on en déduit des conditions sur A, B, C et D pour que f soit valeur propre.

◆ **RED.11 (Suites récurrentes liées)** (★★)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'est pas diagonalisable, mais semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Déterminer les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient $(u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 0)$ et les relations de récurrence valables pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + 3w_n. \end{cases}$$

◆ [Divers/reductionexo.tex/red:44]
 Un calcul fastidieux du polynôme caractéristique montre que $\chi_A = -(X - 2)^3$, donc seul 2 est valeur propre, or $A \neq 2I$ donc A n'est pas diagonalisable.
 Une base de $\text{Ker}(A - 2I_n)$ est $V = {}^t(1, -1, 0)$. On la complète avec $V_2 = {}^t(-1, 0, 1)$ et $V_3 = {}^t(1, 0, 0)$ et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T.$$

On pose ensuite $X_n = {}^t(u_n, v_n, w_n)$, alors $X_n = A^n X_0$. Le problème est donc de calculer A^n .

Or $T = 2I + N$ avec $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$ donc

$$T^n = 2^n I + n2^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}N^2$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 2^{n-3}n(n-1) \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

ce qui donne en définitive

$$\begin{cases} u_n = 2^n - n2^{n-1} - n(n-1)2^{n-3} \\ v_n = n(n-1)2^{n-1} \\ w_n = n2^{n-1}. \end{cases}$$

◆ **RED.12 (Rotation hyperbolique infinitésimale)**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n)^n$.

◆ [Divers/reductionexo.tex/red:48]
 On peut, si on n'a pas d'intuition, calculer le polynôme caractéristique de A_n , et trouver

$$\chi_{A_n} = (X - 1)^2 - \frac{a^2}{n^2} = X^2 - 2X + \left(1 - \frac{a}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{a}{n}\right),$$

donc les racines sont

$$\lambda_n^+ \stackrel{\text{déf.}}{=} 1 + \frac{a}{n} \quad \text{et} \quad \lambda_n^- \stackrel{\text{déf.}}{=} 1 - \frac{a}{n}.$$

Les vecteurs propres de A sont respectivement

$$X^+ \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X^- \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

la matrice diagonalisant A_n est donc indépendante de n et vaut

$$P \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A_n = P \begin{pmatrix} 1 + \frac{a}{n} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{a}{n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A_n^n = P \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^n = P \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \text{ch } a & \text{sh } a \\ \text{sh } a & \text{ch } a \end{pmatrix}.$$

◆ **RED.13** (★)

Soient A, B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes.

- 1) Que dire d'un vecteur propre de A relativement à B ?
- 2) Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $B = P(A)$.

◆ [Divers/reductionexo.tex/red:52]
 1) On géométrise $A = \text{mat } u$ et $B = \text{mat } v$ dans une base donnée. Alors $u \circ v = v \circ u$ et tout sous-espace propre de u est stable par v .
 u est diagonalisable et $E = \bigoplus_{i=1}^n \langle x_i \rangle$.
 Si $x \neq 0$ appartient à $\langle x_i \rangle_{x_i}$, alors du coup $v(x)$ aussi puisque cet espace est stable. Donc x est aussi vecteur propre de v . Donc u et v sont simultanément diagonalisables.
 Ainsi, il existe $U \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $U^{-1}AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $U^{-1}BU = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

2) On construit un polynôme interpolateur de Lagrange tel que $P(\lambda_i) = \mu_i$, selon la procédure habituelle.

◆ **RED.14** (★★)

Soit A une matrice nilpotente. Déterminer $\text{Ker}(\exp A - I_n)$.

◆ [Divers/reductionexo.tex/red:55]
 $A^n = 0$ donc $\exp A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!}$, donc

$$\exp(A) - I_n = A \cdot B = B \cdot A \quad \text{avec} \quad B = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{A^k}{(k+1)!}.$$

On a alors $\text{Ker } A \subset \text{Ker}(\exp(A) - I_n)$. De plus B est inversible car il s'écrit $B = I_n + M$ avec M nilpotente.
 Cela prouve $A = B^{-1} \cdot (\exp(A) - I_n)$ et donc $\text{Ker}(\exp A - I_n) \subset \text{Ker } A$.

Conclusion $\text{Ker } A = \text{Ker}(\exp A - I_n)$.

◆ **RED.15** (★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E . On définit

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f \longmapsto \Phi(f) = f \circ p - p \circ f. \end{cases}$$

Montrer que Φ est diagonalisable. Trouver ses éléments propres.

◆ [Divers/reductionexo.tex/red:56]
 En prenant une base adaptée à $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$, on trouve matriciellement

$$\text{Ker } \Phi = \text{Vect} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{Ker}(\Phi - \text{Id}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^3 - X = X(X - 1)(X + 1)$$

qui est scindé simple. Donc Φ est diagonalisable. et $\text{Ker}(\Phi + \text{Id}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

◆ **RED.16 (Un grand classique)** (★★)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ et $a \neq 0$.

On pose

$$A(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ b & 0 & a & \cdots & a \\ b & b & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & \cdots & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit λ une valeur propre de A . Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à λ . Déterminer les valeurs propre de A . Que peut-on conclure ?

◆ [Divers/reductionexo.tex/red:57]
 On sait qu'une matrice complexe possède au moins une valeur propre.
 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A(a, b)$. Il existe donc un vecteur

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ de } \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \text{ non nul, tel que } A(a, b)X = \lambda X, \text{ ou encore}$$

$$(A(a, b) - \lambda I_n)X = 0.$$

Cette équation matricielle s'écrit sous la forme d'un système :

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + ax_2 + ax_3 + \cdots + ax_{n-1} + ax_n = 0 & (L_1) \\ bx_1 - \lambda x_2 + ax_3 + \cdots + ax_{n-1} + ax_n = 0 & (L_2) \\ bx_1 + bx_2 - \lambda x_3 + \cdots + ax_{n-1} + ax_n = 0 & (L_3) \\ \vdots & \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots - \lambda x_{n-1} + ax_n = 0 & (L_{n-1}) \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_{n-1} - \lambda x_n = 0 & (L_n) \end{cases} \quad (1)$$

En effectuant la différence entre la première et la deuxième ligne, ce que l'on note symboliquement $(L_1 - L_2)$, on obtient l'équation

$$-(\lambda + b)x_1 + (\lambda + a)x_2 = 0 \quad (2)$$

En calculant $(L_2 - L_3)$, on obtient

$$-(\lambda + b)x_2 + (\lambda + a)x_3 = 0$$

et de même en effectuant $(L_i - L_{i+1})$ pour $i = 1, \dots, n - 1$, on obtient

$$-(\lambda + b)x_i + (\lambda + a)x_{i+1} = 0 \quad (3)$$

Supposons que $\lambda = -a$. Alors on obtiendrait, à partir de l'équation (2) et en utilisant le fait que $a \neq b$, $x_1 = 0$. De même, l'équation (3) nous donnerait

$x_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Enfin, puisque $a \neq 0$, la ligne L_1 du système (1) nous donnerait $x_n = 0$. Finalement, on aurait $X = 0$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse, X étant un vecteur propre.
 En conséquence de quoi on a $\lambda \neq -a$, et donc

$$\boxed{-a \notin \text{Sp } A}$$

On peut donc poser

$$\mu = \frac{\lambda + b}{\lambda + a}$$

Alors les équations (3) donnent $x_{i+1} = \mu x_i$ pour $i = 1, \dots, n - 1$, et donc

$$\begin{cases} x_2 = \mu x_1 \\ x_3 = \mu^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \mu^{n-1} x_1 \end{cases} \quad (4)$$

Cela signifie notamment que la donnée de x_1 détermine entièrement le vecteur X .
 On en déduit : La dimension d'un sous-espace propre associé à λ est 1.

On cherche maintenant à déterminer quels sont les complexes $\lambda \in \mathbb{C}$ qui peuvent être valeurs propres. Nous allons procéder par une méthode « analyse-synthèse ».

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A(a, b)$, et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. Notons, comme dans la question précédente, $\mu = \frac{\lambda + b}{\lambda + a}$ (qui

est bien défini puisque $\lambda \neq -a$. Le système (4) est encore valable et, de plus, la ligne L_1 de l'équation (1) s'écrit

$$\left(-\lambda + a \sum_{k=1}^{n-1} \mu^k\right) x_1 = 0$$

De plus, on sait que $x_1 \neq 0$, sans quoi le système (4) garantirait la nullité de X . On en déduit

$$-\lambda + a \sum_{k=1}^{n-1} \mu^k = 0$$

ce que l'on développe en

$$-\lambda + \mu a \left(\frac{1 - \mu^{n-1}}{1 - \mu}\right) = 0$$

puisque $a \neq b$ implique $\mu \neq 1$, puis en

$$\lambda(\mu - 1) + \mu a (1 - \mu^{n-1}) = 0$$

Avec la définition de μ , cette équation devient

$$\frac{b(\lambda + a)}{\lambda + a} - a \left(\frac{\lambda + b}{\lambda + a}\right)^n = 0$$

puis, après division par a (car $a \neq 0$) :

$$\left(\frac{\lambda + b}{\lambda + a}\right)^n = \frac{b}{a} \tag{5}$$

Notons y_0 une racine de l'équation $y^n = \frac{b}{a}$.

Premier cas : $b = 0$. Alors l'équation $y^n = 0$ n'admet qu'une seule solution $y_0 = 0$, et par conséquent $\lambda = -b = 0$:

$$\text{Sp } A(a, 0) = \{0\}$$

De plus, le rang de A est manifestement égal à $n - 1$. On en déduit que le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 1 ; en effet, la formule du rang nous permet d'écrire que

$$\dim \ker A = n - \text{rg } A = 1.$$

◆ **RED.17** (***)

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent : $AB = BA$. On suppose que toutes les valeurs propres de B sont distinctes.

- 1) Montrer que tout vecteur propre de B est vecteur propre de A .
- 2) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $A = P(B)$.

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:62]

Même exercice que **RED.13**.

- 1) Soit X un vecteur propre de $B : BX = \lambda X$. Alors $B(AX) = (BA)X = (AB)X = \lambda AX$ ce qui prouve que AX est vecteur propre de B pour la valeur propre λ . Or B n'a que sous-espaces propres de dimension 1, donc

$AX \in \text{Vect}(X)$, ce qui montre que X est vecteur propre de A .

- 2) On prend une base propre commune. On utilise des polynômes interpolateurs de Lagrange pour envoyer les valeurs propres de B sur celles de A .

◆ **RED.18**

Trouver toutes les matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient

- 1) $M^2 = 0$;
- 2) $M^2 = M$;
- 3) $M^2 = I$.

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:63]

◆ **RED.19**

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie n , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $P(u) = 0$.

- 1) Montrer que, si λ est une valeur propre de u , alors $P(\lambda) = 0$.
- 2) On suppose que P est de la forme

$$P(X) = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i), \text{ avec } \alpha_i \neq \alpha_j \text{ si } i \neq j.$$

Montrer que les seules matrices vérifiant $P(M) = 0$ sont de la forme $Q^{-1}DQ$, avec $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et D matrice diagonale que l'on précisera. Combien y a-t-il de matrices diagonales de ce type ?

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:64]

◆ **RED.20** (***)

On considère l'application $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ Calculer $\det f$.

$$A \mapsto {}^tA.$$

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:71]

On sait que $f^2 = \text{Id}$ donc $\det f = \pm 1$. Enfin, on peut écrire, puisque f est une symétrie (involution)

le premier espace étant l'ensemble des matrices symétriques, le second l'ensemble des matrices antisymétriques, et $\det f$ est simplement $(-1)^{\text{élévé à la puissance : dimension de l'espace vectoriel des matrices antisymétriques}}$:

$$E = \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}),$$

$$\det f = (-1)^{n(n-1)/2}.$$

◆ **RED.21 (Le jeu de saute-moutons)** (***)

Trois moutons sont dans un pré et jouent à saute-moutons. Le premier mouton, nommé Anselme, saute au-dessus de Barnabé et se retrouve dans la position symétrique de celle qu'il occupait par rapport à Barnabé. Barnabé saute ensuite au-dessus de Clotaire, puis Clotaire au-dessus d'Anselme. Le jeu recommence indéfiniment.

Le pré pouvant être considéré comme un plan, trouver les configurations de départ telles que les moutons restent dans une portion bornée du plan.

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:98]

©2002 Thierry Barbot (copyleft LDL : Licence pour Documents Libres).

En notant (a_n, b_n, c_n) les positions respectives dans le plan complexe des moutons Anselme, Barnabé et Clotaire, on a la relation de récurrence

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont 1, $\lambda = \sqrt{5} - 2$ et $\mu = -(2 + \sqrt{5})$. Les vecteurs propres correspondants aux deux premières valeurs propres (les seules dont le module n'est pas > 1) sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \rho - 1 \\ 2 - \rho \end{pmatrix}$$

où ρ désigne le nombre d'or. Le premier vecteur propre indique simplement que la position initiale des trois moutons peut être translatée de la même quantité pour chacun (invariance par translation). Ce sera la position limite quand $n \rightarrow \infty$ d'ailleurs. La position des moutons doit donc être : alignés, avec Clotaire éloigné d'Anselme ρ fois moins que Barnabé d'Anselme (on calcule en effet que $(2 - \rho - 1)/(\rho - 1 - 1) = \frac{1}{\rho}$).

◆ **RED.22 (Matrice circulante)** (***)

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \textcircled{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \textcircled{0} & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \textcircled{0} & 0 \\ \textcircled{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\chi_J = X^n - 1$. Déterminer les éléments propres de J .
- 2) Exprimer K en fonction de J .
- 3) Montrer que J et K commutent. En déduire que la matrice

$$D(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & & c \\ b & \ddots & \ddots & \textcircled{0} \\ & \ddots & \ddots & c \\ c & \textcircled{0} & & b & a \end{pmatrix}$$

est diagonalisable dans \mathbb{C} . Déterminer ses éléments propres.

◇ [Divers/reductionexo.tex/red:101]

- 1) On remarque que la famille $(J^k)_{k=0, \dots, n-1}$ est libre et $J^n = I$, ce qui montre que $\chi_J = \mu_j = X^n - 1$. On en déduit que

$$\text{Sp}(J) \subset \{\omega_n^k; k \in [0; n - 1]\},$$

où l'on a posé

$$\omega_n = e^{2i\pi/n}.$$

Le sous-espace vectoriel propre pour la valeur propre ω_n^k est de dimension 1 et engendré par le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^k \\ \omega_n^{2k} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)k} \end{pmatrix}$$

Cela montre que J est diagonalisable. On pouvait d'ailleurs calculer directement $\chi_J = X^n - 1$.

On peut alors écrire

$$J = \text{PDP}^{-1} \quad P = (\omega_n^{j-1}i - 1)$$

et $D = \text{diag}(1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1})$.

- 2) De plus $K = J^{-1} = J^{n-1}$ donc K a le même spectre par un raisonnement similaire.
- 3) Enfin, $JK = KJ$ donc elles sont simultanément diagonalisable, ce qui prouve que $aI_n + cJ$ et bK est diagonalisable, on connaît une base diagonalisante, le spectre suit.

◆ **RED.23 (Équation $P(u) = a$ où a diagonalisable)** (*) CCP PC – 2001
 Soit E un \mathbb{C} -e.v. de dimension finie. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1 .
 On suppose que a est diagonalisable. Montrer que l'équation $P(u) = a$ admet au moins une solution dans $\mathcal{L}(E)$.

◇ [Divers/reductionex.tex/red:104] ce qui est toujours possible (en effet, en vertu du théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme $P - \lambda_i$ admet au moins une racine sur \mathbb{C}).
 On diagonalise a dans une base (b_1, \dots, b_n) , pour avoir une matrice $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On cherche ensuite des complexes μ_i tels que $P(\mu_i) = \lambda_i$,

◆ **RED.24** Mines MP – 2000
 Résoudre, dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

◇ [Rec00/reduction-r0.tex/red-r:43] On trigonalise $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. On peut donc prendre $T = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $T = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (Pour cela, on note que les espaces stables par A le sont aussi par $X \text{ car } [A, X] = 0$.)

◆ **RED.25** (**) TPE MP – 1993
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = A^{-1}$. Calculer $\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

◇ [Rec00/reduction-r0.tex/red:91] On a $A^2 = I_n$ donc A est diagonalisable. On la diagonalise, par exemple, ou bien on utilise simplement $A^{2k} = I$ et $A^{2k+1} = A$, on sépare les termes pair et impairs et on obtient $\exp A = \text{ch}(1)I_n + \text{sh}(1)A$. On aura bien sûr auparavant montré la convergence de la série par un moyen quelconque.

◆ **RED.26** (*) Mines PC – 2001
 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3$. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$, et on note $A^n = \begin{pmatrix} \alpha(n) & \beta(n) \\ \gamma(n) & \delta(n) \end{pmatrix}$. Existence et calcul de $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha/\gamma$ et de $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta/\delta$.
 Applications en physique ?

◇ [Rec01/reduction-r1.tex/al-r:7] Exercice sans difficulté, uniquement de la technique. On calcule le polynôme caractéristique de $A : \chi_A = X^2 - 2aX + a^2 - bc$, de discriminant $\Delta = 4bc > 0$ donc scindé sur \mathbb{R} , de racines $\lambda_{\pm} = a \pm \sqrt{bc}$ où l'on a posé $x = \sqrt{c/b}$. On cherche ensuite deux vecteurs colonnes propres (X_+, X_-) que l'on concatène pour avoir la matrice P et l'on obtient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & -x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1/x \\ 1 & -1/x \end{pmatrix}.$$
 Or $|a + \sqrt{bc}| > |a - \sqrt{bc}|$ donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n)}{\gamma(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(n)}{\delta(n)} = \sqrt{\frac{b}{c}}.$$
 Pour ce qui est de l'application en physique, *a priori* je ne vois pas où l'examineur veut en venir...

◆ **RED.27** (*) CCP MP – 2001
 On note $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer ses éléments propres. Trouver toutes les matrices $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $B^3 = A$.

◇ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:39] On montre que A et B commutent, puis que A et B ont même base de vecteurs propres.

◆ **RED.28** (*) CCP PC – 2001
 Soit f un endomorphisme non nul de \mathbb{R}^3 tel que $f^3 + f = 0$.
 1) Montrer que f n'est pas injectif.
 2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x) \neq 0$, la famille $(f(x), f^2(x))$ est une base de $\text{Im } f$.
 3) Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

◇ [Rec01/reduction-r1.tex/red:59] déduit que i et $-i$ apparaissent aussi une fois chacun.
 Passons aux matrices. $A = \text{mat}_g f$ vérifie $A^3 + A = 0$. Or le polynôme $X^3 + X = X(X+1)(X-1)$ est scindé simple sur \mathbb{C} . On peut donc diagonaliser A dans \mathbb{C} . Mais les valeurs propres de A appartiennent à l'ensemble $\{0, i, -i\}$. De plus, puisque χ_A est réel, i ne peut apparaître qu'accompagné de $-i$. Donc 0 apparaît une fois, et donc A n'est pas injective. Puisque A est non nulle, on en déduit que i et $-i$ apparaissent aussi une fois chacun. Enfin, soit $x \in E$, $x \notin \text{Ker } f$. Supposons qu'on ait une combinaison linéaire $\alpha x + \beta f(x) = 0$. Alors en composant par f , on obtient $\alpha f^2(x) - \beta f(x) = 0$ donc, en multipliant par β la première relation et par α la seconde, on obtient en retranchant : $\alpha\beta f(x) = 0$ donc $\alpha\beta = 0$. Mais si $\beta = 0$ alors forcément $\alpha = 0$, et si $\beta \neq 0$ alors $f^2(x) = 0$ et on a encore une contradiction avec

$\alpha f^2(x) - \beta f(x) = 0$.
 Ensin, si $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$, $x = f(y)$, donc $0 = f^2(x) = f^3(y) = -f(y) = -x$ donc $x = 0$; avec les dimensions, $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires.

◆ **RED.29** CCP PC – 2001
 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $A_a = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ et $B_a = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$. Montrer que A_a et B_a sont semblables pour tout $a \in \mathbb{R}$.

◇ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:28]

◆ **RED.30** (***) TPE MP – 2001
 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(\exp A) = \exp(\text{tr } A)$.

◇ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:18] diagonalisables dans \mathbb{C} et la continuité des fonctions proposées pour conclure. Montrer cette relation pour A diagonalisable. Utiliser la densité des matrices. Ou alors trigonaliser A , la relation vient immédiatement.

◆ **RED.31** (***) CCP MP – 2001
 Soient $A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ deux matrices diagonalisables, on note $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. On pose $\tilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}I_2 & a_{12}I_2 \\ a_{21}I_2 & a_{22}I_2 \end{pmatrix}$ et $\tilde{B} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} B & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & B \end{pmatrix}$, définies par blocs.

- 1) Montrer que si ${}^t(x_1, x_2)$ est un vecteur propre de A , alors $U_1 \stackrel{\text{def}}{=} {}^t(x_1, 0, x_2, 0)$ et $U_2 \stackrel{\text{def}}{=} {}^t(0, x_1, 0, x_2)$ sont des vecteurs propres de \tilde{A} . Montrer que si ${}^t(x'_1, x'_2)$ est vecteur propre de B , alors $V_1 \stackrel{\text{def}}{=} {}^t(x'_1, x'_2, 0, 0)$ et $V_2 \stackrel{\text{def}}{=} {}^t(0, 0, x'_1, x'_2)$ sont des vecteurs propres de \tilde{B} .
- 2) Exprimer $\tilde{A}V_1$ et $\tilde{A}V_2$ en fonction de V_1 et V_2 . On pose $W_2 \stackrel{\text{def}}{=} x_1V_1 + x_2V_2$. Montrer que W_1 est vecteur propre commun à \tilde{A} et \tilde{B} . Trouver trois autres vecteurs propres communs à \tilde{A} et \tilde{B} formant une base de \mathbb{R}^4 .
- 3) Montrer que $M \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

◇ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:20]

◆ **RED.32** (♣) TPE MP – 2001
 On pose $M = \text{antiDiag}(1, \dots, 1) \in \mathfrak{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$. Montrer que M est diagonalisable. Calculer ses valeurs et vecteurs propres. Diagonaliser M .

◇ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:24] Faire des combinaisons $E_k \pm E_{n-k}$ (vecteurs de la base canonique des vecteurs colonne).

◆ **RED.33 (Matrice par bande)** (***) CCP MP – 2001
 On pose $A = \begin{pmatrix} a & c & & \mathbb{O} \\ b & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & \ddots & \ddots & c \\ \mathbb{O} & & & b & a \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

◇ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:25]

◆ **RED.34** (♣) CCP MP – 2001
 Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ ayant deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 . Montrer que A^n peut s'écrire sous la forme $A^n = \lambda_1^n M_1 + \lambda_2^n M_2$ (on explicitera M_1 et M_2).

◇ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:26]

◆ **RED.35** CCP MP – 2001
 On pose $A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \mathbb{O} \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & \ddots & \ddots & -1 \\ \mathbb{O} & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ d'ordre n .
 1) Calculer le déterminant de A_n .
 2) Trouver les conditions sur n pour que 1 (resp. 2, resp. 3) soit valeur propre de A_n .
 3) Trouver les valeurs propres de A_5 . Espace propre associé à la valeur propre 1 ?

◊ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:6]

♦ **RED.36 (Matrice compagnon)** CCP PC – 2001
 Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ des réels. Déterminer le polynôme caractéristique de A et les sous-espaces propres, avec $A = (a_{ij})_{ij}$ et $a_{ij} = -\alpha_{n-j}$, $a_{ij} = 1$ pour $i - j = 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon.

◊ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:7] $\chi_A = (-1)^n \left(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k \right)$, en développant sur la première colonne.
 Matrice compagnon : voir cours. Une récurrence permet de montrer que

♦ **RED.37** (★) CCP PC – 2001
 Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I = 0$.

◊ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:9] Donc l'une d'elles (disons i) a une multiplicité 2, et le polynôme caractéristique de A est $(X - i)^2(X + i) = (X - i)(X^2 + 1)$: contradiction.
 On suppose que A existe, elle appartient donc à $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ et est annulée par $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ qui est scindé simple, elle est donc diagonalisable sur \mathbb{C} , et ses valeurs propres sont i et -i. Les deux sont valeurs propres (sinon $A = \pm iI$).
 D'une manière générale, une matrice vérifiant $A^2 + I = 0$ est d'ordre pair.

♦ **RED.38 ($a_{ij} = a_i/a_j$)** (★) Centrale-Supélec PC – 2001
 Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$. Diagonaliser, si c'est possible, la matrice $A = (a_i/a_j)_{i,j} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

◊ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:36] On note que A est de rang 1, donc $\dim \text{Ker } A \geq n - 1$ on trouve comme vecteurs propres les $(a_k, 0, \dots, \underbrace{-a_1}_{(k)}, \dots, 0)$. Par ailleurs la trace de A est n donc la dernière valeur propre est n avec le vecteur propre $(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1})$.

♦ **RED.39** Centrale MP – 2001
 On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

- 1) On définit $f : E \rightarrow E$, $X \mapsto AX$. Écrire la matrice de f, calculer son polynôme caractéristique, déterminer ses éléments propres.
- 2) Même question avec $g : X \mapsto XA$.
- 3) Même question avec $h = f + g$.

◊ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:23] donc $\chi_f = \chi_A^3$. Or $\chi_A = -X^3 + 7X + 6 = -(X + 1)(X + 2)(X - 3)$.
 1) On définit la base Or remarque par ailleurs que $AX = \lambda X$ si et seulement si X est formé de colonnes propres de A.

$$B = (E_{11}, E_{21}, E_{31}, E_{12}, E_{22}, E_{32}, E_{13}, E_{23}, E_{33})$$

(dans cet ordre !) et on remarque qu'alors

$$\text{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} A & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & A & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & A \end{pmatrix}$$

2) Idem mais il faut prendre une base dans un ordre différent ! $YA = \lambda Y$ si et seulement si Y est formé de lignes propres de A.

3) À FINIR !!!

♦ **RED.40** Centrale PC – 2001
 Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $F \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$ défini par : $F(M) = M + \text{tr}(AM)B$ pour tout $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) Trouver A et B pour que $F = \text{Id}$.
- 2) Dans le cas général, déterminer $\text{tr } F$.
- 3) Donner une CNS de diagonalisabilité de F.
- 4) Reconnaître F quand il est diagonalisable.

◊ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:15]

♦ **RED.41** TPE MP – 2001
 Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{pmatrix}$.

◊ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:2]

♦ **RED.42** CCP MP – 2001
 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \oplus \\ 1 & \oplus & & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible. Donner son inverse.

◊ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:3]

♦ **RED.43** CCP MP – 2001
 On pose, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X] : f(P) = XP - \frac{1}{n}(X^2 - 1)P'$.
 1) Vérifier que $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
 2) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
 3) f est-elle diagonalisable ?

◊ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:4]

♦ **RED.44** (★★) Mines PC – 2001
 Soient E un espace vectoriel de dimension n, et p un projecteur de rang $r \in [1; n - 1]$. On pose

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \longmapsto p \circ u + u \circ p. \end{cases}$$

 Trouver les valeurs propres de Φ et la dimension des sous-espaces propres.

◊ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:38] On calcule aisément $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X - 1)(X - 2)$.
 Ainsi, $\text{Sp}(\Phi) \subset \{0, 1, 2\}$.
 On prend une base B adaptée à $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$, alors si $\text{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, on a $\text{mat}_B \Phi(f) = \begin{pmatrix} 2A & B \\ C & B \end{pmatrix}$
 ce qui prouve que Φ annule le polynôme d'où l'on en déduit des conditions sur A, B, C et D pour que f soit valeur propre.

♦ **RED.45** Centrale MP – 2001
 On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M(r) = A + rB$ pour tout $r \in \mathbb{R}$.
 1) Soit $L \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$, et soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ses valeurs propres. Montrer que si $|\lambda_i| < 1$ pour $i = 1, 2, 3$, alors la suite $(L^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
 2) Montrer que la suite $(M(r)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

◊ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:19] dan ou on la trigonalise simplement ; puis on développe avec Newton en utilisant la nilpotence de la partie triangonale stricte.
 Premier cas : L est diagonalisable. Alors T.
 Deuxième cas : L n'est pas diagonalisable. On la réduit sous forme de Jor-

♦ **RED.46 (Rotation infinitésimale)** CCP PC – 2001
 On pose $A_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ -\frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$. Étudier $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n)^n$.

◊ [Rec01/reduction-r1.tex/red-r:49] On peut, si on n'a pas d'intuition, calculer le polynôme caractéristique de A_n , et trouver On a donc

$$\chi_A = (X - 1)^2 + \frac{a^2}{n^2} = X^2 - 2X + \left(1 - \frac{ia}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{ia}{n}\right),$$

$$A_n = P \begin{pmatrix} 1 + \frac{ia}{n} & \\ & 1 - \frac{ia}{n} \end{pmatrix} P^{-1}$$
 dont les racines sont
$$\lambda_n^+ \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{ia}{n} \text{ et } \lambda_n^- \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{ia}{n},$$

$$A_n^n = P \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{ia}{n}\right)^n & \\ & \left(1 - \frac{ia}{n}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1},$$
 Les vecteurs propres de A sont respectivement $X^+ \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ et $X^- \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, c'est-à-dire
 la matrice diagonalisant A_n est donc indépendante de n et vaut

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \text{ avec } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^n = P \begin{pmatrix} e^{ia} & \\ & e^{-ia} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

♦ **RED.47** ENS Ulm PC – 2002
 On affecte, à chaque sommet d'un tétraèdre (ABCD), un coefficient initial A_0, B_0, C_0 et D_0 . Chaque sommet cède ensuite un tiers de son coefficient à chaque sommet voisin. Déterminer la convergence et la limite éventuelle des suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 Même question pour un cube (ABCDEFGH).

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/sui-r2:2]
 On note a_n, \dots, d_n , les coefficients et X_n , le vecteur colonne avec ces coordonnées, on a $X_{n+1} = MX_n$ avec $M = \frac{1}{3}(J-1)$ où J est la matrice ne contenant que des 1. On diagonalise A et vérifie que M^n tend vers la projection orthogonale sur $(1, 1, 1, 1)$. En conclusion, les suites convergent vers une même limite : $(a_0 + \dots + d_n)/4$.

Dans le cas du cube, on raisonne de même. On remarque qu'en identifiant des sommets diagonalement opposés, on retombe sur le cas du tétraèdre ; si de

plus on signe les sommets correctement, on constate qu'il y a un transfert de coefficients.

De façon plus mathématique, on se place dans la base (en notant a, \dots, h (avec A opposé à $H \dots$) une base de \mathbb{R}^8) $a + h, b + g, \dots, a - h, b - g, \dots$. On constate alors que l'on doit diagonaliser la matrice $N = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix}$ (par blocs), à la limite on tombe sur suite périodique car -1 est valeur propre pour $N \dots$

◆ **RED.48** Centrale MP – 2002

- 1) Trouver une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^5 = I_3$.
- 2) Calculer (sans MAPLE ni calculatrice) $\cos(2\pi/5)$.
- 3) Trouver toutes les matrices $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{Q})$ telles que $A^5 = I_3$.

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/al-r2:30]
Cf. également RTH.27 et RTH.53

- 1) N'importe quelle rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ convient, par exemple $\begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{5}) & -\sin(\frac{2\pi}{5}) & 0 \\ \sin(\frac{2\pi}{5}) & \cos(\frac{2\pi}{5}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 2) On remarque que $\pi = 2\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{5}$; or si $a + b = \pi$, on a $\cos a = -\cos b$ donc $\cos\left(2\frac{2\pi}{5}\right)^2 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)^2$. En posant $x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, on a
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1$$
 donc
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{x+1}{2}.$$

On en déduit que x vérifie l'équation $\frac{1+x}{2} = (2x^2 - 1)^2$, qui admet également comme racine évidente 1 et (moins évident...) $-1/2^2$, ce qui permet de factoriser pour obtenir $4x^2 + 2x - 1 = 0$. Le réel x devant de plus être positif, on obtient $x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

- 3) On diagonalise dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$: $M \sim \text{diag}(\lambda, \mu, \nu)$, où $\lambda, \mu, \nu \in \Omega = \{e^{2ik\pi/5} ; k = 0, \dots, 4\}$. Or $(\det M)^5 = 1$ donc $\det M = 1$ (c'est un rationnel). Donc $\lambda = 1$ et $\nu = \bar{\mu}$. De plus $\text{tr}(M) \in \mathbb{Q}$ donc $\mu = \nu = 1$ en vertu du fait que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont irrationnels. La seule solution est donc l'identité.

◆ **RED.49** CCP PC – 2002

Soit E un \mathbb{C} -e.v. et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = \text{Id}$. On pose $g = \text{Id} + f$ et $h = \text{Id} - f$.

- 1) Montrer que $g(E)$ et $h(E)$ sont stables par f . Puis montrer que $E = g(E) \oplus h(E)$.
- 2) Quelle est la forme générale des matrices A complexes telles que $A^2 = I_n$?

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/al-r2:11]
 On commence par noter que f est nécessairement bijective.

- 1) Soit $x \in g(E)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = g(y) = y + f(y)$. On obtient alors $f(x) = f(y + f(y)) = f(y) + f^2(y) = f(y) + y = g(y)$. Ce qui montre que $g(E)$ est stable par f et même que $f|_{g(E)} = \text{Id}$. De même, soit $x \in h(E)$. Alors $x = h(y) = y - f(y)$ et donc $f(x) = f(y) - f^2(y) = f(y) - y = -x$. Donc $h(E)$ est stable par f et $f|_{h(E)} = -\text{Id}$. De plus, si $x \in g(E) \cap h(E)$, alors $f(x) = x$ et $f(x) = -x$ donc $f(x) = 0$. Puisque f est bijective, on en déduit que $x = 0$. On a donc montré que
$$g(E) \cap h(E) = \{0\}.$$

Soit maintenant $x \in E$. On peut écrire
$$x = \frac{1}{2}[x + f(x) + x - f(x)] = \left[\frac{g(x)}{2} + \frac{h(x)}{2} \right].$$
 On a donc $E = g(E) + h(E)$.

Conclusion $E = g(E) \oplus h(E)$.

- 2) On géométrise. Si on prend une base \mathcal{B} adaptée à $g(E) \oplus h(E)$, alors $M = \text{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & -\text{Id} \end{pmatrix}$, donc $A = P^{-1}MP$. Dans le langage de la réduction, on peut dire que l'endomorphisme correspondant à A vérifie $f^2 - \text{Id} = 0$ donc est annulé par $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ donc est diagonalisable avec pour uniques valeurs propres 1 et -1 .

◆ **RED.50** Mines MP – 2002

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit sur E un endomorphisme u qui à P associe $Q = P(X) + P(X+1)$.

- 1) Donner la matrice de u dans la base canonique de E , ainsi que ses valeurs propres et la dimension de ses espaces propres.
- 2) Notons $v = u - 2\text{Id}$. Donner la matrice de v ainsi que son noyau et son image.
- 3) Montrer qu'il existe une famille (P_0, P_1, \dots, P_n) de polynômes telle que $P_0 = 1$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a
$$P_k(0) = 0 \quad \text{et} \quad P_k(X+1) = P_k(X) + P_{k-1}(X).$$
 Donner la matrice de u dans la base (P_0, \dots, P_n) .

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:4]

- 1) La matrice est triangulaire supérieure, par la formule du binôme : $\text{Mat}(u) = (\delta_{i,j} + C_i^j)$. On en déduit que 2 est la seule valeur propre. Les polynômes propres vérifiant $P(X) = P(X+1)$, ils sont donc constant (infinité de zéros pour $P(X) - P(X+1)$).

- 2) Cette matrice est strictement triangulaire supérieure, sa diagonale secondaire étant constituée de réels non nuls, l'image de v est $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Son noyau est $\mathbb{R}.1$ d'après la question précédente. On pouvait aussi utiliser la formule du rang et raisonner sur les dimensions.
- 3) L'équation s'écrit $v(P_k) = P_{k-1}$. Comme $\text{Im } v = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et que $1 \in \ker v$, on en déduit l'existence de P_k par récurrence. La matrice de

1. Cette identité marche aussi pour 0 et $\frac{2\pi}{3}$; on en déduit que 1 et $\frac{-1}{2}$ sont également solution.

u dans cette base est $2\text{Id} + J$ avec $J = (\delta_{i+1,j})$ le nilpotent d'ordre n canonique.

◆ **RED.51** CCP PC – 2002

Déterminer les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = -u_n + v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = -3u_n + v_n - 4w_n. \end{cases}$$

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:1]
 Le système n'est pas diagonalisable. Le trigonaliser en utilisant comme troisièmement vecteur E'_0 vérifiant $AE'_0 = E_0$, où E_0 est associé à la valeur propre 0.

◆ **RED.52 (S.e.v. stables par f)** CCP PC – 2002

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme qui a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -6 & 4 & 7 \\ -10 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ dans une base de \mathbb{R}^3 . Trouver tous les sous-espaces vectoriels stables par f .

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:2]
 Le polynôme caractéristique est $-X^3 + 9X^2 + 14X + 200$. Il possède une racine réelle λ et deux racines complexes conjuguées μ et $\bar{\mu}$. $E_\lambda(f)$ est bien entendu stable. On cherche ensuite un hyperplan stable en passant d'abord dans \mathbb{C} .

◆ **RED.53** CCP PC – 2002

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que $A^2 = (\text{tr } A)A - (\det A)I_2$.
- 2) Calculer $\text{tr } A^2$.
- 3) Calculer $\text{tr } A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/al-r2:1]

- 1) On peut regarder avec les coefficients, ça marche. Ou un argument théorique, théorème de Cayley-Hamilton !!!
- 2) On remarque que $\text{tr } A^2 = a^2 + d^2 + 2bc = (a+d)^2 - 2ad + 2bc = (\text{tr } A)^2 - 2 \det A$, ce que l'on établissait également avec la formule précédente.
- 3) On calcule les valeurs propres λ et μ de A et on utilise $\text{tr } A^n = \lambda^n + \mu^n$.

on trouve
$$\text{tr } A^n = \left(\frac{\text{tr } A + \sqrt{(\text{tr } A)^2 - 4 \det A}}{2} \right)^n + \left(\frac{\text{tr } A - \sqrt{(\text{tr } A)^2 - 4 \det A}}{2} \right)^n.$$

◆ **RED.54** École Navale MP – 2002

Soient A et M des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A a n valeurs propres dans \mathbb{K} deux à deux distinctes. Montrer que $AM = MA$ si, et seulement si, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $M = P(A)$.

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:29]
 Si $M = P(A)$, alors M commute trivialement avec A . Réciproquement, supposons que M commute avec A . On va montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de M . On géométrise $A = \text{mat } u$ et $M = \text{mat } v$ dans une base donnée. Alors $u \circ v = v \circ u$ et tout sous-espace propre de u est stable par v . u est diagonalisable et $E = \bigoplus_{i=1}^n \langle x_i \rangle$. Si $x \neq 0$ appartient à $\langle x_i \rangle$, alors du coup $v(x)$ aussi

puisque cet espace est stable. Donc x est aussi vecteur propre de v . Donc u et v sont simultanément diagonalisables. Ainsi, il existe $U \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $U^{-1}AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $U^{-1}MU = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Enfin, on construit un polynôme interpolateur de Lagrange tel que $P(\lambda_i) = \mu_i$, selon la procédure habituelle.

◆ **RED.55 (Déterminant de Jacobi)** Mines MP – 2002

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 est diagonalisable, avec des valeurs propres strictement positives.

- 1) Montrer que A est diagonalisable.
- 2) Diagonaliser

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} b & \dots & b & a \\ \vdots & \ddots & a & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & b & \dots & b \end{pmatrix}.$$

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:19]

- 1) A^2 étant diagonalisable dans \mathbb{R} , on peut trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé simple, qui annule A^2 . De plus, 0 n'est pas racine de P , que l'on peut écrire

$$P = \prod_{k=1}^d (X - \lambda_k),$$
 où les λ_k sont distincts deux à deux. Il est aisé de montrer que $P(A^2) = Q(A)$ où

$$Q = \prod_{k=1}^d (X - \sqrt{\lambda_k})(X + \sqrt{\lambda_k})$$

est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et à racines simples ; donc A est diagonalisable.

- 2) On remarque que les vecteurs de la forme $(0, \dots, 0, -1, 0, \dots)$, qui sont au nombre de $n - 1$, sont des vecteurs propres de A pour la valeur

propre $(\alpha - \beta)$. Par ailleurs, le vecteur $(1, \dots, 1)$ est également vecteur propre, ce qui complète l'étude, et A est diagonalisable, avec un spectre égal à $\{\alpha - \beta, (n - 1)\beta + \alpha\}$.

On élève ensuite la seconde matrice au carré, et on peut en déduire aisément son spectre.

◆ **RED.56** Mines MP – 2002
 Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -a & a & 0 \end{pmatrix}$. Résoudre $X^2 = A$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:20]

◆ **RED.57** Mines PC – 2002
 Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha/n \\ \alpha/n & 1 \end{pmatrix}^n$.

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/al-r2:5]

Déjà donné en CCP-PC-01.

On peut, si on n'a pas d'intuition, calculer le polynôme caractéristique de A_n , et trouver

$$\chi_A = (X - 1)^2 + \frac{a^2}{n^2} = X^2 - 2X + \left(1 - \frac{ia}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{ia}{n}\right),$$

dont les racines sont

$$\lambda_n^+ \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{ia}{n} \quad \text{et} \quad \lambda_n^- \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{ia}{n},$$

Les vecteurs propres de A sont respectivement $X^+ \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ et $X^- \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^n = P \begin{pmatrix} e^{ia} & \sin a \\ e^{-ia} & \cos a \end{pmatrix} P^{-1}$.

la matrice diagonalisant A_n est donc indépendante de n et vaut

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

On a donc $A_n = P \begin{pmatrix} 1 + \frac{ia}{n} & \\ & 1 - \frac{ia}{n} \end{pmatrix} P^{-1}$

et donc $A_n^n = P \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{ia}{n}\right)^n & \\ & \left(1 - \frac{ia}{n}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1}$,

◆ **RED.58** Centrale MP – 2002
 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $u^2 - u + \text{Id} = 0$.

- 1) Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Montrer que $(x, u(x))$ est une famille libre.
- 2) On pose $H = \text{Vect}(x, u(x))$. Soit $y \in E \setminus H$. Montrer que $(x, u(x), y, u(y))$ est une base de E. Quelle est la matrice de u dans cette base ?
- 3) On se place dans \mathbb{R}^n . L'endomorphisme u vérifie toujours $u^2 - u + \text{Id} = 0$. Quelles peuvent être les valeurs propres de u ? Étudier la parité de n. Donner la trace et le déterminant de u.
- 4) Montrer que la matrice de u dans une certaine base peut s'écrire sous la forme d'une matrice diagonale par blocs contenant des blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:31]

◆ **RED.59** Centrale PC – 2002
 (Avec Maple)
 On pose $M(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta & \sin 2\theta \\ \sin \theta & 0 & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$ où $\theta \in [0; 2\pi]$. Le but de l'exercice est de trigonaliser M, c'est-à-dire de l'écrire sous la forme $M = PRP^{-1}$ où $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ et R est diagonale ou triangulaire supérieure.

- 1) Pourquoi peut-on se restreindre à]0; π [?
- 2) Calculer le polynôme caractéristique de M (MAPLE).
- 3) Dans quel cas les valeurs propres sont-elles simples ?
- 4) Exprimer alors R et P.
- 5) Terminer l'exercice.

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:18]

- 1) Périodicité et imparité de sinus, et le fait que le cas $\theta = 0$ est trivial.
- 2) On trouve $(X + \sin \theta)(X + \sin 2\theta)(X - \sin \theta - \sin 2\theta)$. En fait, on peut remarquer que $-\sin \theta$ et $-\sin 2\theta$ sont valeurs propres $(A - \lambda I_3)$ est clairement non inversible pour ces deux valeurs. Si ces valeurs sont distinctes $(\theta \notin \{0, \pm \frac{\pi}{3}\})$, alors puisque $\text{tr} A = 0$ on en

déduit que $\sin \theta + \sin 2\theta$ est valeur propre. Si ces valeurs sont identiques, elles sont de multiplicité 2 (regarder le rang de la matrice) et donc même conclusion.

$$\text{Sp} A = \{-\sin \theta, -\sin 2\theta, \sin \theta + \sin 2\theta\}$$

ce qui montre que $\chi_A = (X + \sin \theta)(X + \sin 2\theta)(X - \sin \theta - \sin 2\theta)$.

- 3) On demande à MAPLE les conditions pour que ces trois nombres soient distincts, grâce à l'ordre solve. On obtient, dans $[0; \pi]$:

$$\theta \notin \left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi - \text{Arc tan } \sqrt{15}\right\}.$$

- 4) On peut utiliser jordan par exemple, ou bien trouver à la main les vecteurs propres : $(1, -1, 0)$ pour $\lambda = -\sin \theta$, $(0, 1, -1)$ pour $\lambda = -\sin 2\theta$ et le dernier est un peu plus compliqué : en notant $a = \sin \theta$ et $b = \sin 2\theta$, c'est

$$t \left(1, \frac{a+b+b^2/a}{a+2b}, 1 + \frac{b}{a} - \frac{a+b+b^2/a}{a+2b} \right)$$

Ce dernier vecteur n'a de sens que si $a \neq 0$ et $a + 2b \neq 0$. Notamment, dans le cas où $\theta = \pi - \text{Arc tan } \sqrt{15}$, il n'est pas défini.

- 5) Si $\theta = 0$, alors $R = 0$ et P quelconque. Si $\theta = \frac{\pi}{3}$ alors $\frac{1}{2}$ MAPLE arriver très bien à diagonaliser. En revanche, si $\theta = \pi - \text{Arc tan } \sqrt{15}$, MAPLE ne diagonalise rien du tout et s'échine en vain sur jordan (pour une raison qui m'échappe...)

◆ **RED.60** Centrale MP – 2002
 On définit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ par $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & b & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n & & & b \end{pmatrix}$, avec $(a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

- 1) A est-elle diagonalisable ?
- 2) Cherchera une valeur propre évidente.
- 3) Si A est diagonalisable, donner une base diagonalisante. Sinon, on explicitera une base trigonalisante.

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:21]

◆ **RED.61** CCP MP – 2002
 Diagonaliser la matrice $M = (m_{ij})$ définie par $m_{in} = m_{ni} = 1$ pour tout $i \in [1, n]$, les autres coefficients étant nuls.

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:43]

◆ **RED.62** (**) CCP PC – 2002
 On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
- 2) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et la relation de récurrence
$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n - w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 2v_n + 2w_n \end{cases}$$
 Expliciter ces suites.
- 4) Résoudre le système $AX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

◇ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:15]

- 1) $\chi_C = X(X - 2)(X - 4)$, et $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \text{diag}(0, 2, 4).$$

- 2) On trouve alors par exemple, pour $n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 2^n - 4^n & 4^n - 2^n \\ 2^n & 2^n & -2^n \\ 4^n & -4^n & 4^n \end{pmatrix}$$

- 3) Toujours pour $n \geq 1$:

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{2}(2^n + 4^n) \\ v_n = 2^{n-1} \\ w_n = 4^n/2 \end{cases}$$

- 4) $B \notin \text{Im}(A)$ donc il n'y a aucune solution.

◆ **RED.63 (Matrices stochastiques)** CCP MP – 2002
 Notons \mathcal{S} l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $a_{ij} \geq 0$ pour tout $(i, j) \in [1, n]^2$ et

$$\forall i \in [1, n] \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1.$$

- 1) Montrer que toute matrice de \mathcal{S} admet au moins une valeur propre et donner un vecteur propre associé.
- 2) Déterminer l'ensemble des matrices de \mathcal{S} n'ayant qu'une seule valeur propre.
- 3) Démontrer que si $(A, B) \in \mathcal{S}^2$ alors $AB \in \mathcal{S}$. Montrer que si λ est une valeur propre de $A \in \mathcal{S}$, alors $|\lambda| \leq 1$.

◊ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:22]

- 2) On suppose que A n'a que 1 pour valeur propre. Alors A est trigonalisable.
 3) Simple calcul.

◆ **RED.64** (*) CCP PC – 2002

On note $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $(A - kI_3)$ soit nilpotente.

◊ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:17]

On trigonalise A à la main en notant que $\chi_A = -(X-2)^3$.

◆ **RED.65** CCP PC – 2002

Notons $E_n = \mathbb{R}_n[X]$. On note f l'endomorphisme de E défini par $f(P) = (X^2 - 1)P'' - 2XP'$. Donner la matrice, dans la base canonique \mathcal{B} , de f . Quels sont ses valeurs propres et ses vecteurs propres? Est-elle diagonalisable?

◊ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:34]

◆ **RED.66** (*) CCP MP – 2002

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ 0 & b & a \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$.

- 1) Trouver les valeurs propres de A et montrer que A est diagonalisable.
- 2) Montrer que $AB = BA$. En déduire une relation entre les vecteurs propres de A et ceux de B.
- 3) Montrer que B est diagonalisable et la diagonaliser (sans calculer ses valeurs propres).

◊ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:28]

- 3) On cherche alors les vecteurs propres de A, on forme la matrice P diagonalisante pour A, et elle diagonalise B, ici

1) On calcule $\chi_A = -(X^3 - 1) = -(X-1)(X-j)(X-\bar{j})$, qui est scindé simple dans \mathbb{C} , donc A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$. On peut aussi noter que $A^3 = I_3$ et parvenir à la même conclusion.

2) Calcul. On en déduit que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B; en effet, les espaces propres de A sont stables par B et de dimension 1.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

◆ **RED.67** CCP MP – 2002

On considère les deux matrices

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \theta & \operatorname{sh} \theta \\ \operatorname{sh} \theta & \operatorname{ch} \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A'(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer que $A(\theta)$ et $A'(\theta)$ sont diagonalisables respectivement dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
- 2) Les diagonaliser (on donnera les matrices diagonalisantes).
- 3) Montrer que

$$G = \{A(\theta) ; \theta \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad G' = \{A'(\theta) ; \theta \in \mathbb{R}\}$$

ont une structure de groupes commutatifs. Ces groupes sont-ils isomorphes?

◊ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:53]

◆ **RED.68** TPE PC – 2002

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 0 & j & c & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$.

- 1) Trouver les conditions sur (a, b, c) pour que M soit diagonalisable.
- 2) On suppose $a = b = c = 0$. Calculer M^{2002} .

◊ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:13]

$b/a = c/(j-1)$.

1) Il faut que $\operatorname{rg}(A - I_4) = 2$, $\operatorname{rg}(A - jI_4) = 1$ et $\operatorname{rg}(A - j^2I_4) = 1$, ce qui n'a lieu (seule la première condition donne quelque chose) que si

2) On diagonalise : or $D^{2002} = D$ car $j^{2002} = j$ et $\bar{j}^{2002} = \bar{j}$, donc $M^{2002} = M!$

◆ **RED.69** Magistère Rennes MP – 2002

On pose $A = \begin{pmatrix} t & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & t \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer, sans calculer le polynôme caractéristique de A, que $(t-1)$ est valeur propre.
- 2) Espace propre associé? Multiplicité?
- 3) Chercher les autres valeurs propres.
- 4) A est-elle diagonalisable?

◊ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:44]

- 1) On a $A - (t-1)I_n = J$ non inversible, donc $(t-1) \in \operatorname{Sp}(A)$.
- 2) Or on sait que les $X = {}^t(0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0)$ sont dans $\operatorname{Ker} J$, ce qui nous fait $(n-1)$ vecteurs, c'est déjà ça. D'ailleurs on sait bien qu'on n'en trouvera pas d'autre, sinon on aurait $A = (t-1)I_n$ ce qui n'est pas vrai.

3) Il est manifeste que $X = {}^t(1, \dots, 1)$ est vecteur propre pour la valeur propre $t+n-1$.

4) Bon, ben du coup on a n vecteurs propres formant une famille libre : A est bien diagonalisable.

◆ **RED.70** ENSAI MP – 2002

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

◊ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:51]

$\chi_A = -X^3 + 15X^2 + 18X$ possède 0 comme racine, ainsi que deux racines,

l'une positive, l'autre négative, donc A est diagonalisable, mais les valeurs propres sont des horreurs et les vecteurs aussi. Intérêt de la manip?

◆ **RED.71** CCP PC – 2002

Montrer que dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, toute matrice est semblable à sa transposée. Que dire dans les dimension supérieures?

◊ [Rec02/reduction-r2.tex/red-r2:52]

◆ **RED.72** Mines PC – 2003

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $\operatorname{tr}(A^n)$ soit divisible par 3.
- 2) Calculer A^{2003} en fonction de I_3 , A et A^2 .

◊ [Rec03/reduction-r3.tex/r3:163]

- 1) On commence par noter que A est diagonalisable, avec par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\operatorname{tr}(A^n) = 1 + 2^n$, ce qui est divisible par 3 dès que n est impair.

- 2) On peut écrire $A = J + N$ avec que des 1 sur J et un seul -2 sur la matrice N nilpotente, et utiliser $J^2 = 3J$ donc $J^n = 3^{n-1}J$, donc par le binôme de Newton

$$A^n = J^n + nJ^{n-1}N,$$

etc.

Mais la méthode demandée passe par la division du polynôme X^{2003} par le polynôme caractéristique $X(X-1)(X-2)$ qui annule A (puisque celle-ci est diagonalisable, n'oublions pas que Cayley-Hamilton est H-P!) On écrit donc $X^{2003} = Q \cdot X(X-1)(X-2) + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, et on évalue en 0, 1 et 2, ce qui donne $\gamma = 0$, $1 = \alpha + \beta$ et $2^{2003} = 4\alpha + 2\beta$ donc

$$\alpha = 2^{2002} - 1 \quad \beta = 2 - 2^{2002}.$$

On applique ensuite à M ce qui donne

$$A^{2003} = (2^{2002} - 1)A^2 + (2 - 2^{2002})A.$$

◆ **RED.73** Centrale MP – 2003

On pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^n$.

◊ [Rec03/reduction-r3.tex/r3:333]

On peut, si n'a pas d'intuition, calculer le polynôme caractéristique de A_n , et trouver

$$\chi_A = (X-1)^2 + \frac{\alpha^2}{n^2} = X^2 - 2X + \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right),$$

dont les racines sont

$$\lambda_n^+ \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{\alpha}{n} \quad \text{et} \quad \lambda_n^- \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{\alpha}{n}.$$

Les vecteurs propres de A sont respectivement $X^+ \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $X^- \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

la matrice diagonalisant A_n est donc indépendante de n et vaut

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A_n = P \begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha}{n} & \\ & 1 - \frac{\alpha}{n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A_n^n = P \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n & \\ & \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^n = P \begin{pmatrix} e^{ia} & \\ & e^{-ia} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

RED.74 (Déterminant d'une matrice circulante) (**) Centrale PC – 2003

On note $M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$ (matrice circulante), et

$$J = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{n-1,1} & I_{n-1} \\ 1 & \mathbb{O}_{1,n-1} \end{pmatrix}.$$

- Exprimer M comme un polynôme en J .
- Diagonaliser J .
- En déduire $\det M$.

[Rec03/reduction-r3.tex/r3:438] Cela montre que J est diagonalisable. On peut alors écrire

$$M = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k.$$

2) On remarque que la famille $\{J^k\}_{k=0, \dots, n-1}$ est libre et $J^n = I$, ce qui montre que $\chi_J = \mu_J = X^n - 1$. On en déduit que

$$\text{Sp}(J) \subset \{\omega_n^k; k \in [0; n-1]\},$$

où l'on a posé

$$\omega_n = e^{2i\pi/n}.$$

Le sous-espace vectoriel propre pour la valeur propre ω_n^k est de dimension 1 et engendré par le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^k \\ \omega_n^{2k} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)k} \end{pmatrix}$$

3) Les puissances successives de J commutent et sont diagonalisables, donc elles sont simultanément diagonalisables, donc M est diagonalisable. On peut de plus écrire

$$M = D \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k \right) P^{-1},$$

ce qui donne le déterminant : $\prod_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_n^{kp} \right)$.

RED.75 TPE MP – 2003

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose

$$T(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & -1 \\ 1 & -1-a & 2 \\ 1 & -3 & 4-a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A(a)$ et $T(a)$ sont semblables.

[Rec03/reduction-r3.tex/r3:327] On vérifie que $T(a)$ a pour polynôme caractéristique $\chi_{T(a)} = (X-1+a)^2(X-2+a)$ et que la dimension de l'espace propre associé à $1-a$ est de 1.

RED.76 CCP MP – 2003

Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

[Rec03/reduction-r3.tex/r3:261]

RED.77 (Anticommutant d'une matrice) TPE MP – 2003

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Diagonaliser A .
- Déterminer l'anticommutant de A , c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $AM = -MA$.

[Rec03/reduction-r3.tex/r3:386]

RED.78 IIE MP – 2003

Soient a et b deux complexes non nuls et la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A_n = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b & a \\ b & 0 & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & \mathbb{O} & \vdots & \vdots \\ b & 0 & \cdots & 0 & b \\ a & b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

- Déterminer le rang de A_n .
- A_3 est-elle diagonalisable ?
- Dans le cas où A_n est diagonalisable, étudier la convergence de la suite $(A_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

[Rec03/reduction-r3.tex/r3:369] et $\text{tr}(A_n^2) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}^2 = 4a^2 + 4(n-2)b^2 = \lambda^2 + \mu^2$, ce qui permet de conclure.

1) $\text{rg } A_n = 2$.
 2) On en déduit que $\dim \text{Ker}(A_n) = n - 2$, ce qui prouve que 0 est de multiplicité au moins $n - 2$. On obtient les deux dernières valeurs propres en considérant

$$\text{tr}(A_n) = 2a = \lambda + \mu,$$

3) **À FINIR !!!**

RED.79 IIE MP – 2003

Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer ses sous-espaces stables et son commutant.

[Rec03/reduction-r3.tex/r3:413] On choisit $V_3 = {}^t(1, 0, 0, 0)$ et $V_4 = {}^t(0, 0, 0, 1)$. Alors

PoCa(A) = $\lambda^2(\lambda^2 - 1)$.
 Vecteur de base de E_0 : $V_1 = {}^t(1, 1, 0, 0)$.
 Vecteur de base de E_1 : $V_2 = {}^t(0, 0, 1, 1)$.

$$\text{mat}_{(V_1, \dots, V_4)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

RED.80 (Bloc de Jordan) (♣) INT MP – 2003

Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

[Rec03/reduction-r3.tex/r3:428] M possède au moins une valeur propre λ , et $\text{Sp}(M) = \{\lambda\}$ sinon elle est diagonalisable. On trouve un vecteur propre x . On choisit y dans un supplémentaire de $\langle x \rangle$. Alors $f(y) = \alpha x + \beta y$. Le réel α étant non nul (sinon y est vecteur propre à la question).

et A est diagonalisable, on peut, quitte à diviser y par α , avoir $\alpha = 1$. M est alors semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, et donc, puisque $\beta \in \text{Sp}(M)$, on a $\beta = \lambda$, ce qui répond

RED.81 (♣) S' Cyr MP – 2003

(Avec Maple)

On donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et on cherche à déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$. Proposer une conjecture, et la démontrer.

[Rec03/reduction-r3.tex/r3:123] On s'aperçoit que les coefficients divergent. Les valeurs propres sont 6, 2, $-2 \pm 2i$. Seule 6 nous intéresse. On diagonalise,

$$P^{-1} \text{diag}(6, 0, 0, 0)P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = P^{-1} \text{diag}(6, 2, -2 + 2i, -2 - 2i)P$ ce qui montre que les tous coefficients de A ont un terme en $\frac{6^n}{4}$, donc ils tendent bien vers $+\infty$.

et si on ne s'occupe que des valeurs liées à la valeur propre 6, on remarque que

RED.82 Petites Mines MP – 2003

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ et on définit $G = \{I_3, A, A^2, \dots, A^n, \dots\}$.

- Montrer que G est un groupe. Quel est son cardinal ?
- Calculer $\exp(A)$.

◇ [Rec03/reduction-r3.tex/r3:222]

◆ **RED.83 (Matrice compagnon)** (★★) Centrale MP – 2004

On note $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 3 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer le polynôme caractéristique de A_n . Montrer que ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
- A_3 est-elle diagonalisable dans \mathbb{R} ? Dans \mathbb{C} ?
- Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0; +\infty[$ tel que $x_n \in \text{Sp}(A_n)$.

INDICATION : On étudiera, si P est le polynôme caractéristique de A , son polynôme aux inverses $Q = X^n P\left(\frac{1}{X^n}\right)$.

- Étudier le comportement de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:185]

◆ **RED.84** (★★) Centrale MP – 2004

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer le polynôme minimal de A .
- Calculer A^n à partir de la forme réduite de A dans \mathbb{Q} .

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:163]

◆ **RED.85** (★) Centrale PC – 2004

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on considère un polynôme $A = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, où $\deg A = d \leq n$.

On définit $f: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto (AP)^{(n)}. \end{cases}$

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que f est injective si et seulement si $d = n$.
- Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E . Déterminer ses valeurs propres.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:43]

◆ **RED.86** (★) Centrale PC – 2004

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} \text{ch}(a) & b \text{sh}(a) \\ \frac{1}{b} \text{sh}(a) & \text{ch}(a) \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^{*+}$.

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:102]

◆ **RED.87** (★) Mines MP – 2004

- Soit a un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel stable par a . Montrer que $a|_F$ est également diagonalisable.
- En déduire que, si B vérifie $B^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$, alors B est triangulaire supérieure.

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:259]

◆ **RED.88** (★) Mines MP – 2004

On note $\omega = e^{2i\pi/5}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & 1 & \omega \\ \omega^3 & \omega^4 & 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^4 & 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est-elle diagonalisable ?
- Calculer $\exp(A)$.
- Quelles sont les valeurs propre de $\exp(A)$?

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:224]

◆ **RED.89** (★★) Mines PC – 2004

Trouver $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^5 = M^2$ et $\text{tr}(M) = n$.

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:54] M est annulée par $X^2(X^3 - 1)$ donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{0, 1, j, \bar{j}\}$. Puisque $\text{tr}(M) = n$, on en déduit que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1\}$. Par suite, M est inversible, donc est annulée par $X(X^3 - 1)$ qui est scindé à racines simples sur \mathbb{C} , donc M est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et semblable à I_n , donc $M = I_n$.

◆ **RED.90** Mines PC – 2004

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver l'ensemble des matrices $M \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec A .

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:97]

◆ **RED.91** (★★) TPE MP – 2004

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = I_2$ et $AB + BA = 0$. Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:179]

À FINIR !!!

◆ **RED.92** (★★) CCP PC – 2004

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? (On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$.)

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:47]

Excellent exercice !
C'est une matrice de rang 1 et qui admet pour vecteurs propres pour la valeur propre 0 : ${}^t(1, 1, 1)$ et ${}^t(1, -j^2, 0)$. Sa trace est nulle, donc la troisième valeur propre est 0 donc A n'est pas diagonalisable.

◆ **RED.93** (★) CCP PC – 2004

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les éléments propres de A et B .
- Sont-elles diagonalisables ?

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:46]

l'identité, donc B n'est pas diagonalisable.
 $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$ et A est donc diagonalisable. $\text{Sp}(B) = \{1\}$ et B n'est pas

◆ **RED.94** (★) CCP PC – 2004

On note A la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{ij} = i + j$.

- Calculer le rang de A . Que peut-on dire de son noyau ?
- A est-elle diagonalisable ?

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:50]

1) $\text{rg}(A) = 2$.

◆ **RED.95** (♣) CCP PC – 2004
 Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes telle que $A^2 + A + I_n = 0$.
 1) Montrer que A est diagonalisable.
 2) Montrer que A est inversible.
 3) Calculer A^3 .

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:123]

- 1) $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$ annule A donc A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
 2) $\text{Sp}(A) \subset \{j, \bar{j}\}$ donc $0 \notin \text{Sp}(A)$ donc $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Alternativement, on peut remarquer que
 3) $A^3 = -A^2 - A = I_n$, d'après la remarque précédente ; ou bien diagonaliser A .

$$A(-A_n - I_n) = I_n$$

ce qui donne de plus l'inverse de A .

◆ **RED.96 (Trigonalisation)** (★) CCP MP – 2004
 On note $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 1) Trigonaliser A .
 2) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:177]

◆ **RED.97** (♣) CCP MP – 2004
 Calculer la puissance n -ième de $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:205]

Les valeurs propres sont 1 et 2 : la matrice est diagonalisable.

◆ **RED.98** (★) Petites Mines PC – 2004
 On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
 1) Étudier les éléments propres de A . Est-elle diagonalisable ? (On calculera $A^2 \dots$)
 2) On note

$$\mathcal{C} = \{B \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R}) ; AB = BA\} \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \{B \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R}) ; AB = -BA\}$$

 Calculer les dimensions de \mathcal{C} et \mathcal{S} . A-t-on $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R}) = \mathcal{C} \oplus \mathcal{S}$?

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:61]

◆ **RED.99** Petites Mines PC – 2004
 On note $E = \{A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) ; AJ = JA\}$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 1) Montrer que :

$$A \in E \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad AJ = JA = \lambda J)$$

 Que représente λ ? (On utilisera les coefficients de A .)
 2) Montrer que E est un sous-anneau.
 Quelles sont les propriétés de $d : A \mapsto d(A) = \lambda$?
 3) Calculer $\dim E$ (on pourra diagonaliser J).

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:414]

d peut-être vue comme la restriction de la trace sur E !

- 1) $AJ = JA$ signifie que la somme sur chaque ligne = la somme sur chaque colonne = λ d'où le résultat.
 2) sous-e.v. donc sous-groupe OK, $id \in E$ et si $A, B \in E$ alors $AB \in E$, en fait c'est une sous-algèbre
 3) $J \sim \text{diag}(3, 0, 0)$ donc A commute avec J ssi $E_1(J) = \langle (1, 1, 1) \rangle$ stable et idem pour son orthogonal donc dans une base de diagonalisation :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{R} & 0 \\ 0 & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \end{pmatrix} \right\} \text{ donc } \dim E = 1 + 4 = 5 \text{ (généralisation = } n^2 - 2n + 2).$$

◆ **RED.100** (★) ENSTIM MP – 2004
 Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $P = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$.
 1) On suppose que $a \neq 0$. P est-elle diagonalisable ?
 2) Et si $a = 0$?

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:250]

- 1) P est de rang 2, on a donc 0 avec multiplicité $\geq n - 2$; notons λ et μ les valeurs propres manquantes, on a $\lambda + \mu = \text{tr}(P) = a + n - 1$ et $\lambda^2 + \mu^2 = \text{tr}(P^2) = a^2 + (n - 1)^2$, ce qui donne $\lambda = a^2$ et $\mu = n - 1$.
 2) Si $a = 0$, P est de rang 1 et possède la valeur propre $n - 1$ de multiplicité 1, et 0 de multiplicité obligatoirement $n - 1$, donc P est diagonalisable.

Ainsi, si $a \neq \sqrt{n-1}$, P est diagonalisable.

◆ **RED.101** (♣) S¹ Cyr PC – 2004
 (Avec Maple)
 Trouver toutes les matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient $M^2 - 4M + 3I_n = 0$.

◇ [Rec04/reduction-r4.tex/r4:134]

$(X - 1)(X + 3)$ annule M .

◆ **RED.102** (★) Centrale PC – 2005
 1) Donner le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 7X + 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 2) On note $A = \begin{pmatrix} -22 & 16 & 82 \\ 20 & -17 & 80 \\ 10 & 8 & 39 \end{pmatrix}$. Exprimer A^n en fonction de A^2 , A et I_3 .
 3) Trouver l'ensemble des matrices qui commutent avec A .

◇ [Rec05/reduction-r5.tex/r5:77]

- 1) 2) 3) Les polynômes en A .

◆ **RED.103** (★★) Centrale PC – 2005
 On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On considère l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $T : X \mapsto AX - XA$.
 1) Trouver les valeurs propres de T .
 2) Trouver la base \mathcal{B} dans laquelle la matrice représentative de T est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

◇ [Rec05/reduction-r5.tex/r5:101]

◆ **RED.104 (Racine d'une matrice)** (★★) Centrale PC – 2005
 1) Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Donner des exemples simples de sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n stables par A et B à la fois.
 2) On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

◇ [Rec05/reduction-r5.tex/r5:127]

◆ **RED.105** (★) Mines PC – 2005
 Déterminer l'ensemble des espaces de \mathbb{R}^3 de dimension 2 stables par A , où l'on identifie l'endomorphisme A avec sa matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

◇ [Rec05/reduction-r5.tex/r5:123]

◆ **RED.106** (★) CCP PC – 2005

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u^3$ et tel que $\dim(\text{Ker}(u - \text{Id}_E)) = 1$.

- 1) Montrer que u^2 est un projecteur.
- 2) Montrer que $\text{Sp}(u) = \{0, 1\}$.
- 3) Montrer que $u + \text{Id}_E$ est bijectif. En déduire que $\text{Ker}(u^2 - \text{Id}_E) = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ puis que $\dim(\text{Ker } u^2) = 2$.
- 4) Montrer que $\dim(\text{Ker } u) \in \{1, 2\}$. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \{0, 1\}.$$

◇ [Rec05/reduction-r5.tex/r5:72]

◆ **RED.107** (★) Petites Mines PC – 2005

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $L \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \textcircled{0} & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Sous quelle condition L est-elle diagonalisable ?
- 2) Calculer les puissances de L .

◇ [Rec05/reduction-r5.tex/r5:92]

◆ **RED.108** (★) CCP PC – 2005

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $A_\theta = \begin{pmatrix} \text{ch } \theta & \text{sh } \theta \\ \text{sh } \theta & \text{ch } \theta \end{pmatrix}$ et $A_\theta^* = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. On définit enfin $G = \{A_\theta ; \theta \in \mathbb{R}\}$ et $G^* = \{A_\theta^* ; \theta \in \mathbb{R}\}$.

- 1) Montrer que A_θ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et que A_θ^* l'est dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.
- 2) Montrer que G et G^* sont des groupes commutatifs pour la multiplication matricielle.
- 3) Montrer qu'il existe P, P^* inversibles et indépendantes de θ telles que $P^{-1}A_\theta P$ et $P^{*-1}A_\theta^* P^*$ soient diagonales.
- 4) G et G^* sont-ils isomorphes ?

◇ [Rec05/reduction-r5.tex/r5:93]

3) T.

1) T.

2) T.

4) Non à cause de problèmes topologiques.

Réduction : exercices plus théoriques

◆ **RTH.1** (★★★)
 Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que

$${}^t X A^{-1} X = \frac{\det(A + X^t X)}{\det A} - 1.$$

◇ [Divers/reductheoexo.tex/red:68] Ent particulier, pour $\lambda = -1$, $\det(M + I) = 1 + {}^t YX$.
 Notons $Y = {}^t A^{-1} X$ et $M = X^t Y$. Alors $\text{rg } M \leq 1$, donc $0 \in \text{Sp } M$ et est
 de multiplicité égale à $n - 1$ au minimum. Le polynôme caractéristique de M est
 donc scindé sur \mathbb{R} . De plus la dernière valeur propre est $\text{tr } M = {}^t Y \cdot X$.
 On a donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\det(M - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^{n-1} (\lambda - {}^t YX).$$

◆ **RTH.2 (Caractères)** (♣)
 Soit $(G, +)$ un groupe additif de cardinal fini n . On appelle **caractère** de G tout morphisme de $(G, +)$ vers (\mathbb{C}^*, \cdot) . On notera \widehat{G} l'ensemble des caractères de G .
 Notons \mathcal{E} l'algèbre complexe $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ des applications de G dans \mathbb{C} .

1) Pour tout élément g de G , notons T_g l'application (appelée **translation**)

$$T_g : \begin{cases} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \\ \phi \longmapsto \psi : \begin{cases} G \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ x \longmapsto \psi(x) = \phi(x + g). \end{cases} \end{cases}$$

a) Montrer que, si $g \in G$, alors T_g est un endomorphisme diagonalisable de \mathcal{E} .
 b) Montrer que, si $g, g' \in G$, alors $T_g \circ T_{g'} = T_{g'} \circ T_g$.

2) Montrer qu'il existe une base (χ_1, \dots, χ_n) de \mathcal{E} , dont tous les vecteurs sont des caractères de G , et qui diagonalise simultanément toutes les translations.

3) Montrer que \widehat{G} est un sous-groupe du groupe des éléments inversibles de \mathcal{E} et que $\text{Card}(\widehat{G}) = n$.

◇ [Divers/reductheoexo.tex/red:73] Ainsi, χ_k est un multiple de ϕ_k . □
 On en déduit que $\mathcal{C} = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ est une base diagonalisante des translations.

3) Il est clair que \widehat{G} est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathcal{F}(G, \mathbb{C}^*)$, groupe des éléments inversibles de \mathcal{E} ($\phi \in \mathcal{E}$ est inversible s'il est à valeurs dans \mathbb{C}^*).
 De plus, il contient les n éléments (χ_1, \dots, χ_n) . Montrons que ce sont les seuls. Pour cela, il suffit de choisir $\chi \in \widehat{G}$ quelconque. Puisque \mathcal{C} est une base de \mathcal{E} , on peut développer

$$\chi = \lambda_1 \chi_1 + \dots + \lambda_n \chi_n.$$

Or $T_g(\chi_k) = \chi_k(g) \chi_k$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par construction des χ_k faite dans la question précédente. On en déduit que

$$T_g(\chi) = \lambda_1 \chi_1(g) \chi_1 + \dots + \lambda_n \chi_n(g) \chi_n, \quad (*)$$

mais d'un autre côté, on a, pour tout $x \in G : T_g(\chi)(x) = \chi(x + g) = \chi(x)\chi(x)$, ce qui s'écrit

$$T_g(\chi) = \chi(g) \chi.$$

(**) d'où l'on déduit, en écrivant l'équation (*) et (**) et en utilisant l'unicité dans la décomposition (χ_1, \dots, χ_n) :

$$\forall g \in G \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_k \chi(g) = \lambda_k \chi_k(g).$$

On choisit maintenant un indice $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\alpha_k \neq 0$, et on obtient

$$\forall g \in G \quad \chi(g) = \chi_k(g),$$

ou en d'autres termes $\chi = \chi_k$.
 On en déduit que $\widehat{G} = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ est de cardinal n .

◆ **RTH.3 (Endomorphisme cyclique)** (★★★)
 1) Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice ayant n valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Montrer qu'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$M \sim \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & & a_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \textcircled{1} & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ & & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

2) Soient E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que E est **monogène** sous l'action de u (c'est-à-dire qu'il existe $x \in E$ tel que $E = \mathbb{K}[u](x)$), si et seulement si u est scindé simple.

◇ [Divers/reductheoexo.tex/red:74] Réciproquement, supposons que E est monogène. On choisit donc $x \in E$ vérifiant $E = \mathbb{K}[u](x)$. Notamment, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre (sans quoi $\mathbb{K}[u](x)$ est clairement de dimension $< n$), donc c est une base de E . Dans cette base, la matrice de u est une matrice compagnon du style celle que l'on vient d'écrire. Le polynôme caractéristique de cette matrice compagnon est donc égal au polynôme $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} X^k$ (exercice classique, une simple récurrence) et on sait que les sous-espaces vectoriels propres associées sont tous de dimension 1 (cf. **POCA.4**). Puisque u est diagonalisable, u est donc scindé simple.
 Pour la dernière question, il doit y avoir une astuce. Pour conclure, il faut de toute façon la décomposition de Frobenius, qui est assez loin hors-programme.

◆ **RTH.4 (AB - BA = λA)** (*)
 Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices vérifiant $AB - BA = \lambda A$, où $\lambda \neq 0$. Montrer que A est nilpotente.

◇ [Divers/reductheoexo.tex/red:75] On géométrise, A est représentée par un endomorphisme u . Supposons $\text{tr } u^k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En notant $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ les valeurs propres distinctes de u et (m_1, \dots, m_p) leur ordre de multiplicité, on obtient

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \sum_{i=1}^p m_i \lambda_i^k = 0.$$

Or le système d'équation

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k-1} x_i,$$

d'inconnues $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{C}^p$ n'admet que la solution nulle puisque son déterminant est un Vandermonde, nul puisque les λ_i sont deux à deux distincts. Par suite $m_1 \lambda_1 = \dots = m_p \lambda_p = 0$ donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Ah oui mais ça n'est pas vrai si $p \geq 2$, puisqu'on a supposé les λ distincts, donc $p = 1$: il n'y a qu'une seule valeur propre. Cette valeur propre est nécessairement 0, et donc A est nilpotente (l'écrire sous forme triangulaire).

◆ **RTH.5** (★★★)
 Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Montrer que si $AB = BA$, alors A et B ont un vecteur propre en commun.
 2) Montrer que si $AB - BA = \lambda A$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors A est nilpotente et A et B admettent un vecteur propre en commun.
 3) Montrer que si $AB - BA = \alpha A + \beta B$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, alors A et B admettent un vecteur propre en commun.

◇ [Divers/reductheoexo.tex/red:76] On note Φ_A, Φ_B les endomorphismes de $E = \mathbb{C}^n$ canoniquement associés à A et B .

1) Soit λ une valeur propre de A (il en existe en vertu du théorème de d'Alembert). Le sous-espace vectoriel $E_\lambda(\Phi_A)$ est stable par Φ_B . Or la restriction de Φ_B à cet espace, étant scindé, admet une valeur et un vecteur propre. Celui-ci est donc vecteur propre commun à Φ_A et à Φ_B .
 2) Tout d'abord, une simple récurrence montre que $A^k B - B A^k = k \lambda A^k$. Si A n'est pas nilpotente, alors $A^k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si l'on considère l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\Phi : M \mapsto MB - BM$, alors A^k est vecteur propre pour la valeur propre $k\lambda$; et par suite

$$\{k\lambda ; k \in \mathbb{N}^*\} \subset \text{Sp}(A),$$

ce qui est impossible puisque $\text{Card } \text{Sp}(A) \leq \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) = n^2$.
 Donc A est nilpotente et $F = \text{Ker } \Phi_A$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Or V est manifestement stable par Φ_B , donc $\Phi_B|_V$ admet un vecteur propre dans V , eh eh !
 3) On suppose que $\beta \neq 0$ (sinon on est dans un des cas précédents). On pose

$$C = AB - BA = \alpha A + \beta B.$$

Alors $AC - CA = \beta C$. Donc C est nilpotente et on peut trouver $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $CX = 0$ et $AX = \lambda X$, où λ est un complexe. Alors $(\alpha A + \beta B)X = 0$ et $AX = \lambda X$ donnent $BX = -\frac{\alpha}{\beta} X$.

◆ **RTH.6** ($u \circ v - v \circ u = \text{Id}$) (*)
 Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, deux endomorphismes non nuls tels que $u \circ v - v \circ u = \text{Id}_E$.

- Calculer $P(u) \circ v - v \circ P(u)$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.
- Montrer que u et v n'admettent pas de polynômes minimaux.
- Donner un exemple de couple (u, v) vérifiant la relation donnée (on montrera auparavant que la dimension de l'espace est nécessairement infinie).

◇ [Divers/reductheoexo.tex/red:77] Si P est un polynôme minimal annulateur de u , alors $P'(u) = 0$ or $\deg P' < \deg P$: contradiction.
 Une simple récurrence permet de montrer que $P(u) \circ v - v \circ P(u) = P'(u)$.

◆ **RTH.7** (Commutant d'un endo. cyclique) (**)
 Soit E un \mathbb{C} -e.v. de dimension n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant n valeurs propres distinctes. On note

$$\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) ; f \circ g = \circ f\}$$

le **commutant** de f .
 Montrer que $\dim \mathcal{C} = n$ et donner une base de \mathcal{C} .

Remarque 1 Si f est cyclique mais non diagonalisable, le résultat reste identique, cf. exercice **RTH.36** page 208.

◇ [Divers/reductheoexo.tex/red:80] (Cf. exercice **RTH.20** page 204.)
 • On a bien sûr $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}(f)$.
 • On choisit une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ de E , propre pour f , et on pose $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
 Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$.
 Pour $i = 1, \dots, n$, on a $E_{\lambda_i}(f) = \text{Vect}(b_i)$ et cette droite est stable par g , ce qui prouve que $g(b_i) \in \text{Vect}(b_i)$. Ainsi, la base \mathcal{B} est également diagonalisante pour g . Notons $B = \text{mat}_{\mathcal{B}}(g) = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.
 On considère maintenant le polynôme interpolateur de Lagrange associé aux scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et (μ_1, \dots, μ_n) (ce qui est possible car les λ_i sont distincts deux à deux) :

$$\forall i \in [1; n] \quad P(\lambda_i) = \mu_i$$

 On a alors immédiatement $B = P(A)$ et donc $g = P(f)$.
 Cela montre que $\mathcal{C}(f) \subset \mathbb{K}_{n-1}[f]$.
 • On a donc $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}(f) \subset \mathbb{K}_{n-1}[f] \subset \mathbb{K}[f]$ ce qui montre l'égalité entre ces ensembles.

◆ **RTH.8** (Matrices à spectres disjoints) (***)
 Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- pour tout $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$;
- pour tout $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on a $AX = XB \Rightarrow X = 0$;
- $\chi_B(A)$ est inversible ;
- $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

INDICATION : On montrera l'équivalence entre (a) et (b), puis celle entre (c) et (d). Puis on montrera par exemple (d) \Rightarrow (b) et enfin $\neg(d) \Rightarrow \neg(b)$.

◇ [Divers/reductheoexo.tex/red:81] (a) \Leftrightarrow (b) est trivial en dimension finie : cela signifie que $T : X \mapsto AX - XB$ est inversible.
 (c) \Leftrightarrow (d) : il suffit d'écrire que χ_B est scindé : $\chi_B = \prod (X - \lambda_i)$.
 (c) \Rightarrow (b) ; remarquer que si $AX = XB$, alors $P(A)X = XP(B)$. Notamment pour un polynôme P annulateur de B (son polynôme caractéristique par exemple, selon le programme). Seulement, on peut choisir P ne comportant aucune valeur propre de A , selon un raisonnement classique (si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et si $P = Q \cdot (X - \lambda)$ annule B , alors Q annule B). Ainsi, $P(A)X = 0$ mais $P(A)$ est inversible donc $X = 0$.
 $\neg(d) \Rightarrow \neg(b)$: Soit λ une valeur propre commune. On choisit U tel que $AU = \lambda U, BV = \lambda V$. On pose $X = U^t V$. Alors $AX = \lambda X, XB = U^t VB = \lambda X$, et $X \neq 0$.

◆ **RTH.9** ($M^3 = I_n$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$) (*)
 On pose $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Trouver toutes les matrices $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M^3 = I_n$.

◇ [Divers/reductheoexo.tex/red:83] $X^3 - 1 = (X - 1)(X - 2)(X - 4)$ est scindé simple et annule M , donc M est diagonalisable. Or une matrice diagonale de cube I_n a des coefficients égaux à 1, 2 ou 4.
 Les solutions sont les $P^{-1}DP$, avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \{1, 2, 4\}$.

◆ **RTH.10** (Lemme de Schur) (*)
 Soit E un \mathbb{C} -e.v. de dimension finie $n \geq 1$. Une partie S de $\mathcal{L}(E)$ est dite **irréductible** si et seulement si les seuls sous-espaces vectoriels de E , stables par tous les éléments de S , sont E et $\{0\}$.

- Soit $S \subset \mathcal{L}(E)$ irréductible. Montrer que, si $f \in \mathcal{L}(E)$ commute avec tous les éléments de S , alors f est une homothétie.
- Peut-on généraliser aux espaces vectoriels réels ?

◇ [Divers/reductheoexo.tex/red:84] On sait que, pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, on a $f \circ g = g \circ f \Rightarrow g(F) \subset F$.
 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall g \in S \quad f \circ g = g \circ f$.
 Puisque nous travaillons dans \mathbb{C} , l'endomorphisme f est scindé, donc admet au moins une valeur propre λ et un vecteur propre x associé. Posons $F = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$ le sous-espace vectoriel propre.
 Notamment, F est stable par tous les éléments de S , donc $F = E$ (puisque $F \neq \{0\}$). Donc f est une homothétie.
 On ne peut pas généraliser au cas réel : on prend par exemple $E = \mathbb{R}^2$, on note S l'ensemble des rotations et on choisit une rotation f d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

◆ **RTH.11** (Une CNS de nilpotence) (**)
 On rappelle que toute matrice complexe peut se trigonaliser.
 Soient E un \mathbb{C} -e.v. de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- u est nilpotent ;
- $\text{tr}(u) = \text{tr}(u^2) = \dots = \text{tr}(u^n) = 0$.

◇ [Divers/reductheoexo.tex/red:67] (Cf. exercice **RTH.56** page 212)
 Le premier sens est immédiat.
 Supposons $\text{tr} u^k = 0$ pour tout $k \in [1, n]$. En notant $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ les valeurs propres distinctes de u et (m_1, \dots, m_p) leur ordre de multiplicité, on obtient

$$\forall k \in [1, p] \quad \sum_{i=1}^p m_i \lambda_i^k = 0$$

 On note $x_i = m_i \lambda_i$. Or le système d'équation

$$\forall k \in [1, p] \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i^k x_i = 0$$

 d'inconnues $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{C}^p$ n'admet que la solution nulle puisque son déterminant est un Vandermonde, nul puisque les λ_i sont deux à deux distincts. Par suite $m_1 \lambda_1 = \dots = m_p \lambda_p = 0$ donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Ah oui mais ça n'est pas vrai si $p \geq 2$, puisqu'on a supposé les λ distincts, donc $p = 1$: il n'y a qu'une seule valeur propre. Cette valeur propre est nécessairement 0, et donc A est nilpotente (l'écrire sous forme triangulaire).

◆ **RTH.12** (Applica.^{on} de la trigon.^{on}) (Δ)
 Soient P et Q deux matrices ayant le même polynôme caractéristique. Montrer que $\text{tr}(P^k) = \text{tr}(Q^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

◇ [Divers/reductheoexo.tex/red:99] On les trigonalise en faisant apparaître sur la diagonale les valeurs propres.

◆ **RTH.13** (Matrices idempotentes) (***), Centrale MP - 2001
 On pose $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z}) ; \exists p \in \mathbb{N}, M^p = I_n\}$.

- Montrer qu'il existe un nombre fini de polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que : • P est unitaire ; • $\deg P = n$; • toutes les racines de P sont de module 1.
 INDICATION : On considèrera les relations coefficients racines et on montrera que les coefficients d'un tel polynôme sont majorables.
- Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{A}$, $M^p = I_n$.

◇ [Divers/reductheoexo.tex/alg-r:5bia] (Cf. exercice **RTH.22**)
 1) On peut écrire $P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$, avec $|\lambda_i| = 1$. Les coefficients sont reliés aux racines par les formules connues, ils sont donc majorables en module par une fonction de n seulement (à savoir C_n^p pour le coefficient α_p). Or toute boule de \mathbb{R}^{n+1} rencontre \mathbb{Z}^{n+1} en un nombre fini de points.
 2) Pour toute matrice $M \in \mathcal{A}$, son polynôme caractéristique χ_M est unitaire, à coefficients dans \mathbb{Z} , de degré n , et de spectre inclus dans \mathbf{U} . Ces polynômes caractéristiques sont donc en nombre fini, donc l'union de leur spectre

$$\mathcal{S} = \bigcup_{M \in \mathcal{A}} \text{Sp}(\chi_M)$$

 est finie. Chaque élément de \mathcal{S} a un indice d'idempotence, on prend le produit (ou mieux : le p.p.c.m.) de ces indices, et il convient clairement.

◆ **RTH.14** (**), d'après ENS MP - 2003
 Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $f : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ H \longmapsto HM + MH. \end{cases}$

- Montrer que, si M est diagonalisable, alors f l'est aussi.
- Donner le polynôme caractéristique de T_M en fonction des valeurs propres de M .

◇ [Divers/reductheoexo.tex/r3:136bia] **2^e méthode** : Soit P un polynôme annulateur scindé simple de M (son polynôme minimal par exemple). L'application $\delta_M : H \mapsto HM$ est annulée par P (calcul immédiat) donc est diagonalisable. De même pour l'application $\gamma_M : M \mapsto MH$. De plus, γ_M et δ_M commutent donc sont simultanément diagonalisables. Et donc leur somme T_M est également diagonalisable dans cette base commune.
 2) Ben clairement dans le cas diagonalisable,

$$X_{T_M} = \prod_{i,j} (X - (\lambda_i + \lambda_j)).$$

 Dans le cas général, on invoque un argument de densité, en remarquant que l'application $M \mapsto f_M$ est linéaire en dimension finie donc continue.

1) **1^{re} méthode** : On suppose M diagonalisable ; on note (C_1, \dots, C_n) une base de colonnes propres pour M et (L_1, \dots, L_n) une base de lignes propres, chacune associée à la famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de valeurs propres. Enfin, on pose $X_{ij} = C_i L_j \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. C'est assez trivialement une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (il suffit d'écrire). De plus,

$$f(X_{ij}) = M X_{ij} + X_{ij} M = (\lambda_i + \lambda_j) X_{ij},$$

 ce qui montre que \mathcal{C} est une base propre de T_M , donc T_M est diagonalisable et

$$\text{Sp}(f) = \{\lambda + \mu ; \lambda, \mu \in \text{Sp}(M)\}.$$

◊ [Rec02/reductheo-r2.tex/red-r2:45]

◆ **RTH.31** Centrale MP – 2002
 (Avec Maple)

On considère $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$.

- Calculer $A \cdot {}^tA$, en déduire $\det A$ et calculer le polynôme caractéristique de A .
- A est-elle diagonalisable dans \mathbb{C} ? Si oui, fournir une base de vecteurs propres? (On fera le lien entre A et tA .)
- Montrer qu'il existe $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & a \end{pmatrix}.$$

◊ [Rec02/reductheo-r2.tex/red-r2:46]

◆ **RTH.32** Centrale MP – 2002
 Résoudre dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ puis dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation

$$\exp(X) = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 4e^2 \\ 0 & e^2 & 4e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

◊ [Rec02/reductheo-r2.tex/red-r2:47]

◆ **RTH.33** (★★★) ENS MP – 2003
 On définit $F: \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$

$$X \mapsto X^p.$$

- Calculer $D_X F$.
- On suppose $p = 2$. Montrer que $D_X F$ est diagonalisable si et seulement si X l'est. Valeurs propres?
- On suppose $p = n = 2$. Calculer le polynôme caractéristique de $D_X F$.

◊ [Rec03/reductheo-r3.tex/r3:30]

- $D_X F(H) = X^{p-1}H + X^{p-2}HX + \dots + XHX^{p-2} + HX^{p-1}$.
- On a $(X + H)^2 = X^2 + XH + HX + H^2$ ce qui montre que

$$D_X F: H \mapsto XH + HX.$$

On suppose X diagonalisable; on note (C_1, \dots, C_n) une base de colonnes propres pour X et (L_1, \dots, L_n) une base de lignes propres, chacune associée à la famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de valeurs propres. Enfin, on pose $Y_{ij} = C_i L_j \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. C'est assez trivialement une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (il

suffit d'écrire). De plus,

$$D_X F(Y_{ij}) = X Y_{ij} + Y_{ij} X = (\lambda_i + \lambda_j) Y_{ij},$$

ce qui montre que c'est une base propre de $D_X F$, donc $D_X F$ est diagonalisable et

$$\text{Sp}(D_X F) = \{ \lambda + \mu; \lambda, \mu \in \text{Sp}(X) \}.$$

Réciproquement, on suppose que $D_X F$ est diagonalisable.

À FINIR !!!

3) À FINIR !!!

◆ **RTH.34** (★★) ENS MP – 2003
 On définit $f: \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$$M \mapsto M^2.$$

- Montrer que f est différentiable en M , et calculer sa différentielle, que l'on note T_M .
- Montrer que, si M est diagonalisable, alors T_M l'est aussi.
- Donner le polynôme caractéristique de T_M en fonction des valeurs propres de M .

◊ [Rec03/reductheo-r3.tex/r3:136]

- On a $(M + H)^2 = M^2 + MH + HM + H^2$ ce qui montre que

$$T_M: H \mapsto MH + HM.$$

- 1^{re} méthode:** On suppose M diagonalisable; on note (C_1, \dots, C_n) une base de colonnes propres pour M et (L_1, \dots, L_n) une base de lignes propres, chacune associée à la famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de valeurs propres. Enfin, on pose $X_{ij} = C_i L_j \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. C'est assez trivialement une base

de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (il suffit d'écrire). De plus,

$$T_M(X_{ij}) = M X_{ij} + X_{ij} M = (\lambda_i + \lambda_j) X_{ij},$$

ce qui montre que c'est une base propre de T_M , donc T_M est diagonalisable et

$$\text{Sp}(T_M) = \{ \lambda + \mu; \lambda, \mu \in \text{Sp}(M) \}.$$

2^e méthode: Soit P un polynôme annulateur scindé simple de M (son polynôme minimal par exemple). L'application $\delta_M: H \mapsto HM$ est annulée par P (calcul immédiat) donc est diagonalisable. De même pour

l'application $\gamma_M: M \mapsto MH$. De plus, γ_M et δ_M commutent donc sont simultanément diagonalisables. Et donc leur somme T_M est également diagonalisable dans cette base commune.

$$\chi_{T_M} = \prod_{i,j} (X - (\lambda_i + \lambda_j)).$$

Dans le cas général, on invoque un argument de densité, en remarquant que l'application $M \mapsto T_M$ est linéaire en dimension finie donc continue.

- Ben clairement dans le cas diagonalisable,

◆ **RTH.35** ENS Cachan MP – 2003
 On note $\mathcal{A} = \{M(a_0, \dots, a_{n-1}); (a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}^n)\}$, avec

$$M(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \dots & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \dots & a_2 \\ \vdots & a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

- Montrer que \mathcal{A} est une sous-algèbre commutative de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
- Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

◊ [Rec03/reductheo-r3.tex/r3:143]

◆ **RTH.36 (Commutant d'un endo cyclique)** (★★★) X MP – 2003
 Soit $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. On suppose qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $(X, AX, \dots, A^{n-1}X)$ est une base de \mathbb{C}^n (on dit que A est **cyclique**).
 Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $B = P(A)$.

◊ [Rec03/reductheo-r3.tex/r3:66]

Faut-il supposer A diagonalisable? Si oui, c'est une succession de résultats classiques sinon évidents, cf. **RTH.40**: on montre aisément que A possède n valeurs propres distinctes (en prenant la base évidente, en remarquant que la matrice de u est une matrice compagnon: exercice **RTH.3** page 200). Ensuite, A et B sont donc simultanément diagonalisables (grâce à la dimension 1 des sous-espaces propres de A). On prend alors un polynôme interpolateur de Lagrange qui envoie le spectre de A sur celui de B .

Dans le cas général, on commence par démontrer le lemme suivant:

LEMME *L'application linéaire*

$$\psi: \begin{cases} \mathcal{C}(f) \rightarrow E \\ g \mapsto g(x) \end{cases}$$

est injective.

Démonstration du lemme: En effet, si g commute avec f et $g(x) = 0$, alors l'image de $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est nulle donc $g = 0$, donc ψ est injective.

On en déduit que $\dim \mathcal{C}(f) \leq n$. Or $\mathcal{C}(f)$ contient trivialement $\mathbb{K}_{n-1}[f]$.

LEMME $\dim \mathbb{K}_{n-1}[f] = n$.

Démonstration du lemme: On sait déjà que $\dim \mathbb{K}_{n-1}[f] \leq n$.

Montrons que la famille $(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ est libre. Soient $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ des scalaires tels que $\alpha_0 \text{Id} + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1} = 0$. On applique cette relation à x ; le fait que \mathcal{B}_x soit libre montre que $\alpha_i = 0$ pour $i = 0, \dots, n$.

La liberté de la famille $(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ montre que $\dim \mathbb{K}_{n-1}[f] \geq n$. ■

On en déduit que $\dim \mathcal{C}[f] = n$. Puisque $\mathbb{K}_{n-1}[f] \subset \mathcal{C}(f)$ et que ces deux sous-espaces vectoriels ont même dimension, ils sont égaux.

En fin, on conclut par les inclusions

$$\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}(f) = \mathbb{K}_{n-1}[f] \subset \mathbb{K}[f]$$

■ qui montrent l'égalité des ensembles.

◆ **RTH.37 (Trigonalisation simultanée)** Centrale MP – 2003
 Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille non vide d'endomorphismes trigonalisables du \mathbb{K} -e.v. E (avec $\dim E \geq 1$). On suppose que les f_i commutent deux à deux.

- Montrer qu'il existe un vecteur propre commun à tous les f_i .
- Montrer que les f_i sont simultanément trigonalisables.
- Donner un exemple de deux matrices trigonalisables dans la même base mais qui ne commutent pas.

◊ [Rec03/reductheo-r3.tex/r3:452]

2) Récurrence sur la dimension.

- Récurrence sur le nombre d'endomorphismes + théorème de d'Alembert-Gauss.

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

◆ **RTH.38** Centrale MP – 2003
 Notons $\mathcal{E} = \left\{ A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C}) ; \forall X \in \mathbb{C}^n \exists \Pi \text{ (plan affine)} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad e^{tA} \cdot X \in \Pi \right\}$.

- On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$. A-t-on $A \in \mathcal{E}$?
- Prouver que $\det A = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{E}$.
- On suppose $\det A \neq 0$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A diagonalisable pour que $A \in \mathcal{E}$.
- Décrire \mathcal{E} .

◇ [Rec03/reductheo-r3.tex/r3:381]

◆ **RTH.39** (★★) Centrale MP – 2003
 Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$.

- Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 - M n'est pas inversible ;
 - il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P - \lambda M$ est inversible.
- Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))$ un endomorphisme tel que, si M est inversible, alors $\Phi(M)$ est inversible. Montrer que Φ est un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

◇ [Rec03/reductheo-r3.tex/r3:97]

(Cf également la version « longue » de l'exercice RNG.42 page 84.)

1) Montrons (a) \Rightarrow (b). On écrit

$$M = Q \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$

On pose alors $P = QR$, et

$$P - \lambda M = Q \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \mathbb{R} \in GL_n(\mathbb{C}).$$

◆ **RTH.40 (Commutant de u t.q. Card($\text{Sp } u$) = n)** (★) CCP MP – 2003
 Soient $M, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AM = MA$. On suppose que M a toutes ses valeurs propres distinctes.

- Montrer que tout vecteur propre de M est vecteur propre de A .
- Montrer qu'il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ tels que $A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k$.

◇ [Rec03/reductheo-r3.tex/r3:294]

1) M a n valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable et $\dim E_\lambda(M) = 1$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(M)$. Soit $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$, alors $\lambda AX = M(\lambda X)$ donc AX est dans un sous-espace propre pour M , mais la dimension de $E_\lambda(M)$ est 1 donc $AX \in \text{Vect}(X)$ et X est encore vecteur propre pour A .

2) Le raisonnement précédent montre qu'une matrice diagonalisant M diagonalise également A . On peut alors trouver un polynôme interpolateur de Lagrange amenant les valeurs propres de M (distinctes !) sur celles de A .

Remarque : on pourra observer un cas plus général dans l'exercice de l'X : RTH.36.

◆ **RTH.41 (Endomorphisme cyclique)** (★★) CCP PC – 2003
 Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie n . L'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **cyclique** si et seulement si il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

- Montrer que, si u possède n valeurs propres distinctes, alors u est cyclique.
- Question subsidiaire : montrer que si f est diagonalisable et cyclique, alors f admet n valeurs propres distinctes.
- Montrer que si u est cyclique et nilpotent, alors u est nilpotent d'ordre n .

◇ [Rec03/reductheo-r3.tex/r3:52] (Emeline : 25 min de préparation)
 1) On choisit une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ propre pour u et on note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées. On pose $x = \sum_{i=1}^n e_i$ et $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$. La matrice $M = \text{mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{B})$ est une matrice de Vandermonde, plus précisément $M = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ce qui montre que M est inversible donc \mathcal{B} est une base de E .
N.B. : il n'y a pas de réciproque dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (considérer une matrice de rotation d'angle $\pi/2$ dans \mathbb{R}^2 par exemple) ni dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ (considérer une matrice $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ qui est bien cyclique mais même pas diagonalisable...
 2) On suppose u cyclique ; choisissons x_0 comme dans l'énoncé. Alors $u^{n-1}(x_0)$ est non nul, donc $u^{n-1} \neq 0$, donc u est nilpotent d'ordre n .

◆ **RTH.42 ($AB - BA = C$ et $BC = CB$)** CCP PC – 2003
 Soient A, B, C trois matrices d'ordre n à coefficients réels tels que $AB - BA = C$ et $BC = CB$.

- Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $AB^{p+1} = B^p(BA + (p + A)C)$.
- En déduire que $\det B = 0$ ou $\det C = 0$.

◇ [Rec03/reductheo-r3.tex/r3:260]

1) Récurrence immédiate.

2) On en déduit $AP(B) - BP(A) = P'(1)C$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
À FINIR !!!

◆ **RTH.43 (Disques de Gershgorin)** (♣) ENS Ulm/Lyon PC – 2004
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
 On note, pour tout $j \in [1; n]$, \mathcal{D}_j le disque de centre a_{jj} et de rayon $\sum_{k \neq j} |a_{jk}|$ (ce que l'on appelle **disque de Gershgorin**).

- Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{j=1}^n \mathcal{D}_j$.
- On suppose que A est **irréductible** (c'est-à-dire il n'existe pas de permutations de la base telle que A soit triangulaire supérieure par blocs).
 Montrer que si λ est sur le bord d'un disque \mathcal{D}_j alors il est sur le bord de tous.
- Une matrice M est dite **dominante sur les lignes** (ou sur les colonnes) si et seulement si, pour tout $i \in [1; n]$,

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

(resp. $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$).

On suppose A dominante sur les lignes, que peut on dire de sa diagonalisabilité ? Et si de plus A est irréductible ?

◇ [Rec04/reductheo-r4.tex/r4:38]

Cf. Les matrices de Denis Serre, Dunod.

◆ **RTH.44** (★★) X MP – 2004
 Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^3 = I_n$. Décomposer tout $x \in \mathbb{C}^n$ en la somme de trois vecteurs propres de M .

◇ [Rec04/reductheo-r4.tex/r4:279]

$X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - \bar{j})$ annule M , donc M est diagonalisable donc \mathbb{C}^n est la somme directe d'espaces propres.

La difficulté vient de vecteurs dont la décomposition sur ces trois espaces a une ou plusieurs composantes nulles. Dans ce cas, ruser en écrivant des choses du style $0 = y - y$.

◆ **RTH.45** (★) Centrale MP – 2004
 Existe-t-il une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal soit égal à $X^2 + 1$? Si oui, les donner toutes ; si non, donner deux preuves.
 Même question avec $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

◇ [Rec04/reductheo-r4.tex/r4:267]

Si $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, A possède au moins une valeur propre réelle, donc son polynôme minimal ne saurait être irréductible dans \mathbb{R} .
 Autre preuve : le spectre de A serait inclus dans $\{-1, i\}$, donc sa trace serait imaginaire pure et non nulle pour une question de multiplicité.

Pour $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, c'est possible, par exemple $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. A doit être semblable à la matrice $\text{diag}(-i, i)$, et réelle, c'est donc une matrice de rotation.

◆ **RTH.46 (Matrice réelle C-diagonalisable)** (★★) Centrale PC – 2004
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de polynôme caractéristique χ_A scindé dans $\mathbb{R}[X]$. On suppose A diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On note P une matrice diagonalisante, que l'on note $P = Q + iR$, avec $Q, R \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
 A est-elle diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$?

◇ [Rec04/reductheo-r4.tex/r4:84]

En notant D la matrice diagonale (réelle !), on remarque que $QD = AQ$ et $RD = AR$. Notons $T(x) = \det(Q + \lambda R)$, ce n'est pas le polynôme constant, il

existe donc un $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que $P^* \stackrel{\text{def}}{=} Q + \lambda^* R$ est inversible, et $P^* D = AP^*$, donc $P^{*-1} AP^* = D$ donc A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

◆ **RTH.47** (**) Centrale MP – 2004
 Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Chercher les matrices $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = A$ (on discutera selon les valeurs propres de A).

◇ [Rec04/reductheo-r4.tex/r4:220] dont on montre aisément que ce sont les seuls cas possibles.
 Discuter trois cas selon que $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$ ou $A \sim \text{diag}(\lambda, \mu)$ ou $A = \lambda I_n$,

◆ **RTH.48** (**) Mines MP – 2004
 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que e est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par u .

◇ [Rec04/reductheo-r4.tex/r4:232]

◆ **RTH.49** (**) Mines PC – 2004
 Soit E un \mathbb{C} -e.v. de dimension finie n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

(a) f est diagonalisable ;
 (b) pour tout $i \in [1; k]$, $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(f - \lambda_i \text{Id}_E) = E$.

INDICATION : Pour l'implication dans le sens (b) \Rightarrow (a), considérer $g|_{\text{Im}(f - \lambda_i \text{Id}_E)}$.

◇ [Rec04/reductheo-r4.tex/r4:27]

◆ **RTH.50** (***) Mines PC – 2004
 On pose $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Prouver que $M(z)$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ sauf pour deux valeurs particulières à déterminer.
 2) Trouver $z(t)$ pour que e^{it} soit valeur propre de $M(z)$. Tracer $t \mapsto z(t)$.

◇ [Rec04/reductheo-r4.tex/r4:32]

- 1) $\chi_M = -X^3 + zX + z$. Pour que $M(z)$ soit non diagonalisable, il faut qu'il ait des racines doubles, or $\chi_M' = -3X^2 + z$, on injecte et on voit qu'il y a une racine commune si et seulement si
- 2) On vérifie ensuite que pour ces valeurs, $M(z)$ n'est effectivement pas diagonalisable.

◆ **RTH.51** (**) CCP PC – 2004
 Soit $A, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M + I_n = 0$ et $A^2 = M$.

1) Montrer que M est inversible.
 2) M est-elle diagonalisable sur $\mathfrak{M}_n(K)$ où $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ?
 3) Montrer que n est pair.
 4) Calculer les valeurs propres de M , $\text{tr}(M)$ et $\det(M)$?
 5) Montrer que A est \mathbb{C} -diagonalisable.
 6) Montrer que si $\frac{n}{2}$ est impair alors $\text{tr}(A) \in \mathbb{Z}^*$.

◇ [Rec04/reductheo-r4.tex/r4:36]

Sera redonné en 2005 : exercice RTH.61.

- 1) $M(M + I_n) = -I_n$ donc M est inversible. Ou bien :

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \text{Zéro}(X^2 + X + 1) = \{j, \bar{j}\}.$$

- 2) M est diagonalisable sur \mathbb{C} mais clairement pas sur \mathbb{R} .
 3) La trace de M est réelle donc $\text{mult}(j, M) = \text{mult}(\bar{j}, M)$.
 4) $\text{tr}(M) = 0$ et $\det(M) = (j\bar{j})^{n/2} = 1$.
 5) $X^4 + X^2 + 1$ annule A , et c'est scindé simple.
 6) Somme des parties réelles, qui valent un entier ou un demi-entier.

◆ **RTH.52** (*) Air PC – 2004
 1) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$.

- a) A est-elle diagonalisable ?

b) Montrer que A est semblable à $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$.

- 2) Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$
 Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $E = \text{Ker}(f^p) \oplus \text{Im}(f^p)$

- 3) (pour tenir les 5 minutes restantes)
 Énoncer les méthodes pour montrer que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible.

◇ [Rec04/reductheo-r4.tex/r4:403]

◆ **RTH.53** ($M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Q})$; $M^2 = I_2$) (**) CCP PC – 2004
 On admet que $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \notin \mathbb{Q}$. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $M \in \text{GL}_n(\mathbb{Q})$ telle que $M^5 = I_2$ et $M^4 \neq I_2$.

◇ [Rec04/reductheo-r4.tex/r4:79]

Cf. également RTH.27 et RED.48

On suppose $M^5 = I_2$, alors $X^5 - 1$ annule M , donc le spectre complexe de M est inclus dans $\{1, \omega, \omega^2, \bar{\omega}, \bar{\omega}^2\}$ où l'on a noté $\omega = e^{2\pi i/5}$.

La trace de M étant réelle, le spectre peut être

- $\{1\}$, mais alors $M = I_2$ donc $M_2 : I_2$ impossible ;

- $\{\omega, \bar{\omega}\}$, mais alors la trace vaut $2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ qui n'est pas rationnel (sinon

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 \text{ serait également rationnel} : \text{impossible} ;$$

- $\{\omega^2, \bar{\omega}^2\}$, mais alors la trace vaut $2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ qui n'est pas rationnel : impossible.

◆ **RTH.54** (***) CCP MP – 2004
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers B . Montrer que B est semblable à une matrice diagonale n'ayant que des 0 et des 1 sur la diagonale.

◇ [Rec04/reductheo-r4.tex/r4:170]

La suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers B .

Donc la suite $(A^{2^n})_n$ aussi, mais elle converge également vers B^2 , donc $B^2 = B$, c'est un projecteur, et le résultat s'ensuit immédiatement.

◆ **RTH.55** (♣) CCP MP – 2004
 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie n . Montrer que λ est valeur propre de u si et seulement si $\det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0$ et montrer que u peut avoir au plus n valeurs propres.

◇ [Rec04/reductheo-r4.tex/r4:247]

Un vrai scandale !

◆ **RTH.56 (Une CNS de nilpotence)** (***) X PC – 2005
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\text{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

◇ [Rec05/reductheo-r5.tex/r5:19]

(Cf. exercice RTH.11 page 202 et RTH.17 page 203)

Si A est nilpotente, on la trigonalise et c'est immédiat.
 Réciproquement, supposons $\text{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in [1; n]$. On géométrise et on note u un endomorphisme de \mathbb{C}^n représenté par A ; on va montrer que toutes les valeurs propres de u sont nulles, ce qui, en trigonalisant u , suffira pour montrer que u est nilpotente.

En notant $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ les valeurs propres distinctes de u et (m_1, \dots, m_p) leur ordre de multiplicité, on obtient

$$\forall k \in [1; p] \quad \sum_{i=1}^p m_i \lambda_i^k = 0.$$

On note $x_i = m_i \lambda_i$. Or le système d'équation

$$\forall k \in [1; p] \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i^{k-1} x_i,$$

d'inconnues $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{C}^p$ n'admet que la solution nulle puisque son déterminant est un Vandermonde, nul puisque les λ_i sont deux à deux distincts. Par suite $m_1 \lambda_1 = \dots = m_p \lambda_p = 0$ donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Ah oui mais ça n'est pas vrai si $p \geq 2$, puisqu'on a supposé les λ distincts, donc $p = 1$: il n'y a qu'une seule valeur propre. Cette valeur propre est nécessairement 0, et donc A est nilpotente (l'écrire sous forme triangulaire).

◆ **RTH.57** (**) X PC – 2005
 Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Peut-on écrire A^{-1} sous forme de polynôme en A ?

◇ [Rec05/reductheo-r5.tex/r5:45]

Oui.

Solution MP*. Posons $P = \chi_A$. Alors P annule A . De plus, le coefficient constant de P est non nul puisque $0 \notin \text{Sp}(A)$. On note $P = Q + a_0$, et ensuite $Q(A) = -a_0 \text{Id}$ et X divise $Q = XR$, donc $A \cdot R(A) = -a_0 \text{Id}$.

Solution PC*. On choisit un polyôme T annulateur de A , on le divise autant de fois qu'on peut par X , et il est toujours annulateur (classique). On note $P = Q + a_0$, et ensuite $Q(A) = -a_0 \text{Id}$ et X divise $Q = XR$, donc $A \cdot R(A) = -a_0 \text{Id}$.

◆ **RTH.58 (Automorphismes intérieurs)** (★★) Centrale PC – 2005
 On note \mathcal{L} l'ensemble des matrices réelles d'ordre 2 et de trace nulle. On s'intéresse à l'image des applications Φ_A , définies sur $GL_2(\mathbb{R})$, par $\Phi_A(g) = g^{-1}Ag \in \mathcal{L}$.

- 1) Soient $A, B \in \mathcal{L}$ telles que $\det A = \det B = -k$. Déterminer un polynôme annulateur de A et B . Existe-t-il $g \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $B = g^{-1}Ag$? On pourra distinguer selon que $k < 0$, $k = 0$ et $k > 0$.
- 2) On identifie \mathcal{L} et \mathbb{R}^3 par la bijection $(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x & z \\ y & -x \end{pmatrix}$. Déterminer, selon les valeurs de $\det A$, l'image de Φ_A en tant que partie de \mathbb{R}^3 .

◆ [Rec05/reductheo-r5.tex/r5:80]

◆ **RTH.59** (★★) Mines PC – 2005
(Énoncé donné tel quel)
 $\dim E < +\infty$, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists p \geq 2$ tel que $u^p = \text{Id}_E$.
 Posons $v = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} u^i$.
 Montrer que v est un projecteur et que $\dim \text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \text{tr}(u^i)$.
 Cas particulier (*au tableau*) : on suppose de plus que u est orthogonal ; montrer que v est un projecteur orthogonal.

◆ [Rec05/reductheo-r5.tex/r5:9]

Toute racine p -ième de l'unité vérifie

Cf. *exercice RTH.60.*

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \omega^j = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 1 \\ 0 & \text{si } \omega \neq 1. \end{cases}$$

u est diagonalisable. Ses valeurs propres sont des racines p -ièmes de l'unité. La formule s'ensuit.

◆ **RTH.60** (★★★) Mines PC – 2005
 Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $A^p = I_n$. Montrer que $\dim \text{Ker}(A - I_n) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \text{tr}(A^j)$.

◆ [Rec05/reductheo-r5.tex/r5:47]

La formule s'ensuit.

A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Ses valeurs propres sont des racines p -ièmes de l'unité. Toute racine p -ième de l'unité vérifie

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \omega^j = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 1 \\ 0 & \text{si } \omega \neq 1. \end{cases}$$

◆ **RTH.61** (★★) CCP PC – 2005
 Soit $A, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M + I_n = 0$ et $A^2 = M$.

- 1) Montrer que M est inversible.
- 2) M est-elle diagonalisable sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ?
- 3) Montrer que n est pair.
- 4) Calculer les valeurs propres de M , $\text{tr}(M)$ et $\det(M)$?
- 5) Montrer que A est \mathbb{C} -diagonalisable.
- 6) Montrer que si $\frac{n}{2}$ est impair alors $\text{tr}(A) \in \mathbb{Z}^*$.

◆ [Rec05/reductheo-r5.tex/r5:32]

Déjà donné en 2004 : *exercice RTH.51.*

1) $M(M + I_n) = -I_n$ donc M est inversible. Ou bien :

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \text{Zéro}(X^2 + X + 1) = \{\bar{j}, j\}.$$

2) M est diagonalisable sur \mathbb{C} mais clairement pas sur \mathbb{R} .

3) La trace de M est réelle donc $\text{mult}(j, M) = \text{mult}(\bar{j}, M)$.

4) $\text{tr}(M) = 0$ et $\det(M) = (j\bar{j})^{n/2} = 1$.

5) $X^4 + X^2 + 1$ annule A , et c'est scindé simple.

6) Somme des parties réelles, qui valent un entier ou un demi-entier.

◆ **RTH.62 (Endomorphismes cycliques)** (★★★) CCP PC – 2005
 Soit E un \mathbb{C} -e.v. de dimension n . On dit que u est **cyclique** si et seulement si il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} \stackrel{\text{déf.}}{=} (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

- 1) Montrer que si un endomorphisme a ses valeurs propres deux à deux distinctes, alors il est cyclique.
- 2) On note ${}^t(a_0, \dots, a_{n-1})$ les coordonnées de $u^n(x_0)$ dans \mathcal{B} . Déterminer le polynôme caractéristique de u . Montrer que les a_i ne dépendent en réalité pas du choix de x_0 (qui n'est pas unique).
- 3) Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que l'ordre de nilpotence est inférieur ou égal à n .

◆ [Rec05/reductheo-r5.tex/r5:63]

◆ **RTH.63** (★) Mines PC – 2005
 Trouver les matrices $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(M) = 0$ et $M^3 - 2M^2 + M = 0$.

◆ [Rec05/reductheo-r5.tex/r5:509]

On a $M(M - I)^2 = 0$ donc M est trigonalisable avec que des 1 ou des 0 sur la diagonale. Comme $\text{tr}(M) = 0$, il n'y a que des 0. Ensuite $M - I \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $M(M - I)^2 = 0$ donc $M = 0$.

◆ **RTH.64** (★) Mines PC – 2005
 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $g \circ f = f \circ g$ si et seulement si les sous-espaces propres de g sont stables par f .
2. Soit $C(g) = \{f \in \mathcal{L}(E) ; g \circ f = f \circ g\}$. Calculer $\dim C(g)$.
 Que peut-on dire de
$$D(g) = \{f \in \mathcal{L}(E) ; g \circ f = -f \circ g\}?$$

◆ [Rec05/reductheo-r5.tex/r5:511]

◆ **RTH.65** (★) Mines PC – 2005
 1. Soit $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. Trouver les matrices vérifiant $\text{tr} M^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp} M} \lambda^2$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$ (valeurs oubliées, mais se souvient que A a trois valeurs propres : 1, 2 et 3!)
 Discuter la résolution de $X^2 - X = A$ où $X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

◆ [Rec05/reductheo-r5.tex/r5:515]

1. pas net sur $\text{Sp}_{\mathbb{Z}}(M)$: si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors toujours vrai car M est trigonalisable dans \mathbb{C} .

$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \{1\}$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$

2. X commute avec A donc comme A est diagonalisable avec des espaces propres qui sont des droites, X est diagonalisable dans toute base de diagonalisation de A . On résout alors $\lambda^2 - \lambda = a$ où $a = \{1, 2, 3\}$

Sinon c'est faux, il suffit de prendre une rotation :
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = M$, alors $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$

◆ **RTH.66** (★★★) Mines PC – 2005
 Soient A, B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$.

- 1) Montrer que A et B ont au moins un vecteur propre en commun.
- 2) Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

◆ [Rec05/reductheo-r5.tex/r5:75]

$\text{Sp}(B) = \{0\}$, alors B est trigonalisable, et sur la première colonne non nulle, on voit qu'il existe X, Y tels que $BX = 0$ et $BY = \alpha X \neq 0$. Donc $X \in \text{Im}(B) \subset \text{Ker}(A)$ donc X est vecteur propre pour A .
 Si $\lambda \neq 0$ alors B admet au moins un vecteur propre X et $ABX = \lambda AX = 0$ donc $AX = 0$ et X est vecteur propre pour A .

◆ **RTH.67** (★) Mines PC – 2005
 Chercher toutes les matrices $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{tr}(M) = 0$ et $M^3 + 2M^2 + M = 0$.

◆ [Rec05/reductheo-r5.tex/r5:83]

$X(X + 1)^2$ annule M , donc M est diagonalisable et $\text{Sp}(M) \subset \{0, -1\}$ donc

finalement seul 0 est valeur propre donc $M = 0$.

◆ **RTH.68** (★) CCP PC – 2005
 Trouver toutes les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient

$$A^3 + A^2 + A - 3I_n = 0 \quad \text{et} \quad A^3 - 3A^2 + 2A = 0.$$

◆ [Rec05/reductheo-r5.tex/r5:90]

De la seconde équation on tire que $X(X - 1)(X - 2)$ annule A qui est donc diagonalisable. De la première équation, on tire que $\text{Sp}(A) \subset \text{Zéro}(X^3 + X^2 + X - 3)$ donc que ni 0 ni 2 n'appartient à $\text{Sp}(A)$. Par suite, $\text{Sp}(A) = \{1\}$ et

$A = I_n$.
 Réciproquement, $A = I_n$ convient.

$$\mathcal{S} = \{I_n\}.$$

Espaces préhilbertiens & euclidiens

Formes bilinéaires, produits scalaires, bases orthonormées

◆ **PRE.1 (Identité de polarisation complexe)** (♣) Soit (E, ϕ) un espace préhilbertien complexe, q la forme hermitienne associée à ϕ . Montrer que

$$\forall x, y \in E, \quad \phi(x, y) = \frac{1}{4} [q(x+y) - iq(x+iy) - q(x-y) + iq(x-iy)].$$

Ceci montre que ϕ est entièrement déterminée par q , comme dans le cas réel.

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:13]

T.

◆ **PRE.2** (★) Les couples (E, ϕ) sont-ils des espaces euclidiens ?

- $E = \mathbb{R}^2$, $\langle (x, y) | (x', y') \rangle = axy + bx'y' + cx'y + dx'y'$.
- $E = \mathbb{R}^n$, $\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = \alpha \sum_{i=1}^n x_i y_i + \beta \sum_{i \neq j} x_i y_j$.
- $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P | Q \rangle = \sum_{i=1}^n P(i) Q(i)$.

INDICATION : Pour le premier cas, on étudiera la norme de $(1, t)$, pour $t \in \mathbb{R}$.

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:44]

2) Il faut que la détermination de $\beta J_n + (\alpha - \beta) I_n$ soit strictement positif.

1) On a besoin, pour la positivité, des conditions $a > 0$, $d > 0$, $b = c$ et $ad - b^2 > 0$; celles-ci sont par ailleurs suffisantes.

3) Oui.

◆ **PRE.3** (★) Montrer que l'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de $(P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle = \sum_{n=1}^3 P(n) Q(n)$ est un espace vectoriel euclidien. Donner une base orthonormée de E .

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:80]

On trouve $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(X-2), \sqrt{\frac{3}{2}}(X^2-4X+10/3) \right]$.

◆ **PRE.4 (A, A^\perp et $A^{\perp\perp}$)** (♣) Soit A une partie d'un espace préhilbertien E . Montrer que A^\perp est un s.e.v. de E . Montrer de plus que $A^{\perp\perp} \supset A$, et que $A \cap A^\perp \subset \{0\}$.

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:1]

On note tout d'abord que $A^\perp \subset E$ et que $0 \in A^\perp$.
 □ Soient $x, y \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $a \in A$, on a $\langle a | \lambda x + y \rangle = \lambda \langle a | x \rangle + \langle a | y \rangle = 0$,

et donc $\lambda x + y \in A^\perp$. □
 Ceci prouve que A^\perp est un s.e.v. de E .
 □ Soit $x \in A$, pour tout $a \in A^\perp$, on a $\langle x | a \rangle = 0$, et donc $x \in (A^\perp)^\perp$. □ Conclusion : $A \subset A^{\perp\perp}$.

◆ **PRE.5 (A^\perp fermé)** (♣) Soit A une partie de E . Montrer qu'alors A^\perp est un fermé de E .

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:2]

On peut d'abord remarquer qu'en dimension finie, A^\perp est un s.e.v de dimension finie, donc est fermé.
 Considérons le cas général.
 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A^\perp qui converge dans E vers un élément x .

□ Soit $a \in A$. On a alors

$$\langle x | a \rangle = \langle x - x_n | a \rangle + \langle x_n | a \rangle = \langle x - x_n | a \rangle,$$

et donc notamment

$$|\langle x | a \rangle| \leq \|a\| \cdot \|x_n - a\|$$

qui est plus petit que ε pour n suffisamment grand.

◆ **PRE.6** (★) Soit E un espace préhilbertien complexe et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\forall x \in E, \quad u(x) \perp x.$$

- Montrer que, pour tout couple de vecteurs $(x, y) \in E^2$, on a $\langle u(x) | y \rangle = 0$.

INDICATION : On pourra étudier les combinaisons linéaires $x + y$ et $x + iy$.

- En déduire que $u = 0$.
- Comparer au cas réel.

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:10]

On calcule d'abord

$$\langle u(x + iy) | x + iy \rangle = 0 = \langle u(x) | iy \rangle + \langle u(iy) | x \rangle$$

ce qui montre que

$$\langle u(x) | y \rangle = \langle u(y) | x \rangle.$$

On calcule ensuite

$$\langle u(x + y) | x + y \rangle = 0 = \langle u(x) | y \rangle + \langle u(y) | x \rangle.$$

On en déduit l'égalité demandée; celle-ci étant vraie pour tout $y \in E$, on en déduit $u = 0$.

En réel, c'est faux, il suffit de regarder une rotation de $\pi/2$ dans le plan.

◆ **PRE.7 (Similitudes)** (★★) Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit f un endomorphisme de E qui « conserve l'orthogonalité », c'est-à-dire tel que pour tout $x, y \in E$, on a

$$\langle x | y \rangle = 0 \implies \langle f(x) | f(y) \rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que, pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \lambda \|x\|$.
 Si $\lambda > 0$, on dit que u est une **similitude** de rapport λ (et $\lambda^{-1}f$ est une isométrie directe).

INDICATION : On notera que, si u et v sont deux vecteurs normés et orthogonaux, alors $u + v$ et $u - v$ sont également orthogonaux.

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:3]

(Cf l'exercice ISO.16 page 265). On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. de E et $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n) = f(\mathcal{B})$ la base image.

Alors (u_1, \dots, u_n) est une base orthogonale.
 Notons $\mu = \|e_1\|$ et $\lambda = \|e_2\|$.
 Posons maintenant $v = e_1 + e_2$ et $w = e_1 - e_2$. Alors $\langle v | w \rangle = 0$. Donc $\langle f(v) | f(w) \rangle = 0$ c'est-à-dire $0 = \langle u_1 + u_2 | u_1 - u_2 \rangle = \|u_1\| - \|u_2\|$,

ce qui montre $\|u_1\| = \|u_2\|$. On fait de même avec tous les vecteurs : $\|u_i\| = \lambda$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Il ne reste plus qu'à montrer que

$$\|u(x)\|^2 = \left\| u \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i u_i \right\|^2 = \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda \|x\|^2.$$

Alors, si $\lambda \neq 0$, $\lambda^{-1}f$ est une isométrie.

◆ **PRE.8 (Une inégalité)** Soit E un espace vectoriel euclidien. Montrer que, pour tout $x, y \in E$, on a

$$2 + \|x + y\|^2 \leq 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2).$$

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:4]

On a

$$\begin{aligned} & 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2) - 2 - \|x + y\|^2 = \\ & 2(1 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 \|y\|^2) - 2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2 \langle x | y \rangle = \\ & 2 \|x\|^2 \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle x | y \rangle = 2 \|x\|^2 \|y\|^2 + \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

◆ **PRE.9** (★) Soit E un espace hermitien et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $x \in E$, on ait $\langle f(x) | x \rangle = 0$. Montrer que $f = 0$.

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:46]

Cette propriété n'est manifestement pas vraie sur un espace vectoriel euclidien, puisque une rotation de $\pi/2$ dans \mathbb{R}^2 vérifie cette propriété.

On calcule d'abord

$$\langle f(x + iy) | x + iy \rangle = 0 = \langle f(x) | iy \rangle + \langle f(iy) | x \rangle$$

ce qui montre que

$$\langle f(x) | y \rangle = \langle f(y) | x \rangle.$$

On calcule ensuite

$$\langle f(x + y) | x + y \rangle = 0 = \langle f(x) | y \rangle + \langle f(y) | x \rangle.$$

On en déduit l'égalité $\langle f(x) | y \rangle = 0$ pour tout $x, y \in E$; celle-ci étant vraie pour tout $y \in E$, on en déduit $u = 0$.

◆ **PRE.10** Soit f un espace préhilbertien réel, et soient $f, g : E \rightarrow E$ telles que

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x) | y \rangle = \langle x | g(y) \rangle.$$

Montrer que f et g sont linéaires.

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:47] $\langle f(x+\lambda z)|y \rangle = \langle \lambda x+z|g(y) \rangle = \lambda \langle x|g(y) \rangle + \langle z|g(y) \rangle = \langle \lambda f(x)+f(z)|y \rangle$ pour tout $y \in E$ donc $f(x+\lambda z) = \lambda f(x) + f(z)$. On fait pareil pour g .

◆ **PRE.11**
Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in E$, $\|f^k(x)\| \leq \|x\|$. Montrer que

$$E = \text{Ker}(f - \mathbf{1}_E) \oplus \text{Im}(f - \mathbf{1}_E).$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:50] Cf. cahier Jacques.

◆ **PRE.12**
On note $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ que l'on munit du produit scalaire $\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$. Soit $\alpha \in]0; 1]$ que l'on fixe une fois pour toutes. On note

$$\Phi: \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \int_0^\alpha f(t) dt. \end{cases}$$

Montrer que Φ est une application linéaire continue de E (muni de la norme associée au produit scalaire) sur \mathbb{R} . On note $H = \text{Ker} \Phi$. Montrer que H est fermé. Montrer que $H^\perp = \{0\}$, puis que $H^{\perp\perp} \neq H$.

INDICATION : On montrera que, si $g \in H^\perp$, alors

$$\forall f \in E, \quad \alpha \int_0^1 f(t)g(t) dt = \left(\int_0^\alpha f(t) dt \right) \left(\int_0^1 g(t) dt \right).$$

On montrera ensuite que g est nulle sur $[\alpha; 1]$ puis, en appliquant le cas d'égalité de Schwarz, que g est nulle sur $[0; \alpha]$.

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:60] Cf. Jacques

◆ **PRE.13 ($F^\perp, \overline{F}^\perp$ et $\overline{F^\perp}$)** (**)

Soit E un espace préhilbertien sur \mathbb{K} . Soit $x_0 \in E$.

- 1) Montrer que l'application $x \mapsto \langle x_0|x \rangle$ est continue.
- 2) Soit F un s.e.v. de E (ou une partie quelconque de E). Montrer que F^\perp est fermé.
- 3) Soit F un s.e.v. de E . Comparer F^\perp et $(\overline{F})^\perp$.

- ◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:78]
- 1) C'est du cours : $\langle x_0|x-y \rangle \leq \|x_0\| \|x-y\|$ grâce à Cauchy-Schwarz.
 - 2) Soit (e_1, \dots, e_n) une base de F . Alors

$$F^\perp = \bigcap_{i=1}^n \langle e_i \rangle^\perp = \bigcap \text{Ker } \phi_i,$$

où $\phi \in E^*$ est la forme $x \mapsto \phi_i(x) = \langle e_i|x \rangle$. Chaque forme ϕ_i est continue d'après la question précédente, donc $\text{Ker } \phi_i = \phi_i^{-1}(\{0\})$ est fermée. Une intersection de fermés est fermée. Ça marcherait aussi en dimension infinie d'ailleurs.

- 3) On a $F \subset \overline{F}$ donc $\overline{F^\perp} \subset F^\perp$.
Soit maintenant $x \in F^\perp$.

□ Soit $y \in \overline{F}$. Alors il existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans F convergeant vers y . De plus $\langle x|y_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc, en passant à la limite en utilisant la continuité de $z \mapsto \langle x|z \rangle$, on a $\langle x|y \rangle = 0$. □ Ce qui montre que

$$x \in \overline{F^\perp}.$$

Ainsi $\overline{F^\perp} = F^\perp$

◆ **PRE.14 (Représentation en dimension infinie)** (***)

On pose que $E = \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$, que l'on munit du produit scalaire $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$. On note $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto f(0).$$

Existe-t-il une fonction $f_0 \in E$ telle que $\delta(f) = \langle f_0|f \rangle$ pour tout $f \in E$?

- ◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:71]
- Ben non.
En effet, supposons qu'il existe une telle fonction f_0 . On pose $g: x \mapsto x^2 f_0(x)$, alors
- $$\delta(g) = 0 = \langle g_0|g \rangle = \int_{-1}^1 x^2 f_0^2(x) dx$$
- Par ailleurs $|\langle f_0|f_n \rangle| = \sqrt{n} \leq \|f_0\|_2 \cdot \|f_n\|_2$ ce qui montre que
- $$\|f_0\|_n \geq 2n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ce qui est manifestement absurde.
On peut prendre aussi une fonction en triangle ou toute autre de la même forme.

◆ **PRE.15** (**)
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. On note $(x, y, z) \mapsto [x, y, z]$ le produit mixte.

- 1) Simplifier $A = [f(x), y, z] + [x, f(y), z] + [x, y, f(z)]$.
- 2) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x, y \in E, \quad f(x) \wedge y = -f(y) \wedge x = g(x \wedge y).$$

Donner une expression de g .

INDICATION : On prendra le produit scalaire de l'expression demandée avec un vecteur quelconque $z \in E$, et on fera intervenir l'adjoint f^* de f .

- ◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:64]
- 2) On pose $u \stackrel{\text{déf.}}{=} f(x) \wedge y - f(y) \wedge x$. Alors, pour tout $x \in E$,

1) On prend une b.o.n.d. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, alors $[x, y, z] = \det_{\mathcal{B}}(x, y, z)$.
On pose

$$\phi: (x, y, z) \longmapsto [f(x), y, z] + [x, f(y), z] + [x, y, f(z)].$$

Alors ϕ est trilineaire alternée, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\phi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. On a alors

$$\lambda = \phi(e_1, e_2, e_3) = \langle f(e_1)|e_1 \rangle + \langle f(e_2)|e_2 \rangle + \langle f(e_3)|e_3 \rangle = \text{tr } f.$$

Ainsi, $A = [x, y, z] \text{tr } f$.

$$\begin{aligned} \langle u|z \rangle &= [f(x), y, z] + [x, f(y), z] \\ \langle u|z \rangle &= \text{tr } f[x, y, z] - [x, y, f(z)], \end{aligned}$$

or $\langle x|f(y) \rangle = \langle f^*(x)|y \rangle$ donc

$$\langle u|z \rangle = \text{tr } f \langle x \wedge y|z \rangle - \langle f^*(x \wedge y)|z \rangle$$

ce qui montre, ceci étant vrai pour tout $x \in E$, que

$$u = \text{tr } f \langle x \wedge y \rangle - f^*(x \wedge x).$$

Ainsi, $g = \text{tr } f \text{Id}_E - f^*$.

◆ **PRE.16 (Matrice de rang 1)** (**)
Écrit CCPC

On munit $\mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Soient $X, Y \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$. On note $A = X \cdot {}^t Y$, et on identifie A à l'endomorphisme $\tilde{A} \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R}))$ défini par $X \mapsto \tilde{A}(X) = A \cdot X$. On suppose que $A \neq 0$. Montrer que $\tilde{A}^2 = (\text{tr } A)A$ puis qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) $\langle X|Y \rangle = 0$;
- (b) $\text{tr } A = 0$;
- (c) $\text{Im } A \subset \text{Ker } A$;
- (d) A est non diagonalisable.

- ◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:68]
- $a \Leftrightarrow b$: justement, $\text{tr } A = \langle X|Y \rangle$.
 $b \Leftrightarrow c$: on a $A^2 = A \cdot A = (X {}^t Y)(X {}^t Y) = X({}^t Y \cdot X)Y = X(0)Y = 0$. En fait on a $A^2 = (\text{tr } A)A$ ce qui montre l'équivalence.
 $c \Rightarrow d$: si A était diagonalisable, comme elle est nilpotente et que donc son unique valeur propre est 0, A serait nulle.
 $d \Rightarrow b$: Par contraposée. On suppose $\text{tr } A \neq 0$. Le polynôme $P = X^2 - \text{tr}(A)X$ est alors scindé simple. De plus $P(A) = 0$. Donc A est diagonalisable.

◆ **PRE.17** (**)
Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $U \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|U\| = 1$.

Montrer que $\|AU\|^2 > (n-1)^{n-1} \frac{(\det A)^2}{(\text{tr}(A \cdot A))^{n-1}}$.

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:73]

◆ **PRE.18** (**)
Soit (f_1, \dots, f_n) une famille de n fonction définies sur $[0; 1]$, continues et à valeurs dans \mathbb{R} . Existe-t-il $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \int_0^1 f(t) f_i(t) dt = 1?$$

- ◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:79]
- On commence par supposer que la famille (f_1, \dots, f_n) est libre. On pose $E = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$, que l'on munit du produit scalaire

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt,$$

ce qui en fait un espace vectoriel euclidien. On note $(\phi_1^*, \dots, \phi_n^*)$ la famille définie par

$$\phi_i: g \mapsto \langle f_i|g \rangle.$$

On montre que c'est une base de E^* . En effet, son cardinal est $n = \dim E^*$, et elle est libre, ce que l'on montre ainsi. On considère la famille (h_1, \dots, h_n) de fonctions de E obtenue en orthonormalisant la famille (f_1, \dots, f_n) par

le procédé de Gram-Schmidt. On considère une combinaison linéaire nulle $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i = 0$. On l'applique à h_1 , ce qui nous donne $\lambda_1 = 0$. On l'applique ensuite à $h_2 \in \text{Vect}(f_1, f_2)$, ce qui nous donne $\lambda_2 = 0$, et ainsi de suite.

On note alors (g_1, \dots, g_n) la base antéduale de $(\phi_1^*, \dots, \phi_n^*)$, ce qui veut dire que

$$\int_0^1 f_i(t) g_j(t) dt = \delta_{ij},$$

et on pose $f = \sum g_i$.
Si la famille est liée, il faut que les relations soient compatibles : si $f_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j f_j$ il est nécessaire que $\sum_{j \neq i} \lambda_j = 1$.

◆ **PRE.19** (★★) MP

On munit l'ensemble E des fonction continues, de carré intégrable sur \mathbb{R}^+ , du produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt.$$

1) Démontrer que E est un espace vectoriel.
 2) Soit ϕ une fonction continue et bornée sur \mathbb{R}^+ . Pour tout $f \in E$, on pose $u_\phi(f) : x \mapsto \phi(x)f(x)$. Montrer que u_ϕ est linéaire, continue, et calculer $\|\phi\|$.

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:84]
 On note $M = \|\phi\|_\infty$. Alors

$$\|u_\phi(f)\|^2 = \int_0^{+\infty} \phi^2(x) f^2(x) dx \leq M^2 \|f\|^2,$$

ce qui montre que u_ϕ est linéaire et $\|u_\phi\| \leq M$.
 On peut trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ telle que $\phi(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M$.
 Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors elle admet une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass) dont nous noterons a la limite, avec $a \in \mathbb{R}^+$. Alors la continuité de ϕ en a permet d'écrire que $\phi(a) = M$. On prend une suite de fonctions centrées en a et de norme constante (par exemple affines par morceaux, de largeur $1/n$ et de hauteur \sqrt{n}).
 Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors elle admet une sous-suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergeant vers $+\infty$. On prend une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ centrée en y_n .
 Dans les deux cas on montre que $\|u_\phi\| \geq M - \varepsilon$ pour tout ε .

◆ **PRE.20**

Distance de O au plan $\begin{cases} 2x + y + 5z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$?

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:93]

◆ **PRE.21 (H + H[⊥] ≠ E)** (★★)

Notons $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$; on le munit du produit scalaire $\langle f|g \rangle = \int_0^1 fg$. On note H le sous-espace vectoriel des fonctions $f \in E$ vérifiant $f(0) = 0$. Montrer que $H^\perp = \{0\}$. Conclure que $H + H^\perp \neq E$

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:95]
 Si $f \in H^\perp$, construire une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions qui converge simplement vers f en étant égale à f sur $[\frac{1}{n}; 1]$ et affine sur $[0; \frac{1}{n}]$ avec $g_n(0) = 0$. Alors $\int fg_n = 0$ et à la limite, $\int f^2 = 0$ donc $f = 0$.
 Une autre solution, plus élégante, est de considérer $g : x \mapsto xf(x)$. Alors $g \in H$ donc $\langle g|f \rangle = 0 = \int_0^1 x f^2(x) dx$ donc f est nulle sur $]0; 1]$ et donc sur $[0; 1]$ par continuité.

◆ **PRE.22**

Soit E un espace préhilbertien réel, et soit f une application vérifiant

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x, y \in E, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

Montrer que f préserve le produit scalaire. En déduire que f est linéaire.

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:7]
 En prenant, $y = 0$, on trouve $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$. En élevant l'égalité donnée au carré, on trouve

$$\langle f(x)|f(y) \rangle = \langle x|y \rangle.$$

Soient $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On calcule

$$\|f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)\|^2$$

en utilisant la conservation de la norme et du produit scalaire, et on en déduit que c'est nul.

◆ **PRE.23**

Soit E un préhilbertien, et soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que, pour tout $x, y \in E$, on ait

$$\langle f(x)|y \rangle = \langle x|f(y) \rangle.$$

Montrer que f est linéaire.

◇ [Divers/bilineaireexo.tex/pre:8]
 On développe

$$\langle z|f(\alpha x + \beta y) \rangle = \dots = \langle z|\alpha f(x) + \beta f(y) \rangle,$$

ce qui montre que $f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)$ est orthogonal à tout $z \in E$, donc est nulle.

◆ **PRE.24** X PC – 2005

Soient x_1, \dots, x_n des vecteurs d'un espace euclidien E, vérifiant :

$$\forall i \neq j \quad \|x_i - x_j\| \geq 2.$$

Trouver k_n tel que

$$\min_{x \in E} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|x - x_i\| \right) \geq k_n.$$

(Par exemple, $k_2 = 1$.)

INDICATION : $\sum_{i < j} \|y_i - y_j\|^2 = n \sum_{i=1}^n \|y_i\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^n y_i \right\|^2$.

◇ [Rec00/bilineaire-r0.tex/div:161]

◆ **PRE.25** X MP – 2001

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\phi(a, a) \neq 0$. On note $A = \langle a \rangle$.

1) On pose $B = \{y \in \mathbb{R}^n ; \phi(y, a) = 0\}$. Montrer que $\mathbb{R}^n = A \oplus B$.
 2) On pose $G = \{u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) ; \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \phi(u(x), u(y)) = \phi(x, y)\}$. On définit l'endomorphisme u_0 par $u_0(x) = x$ si $x \in A$ et $u_0(x) = -x$ si $x \in B$. Montrer que $u_0 \in G$.
 3) On pose $G^* = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) ; u_0 \circ v = v \circ u_0\}$. Montrer que, si $v \in G^*$ et $\phi(a, a) \neq 0$, alors il existe $\lambda_a \in \mathbb{R}$ tel que $v(a) = \lambda_a a$.
 4) Soient $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\phi(b, b) \neq 0$ et $\phi(c, c) \neq 0$. Comparer λ_b et λ_c .
 5) Montrer l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \phi(x, x) \neq 0 \Rightarrow v(x) = \lambda x$.
 6) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n, v(x) = \lambda x$.

◇ [Rec01/bilineaire-r1.tex/bil-r:21] de λ_a .

1) On a $A \cap B = \{0\}$, et B est le noyau de la forme linéaire non identiquement nulle $x \mapsto \phi(x, a)$, donc est de dimension $n - 1$.
 2) Simple vérification.
 3) On a $u_0(v(a)) = v(u_0(a)) = v(a)$ donc $v(a) \in A$, d'où l'existence
 4) $\lambda_b = \lambda_c$.
 5)
 6)

◆ **PRE.26** INT MP – 2001

Soit E un e.v. euclidien de dimension n . Soit $(a_1, \dots, a_p) \in E^p$. On considère $f : E \rightarrow E, f \mapsto \sum_{i=1}^p \langle t|a_i \rangle a_i$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la famille (a_1, \dots, a_p) pour que f soit bijective.

◇ [Rec01/bilineaire-r1.tex/bil-r:24]
 Si f est surjective, alors nécessaire la famille est génératrice. Si f est injective, la réciproque est immédiate : si (a_1, \dots, a_p) est une base, alors f est bijective, alors elle est libre.

◆ **PRE.27** (★★) S¹ Cyr MP – 2001

On munit \mathbb{R}^p du produit scalaire usuel, noté « \cdot ». Si $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^p)$, on note $A^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^p ; \forall y \in A, x \cdot y \leq 1\}$.

1) Notons B l'image de A par l'homothétie de rapport λ . Que peut-on dire de B° ?
 2) Trouver A° dans les différents cas :

a) A est le disque de centre 0 et de rayon 1 ;
 b) A est le carré de centre 0 et de côté 2 ;
 c) A est un parallélogramme.

◇ [Rec01/bilineaire-r1.tex/bil-r:4]
 bien la relation voulue.

1) Si $\lambda \neq 0$, B° est l'image de A° par l'homothétie de rapport λ^{-1} .
 2) a) $A^\circ = A$ (faire une double inclusion) ;
 b) A° est le « losange » inscrit dans le carré. En effet, considérons un point (x, y) de A° . Alors pour tout (w, t) de A on a $xw + yt \leq 1$. On peut considérer x et y positifs par symétrie. Alors notamment, puisque w et t sont ≤ 1 , on a $x + y \leq 1$. Réciproquement, si $x + y \leq 1$, il est clair que $xw + yt \leq 1$ pour tout $w, t \leq 1$. On a
 c) On commencera par remarquer que, dans le cas d'un parallélogramme, il suffit de ne considérer que les angles. En effet, si A est l'enveloppe convexe d'un ensemble de points B, alors $A^\circ = B^\circ$.
 Si le rectangle ne contient pas 0, seul le point le plus éloigné est digne d'intérêt et A° est un demi-plan. Sinon, il faut considérer chaque angle, prendre le demi-plan correspondant et prendre l'intersection, ce qui donne un autre rectangle.

◆ **PRE.28** (★) CCP MP – 2001

Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel, et soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $(\langle x|v(x) \rangle = 0 \quad \forall x \in E)$. Montrer que $\text{Ker } v = (\text{Im } v)^\perp$.

◇ [Rec01/bilineaire-r1.tex/bil-r:5] Pour tout $x, y \in E$, on a $\langle x + y | v(x + y) \rangle = 0 = \langle x | v(x) \rangle + \langle y | v(y) \rangle + \langle x | v(y) \rangle + \langle y | v(x) \rangle$, ce qui montre $\langle x | v(y) \rangle + \langle y | v(x) \rangle = 0$.
 ◇ Soit $x \in \text{Ker } v$ et $y \in \text{Im } v$. Alors $y = v(z)$ et $\langle x | y \rangle = \langle x | v(z) \rangle = -\langle v(x) | z \rangle = 0$. □ Ceci montre que $\text{Ker } v \subset (\text{Im } v)^\perp$.
 □ Soit $x \in (\text{Im } v)^\perp$. Alors $\forall y \in E$, $\langle x | v(y) \rangle = 0 = -\langle v(x) | y \rangle$. Cela montre que $v(x) = 0$. □ Donc $(\text{Im } v)^\perp \subset \text{Ker } v$.

◆ **PRE.29** (**) ENS Cachan MP – 2001
 Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $V : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ convexe continue, et $z \in E$. On définit, pour $\lambda \geq 0$ la fonction $f_\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \|x - z\|^2 + \lambda V(x)$. Montrer que f_λ admet un unique minimum local.

◇ [Rec01/bilineaire-r1.tex/bil-r:20] minimum est atteint dans l'ouvert $\mathcal{B}(0; R)$.
 Chaque fonction f_λ est convexe continue, et même *strictement* convexe. Par ailleurs, f_λ diverge aux grands x , il existe donc $R > 0$ tel que On suppose qu'il y a deux minima locaux x et y . Posons

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto f_\lambda(tx + (1-t)y),$$

 et sur $\overline{\mathcal{B}(0; R)}$, f_λ est continue donc atteint son minimum, qui n'est pas sur la frontière (car sur la frontière, f_λ vaut au moins $2f(0)$ par continuité), donc ce alors ϕ est convexe et admet deux minima locaux, ce qui n'est pas possible.

◆ **PRE.30** ENS Cachan MP – 2001
 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. On note (P) la propriété :
 (P) $\forall d, n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d \quad \left(f(\|x_i - x_j\|^2) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in S_n^+$.

(La norme sur \mathbb{R}^d est la norme euclidienne canonique.) On suppose que f vérifie (P).
 1) Montrer que $\sum_{i,j} f(\|x_i - x_j\|^2) \geq 0$.
 2) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq 0$.
 3) Soit $h > 0$. On pose $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) - f(t+h)$. Montrer que g vérifie (P).

◇ [Rec01/bilineaire-r1.tex/bil-r:16] toujours décroissantes, donc f est convexe et même absolument convexe !
 (On en déduit que f est positive, décroissante, et que les différences sont

◆ **PRE.31 (Hahn-Banach)** X MP – 2001
 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, et G un sous-espace vectoriel de \mathcal{H} tel que $\overline{G} = \mathcal{H}$. Soit $u : G \rightarrow \mathcal{H}$ linéaire, continue, et telle que $\|u - \text{Id}_G\| < 1$.
 1) Montrer que u admet un prolongement $v : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ avec $v \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}) \cap \mathcal{G}(\mathcal{H})$.
 2) Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille orthonormée *complète*, c'est-à-dire que $\overline{\text{Vect}\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}} = \mathcal{H}$, et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille de vecteurs de \mathcal{H} telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < 1$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille complète.
 3) Montrer que 1 est la meilleure constante.
 4) On montrera le lemme suivant : soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$, alors $\text{Vect}(e_1) + \overline{\text{Vect}(e_k; k \geq 2)} = \overline{\text{Vect}(e_k; k \geq 1)}$.

◇ [Rec01/bilineaire-r1.tex/bil-r:15]

◆ **PRE.32 (Matrice de Gram)** Centrale PC – 2002
 Soit (x_1, \dots, x_n) une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n . On note $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de coefficients $a_{ij} = \langle x_i | x_j \rangle$. Enfin, on note $G(x_1, \dots, x_n) = \det A$.
 1) Montrer que (x_1, \dots, x_n) est liée si et seulement si $G(x_1, \dots, x_n) = 0$.
 2) Montrer que (x_1, \dots, x_n) est libre si et seulement si $G(x_1, \dots, x_n) > 0$.
 3) En déduire une autre démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 4) Si $n = 3$, montrer que $G(a, b, c) = [a, b, c]^2$ (produit mixte).
 En déduire l'identité de Lagrange

$$\|x \wedge y\|^2 + \langle x | y \rangle = \|x\|^2 \|y\|^2.$$

◇ [Rec02/bilineaire-r2.tex/bil-r:2:34] et la première propriété s'ensuit.
 (Cf. exercice PRE.37 page suivante.)
 2) $\det A = (\det H)^2$ donc la seconde propriété s'ensuit.
 3) Prendre deux vecteurs et calculer le déterminant 2×2 .
 4)

◆ **PRE.33** (♣) CCP MP – 2002
 Déterminer $[D_n(\mathbb{R})]^\perp$, où $D_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices diagonales réelles.

◇ [Rec02/bilineaire-r2.tex/bil-r:2:20] $N_n(\mathbb{R})$ des matrices de diagonale nulle sont évidemment orthogonales à $D_n(\mathbb{R})$;
 On utilise le produit scalaire canonique $\langle A | B \rangle = \text{tr}({}^t A \cdot B)$, alors l'ensemble on vérifie trivialement que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = N_n(\mathbb{R}) \oplus D_n(\mathbb{R})$.

◆ **PRE.34 (Matrice de Gram)** Mines MP – 2003
 Soit E un espace vectoriel euclidien. Soient (e_1, \dots, e_n) une famille d'éléments de E (avec $n \geq 2$).
 1) On note M la matrice d'éléments $m_{ij} = \langle e_i | e_j \rangle$. Montrer que (e_1, \dots, e_n) est libre si et seulement si M est inversible.
 2) Montrer que $0 \leq \det M \leq \prod_{i=1}^n \|e_i\|^2$.
 Donner une condition nécessaire et suffisante pour le cas d'égalité à droite.

◇ [Rec03/bilineaire-r3.tex/r3:322]

◆ **PRE.35** CCP MP – 2003
 Soit E un espace vectoriel euclidien. Soient a et b deux vecteurs non nuls de E . Montrer que

$$\|a - b\| \geq \frac{1}{2}(\|a\| + \|b\|) \cdot \left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\|.$$

 Montrer qu'il n'y a égalité que quand les vecteurs a et b sont colinéaires.

◇ [Rec03/bilineaire-r3.tex/r3:328]

◆ **PRE.36** (♣) CCP MP – 2003
 1) Soit h une fonction continue et positive sur $[a; b]$. Montrer que $\int_a^b h = 0$ si et seulement si $h \equiv 0$.
 2) On note $E = \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$. Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle$ définie par $\langle f | g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$ est un produit scalaire.

◇ [Rec03/bilineaire-r3.tex/r3:352] Un vrai scandale !

◆ **PRE.37** (**) CCP PC – 2003
 On considère \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de \mathbb{R}^n . Soit (v_1, \dots, v_p) une famille de p vecteurs de \mathbb{R}^n . Notons $H = ((v_1 | v_2) \dots (v_p | v_p))$ la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ représentative de (v_1, \dots, v_p) . Notons $M = (\langle v_i | v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}$.
 1) Montrer que $M = {}^t H H$.
 2) Montrer que M et H ont même noyau.
 3) Montrer que $\text{rg}(M) = \text{rg}(H)$.
 4) Notons $A = (\|v_i - v_j\|^2)_{1 \leq i, j \leq n}$ et posons

$$N = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \vdots \\ & A & & 1 \\ & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

 Montrer que $\det N = 0$.

◇ [Rec03/bilineaire-r3.tex/r3:407] ${}^t X$ on obtient ${}^t(HX)(HX) = 0$ et donc $HX = 0$ □.
 1) T.
 2) On a trivialement $\text{Ker } H \subset \text{Ker } M$.
 □ Soit $X \in \text{Ker } M$. Alors ${}^t H X X = 0$ donc en multipliant à gauche par
 3) Formule du rang en géométrisant (espace de départ de même dimension p).
 4) **À FINIR !!!**

◆ **PRE.38** (*) Mines PC – 2005
 Soit $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire suivant $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.
 Soit $F = \{f \in E; f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

◇ [Rec05/bilineaire-r5.tex/r5:510] tire $g = 0$ donc, par continuité, $f = 0$.
 Soit $f \in F^\perp$. Alors, en notant $g : x \mapsto x f(x)$, on a $g \in E$ et de $\langle f | g \rangle = 0$ on

◆ **PRE.39** (♣) ENSTIM PC – 2005
 Montrer que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{A}_n(\mathbb{K})$ (matrices symétriques, puis antisymétriques).

◇ [Rec05/bilineaire-r5.tex/r5:146]

Cauchy-Schwarz

◆ **PRE.40**

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p} \right)^2$.

◇ [Divers/cauchyschwarzexo.tex/pre:94]

Cauchy-Schwarz.

◆ **PRE.41** (♣)

Montrer que $\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}} \sqrt{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

◇ [Divers/cauchyschwarzexo.tex/pre:40]

Cauchy-Schwarz plus $\sum k$ et $\sum k^2$.

◆ **PRE.42** (★★)

Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tA = A$ et $A^2 = A$. Que peut-on dire de la nature géométrique de A ?
Montrer que

$$\sum_{i,j=1}^n |A_{ij}| \leq n\sqrt{\text{rg } A}.$$

INDICATION : On utilisera une inégalité de Cauchy-Schwarz pour faire apparaître plutôt la somme des carrés des coefficients. On calculera également ce qu'est $\text{tr}[{}^tA \cdot A]$.

◇ [Divers/cauchyschwarzexo.tex/pre:21]

et donc

On note $U = (1)_{ij}$, et $A' = (|a_{ij}|)_{ij}$, alors

$$\left(\sum_{i,j} |a_{ij}| \right)^2 \leq \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{i,j} 1 \right).$$

$$\langle A' | U \rangle^2 \leq \|A'\|^2 \|U\|^2$$

Or $\sum a_{ij}^2 = \text{tr}({}^tAA) = \text{tr}(A)$ et comme A est un projecteur, on a $\text{tr } A = \text{rg } A$.

◆ **PRE.43** (★★★) Centrale PC – 2005

On pose $A = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} ; x_1, \dots, x_n > 0 \right\}$.
Étudier l'existence et la valeur de $\inf(A)$ et $\sup(A)$.

◇ [Rec00/cauchyschwarz-r0.tex/r0:36]

Pour le sup, il suffit de remarquer qu'en prenant $x_1 = 1$ et $x_2 \rightarrow 0$, on a une valeur arbitrairement grande :

$$\sup(A) = +\infty.$$

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{x_i}}{\sqrt{x_i}} \right|^2 = n^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$$

et cette valeur est atteinte en $(1, \dots, 1)$. Ainsi,

Pour la borne inférieure, c'est Cauchy-Schwarz :

$$f(A) = n^2 \quad \text{et} \quad \sup(A) = +\infty.$$

◆ **PRE.44** (★) TPE PC – 2001

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $|\text{tr } A| \leq \sqrt{n \text{tr}(A \cdot {}^t\bar{A})}$.

◇ [Rec01/cauchyschwarz-r1.tex/bil-r:10]

On note $U = I_n$, et on pose comme produit scalaire $\langle M | N \rangle = \sum_{i,j} M_{ij} \bar{N}_{ij}$.

Alors $|\langle A | I_n \rangle| \leq \|A\| \cdot \|I\|$, or $\|I\| = \sqrt{n}$ et $\|A\|^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \text{tr}(A \cdot {}^t\bar{A})$, ce qui achève la démonstration.

◆ **PRE.45** (★) TPE MP – 2001

Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathfrak{M}_{pq}(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{rg } A = \text{rg}({}^tAA)$.

◇ [Rec01/cauchyschwarz-r1.tex/bil-r:13]

${}^tA \cdot A$ est la matrice d'une forme bilinéaire symétrique positive de signature $(r, 0)$, donc de rang r .

On peut dire aussi $\text{rg}({}^tA \cdot A) \leq \text{rg } A$. Par ailleurs, il y a équivalence entre les énoncés :

(a) $X \in \text{Ker } A$;

(b) $AX = 0$;

(c) ${}^t(AX) \cdot (AX) = 0$;

(d) ${}^tX({}^tA \cdot A)X = 0$.

Ainsi, si $X \in \text{Ker}({}^tA \cdot A)$, alors $X \in \text{Ker } A$, ce qui montre l'inégalité inverse.

◆ **PRE.46** (♣) CCP MP – 2002

Si $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{2n}$, montrer que

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \times \sum_{i=1}^n |b_i|^2$$

en utilisant $\sum_{i=1}^n |Ba_i - Cb_i|^2$ avec

$$B = \sum_{i=1}^n |b_i|^2 \quad \text{et} \quad C = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i.$$

◇ [Rec02/cauchyschwarz-r2.tex/bil-r2:13]

Ce n'est que l'inégalité de Cauchy-Schwarz ! On écrit que la somme voulue est positive, et le module est $|z| = \bar{z} \cdot z$. On note $A = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$. La somme est alors

$$\sum_{i=1}^n |Ba_i - Cb_i|^2 = \sum_{i=1}^n B^2 A - B |C|^2$$

ce qui donne la relation voulue.

Familles orthogonales

♦ FAM.1 (Ruse sur les polynômes orthogonaux) (♣)

Soit $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive, continue, vérifiant : Pw est intégrable pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Donner un exemple de telle fonction.

1) On introduit le produit scalaire

$$\langle P|Q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) w(t) dt,$$

et on orthonormalise la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la méthode de MM. Gram et Schmidt. On obtient alors une famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Montrer que P_n possède n racines distinctes, que nous noterons (a_1, \dots, a_n) .

2) Montrer qu'il existe des réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) w(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(a_i) \quad \forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X].$$

INDICATION : On commencera par montrer le résultat pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, puis on montrera que le résultat s'étend aux polynômes de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

◊ [Divers/famorthogexo.tex/pre:67]
On introduit le produit scalaire

$$\langle P|Q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) w(t) dt,$$

et on orthonormalise la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la méthode de MM. Gram et Schmidt. On obtient alors une famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\int P_n Q w = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Un résultat classique d'analyse est que P_n possède exactement n zéros distincts que nous noterons (a_1, \dots, a_n) .

Puisque les formes $P \mapsto P(a_i)$ (pour $i \in [1, n]$) forment une famille libre dans $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^*$, il existe des réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) w(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(a_i) \quad \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

♦ FAM.2 (Polynômes de Legendre) (**)

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, que l'on munit du produit scalaire

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) \longmapsto \langle P|Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x) Q(x) dx. \end{cases}$$

- Vérifier que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire, et qu'il vérifie, pour tout $P, Q, R \in E$: $\langle PQ|R \rangle = \langle P|QR \rangle$.
- Montrer qu'il existe une unique famille orthonormée (P_0, \dots, P_n) telle que $\deg P_k = k$ pour $k \in [0, n]$, et telle que le coefficient dominant de chaque P_k est positif.
- Montrer que, pour tout $k \in [0, n]$, P_k admet k racines distinctes dans $] -1; 1[$.
- Calculer explicitement (P_0, \dots, P_3) dans le cas $E = \mathbb{R}_3[X]$.

◊ [Divers/famorthogexo.tex/pre:22]

♦ FAM.3 (Polynômes de Laguerre) (*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'application

$$(P, Q) \longmapsto \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$$

définit un produit scalaire sur E . Pour $n = 2$, déterminer une base orthonormale à partir de la base $(1, X, X^2)$.

◊ [Divers/famorthogexo.tex/pre:69]

♦ FAM.4 (Famille obtusangle)

CCP MP – 2001

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et (x_1, \dots, x_p) une famille de E telle que

$$\forall (i, j) \in [1, p]^2, \quad i \neq j \Rightarrow \langle x_i | x_j \rangle < 0.$$

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ tel que $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i x_i = 0$.

- Montrer que si $I = \{i \in [1, p-1] ; \alpha_i > 0\}$ n'est pas vide, alors $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0$. (Question bizarre ; montrer plutôt que si I n'est pas vide on aboutit à une contradiction. NdW)
- En déduire que la famille (x_1, \dots, x_{p-1}) est libre.

◊ [Divers/famorthogexo.tex/bil-r:6]

On suppose I non vide, et quitte à renommer, on peut poser $I = [1, r]$. Alors

$$\underbrace{\left\langle x_p \left| \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \right. \right\rangle}_{< 0} + \underbrace{\left\langle x_p \left| \sum_{i=r+1}^p \alpha_i x_i \right. \right\rangle}_{\geq 0} = 0,$$

ce qui montre que les $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{p-1}$ ne sont pas tous nuls. Quitte à renommer, on suppose $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m < 0$ et les autres nuls. On a alors, en posant

$$y = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \text{ et } z = \sum_{i=r+1}^m \alpha_i x_i,$$

$y = -z$ et donc $\langle y|z \rangle < 0$, et d'autre part

$$\langle y|z \rangle = \sum_{i=1}^r \sum_{j=r+1}^m \underbrace{\alpha_i \alpha_j}_{< 0} \underbrace{\langle x_i | x_j \rangle}_{< 0} > 0,$$

ce qui est une contradiction.

Donc I est vide, et tous les α_i sont ≤ 0 . Mais par le même raisonnement, ils doivent être tous nuls. Donc la famille (x_1, \dots, x_{p-1}) est libre.

♦ FAM.5 (Famille obtusangle) (**)

Centrale MP – 2001

Quel est le nombre maximal d'éléments d'une famille de vecteurs obtusangle dans un espace de dimension n ?

◊ [Divers/famorthogexo.tex/bil-r:39]

Ce nombre est inférieur à $n + 1$ d'après **FAM.4**. Il est en fait égal à $n + 1$: il

suffit d'exhiber une famille *ad-hoc*.

♦ FAM.6 (Familles bi-orthogonales)

Soit E un espace euclidien de dimension n . On dit que les familles de vecteurs (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) sont **bi-orthogonales** si et seulement si $\langle x_i | y_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in [1, n]$.

- Soient (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) deux familles bi-orthogonales. Montrer qu'elles sont libres.
- Soit \mathcal{B} une base de E . Montrer qu'il existe une unique base \mathcal{B}' telle que \mathcal{B} et \mathcal{B}' soient bi-orthogonales.

3) On pose $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$. Trouver la base \mathcal{B}' .

◊ [Divers/famorthogexo.tex/pre:65]

(Cf. exercice **FAM.22**.)

- T.
- On note $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$.
Solution pragmatique : On commence par faire un grand **dessin**. Ensuite on voit qu'il faut construire y_1 dans $(\text{Vect}(x_2, \dots, x_n))^\perp$ (qui est de di-

mension 1) et le normer pour que $\langle x_1 | y_1 \rangle = 0$. On fait de même avec les autres vecteurs. On vérifie alors que c'est une base (elle est trivialement libre en faisant des produits scalaires).

Solution théorique : on cherche la base duale de (x_1, \dots, x_n) et on utilise ensuite le théorème de représentation.

3)

♦ FAM.7 (Parseval généralisé) (**)

X MP – 1997

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et soit $w : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$ une fonction continue. On pose $\langle f|g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) w(t) dt$.

- Montrer que $E = \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$, muni de cette application, est un espace préhilbertien.
- Montrer qu'il existe une famille orthonormée $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_0, \dots, P_n) soit une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On note $a_n = \int_a^b f(t) P_n(t) w(t) dt$. Montrer que la série $\sum a_n^2$ converge, que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ et que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \|f\|_2^2$.

◊ [Rec00/famorthog-r0.tex/pre:113]

- T.
- On orthogonalise la base canonique par le procédé de Gram-Schmidt.
- C'est la même démonstration que pour la formule de Parseval dans le cas des séries de Fourier.

Tout d'abord on note par Pythagore que $\|f\|_2^2 = \|f - S_n\|_2^2 + \|S_n\|_2^2$ donc (inégalité de Bessel)

$$\|S_n\|_2^2 = \sum_{k=0}^n a_k^2 \leq \|f\|_2^2$$

donc cette série est convergente et donc son terme principal tend vers 0.

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|_2^2 &= \inf_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - P\|_2^2 \\ &\leq \inf_{P \in \mathbb{R}_p[X]} \|f - P\|_2^2 \\ &\leq \|f - Q\|_2^2 \leq \varepsilon^2(b-a) \|w\|_\infty, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\|f - S_n\|_2^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ce qui est l'égalité demandée.

□ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe, d'après Weierstrass, un polynôme Q tel que $\|f - Q\|_\infty \leq \varepsilon$ donc $\|f - Q\|_2^2 \leq \varepsilon^2(b-a) \|w\|_\infty$. On note $p = \deg Q$, alors $Q \in \mathbb{R}_p[X]$ pour tout $n \geq p$. On a alors

◆ **FAM.8 (Décomposition d'Iwasawa)** (★★★) ENSI PC – 1988

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$.

INDICATION : On orthonormalisera la base, image par un endomorphisme représenté par A , d'une base orthonormée.

- 2) Montrer que cette décomposition est unique.

◊ [Rec00/famorthog-r0.tex/pre:25]

on note $\mathcal{A} = u(\mathcal{B})$ et on schmidte \mathcal{A} en une base orthonormée \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} A &= \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(u) = \langle e^*, u(e) \rangle = \langle e^*, a \rangle \\ &= \langle e^*, b \rangle \langle b^*, a \rangle \\ &= Q \cdot T^{-1}, \end{aligned}$$

où T est la matrice de la base schmidtée dans la base d'origine, qui est triangulaire, ainsi que son inverse.

2) Supposons que $A = QR = Q'R'$. Alors $Q'^{-1}Q = R'R^{-1}$ est une matrice à la fois orthogonale et triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs, elle est donc égale à l'identité (calculer de proche en proche). On a donc $Q = Q'$ et $R = R'$.

$$A = \text{Pass}(\mathcal{E}, \mathcal{A}) = \text{Pass}(\mathcal{E}, \mathcal{B}) \cdot \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$$

et donc $A = QR_n = QR$.

2° solution : on peut aussi utiliser les jolies notations : on part de la base \mathcal{E} ,

◆ **FAM.9 (Polynômes d'Hermite)** (★★) ENS Cachan PSI – 2000

On pose $P_n(x) = (-1)^n e^{-x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

- 1) Montrer que P_n est un polynôme en x dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.
- 2) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x) P_n(x) e^{-x^2/2} dx$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.
- 3) Exprimer $-\frac{d^n}{dx^n} [P_n(x) e^{-x^2/2}] + x^2 P_n(x) e^{-x^2/2}$ en fonction de P_n, P_{n-2} et $e^{-x^2/2}$.

◊ [Rec00/famorthog-r0.tex/supp-r0:17]

Remarque 1 Les polynômes P_n sont appelés **polynômes d'Hermite** et habituellement notés He_n (on note H_n les polynômes d'Hermite obtenus avec la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$, qui ne diffèrent des He_n que par la normalisation). Ces polynômes sont notamment très utiles en mécanique quantique (ils forment une base hilbertienne de vecteurs propres pour l'opérateur « hamiltonien de l'oscillateur harmonique »). On peut montrer par ailleurs qu'ils forment une famille de vecteurs propres pour la transformée de Fourier (voir problème CCP Maths 1 PSI 1997).

- 1) P_n est de degré n . Utiliser ensuite la formule de Leibniz.
- 2) Selon la technique habituelle (n intégrations par parties en montrant que les termes de bord sont nuls), on obtient

$$\langle P_m | P_n \rangle = \sqrt{2\pi} n! \delta_{n,m}.$$

3) À FINIR !!!

◆ **FAM.10** (★) Centrale MP – 2001

On pose $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \mathbb{R}_1[X]$.

- 1) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha < \beta$, il existe un unique couple $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall P \in F, \quad \int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = AP(\alpha) + BP(\beta).$$
- 2) Montrer qu'il existe α, β tels que l'égalité précédente soit vraie pour tout $P \in E$.
- 3) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré 4 tel que :

$$\forall P \in E, \quad \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt = 0.$$
- 4) Montrer que les racines de Q sont réelles et positives.

◊ [Rec01/famorthog-r1.tex/bil-r:2]

On pourra se référer à la généralisation de **FAM.1**.

1) F^* est de dimension $\dim F = 2$, or si $\alpha \neq \beta$, les formes $P \mapsto P(\alpha)$ et $P \mapsto P(\beta)$ sont linéairement indépendantes, donc forment une base, donc la forme sur $F : P \mapsto \int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt$ est CL des deux précédentes.

2) On choisit une base $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormale pour le produit scalaire choisi. On a $\int P_2 Q w = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_1[X]$. Un résultat classique d'analyse est que P_2 possède exactement 2 zéros distincts que nous noterons (a_1, a_2) . Puisque les formes $P \mapsto P(a_i)$ (pour $i \in \{1, 2\}$) forment une famille libre dans $(\mathbb{R}_1[X])^*$, il existe des réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que

$$\int P(t) e^{-t} dt = \lambda_1 P(a_1) + \lambda_2 P(a_2) \quad \forall P \in \mathbb{R}_1[X].$$

□ Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On effectue la division euclidienne de P par P_2 , ce

qu'on écrit $P = P_2 Q + R$ avec $Q, R \in \mathbb{R}_1[X]$. Alors

$$\begin{aligned} \int P(t) e^{-t} dt &= \int \underbrace{P_2(t) Q(t)}_{=0} e^{-t} dt + \int R(t) e^{-t} dt \\ &= \lambda_1 R(a_1) + \lambda_2 R(a_2) \\ &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i P(a_i) - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \underbrace{P_2(a_i)}_{=0} Q(a_i), \end{aligned}$$

ce qui montre la formule désirée.

3) On vérifie que $\langle P, Q \rangle \mapsto \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$ est un produit scalaire. Pour tout $Q \in \mathbb{R}_4[X]$, on note $\phi_Q : P \mapsto \langle P | Q \rangle$. Alors à toute forme de $\mathbb{R}_4[X]^*$ correspond bi-univoquement un polynôme : l'application $\Phi : Q \mapsto \phi_Q$ est bijective de $\mathbb{R}_4[X]$ sur $\mathbb{R}_4[X]^*$.

E est un hyperplan de $\mathbb{R}_4[X]$. Il existe donc une forme linéaire non nulle $\phi \in \mathbb{R}_4[X]^*$ telle que $E = \text{Ker } \phi$. On pose $Q = \Phi^{-1}(\phi)$: alors $Q \in \mathbb{R}_4[X]$ et de plus $E = Q^\perp$. Enfin, ϕ ne saurait appartenir à E car sinon $\langle Q | Q \rangle = 0$ ce qui n'est pas possible, donc $\deg Q = 4$.

4) On montre que Q s'annule au moins une fois avec changement de signe car $\int_0^{+\infty} Q(t) e^{-t} dt = 0$. Notons α une racine réelle de Q . Alors en posant $P = (X - \alpha)$, Q doit s'annuler avec changement de signe encore une fois. On continue jusqu'à ce qu'on ait les quatre.

◆ **FAM.11 (Polynômes de Laguerre)** Centrale MP – 2001

On pose $E = \mathcal{C}([0; +\infty[; \mathbb{R})$ et pour tout $P, Q \in E$, on pose $\langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$ lorsque c'est défini.

- 1) Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire (sur la restriction *ad-hoc* de E).
- 2) On pose $L_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) e^x$. Vérifier que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes orthonormaux, et que c'est la transformée de la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ par le procédé de Gram-Schmidt.
- 3) Pour tout $\alpha > 0$, on pose $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\alpha x}$. Calculer $\|f_\alpha\|^2, \langle f_\alpha | L_n \rangle$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_\alpha | L_n \rangle^2$. Commentaire et interprétation ?

◊ [Rec01/famorthog-r1.tex/bil-r:33]

- 1) Produit scalaire sur l'ensemble L_{α}^2 des fonction $f \in E$ telles que $t \mapsto f^2(t) e^{-2t}$ soit intégrable.
- 2) On suppose que $p > q$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle L_p | L_q \rangle &= \frac{1}{p!} \int_0^{+\infty} \frac{d^p}{dx^p} (x^p e^{-x}) L_q(x) dx \\ &= \frac{(-1)^p}{p!} \int_0^{+\infty} (x^p e^{-x}) \underbrace{\frac{d^p}{dx^p} L_q(x)}_{=0} dx = 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, il existe une seule famille orthonormée de polynômes unitaires et échelonnée. En effet, si P_1 et Q_1 sont orthogonaux à X^0 et unitaire, leur différence est orthogonale à X^0 et de degré 0, donc nulle. Et ainsi de suite par récurrence. Ici la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas unitaire, mais $(-1)^n L_n$ l'est.

3) On calcule aisément $\|f_\alpha\|^2 = \langle f_\alpha | f_\alpha \rangle = \frac{1}{2\alpha + 1}$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \langle f_\alpha | L_n \rangle &= \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\alpha n x}) x^n e^{-x} dx \\ &= \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+1)x} x^n dx = \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

On en déduit $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle f_\alpha | L_n \rangle|^2 = \frac{1}{2\alpha + 1} = \|f_\alpha\|^2$, ce qui fait furieusement penser à une égalité de Parseval (en fait, cela prouve juste que la série de Fourier-Laguerre converge quadratiquement vers f_α ; on pourrait le montrer pour toute fonction idoine).

◆ **FAM.12 (Polynômes de Laguerre)** Centrale MP – 2001

On définit sur $\mathbb{R}[X]$ l'application $\phi : (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$.

- 1) Montrer que ϕ est un produit scalaire.
- 2) Montrer qu'il existe des polynômes P_0, \dots, P_n orthogonaux entre eux, unitaires et tels que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg P_k = k$.
- 3) Montrer que P_k admet exactement k racines, qu'elles sont simples et strictement positives.
- 4) Montrer qu'il existe un minimum global de $\psi(a, b, c) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} (1 + at + bt^2 + ct^3)^2 e^{-t} dt$. Déterminer l'unique triplet où il est atteint.

◇ [Rec01/famorthog-r1.tex/bil-r:19]

◆ **FAM.13**

CCP PC – 2001

On note F l'espace vectoriel des fonction continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- 1) Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire.
- 2) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$.
- 3) Quelle est la projection de $x \mapsto |x|$ sur cette base ?

◇ [Rec01/famorthog-r1.tex/bil-r:43]

◆ **FAM.14 (Polynômes de Tchebychev)**

Centrale PC – 2001

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire ϕ défini par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P, Q) = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)dt,$$

où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, et où $w \in \mathcal{C}(\]a; b[, \mathbb{R})$ est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n w(t)$ est intégrable.

- 1) Montrer qu'il existe une unique base orthonormée $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et le coefficient dominant de P_k est positif.
- 2) On pose $a = -1$, $b = 1$ et $w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = \frac{\alpha_n}{2^{n-1}} \cos(n \text{ Arc } \cos t)$.
- 3) Déterminer les zéros de P_n .
- 4) Soit \mathcal{Z} l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré égal à n et de coefficient dominant égal à 1. Montrer que

$$\inf_{P \in \mathcal{Z}} \int_a^b \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ est atteinte pour } P = P_n.$$

◇ [Rec01/famorthog-r1.tex/bil-r:1]

Cf **POL.14** pour une étude générale des polynômes et **POL.87** page 52 pour une application à un problème de minimisation.

On pourra voir l'épreuve d'écrit ESIM 1999, filière PSI, Maths-I.

- 1) Voir cours et procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

2)

3) P_n s'annule pour $t = \cos(2k+1)\pi/2n$ et $k = 0, \dots, n-1$, ce qui donne le bon nombre de zéros.

- 4) On décompose P sur la base (P_0, \dots, P_n) .

◆ **FAM.15**

Centrale MP – 2002

On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note

$$\forall P, Q \in E \quad \phi(P, Q) = \sum_{j=0}^n P(j)Q(j).$$

- 1) Montrer que ϕ est un produit scalaire.
- 2) Utiliser le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour déterminer une base étagée (f_0, \dots, f_n) de E . On pourra prendre $n = 3$.
- 3) Montrer que l'on a une formule de la forme

$$f_{k+1}(x) = (x-a)f_k(x) + bf_{k-1}(x).$$

◇ [Rec02/famorthog-r2.tex/bil-r:2:36]

◆ **FAM.16 (Polynômes de Laguerre)**

(★★)

Centrale PC – 2002

(Avec Maple)

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) ; t \mapsto f^2(t)e^{-t} \in L^1(\mathbb{R}^+) \right\}.$$

- 1) Montrer que E a une structure d'espace préhilbertien lorsqu'il est muni de l'application bilinéaire définie par

$$\langle f|g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt.$$

- 2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

Montrer que les L_n sont des fonctions polynomiales et appartiennent à E .

- 3) Expliciter L_n (utilisation de Maple souhaitable).
- 4) Calculer $\langle L_n|L_m \rangle$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

◇ [Rec02/famorthog-r2.tex/bil-r:2:11]

- 1) Il faut d'abord montrer que E est un espace vectoriel, ce qui ne pose de difficulté qu'en un point. Soient $f, g \in E$. Alors $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$ et deux termes sont déjà intégrables lorsqu'on les multiplie par e^{-x} . De $(f-g)^2 \geq 0$ on tire $2fg \leq f^2 + g^2$. De $(f+g)^2 \geq 0$ on tire $-2fg \geq f^2 + g^2$ donc au total

$$|2fg| \leq f^2 + g^2$$

ce qui montre que $x \mapsto 2f(x)g(x)e^{-x}$ est intégrable. Notamment, $(f+g) \in E$, et on a montré que E est un espace vectoriel.

De plus, l'application bilinéaire est correctement définie (on vient de le montrer en sus), elle est clairement définie positive par la continuité des fonctions.

- 2) On utilise la formule de Leibniz de dérivation d'un produit.
- 3) On obtient ainsi une expression explicite :

$$L_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n! (n-k)!} \binom{n!}{k!} X^k.$$

- 4) On suppose que $p > q$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle L_p|L_q \rangle &= \frac{1}{p!q!} \int_0^{+\infty} \frac{d^p}{dx^p} (x^p e^{-x}) L_q(x) dx \\ &= \frac{(-1)^p}{p} \int_0^{+\infty} (x^p e^{-x}) \underbrace{\frac{d^p}{dx^p} L_q(x)}_{=0} dx = 0, \end{aligned}$$

après avoir vérifié que les termes de bord s'annulent bien (commencer par une seule intégration par parties, vérifier que le terme de bord est

$$\left[L_q(x) \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} (x^p e^{-x}) \right]_0^{+\infty}$$

et est nul en l'infini ainsi qu'en zéro, le terme constant du second polynôme étant nul ; les termes suivants ne sont pas moins nuls...)

De la même façon, on calcule $\langle L_n|L_n \rangle = 1$ grâce à l'expression explicite de L_n et, notamment, au terme de degré n .◆ **FAM.17**

Centrale PC – 2002

On munit l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^n de son produit scalaire habituel. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ de norme 1 formant une famille libre. On note $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients sont

$$a_{ij} = \delta_{ij} + \alpha x_i x_j + \beta y_i y_j.$$

- 1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.

INDICATION : On pourra considérer $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Pi = \text{Vect}(x, y)$ et Π^\perp .

- 2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit orthogonale.

INDICATION : On pourra considérer $y_1 \in \Pi$ tel que $\|y_1\| = 1$ et $\langle y_1|x \rangle = 0$.

◇ [Rec02/famorthog-r2.tex/bil-r:2:12]

◆ **FAM.18**

CCP MP – 2003

Pour tout $A, B \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose $\langle A|B \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 A(x)B(x) dx$.

- 1) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est ainsi muni d'une structure euclidienne.
- 2) Montrer qu'il existe une unique base orthonormale (u_0, \dots, u_n) de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que u_k soit de degré k à coefficient dominant strictement positif.

◇ [Rec03/famorthog-r3.tex/r3:2:57]

Un vrai scandale !

◆ **FAM.19**

(★★★)

Centrale MP – 2004

Soient a et b tels que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad t \mapsto |t|^n \phi(t) \text{ est intégrable.}$$

On pose $E_\phi = \{ f : I \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto f^2(t)\phi(t) \text{ est intégrable} \}$ que l'on munit de l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définie par

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\phi(t) dt.$$

- 1) Montrer que E_ϕ est un espace vectoriel et que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
- 2) Soit (P_0, \dots, P_n) la famille *orthogonale* issue du procédé d'orthogonalisation de Schmidt appliqué à la famille $(1, X, \dots, X^n)$.
 - a) Montrer que P_n est unitaire et de degré n .
 - b) Montrer que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que $\langle X P_{n-1} | P_n \rangle = \langle P_n | P_n \rangle$.
 - c) Montrer que P_n admet n racines réelles distinctes sur I .

◇ [Rec04/famorthog-r4.tex/r4:2:27]

Que du classique !!!

◆ **FAM.20** (★) TPE MP – 2004

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on définit $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

- 1) Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
- 2) On définit $I_k = \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{x(1-x)}} dx$. Donner une relation entre I_k et I_{k-1} .
- 3) On pose $P_0 = 1$; déterminer P_1, P_2, P_3 tels que (P_0, P_1, P_2, P_3) forme une famille orthogonale pour le produit scalaire précédent, avec $\deg P_k = k$ et de coefficient dominant égal à 1.

◇ [Rec04/famorthog-r4.tex/r4:254]

Super intéressant! Merci MM. Gram et Schmidt.

◆ **FAM.21** (★★) Mines PC – 2004

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n . Soit (a_1, \dots, a_n) une base quelconque de E . Montrer qu'il existe un vecteur $b \neq 0$ tel que :

$$\forall (i, j) \in [1; n]^2 \quad \langle b|a_i \rangle = \langle b|a_j \rangle.$$

◇ [Rec04/famorthog-r4.tex/r4:101]

Solution pratique

Munissons E d'une base orthonormée $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$. On note $P = \text{Pass}(\mathcal{E}, \mathcal{A})$, alors

$$\forall j \in [1; n] \quad \mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} e_i.$$

La condition cherchée est alors, en notant K la constante et $b_i = \langle b|e_i \rangle$:

$$\langle b|\mathbf{a}_j \rangle = \sum_{i=1}^n P_{ij} b_i.$$

On est donc amené à résoudre le problème

$${}^t P \cdot B = \begin{pmatrix} K \\ \vdots \\ K \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

qui admet évidemment une solution puisque P est inversible.

Solution théorique

On définit $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $\phi(a_i) = 1$ et on utilise le théorème de représentation : il existe un vecteur b tel que $\phi : x \mapsto \langle b|x \rangle$.

◆ **FAM.22 (Familles biorthogonales)** (★) INT Télécom PC – 2004

Soient E un espace vectoriel euclidien et (e_1, \dots, e_n) une base de E . Montrer qu'il existe une unique base (e'_1, \dots, e'_n) de E telle que

$$\forall (i, j) \in [1; n]^2 \quad \langle e_i|e'_j \rangle = \delta_{ij}.$$

◇ [Rec04/famorthog-r4.tex/r4:95]

Solution pragmatique : On commence par faire un grand dessin. Ensuite on voit qu'il faut construire e'_1 dans $(\text{Vect}(e_2, \dots, e_n))^\perp$ (qui est de dimension 1) et le normer pour que $\langle e_1|e'_1 \rangle = 0$. On fait de même avec les autres vecteurs. On

vérifie alors que c' est une base (elle est trivialement libre en faisant des produits scalaires).

Solution théorique : on cherche la base duale de (e_1, \dots, e_n) et on utilise ensuite le théorème de représentation.

◆ **FAM.23** (★★) Centrale PC – 2005

Soit E un espace préhilbertien, et (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs *unitaires* vérifiant

$$\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle e_i|x \rangle|^2.$$

Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée. (**Attention** : on ne suppose rien sur la dimension de E a priori !)

◇ [Rec05/famorthog-r5.tex/pre:28]

ce qui montre puisque (e_1, \dots, e_n) est une famille orthonormée, que

$$1 = \|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle e_i|e_j \rangle|^2 = \sum_{i \neq j} |\langle e_i|e_j \rangle|^2 + 1. \quad \|x_F\| = \sum_{i=1}^n \langle e_i|x \rangle^2 = \|x\|,$$

Cela prouve que la famille (e_1, \dots, e_n) est orthogonale et donc libre.

Notons maintenant $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Soit $x \in E$. Alors (e_1, \dots, e_n) est une base de F .

et donc $\|x - x_F\|^2 = 0$ donc $x = x_F$ donc $x \in F$. Cela montre que la famille (e_1, \dots, e_n) est génératrice, c' est donc une base orthonormée.

La projection orthogonale de x sur F est

$$x_F = \sum_{i=1}^n \langle e_i|x \rangle e_i$$

Projections orthogonales

◆ **PROJ.1** (★★★)
 Soit E un espace vectoriel euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 (a) p est une projection orthogonale;
 (b) $\forall x, y \in E$, on a $\langle x|p(y) \rangle = \langle p(x)|y \rangle$;
 (c) $\forall x \in E$, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

◇ [Divers/projorthoexo.tex/pre:6]
 (a) \Rightarrow (b) : On a $\langle x - p(x)|y \rangle = 0 = \langle x|p(y) \rangle - \langle p(x)|p(y) \rangle$ or $\langle p(x)|p(y) \rangle = \langle p(x)|p(y) - y \rangle + \langle p(x)|y \rangle = \langle p(x)|y \rangle$ donc $0 = \langle x|p(y) \rangle - \langle p(x)|y \rangle$ ce qui montre l'égalité voulue.
 (b) \Rightarrow (c) : On a successivement

$$\langle x|p(x) \rangle^2 \leq \langle x|x \rangle \langle p(x)|p(x) \rangle$$
 or $\langle x|p(x) \rangle = \langle x|p^2(x) \rangle = \langle p(x)|p(x) \rangle$
 donc $\|p(x)\|^2 \leq \|x\| \cdot \|p(x)\|$,

ce qui mène à l'inégalité voulue.
 (c) \Rightarrow (a) : □ Soit $x \in [\text{Ker } p]^\perp$. Or $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ donc $x = a + b$. On a donc $\langle x|b \rangle = 0$ donc $\|x - b\|^2 = \|x\|^2 + \|b\|^2 = \|a\|^2$, mais $a = p(x)$ donc $\|a\| \leq \|x\|$. On en déduit $b = 0$ donc $x \in \text{Im } p$. □
 On a donc montré que $[\text{Ker } p]^\perp \subset \text{Im } p$, la dimension montre égalité. Donc p qui est un projecteur est un projecteur orthogonal.
Variante : $\neg(\mathbf{a}) \Rightarrow \neg(\mathbf{c})$: on suppose que p n'est pas orthogonale, on peut donc trouver $u \in \text{Ker } p \setminus \text{Im } p$ et $y \in \text{Im } p \setminus \text{Ker } p$. On remarque que

$F = \text{Vect}(u, v)$ est stable par p et que $q = p|_F$ est un projecteur non orthogonal. On choisit maintenant w un vecteur unitaire dans $(\text{Ker } p)^\perp$, on fait un dessin et montre que $\|p(x)\| \geq \|x\|$ par Pythagore.
Variante : on suppose (c). Soit $(y, z) \in \text{Im } p \times \text{Ker } p$. Alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|p(\lambda y + z)\| \leq \|\lambda y + z\|$$
 ce qui montre que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 2\lambda \langle y|z \rangle + \|z\|^2 \geq 0$$
 et par conséquent $\langle y|z \rangle = 0$.
Variante facile : on veut montrer que $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ sont orthogonaux, ce qui revient à dire que $\text{Im } p \subset (\text{Ker } p)^\perp$.
 □ Soit $x \in \text{Im } p$. On va montrer que le projeté de x sur $\text{Ker } p$ est nul.
 Puisque $E = \text{Ker } p \oplus (\text{Ker } p)^\perp$, on peut écrire $x = x_1 + x_2$, et $p(x) = x = x_1 + x_2 = p(x_2)$, donc le théorème de Pythagore donne

$$\|p(x_2)\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2.$$
 D'après l'hypothèse, on en déduit que $x_1 = 0$, et donc $x \in (\text{Ker } p)^\perp$. □

◆ **PROJ.2** (*)
 On note S l'ensemble des matrices symétriques de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose, pour tout $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|M\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n M_{ij}^2}.$$

Quel est le produit scalaire associé ?
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer

$$d(A; S) = \inf_{M \in S} \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij} - M_{ij}|^2}.$$

◇ [Divers/projorthoexo.tex/pre:27]
 On note que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = S \oplus S'$ avec S' : ensemble des matrices antisymétriques.
 On a alors
 $\|A - M\|^2 = \|B - M\|^2 + \|C\|^2$ avec $A = B + C$ $B = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$.
 Or $\|B - M\|$ s'annule (en $M = B$) donc

$$d(A; S) = \|C\| = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij} - A_{ji}|^2}.$$

◆ **PROJ.3** (*)
 Calculer la valeur minimale de $\int_0^1 (t \ln t - at - b)^2 dt$ et donner les valeurs de a et b pour lesquelles ces valeurs sont atteintes.

◇ [Divers/projorthoexo.tex/pre:5]
 (Cf. Récolte 2002 : **PROJ.12** page 235).
 C'est un problème de projection orthogonale du logarithme sur l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à 1.
 On munit donc $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire euclidien

$$(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$
 On note F le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes de degré 0 ou 1. On note de plus $\phi : t \mapsto t \ln t$ prolongée par continuité par $\phi(0) = 0$.
 On cherche donc l'élément P de F qui minimise $\|\phi - P\|$.
 Cet élément est donc la projection orthogonale, il vérifie
 $(P - \phi, t \mapsto 1) = 0$ et $(P - \phi, t \mapsto t) = 0$.
 On calcule facilement que $(\phi, 1) = -1/4$ et $(\phi, t) = -1/9$.
 Enfin, on pose $P(t) = at + b$, alors $(P, 1) = b + \frac{a}{2}$ tandis que $(P, t) = \frac{b}{2} + \frac{a}{3}$.
 On trouve donc

$$b = -\frac{1}{3} \quad a = \frac{1}{6}.$$
 Enfin, le minimum cherché vaut donc $\|\phi - P\| = \sqrt{\|\phi\|^2 - \|P\|^2}$ par Pythagore, et comme

$$\|\phi\|^2 = \int_0^1 t^2 \ln^2 t dt = -\frac{2}{3} \int_0^1 t^2 \ln t dt = \frac{2}{27},$$
 comme de plus

$$\|P\|^2 = \frac{7}{108},$$
 on en déduit que

$$\|\phi - P\| = \sqrt{\frac{1}{108}} = \frac{\sqrt{3}}{18},$$
 et le minimum cherché vaut 1/108.

◆ **PROJ.4**
 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \int_0^1 (1 + x_1 t + \dots + x_n t^n)^2 dt. \end{cases}$$

Montrer que ϕ admet un minimum absolu sur \mathbb{R}^n .
 Calculer ce minimum dans le cas $n = 3$.

◇ [Divers/projorthoexo.tex/pre:11]
 ◆ **PROJ.5**
 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \int_0^1 (1 + x_1 t + \dots + x_n t^n)^2 e^{-t} dt. \end{cases}$$

Montrer que ϕ admet un minimum absolu sur \mathbb{R}^n .
 Calculer ce minimum dans le cas $n = 3$.

◇ [Divers/projorthoexo.tex/pre:12]
 ◆ **PROJ.6**
 Calculer le minimum de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(a, b) \mapsto \int_0^\pi (\sin x - (ax^2 + bx))^2 dx.$$

◇ [Divers/projorthoexo.tex/pre:26]
 ◆ **PROJ.7** (*)
 Calculer le minimum de $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(a, b, c) \mapsto \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-2x} dx.$$

◇ [Divers/projorthoexo.tex/pre:62]
 On munit $\mathbb{R}_3[X]$ de $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-2x} dx$. Le minimum est atteint si $(a_0x^2 + b_0x + c_0)$ est la projection orthogonale de $-x^3$ sur $V = \mathbb{R}_2[X]$, donc si $(x^3 + a_0x^2 + b_0x + c_0) \in V^\perp$, donc si

$$\int_0^{+\infty} (x^3 + a_0x^2 + b_0x + c_0)x^n e^{-2x} dx = 0 \quad \text{pour } n = 0, 1, 2.$$

On obtient alors le système

$$\begin{cases} 2a_0 + 2b_0 + 4c_0 = -3 \\ 3a_0 + 2b_0 + 2c_0 = -6 \\ 15a_0 + 3b_0 + 2c_0 = -15 \end{cases} \quad \text{soit} \quad (a_0, b_0, c_0) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{3}{4}\right),$$

et $f(a_0, b_0, c_0) = \frac{9}{32}$.

◆ **PROJ.8**
 On pose $E = \mathbb{R}^3$ que l'on munit du produit scalaire canonique. On note P le plan d'équation $x - y + z = 0$. Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur le plan P. Calculer la distance $d(A; P)$, où A est le point de coordonnées $(-1, 2, 1)$.

◇ [Divers/projorthoexo.tex/pre:70]
 ◆ **PROJ.9 (Application directe du cours)**
 On note $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. Soit $h \in \mathcal{C}$.

- Justifier avec soin que $\mathcal{C} = \text{Vect}(h) \oplus \text{Vect}(h)^\perp$ et que $(\text{Vect}(h)^\perp)^\perp = \text{Vect}(h)$.
- On note u l'élément de \mathcal{C} défini par $u(t) = \sqrt{3}(1-t)$. On pose $\mathcal{H} = \text{Vect}(u)^\perp$. Enfin, on note \mathcal{A} le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ formé des applications ξ telles que $\xi(0) = \xi'(0) = \xi(1) = 0$.
 Montrer que l'application $\xi \mapsto \xi''$ est un isomorphisme de \mathcal{A} sur \mathcal{H} dont l'isomorphisme réciproque est donné par

$$z \mapsto \left(t \mapsto \int_0^t (t-s)z(s) ds \right).$$

◊ [Divers/projorthoexo.tex/pre:115]
(D'après un écrit de Centrale PSI, Maths 1, 2001.)
 1) Soit $f \in \mathcal{C}$. On peut toujours écrire

$$f = \alpha h + (f - \alpha h),$$

où α est un réel à déterminer. On veut que $(f - \alpha h) \in \mathcal{C}^\perp$, c'est-à-dire $\langle f|h \rangle - \alpha \|h\|^2 = 0$, ce qui est possible en posant $\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\langle f|h \rangle}{\|h\|^2}$ (grâce au fait que $h \neq 0$). Ainsi, $\mathcal{C} = \text{Vect}(h) \oplus \text{Vect}(h)^\perp$.
 Pour démontrer la seconde propriété, il y a deux méthodes :

1^{re} méthode

On note tout d'abord que $F \subset F^{\perp\perp}$ pour des raisons évidentes.
 □ Soit $x \in F^{\perp\perp}$. En utilisant la décomposition connue $E = F \oplus F^\perp$, on obtient une décomposition $x = y + z$. Puisque $f \in F$, on a donc $y \in F^{\perp\perp}$ donc $z = x - y$ est également dans $F^{\perp\perp}$; comme il est dans F^\perp , on en déduit que $z = 0$ donc $x = y$ et donc $x \in F$. □

2^e méthode

Ensuite, on rappelle le résultat suivant :

LEMME Si F est de dimension finie dans E de dimension quelconque, alors $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration : On sait que $E = F \oplus F^\perp$ ce qui montre que F^\perp est de codimension finie et $\text{codim}(F^\perp) = \dim F$.

De la décomposition $E = F \oplus F^\perp$ et de l'inclusion triviale $F \subset F^{\perp\perp}$ on déduit que $E = F^{\perp\perp} + F^\perp$, et de la relation $F^\perp \cap F^{\perp\perp} = \{0\}$ on en déduit finalement que

$$E = F^{\perp\perp} \oplus F^\perp.$$

Ce qui montre notamment qu'un supplémentaire de F^\perp est $F^{\perp\perp}$; or tous les supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel sont isomorphes, donc $\dim F = \dim F^{\perp\perp}$. L'un étant inclus dans l'autre, on en déduit que $F = F^{\perp\perp}$. ■

2) Vérification plus ou moins immédiate.

◆ **PROJ.10** Mines PC – 1998
 Soit $p \in \mathbb{Z}$. Trouver trois réels a, b, c minimisant l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |x^2 + a + b \cos 2px + x \sin 2px|^2 dx.$$

◊ [Rec00/projortho-r0.tex/supp-r0:9]

◆ **PROJ.11** CCP PC – 2001
 Déterminer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^\pi (\sin x - ax - bx^2)^2 dx$.

◊ [Rec01/projortho-r1.tex/bil-r:12] La projection de $g = \sin x$ sur V est $h = \langle e_1|g \rangle e_1 + \langle e_2|g \rangle e_2$. On trouve alors V des fonctions polynomiales de la forme $ax + bx^2$ est

$$e_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{3}{\pi^3}} x \quad e_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left(x^2 - \frac{3\pi}{4} \right).$$

$$\inf = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5} \approx 0,00183\dots$$

◆ **PROJ.12** CCP PC – 2002
 Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x \ln x - bx^2 - ax)^2 dx$.

◊ [Rec02/projortho-r2.tex/bil-r:2:1] $\frac{1}{1728} + \frac{5}{432}$ et seulement $\frac{1}{1728}$ si l'on cherche plutôt $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x \ln x - bx^2 - ax - c)^2 dx$.

◆ **PROJ.13** CCP PC – 2002
 Considérons la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_1, \dots, a_n) \longmapsto \int_0^1 (1 + a_1x + \dots + a_nx^n)^2 dx. \end{cases}$$

Montrer que f admet un minimum unique μ sur \mathbb{R}^n .

◊ [Rec02/projortho-r2.tex/bil-r:2:2] C'est un simple problème de projection orthogonale.

◆ **PROJ.14** CCP PC – 2002
 Matrice de la projection orthogonale sur le plan $x - 2y + z = 0$?

◊ [Rec02/projortho-r2.tex/bil-r:2:3] simplement affine.
 Puisque le plan passe par 0, la projection orthogonale est bien linéaire et non

◆ **PROJ.15** CCP MP – 2002
 Calculer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2 - ax - b)^2 dx$ grâce à une interprétation géométrique.

◊ [Rec02/projortho-r2.tex/bil-r:2:29]

◆ **PROJ.16** CCP MP – 2002
 On munit \mathbb{R}^4 de sa base canonique \mathcal{B} . Notons

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) ; \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Donner la matrice dans la base \mathcal{B} de la projection orthogonale sur F .

◊ [Rec02/projortho-r2.tex/bil-r:2:4]

◆ **PROJ.17** CCP MP – 2002
 Montrer que $(f, g) \mapsto \langle fg \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ engendré par $x \mapsto 1, x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$. Déterminer des réels a, b tels que la distance de $x \mapsto e^x$ à $x \mapsto ax + b$ soit minimale.

◊ [Rec02/projortho-r2.tex/bil-r:2:33]

◆ **PROJ.18** (*) Mines MP – 2003
 Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie.

- 1) Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe un vecteur $\hat{x} \in F$ tel que $d(x; F) = \|x - \hat{x}\|$.
- 2) Montrer qu'il existe un vecteur unitaire $u \in E$ tel que $d(u; F) = 1$.

◊ [Rec03/projortho-r3.tex/r3:316] 2) F admettant un supplémentaire orthogonal, on prend u unitaire dedans. Le théorème de Pythagore permet de conclure.

◆ **PROJ.19** Mines MP – 2003
 Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x \ln x - bx^2 - ax)^2 dx$.

◊ [Rec03/projortho-r3.tex/r3:357] $\frac{1}{1728} + \frac{5}{432}$ et seulement $\frac{1}{1728}$ si l'on cherche plutôt $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x \ln x - bx^2 - ax - c)^2 dx$.
 Après détermination d'une base orthonormée et tout le tralala, on trouve

◆ **PROJ.20** (**) CCP PC – 2003
 On se place dans l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^n muni de sa structure canonique. Notons H l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. On considère la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1})$, où l'on a noté

$$e_i = (1, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ (i+1)\text{-ième} \\ \text{coordonnée}}}{-1}, 0, \dots, 0).$$

- 1) Montrer que \mathcal{B} est une base de H .
- 2) Construire une base orthonormale $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_{n-1})$ de H . Expliciter f_1, f_2, f_3 et donner la forme générale de f_k .
- 3) Déterminer la projection orthogonale sur H du vecteur $u = (0, \dots, 0, 1)$ à l'aide de \mathcal{B}' .
- 4) Retrouver ce résultat à l'aide d'un vecteur orthogonal à H .

◊ [Rec03/projortho-r3.tex/r3:183] conduit bien à une forme orthonormée.

1) T. puisque $\dim H = n - 1$. 3) La formule de projection ne laisse finalement que

$$2) f_1 = \sqrt{\frac{2}{n}}(1, -1, 0, \dots, 0) \quad f_2 = \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0, \dots, 0\right) \quad f_3 = \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1, \dots, 0\right).$$

On vérifie que la forme générique

$$f_k = \sqrt{\frac{k}{k+1}} \left(\underbrace{\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}}_{k \text{ fois}}, -1, 0, \dots, 0 \right)$$

4) Le vecteur $v = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)$ est orthogonal à H . Le projeté orthogonal de u est donc $u - \langle u|v \rangle v$, ce qui donne le même résultat bien sûr.

◆ **PROJ.21** CCP PC – 2003

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$\Delta = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^1 (1 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_n t^n)^2 dt.$$

1) Établir l'existence et l'unicité de $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\Delta = \int_0^1 (1 + a_1 t + \dots + a_n t^n)^2 dt.$$

2) On pose $F(X) = \frac{1}{X+1} + \frac{a_1}{X+2} + \dots + \frac{a_n}{X+n+1}$. Calculer $F(k)$ pour $k \in [1; n]$. Que vaut $F(0)$?

3) Trouver Δ et (a_1, \dots, a_n) .

◇ [Rec03/projortho-r3.tex/r3:233]

◆ **PROJ.22** TPE PC – 2004

(★)

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit $\phi(P, Q) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ pour tous polynômes $P = \sum \alpha_k X^k$ et $Q = \sum \beta_k X^k$.

1) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

2) On note $H = \{P \in E; P(1) = 0\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E . Déterminer sa dimension et une base.
Comment obtenir une base orthonormée de H ?

3) Déterminer la projection orthogonale du polynôme $P = 1$ sur H . Quelle est la distance de P à H ?

◇ [Rec04/projortho-r4.tex/r4:11]

Passionnant !

◆ **PROJ.23** CCP PC – 2004

(★)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie. On note $\mathcal{B}_0 = (u_1, \dots, u_n)$ une base orthonormée de E . On note H l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ dans la base \mathcal{B}_0 .

Enfin, on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ définie par $e_i = u_1 - u_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n-1$.

1) Montrer que \mathcal{B} est une base de H .

2) Construire une base orthonormée de H .

3) Calculer le projeté orthogonal de u_n sur H .

◇ [Rec04/projortho-r4.tex/r4:04]

(Cf. exercice PROJ.20, CCP PC 2003)

- 1) τ .
- 2) Par Gram-Schmidt, w_k est de la forme

$$w_k = \alpha_k \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}, \underbrace{-1}_{(k+1)\text{-ième position}}, 0, \dots, 0 \right)$$

où α_k est un coefficient normalisateur.

- 3) On construit le vecteur $v = (1, \dots, 1)$, qui est orthogonal à H ; alors le projeté de u_n sur H (et qui constitue donc une base de H^\perp), est

$$p_H(u_n) = u_n - \frac{\langle u_n | v \rangle}{\|v\|} v.$$

◆ **PROJ.24** CCP PC – 2004

(★)

On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$ l'application $(A, B) \mapsto \langle A | B \rangle = \int_0^1 A(x) B(x) dx$.

1) Montrer que c'est un produit scalaire.

2) On pose $P = X^2 + X + 1$, $Q = X$ et $G = X^2$. On note $E = \text{Vect}(P, Q)$. Trouver un polynôme $K \in E$ tel que

$$\int_0^1 (K(x) - G(x))^2 dx = \inf_{H \in E} \int_0^1 (H(x) - G(x))^2 dx.$$

◇ [Rec04/projortho-r4.tex/r4:130]

◆ **PROJ.25** CCP PC – 2005

(★)

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. On considère $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\phi(M, N) = \text{tr}({}^t M N)$.

1) On note $G = \text{Vect}(I_n)$ le sous-espace vectoriel des matrices scalaires.

a) Déterminer l'orthogonal de G .

b) Pour toute matrice $A \in E$, déterminer la projection orthogonale de A sur G et sur G^\perp .

2) Notons \mathcal{S} le sous-espace vectoriel de matrices symétriques et \mathcal{A} celui des matrices antisymétriques.

a) Vérifier que \mathcal{A} et \mathcal{S} sont supplémentaires.

b) Montrer que \mathcal{A} et \mathcal{S} sont orthogonaux.

c) Soit $A = (a_{ij})_{ij}$ une matrice de E . Calculer

$$\inf_{M \in \mathcal{S}} \sum_{i,j=1}^n |a_{ij} - m_{ij}|^2 \quad \text{et} \quad \inf_{M \in \mathcal{A}} \sum_{i,j=1}^n |a_{ij} - m_{ij}|^2.$$

◇ [Rec05/projortho-r5.tex/r5:1]

◇ [Divers/adjointexo.tex/pre:110]

◆ **ADJ.11** TPE MP – 2001
 Soit E un espace vectoriel euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit $y \in E$. On considère l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|y - u(x)\|$.
 Montrer l'équivalence

$$f \text{ est minimale en } c \iff u^* \circ u(c) = u^*(y).$$

◇ [Rec01/adjoint-r1.tex/bil-r:17]

f est minimale si et seulement si f^2 est minimale, donc on renomme f^2 en f !
 On vérifie que la différentielle de f est $df_x(h) = \langle u(h) | y - u(x) \rangle$, ce qui montre que si f est minimale en c , alors $df_c = 0$ donc $\langle y - u(c) | u(x) \rangle = 0$

pour tout $x \in E$, donc $u^*(y) - u^* \circ u(c) = 0$.Réciproquement, sous cette condition, $d_c f = 0$ donc ...

À FINIR !!!

◆ **ADJ.12** TPE MP – 2001
 Pour tout $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\langle A | B \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}(A \cdot B)$.

- 1) Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) En notant $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer l'orthogonale de $S_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.
- 3) Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On définit, pour tout $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) : F(M) = AM - MB$. Déterminer l'adjoint de F .

◇ [Rec01/adjoint-r1.tex/bil-r:25]

◆ **ADJ.13** Centrale MP – 2002
 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n . Soit f un endomorphisme de E tel que f et f^* commutent et $f^2 = -\text{Id}_E$.

- 1) a) Que dire du polynôme caractéristique de f , de son déterminant, de sa trace, de la dimension de E ?
 b) Montrer que $s = f \circ f^*$ est une symétrie et que $f = -f^*$.
 c) Soit $u \in E$ non nul. Montrer que $(u, f(u))$ est libre. Démontrer l'existence d'une base \mathcal{B} de E dans laquelle

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} f = \text{diag}(J, \dots, J) \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 2) Soit g un endomorphisme de E . On suppose que g et g^* commutent et qu'il existe des réels a et b non nuls tels que $(g - a \text{Id}_E)^2 + b^2 \text{Id}_E = 0$. Montrer qu'il existe une base \mathcal{C} de E dans laquelle

$$\text{mat}_{\mathcal{C}} g = \text{diag}(M, \dots, M) \quad M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

◇ [Rec02/adjoint-r2.tex/bil-r2:18]

b) T.

c) Si $f(u) = \lambda u$ alors $f^2(u) = -u = \lambda^2 u$: contradiction.

2) À FINIR !!!

◆ **ADJ.14** TPE MP – 2002 (*)
 Soit E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E .

- 1) Montrer que $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) = (\text{Im}({}^t u - \lambda \text{Id}))^\perp$.
- 2) Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que F est stable par u si et seulement si F^\perp est stable par u^* .
- 3) Montrer qu'une droite \mathcal{D} (resp. un hyperplan \mathcal{H}) est stable par u si et seulement s'il existe une valeur propre λ de u telle que

$$\mathcal{D} \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) \quad (\text{resp. } \mathcal{H} \supset \text{Im}(u - \lambda \text{Id})).$$

- 4) On considère, en dimension 3, l'endomorphisme de E représenté dans une base (e_1, e_2, e_3) par la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les sous-espaces vectoriels stables par u non triviaux.

◇ [Rec02/adjoint-r2.tex/bil-r2:21]

3) Pour la première, c'est une évidence, pour la seconde, on applique la question précédente.

1) On se souvient que $\text{Ker } v = (\text{Im } {}^t v)^\perp$. On l'applique avec ${}^t(u - \lambda \text{Id}) = {}^t u - \lambda \text{Id}$.

2) T.

4)

◆ **ADJ.15 (Endomorphismes normaux)** ENSAE MP – 2003
 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que

$$u \circ u^* = u^* \circ u \iff \forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|u(x)\| = \|u^*(x)\|.$$

◇ [Rec03/adjoint-r3.tex/r3:431]

Cf. exercice **ADJ.9 (a)** \Rightarrow (b) : Pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \langle u(x) | u(x) \rangle = \langle x | u^* u(x) \rangle$$

$$= \langle x | u u^*(x) \rangle = \langle u^*(x) | u^*(x) \rangle = \|u^*(x)\|^2.$$

(b) \Rightarrow (a) :

À FINIR !!!

Cf. (ADJ.9)

Endomorphismes symétriques — réduction

◆ **SYM.1 (dét(^tA · A) ≥ 0)** (*)
 Soit A ∈ M_{n,p}(ℝ). Montrer que $\det({}^tA \cdot A) \geq 0$.

◇ [Divers/endosymexo.tex/pre:77] propre λ, on note que ${}^tX^tAX = \lambda \|X\|^2 = \|AX\|^2$ donc $\lambda \geq 0$. On en déduit la positivité du déterminant.
 M = ^tA · A est symétrique (le vérifier proprement!) donc diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale. Si X est un vecteur propre pour la valeur

◆ **SYM.2** (*)
 E étant un espace vectoriel euclidien de dimension n; soit v ∈ E \ {0}. Soit λ ∈ ℝ. On pose, pour tout x ∈ E :

$$f(x) = x + \lambda \langle x|v \rangle v.$$

 Déterminer λ pour que f ∈ O(E).; reconnaître alors f.

◇ [Divers/endosymexo.tex/pre:98] Il n'y a que deux solutions (passer aux matrices représentatives dans une base intelligente) :
 - soit λ = 0 et alors f = Id_E ;
 - soit λ = - $\frac{2}{\|v\|^2}$ et alors f est la symétrie par rapport à Vect v.

◆ **SYM.3** (**)
 Soient S et T deux matrices définies positives telles que S² = T². Montrer que S = T.

◇ [Divers/endosymexo.tex/pre:77] S² = T² est aussi définie positive.
 De plus, S et T commutent, car S(ST - TS)S = T³S - ST³ = ST²S - On les diagonalise simultanément et on utilise leur positivité.

◆ **SYM.4 (f* = f et tr f = 0)** (***)
 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soit f ∈ L(E) un endomorphisme autoadjoint tel que tr f = 0.
 1) Montrer qu'il existe un vecteur x ≠ 0 tel que ⟨f(x)|x⟩ = 0.
 2) En déduire qu'il existe une base orthonormée (e₁, ..., e_n) telle que

$$\forall k \in [1; n], \langle f(e_k)|e_k \rangle = 0.$$

◇ [Divers/endosymexo.tex/pre:82] 2) On effectue ensuite une récurrence sur la dimension n de l'espace. On suppose la propriété vraie au rang n - 1. On choisit x tel que ⟨f(x)|x⟩ = 0. On pose H le supplémentaire orthogonal de ⟨x⟩. On considère ensuite l'endomorphisme de H dont la matrice représentative est la restriction de la matrice précédente au carré de taille n - 1, et qui est donc de trace nulle, puis on applique la récurrence.
 C'est bien sûr plus facile avec des formes quadratiques...
Note : une généralisation au cas où u ∈ L(E) est quelconque est faite dans le bel exercice **SYM.64**.

◆ **SYM.5** (*)
 Soit u un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien E, et notons U sa matrice associée dans une base orthonormée B.
 1) Montrer que U^tU est matrice dans B de la projection orthogonale sur Vect(u).
 2) Trouver la matrice de la symétrie par rapport à Vect(u) et celle par rapport à l'hyperplan [Vect(u)][⊥].

◇ [Divers/endosymexo.tex/pre:31bis] On commence par tout étudier dans une base A dont le premier vecteur est u. On note M' et U' les matrices de la projection et du vecteur, et il est clair que M' = U'^tU'. On passe alors dans la base B, et on trouve

$$M = \Omega M' \Omega^{-1} = \Omega U'^t U' \Omega = \Omega (\Omega^{-1} U)^t (\Omega^{-1} U) \Omega = {}^t U U.$$

 Ou bien on note que (U · ^tU)² = U · ^tU ce qui montre que c'est un projecteur, de plus il est symétrique car ^t(U · ^tU) = U · ^tU et c'est donc un projecteur orthogonal. Enfin,

$$(U \cdot {}^tU)X = U({}^tU \cdot X) = \alpha U$$

 ce qui montre que Im U · ^tU = (U).

◆ **SYM.6** (≠)
 Soit E un espace vectoriel euclidien et f ∈ L(E) autoadjoint. Montrer que E = Ker f ⊕ Im f.

◇ [Divers/endosymexo.tex/pre:74]

◆ **SYM.7 (Endomorphisme partiellement isométrique)** (**)
 Soit E un espace préhilbertien et f ∈ L(E). Montrer que si f* ◦ f est un projecteur orthogonal, alors ||f(x)|| = ||x|| pour tout x ∈ (Ker f)[⊥].

◇ [Divers/endosymexo.tex/pre:75] f* ◦ f est symétrique, on suppose donc que c'est un projecteur.
 □ Soit x ∈ (Ker f)[⊥]. Puisque E = Im(f* ◦ f) ⊕ Ker(f* ◦ f), on décompose x = y + z. On sait alors que ⟨y|z⟩ = 0 (projecteur orthogonal) et f* ◦ f(y) = y. Par ailleurs on a ⟨f(z)|f(z)⟩ = ⟨f* ◦ f(z)|z⟩ = 0 ce qui montre que f(z) = 0 donc z ∈ Ker f. Puisque x ∈ (Ker f)[⊥], on en déduit que

$$\langle f(x)|f(x) \rangle = \langle x|f^* \circ f(x) \rangle = \langle x|f^* \circ f(y) \rangle = \langle x|y \rangle.$$

 On en déduit que

$$\langle f(x)|f(x) \rangle - \langle x|x \rangle = - \langle x|z \rangle.$$

 Ainsi, ⟨f(x)|f(x)⟩ = ⟨x|x⟩. □

◆ **SYM.8** (*)
 Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit f ∈ O(E). Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale.

◇ [Divers/endosymexo.tex/pre:34] Les valeurs propres de f sont forcément -1 et 1. Si f est diagonalisable, alors il existe un polynôme P = (X - 1)^p(X + 1)^q annulant f. Ou encore : la matrice représentative de f dans un b.o.n. s'écrit

$$A = P^{-1} \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1) P = P^{-1} D P.$$

 Toujours est-il que f² = Id, donc f est une symétrie, or f est orthogonale, donc f est une symétrie orthogonale.

◆ **SYM.9 (Matrices positives)**
 Soit A ∈ M_n(ℝ). Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 (a) il existe M ∈ M_n(ℝ) telle que A = ^tM · M ;
 (b) A est symétrique et ses valeurs propres sont toutes positives.

◇ [Divers/endosymexo.tex/pre:42] i) ⇒ ii) : A est symétrique, donc on peut la diagonaliser. Si λ est une valeur propre de A, alors AX = λX = ^tMMX. On multiplie à gauche par ^tX ce qui nous donne

$${}^tX^tMMX = \lambda^tX \cdot X = \lambda \|X\|^2.$$

 Or ^tX^tMX = ||MX||², donc ||MX||² = λ ||X||², donc λ ≥ 0 car ||X||² > 0.
 Réciproquement, si A est symétrique alors A = ^tΩDΩ avec Ω ∈ O_n(ℝ) et D = diag(λ₁, ..., λ_n). On suppose que tous les λ_i sont positifs ou nuls, on pose Δ = diag(√λ₁, ..., √λ_n), ce qui nous donne Δ² = D et A = ^tΩΔ²Ω = ^t(ΔΩ)ΔΩ.

◆ **SYM.10**
 Soit A ∈ M_n(ℂ) telle que ^tA = \bar{A} . Montrer que, si λ est une valeur propre de A, alors λ ∈ ℝ.

◇ [Divers/endosymexo.tex/pre:45] Soit λ ∈ Sp_ℂ A et X un vecteur propre associé. Alors

$${}^t\bar{X}AX = {}^t\bar{X}\lambda X = \lambda \|X\|^2$$

$${}^t\bar{X}AX = {}^t\bar{X}^t\bar{A}X = {}^t\bar{A}XX = {}^t\bar{\lambda}XX = \bar{\lambda} \|X\|^2,$$

 ce qui montre, puisque ||X|| ≠ 0, que λ = $\bar{\lambda}$.

◆ **SYM.11**
 Soit E un espace vectoriel euclidien et p, q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que p ◦ q = 0 ⇔ q ◦ p = 0.

◇ [Divers/endosymexo.tex/pre:49] Et réciproquement.
 On suppose que p ◦ q = 0. Alors Im q ⊂ Ker p. Or

$$A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp.$$

 On a donc (Im q)[⊥] = Ker q et (Ker p)[⊥] = Im p. Donc Im p ⊂ Ker q et q ◦ p = 0.
Autre solution : p et q sont auto-adjoints, donc

$$(p \circ q)^* = q^* \circ p^* = q \circ p.$$

◆ **SYM.12** (≠)
 Soit A ∈ M_{n,p}(ℝ). Montrer que les matrices A^tA et ^tAA sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.

◇ [Divers/endosymexo.tex/pre:52] Elles sont autoadjointes.

◆ **SYM.13**
 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie n. Soient f, g ∈ L(E) deux endomorphismes symétriques de E. Montrez qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 (a) f ◦ g est symétrique ;
 (b) f ◦ g = g ◦ f ;
 (c) il existe une base orthonormée diagonalisant simultanément f et g.

◇ [Divers/endosymexo.tex/pre:54] i) ⇒ ii) : f ◦ g = ^t(f ◦ g) = ^tg ◦ ^tf = g ◦ f.
 ii) ⇒ iii) : Résulte de la diagonalisabilité de f et de g, puis de leur commu-
 tation, ... À finir. iii) ⇒ i) : T

♦ **SYM.14 (Formule de Rayleigh)** (**)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n . Soit f un endomorphisme symétrique de E , non nul, dont les valeurs propres sont ordonnées ainsi : $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.
 Montrer que, pour tout vecteur unitaire $x \in E$, on a

- 1) $\lambda_1 \leq \langle x | f(x) \rangle \leq \lambda_n$;
- 2) $\langle x | f(x) \rangle = \lambda_1 \Leftrightarrow f(x) = \lambda_1 x$;
- 3) $\langle x | f(x) \rangle = \lambda_n \Leftrightarrow f(x) = \lambda_n x$;

◊ [Divers/endsymexo.tex/pre:55] écrit ensuite que $x = \sum \alpha_i e_i$ et on veut montrer que $\alpha_{p+1} = \dots = \alpha_n = 0$.

$$\lambda_1 = \langle f(x) | x \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_1 + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i^2 (\lambda_i - \lambda_1)$$

$$= \lambda_1 + \sum_{i=p+1}^n \underbrace{\alpha_i^2}_{\geq 0} \underbrace{(\lambda_i - \lambda_1)}_{> 0}$$

Cf. exercice **SYM.84** page 261 Centrale PC 2005.

On développe sur une base propre (orthogonale).

Pour la question ii), on suppose que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p < \lambda_{p+1} \leq \dots \leq \lambda_n$. On a donc $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [p+1; n]$.

♦ **SYM.15**

Soit a un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien E . À tout réel α , on associe l'application $\phi_\alpha : E \rightarrow E, x \mapsto x + \alpha \langle x | a \rangle a$.

- 1) Montrer que $C = \{\phi_\alpha; \alpha \in \mathbb{R}\}$ est stable par composition, et commutatif pour la loi \circ .
- 2) Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, ϕ_α est un endomorphisme symétrique de E .
- 3) Montrer que, si $\alpha \neq 0$, alors 1 et $1 + \alpha$ sont les valeurs propres de ϕ_α . Quels sont les sous-espaces propres associés ?
- 4) Montrer que, si $\alpha \neq -1$, alors ϕ_α est inversible dans C . Quelle est la nature de ϕ_{-1} ?
- 5) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que ϕ_α soit une isométrie. Quelle est la nature de ϕ_{-2} ?

◊ [Divers/endsymexo.tex/pre:58] On trouve que

- 1) $\phi_\alpha \circ \phi_\beta = \phi_{\alpha+\beta+\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha$.
- 2) T.
- 3) On suppose que $\phi_\alpha(x) = \lambda x$, alors $\alpha \langle x | a \rangle = (\lambda - 1)x$. Donc si $\langle x, a \rangle$ est liée, alors $\lambda = \alpha + 1$, si elle est libre, alors les coefficients sont nuls et $\lambda = 1$. On remarque qu'alors

$$E = E_1(\phi_\alpha) \oplus E_{\lambda+1}(\phi_\alpha) = \langle a \rangle^\perp + \langle a \rangle.$$

- 4) si $\alpha \neq -1$, on remarque que 0 n'est pas valeur propre. Or ϕ étant symétrique est diagonalisable, donc il est inversible. D'ailleurs $\phi_\beta \circ \phi_\alpha = \phi_0 = \text{Id}_E$ avec $\beta = -\alpha/(1 + \alpha)$. De plus, ϕ_{-1} est la projection orthogonale sur $\langle a \rangle^\perp$.
- 5) ϕ_α est une isométrie si ses seules valeurs propres sont 1 et -1 , donc pour $\alpha = 0$ (c'est l'identité) et pour $\alpha = -2$ (c'est la symétrie orthogonale par rapport à $\langle a \rangle$).

♦ **SYM.16** (*)

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A + {}^tA$ est nilpotente. Montrer que A est antisymétrique.

◊ [Divers/endsymexo.tex/pre:9] La matrice $A + {}^tA$ est symétrique. On peut donc la diagonaliser avec $\Omega \in \text{O}_n(\mathbb{R})$:
 $A + {}^tA = \Omega D \Omega^{-1}$.

Pour ailleurs, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ telle que $(A + {}^tA)^p = 0$, ce qui nous donne immédiatement, avec $\Omega \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) : D^p = 0$. Or D est diagonale, donc $D = 0$, et $A + {}^tA = 0$ donc A est antisymétrique.

♦ **SYM.17** (**)

Soient p, q des projecteurs orthogonaux.

- 1) Montrer que $p \circ q \circ p$ est autoadjoint.
- 2) Montrer que $E = (\text{Im } p + \text{Ker } q) \perp (\text{Im } q \cap \text{Ker } p)$.
- 3) En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.

◊ [Divers/endsymexo.tex/pre:17] 1) Les projecteurs orthogonaux sont auto-adjoints. Alors $p \circ q \circ p$ l'est aussi évidemment.

2) **(Méthode compliquée)** Soit $x \in \text{Im } p + \text{Ker } q$ et $y \in \text{Im } q \cap \text{Ker } p$. Alors $x = u + v$ avec $u = p(u)$ et $q(v) = 0$ et $y = q(w)$ et $p(y) = 0$. Alors

$$\langle x | y \rangle = \langle u + v | q(vw) \rangle = \langle q(u) | w \rangle = \langle u | y \rangle = \langle u | p(y) \rangle = 0.$$

(Méthode simple) : on montre aisément que $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ et donc $(\text{Im } p + \text{Ker } q)^\perp = \text{Im } q \cap \text{Ker } p$ donc ces sous-espaces sont supplémentaires orthogonaux.

3) Soit $x \in (\text{Im } p + \text{Ker } q)$. Alors on écrit $x = p(y) + k$ et $p \circ q(x) = p \circ q \circ p(y)$. Cela montre que $(\text{Im } p + \text{Ker } q)$ est stable par $p \circ q$. De plus, si $x \in \text{Im } q \cap \text{Ker } p$ alors $q(x) = x$ et $p \circ q(x) = 0$; donc $(\text{Im } q \cap \text{Ker } p)$ est également stable.

Si l'on choisit une base adaptée à la décomposition précédente, il est clair que l'on obtient une matrice par blocs pour $p \circ q$:

$$\text{mat } p \circ q = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

puisque $\text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im } p \subset (\text{Im } p + \text{Ker } q)$.
 Enfin, on choisit un supplémentaire S de $\text{Im } p$ dans $(\text{Im } p + \text{Ker } q)$ qui vérifie en même temps $S \subset \text{Ker } q$ (il suffit de prendre S un supplémentaire de $\text{Im } \cap \text{Ker } q$ dans $\text{Ker } q$, faire un dessin). De plus, si $x \in \text{Im } p$,

alors $p \circ q(x) = p \circ q \circ p(x)$.
 Ce qui montre que $p \circ q|_{\text{Im } p} = p \circ q \circ p|_{\text{Im } p}$, qui est diagonalisable.
 De plus, clairement $p \circ q|_{\text{Ker } q} = 0$.
 On choisit alors une base adaptée à la décomposition actuelle, et on trouve où A' est une matrice diagonalisable. Et voilà le travail.

♦ **SYM.18** (**)

Soit E un espace vectoriel euclidien que l'on supposera orienté et de dimension 3. Soit $a \in E$ un vecteur non nul. On pose $\alpha = \|a\|$, et on pose $f : E \rightarrow E$
 $x \mapsto a \wedge x$.

- 1) Montrer que $f^3 = -\alpha^2 f$.
- 2) On pose $g : E \rightarrow E$ $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x)}{n!}$. Montrer que g est une rotation.

◊ [Divers/endsymexo.tex/pre:18] On calcule ensuite l'exponentielle de cette matrice, et on trouve
 On prend la matrice de f dans une base orthonormée ayant a/α pour premier vecteur, et directe :

$$\text{mat } f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mat } g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

♦ **SYM.19 (Matrice de Cauchy)** (***)

On considère la matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général est $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$. Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.

INDICATION : Pour tout vecteur propre X de A , on considèrera tXAX , et on montrera

$${}^tXAX = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt$$

et on se souviendra d'un théorème important sur l'intégration.

◊ [Divers/endsymexo.tex/pre:19] On suppose que $X = (x_1, \dots, x_n)$ est un vecteur propre pour la valeur propre λ .
 On a ${}^tXAX = {}^tX(\lambda X) = \lambda \|X\|^2$, et par ailleurs

$${}^tXAX = (X|AX) = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{i+j-1} x_i x_j.$$

Puisque le vecteur X est non nul, il en est de même du polynôme

$$P(t) = \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}.$$

On en déduit ${}^tXAX > 0$, et donc $\lambda > 0$.

♦ **SYM.20**

Trouver un exemple de matrice complexe symétrique et non diagonalisable.

◊ [Divers/endsymexo.tex/pre:20] $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $\text{Sp } A = \{1\}$ (car $\chi_A = (X-1)^2$) donc si A était diagonalisable on aurait $A = I_2$ ce qui est faux.

♦ **SYM.21**

On note F le s.e.v. de \mathbb{R}^4 d'équation

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0. \end{cases}$$

Déterminer la projection orthogonale p_F sur F , et si $x \in \mathbb{R}^4$, calculer $d(x, F)$.

◊ [Divers/endsymexo.tex/pre:24bis] On orthogonalise pour avoir $v' = (2, -1, 4, -3)$. On a alors

Une base de F est (calcul)

$$u = (1, -2, 1, 0) \quad v = (2, -3, 0, 1).$$

$$M = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

◆ **SYM.22**
 On note F le s.e.v. de \mathbb{R}^4 d'équation

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0. \end{cases}$$

Déterminer la projection orthogonale p_F sur F , et si $x \in \mathbb{R}^4$, calculer $d(x, F)$.

◆ [Divers/endosymexo.tex/pre:24] On cherche des vecteurs de base de F , par exemple

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1),$$

qui forment, aubaine inespérée, une base orthonormée. Si $r = (X, Y, Z, T)$, on calcule

$$p_F(r) = \langle r|u \rangle u + \langle r|v \rangle v = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Z)u + \frac{1}{\sqrt{2}}(Y - T)v$$

ce qui nous donne la matrice représentative de p_F dans la base canonique de \mathbb{R}^4 :

$$\text{mat}_{\text{can}}(p_F) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◆ **SYM.23 (Si A antisymétrique, $\text{Sp}_{\mathbb{R}} A \subset \{0\}$)** (*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $S = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$. Rappel pour quoi S est diagonalisable. Notons α et β la plus petite et la plus grande valeur propre de S . Montrer que, pour toute valeur propre réelle λ de A , on a $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.
 En déduire que si A est antisymétrique, alors $\text{Sp}_{\mathbb{R}} A \subset \{0\}$.

◆ [Divers/endosymexo.tex/pre:88] Or S étant diagonalisable, on a (en décomposant dans B , voir la formule de Rayleigh exercice **SYM.14** page 245) :

On géométrise : $A = \text{mat}_{\text{can}} f$. On choisit une base B diagonalisant $S = \frac{1}{2}(f + f^*)$. On prend un vecteur propre x associé à $\lambda : f(x) = \lambda x$. Alors

$$\langle x|s(x) \rangle = \frac{1}{2} [\langle x|f(x) \rangle + \langle x|f^*(x) \rangle] = \lambda \|x\|^2.$$

Or $\alpha \|x\|^2 \leq \langle x|s(x) \rangle \leq \beta \|x\|^2$.
 Si A est antisymétrique, alors $S = 0$ donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}} A \subset \{0\}$.

◆ **SYM.24**
 Diagonaliser à l'aide de matrices orthogonales les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

◆ [Divers/endosymexo.tex/pre:59]

◆ **SYM.25 (Norme de v et spectre de $v^* \circ v$)** (*)

Soit E un espace vectoriel euclidien.

1) Soit u un endomorphisme symétrique. On note

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

Montrer que

$$\|u\| = \max_{\lambda \in \text{Sp}(u)} |\lambda|.$$

2) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\|v\| = \max_{\mu \in \text{Sp}(v^* \circ v)} \sqrt{\mu}$.

◆ [Divers/endosymexo.tex/div:10] Considérons ensuite un indice $k \in [1; n]$ tel que $|\lambda_k|$ soit maximal, et prenons $x = e_k$, alors

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = |\lambda_k|$$

donc $\|u\| \geq |\lambda_k| = \max_{\lambda \in \text{Sp}(u)} |\lambda|$.

2) On note d'abord que le spectre de l'endomorphisme symétrique $v^* \circ v$ est positif. Ensuite, on écrit que

$$\|v(x)\| = \langle v(x)|v(x) \rangle = \langle x|v^* \circ v(x) \rangle,$$

puis on raisonne comme dans la première question.

ce qui montre, en passant à la borne supérieure, que

$$\|u\| \leq \max_{\lambda \in \text{Sp}(u)} |\lambda|.$$

◆ **SYM.26**
 Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormale (e_1, \dots, e_n) telle que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit une base orthogonale de E .

◆ [Divers/endosymexo.tex/div:29] on a $\langle u(e_i)|u(e_j) \rangle = \langle u^* u(e_i)|e_j \rangle = \lambda_i \langle e_i|e_j \rangle = 0$,
 On considère une base orthonormée diagonalisante de $u^* u$. Alors, si $i \neq j$, ce qui montre que la base est orthogonale.

◆ **SYM.27 ($f \in S_n^+ \Leftrightarrow \text{tr}(\omega f) \leq \text{tr}(f)$)** (***)

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit f un endomorphisme de E tel que l'on ait $\text{tr}(\omega f) \leq \text{tr} f$ pour tout automorphisme orthogonal ω .

1) Montrer que f est symétrique.

INDICATION : On pourra examiner d'abord le cas où $n = 2$.

2) Montrer que f est positif.

Réciproquement, montrer que si f est symétrique positif, alors $\text{tr}(\omega f) \leq \text{tr}(f)$ pour tout ω orthogonal.

◆ [Divers/endosymexo.tex/div:86] 1) Notons M la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Cette bas étant orthonormée, on cherche donc à prouver que M est symétrique.

◆ Étudions le cas $n = 2$. On est alors dans \mathbb{R}^2 et on peut prendre, pour endomorphisme orthogonal, une rotation d'angle θ quelconque. Donnons des noms aux coefficients de $M : M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et R_θ la matrice de rotation d'angle θ . Alors l'inégalité $\text{tr}(R_\theta M) \leq \text{tr} M$ s'écrit

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad (a + d) \cos \theta + (b - c) \sin \theta \leq a + d.$$

On pose $\alpha = a + d$ et $\beta = b - c$, l'équation ci-dessus se réécrit

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta \leq \alpha. \quad (21.1)$$

Le but du jeu est maintenant de montrer $\beta = 0$.

— 1^{re} méthode —

• Si $\alpha = 0$, on obtient $\beta \sin \theta \leq 0$ pour tout θ , et donc immédiatement $\beta = 0$.

• Si $\alpha \neq 0$, il existe un réel ϕ tel que

$$\cos \phi = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{et} \quad \sin \phi = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

l'équation (21.1) s'écrit alors $\sin(\theta + \phi) \leq \sin \phi$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$; notamment, en prenant $\theta = \pi/2 - \phi$, cela montre $\sin \phi \geq 1$ et donc $\sin \phi = 1$ donc $\cos \phi = 0$ et $\beta = 0$.
 Dans tous les cas, on a bien montré $\beta = 0$.

— 2^e méthode —

l'équation (21.1) s'écrit également : $\alpha(\cos \theta - 1) + \beta \sin \theta \leq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Or, au voisinage de $\theta = 0$, si l'on effectue un développement limité, on voit que, dans l'hypothèse où $\beta \neq 0$, l'expression de gauche

a pour équivalent $\beta \theta$ et, par conséquent, change de signe au voisinage de 0; ce qui est exclu. Donc $\beta = 0$.

Dans le cas $n = 2$, f est symétrique.

◆ Dans le cas d'une dimension quelconque, on choisit deux indices i et j et on va montrer que $m_{ij} = m_{ji}$. Pour cela, il suffit de prendre la matrice de l'endomorphisme de \mathbb{R}^n qui est :

- une rotation d'angle θ quelconque dans le plan $\text{Vect}(e_i, e_j)$;
- l'identité sur $\text{Vect}(e_i, e_j)^\perp$.

c'est-à-dire une matrice comportant des 1 sur presque toute la diagonale, mais des coefficients $R_{ii} = R_{jj} = \cos \theta$, et des 0 ailleurs, sauf $R_{ij} = -R_{ji} = \sin \theta$. Le même raisonnement permet alors de prouver que $m_{ij} = m_{ji}$.

Conclusion f est symétrique.

2) f étant symétrique, on le diagonalise dans une base $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$, et on note $f u_i = \lambda_i u_i$.

□ Soit $j \in [1; n]$. On définit l'endomorphisme orthogonal ω qui est la symétrie orthogonale par rapport $\langle u_j \rangle^\perp$, c'est-à-dire tel que $\omega(u_i) = u_i$ si $i \neq j$ et $\omega(u_j) = -u_j$. Alors, $\text{tr}(\omega f) = \lambda_1 + \dots + (-\lambda_j) + \dots + \lambda_n = \text{tr}(f) - 2\lambda_j$. Par conséquent, $\lambda_j \geq 0$. □

On conclut, pour la réciproque, par la méthode de **ISO.18** page 265 : on diagonalise f dans une b.o.n. $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$, et on calcule

$$\text{tr}(f) = \sum_{i=1}^n \langle e_i|f(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

$$\text{tr}(\omega f) = \sum_{i=1}^n \langle e_i|\omega f(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i|\omega(e_i) \rangle$$

et $\langle e_i|\omega(e_i) \rangle \leq \|e_i\| \cdot \|\omega(e_i)\| = 1$ car ω est une isométrie.

◆ **SYM.28 ($\text{tr}(A \cdot B) \leq \text{tr}(A) \cdot \text{tr}(B)$)** (**)

On suppose que A et B sont des matrices symétriques positives (c'est-à-dire que toutes leurs valeurs propres sont positives). Montrer que $\text{tr}(A \cdot B) \leq \text{tr}(A) \cdot \text{tr}(B)$.

◆ [Divers/endosymexo.tex/div:88] On prend une base (E_1, \dots, E_n) diagonalisante pour $A : A E_i = \lambda E_i$. Alors

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \langle E_i|A B E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle A E_i|B E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle E_i|B E_i \rangle,$$

Or $B e_i = (E_i|B E_i) E_i \geq 0$ puisque B est positive, donc

$$\text{tr}(A) \cdot \text{tr}(B) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \langle E_i|B e_i \rangle \right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle E_i|B e_i \rangle = \text{tr}(AB)$$

puisque les termes « oubliés » sont tous positifs.

◆ **SYM.29** (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer que $(\det A)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{tr}(A)$.

◆ [Divers/endosymexo.tex/div:134] Diagonaliser. Si A n'est pas définie positive, c'est immédiat. Sinon, toutes les valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ strictement positives. Alors, par inégalité de concavité généralisée du logarithme :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)$$

ce qui mène, en en prenant l'exponentielle, à :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq \prod_{i=1}^n \lambda_i,$$

ce qui est la relation voulue.

◆ **SYM.30**
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

- 1) Montrer que, pour tous vecteurs colonnes X et Y , $\langle AX|Y \rangle \cdot \langle A^{-1} X|Y \rangle \leq \langle X|Y \rangle^2$.
- 2) Soit $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y \neq 0$. Montrer que

$$\frac{1}{\langle A^{-1} Y|Y \rangle} = \min \left\{ \frac{\langle AX|Y \rangle}{\langle X|Y \rangle^2} ; X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \langle X|Y \rangle \neq 0 \right\}.$$

◇ [Divers/endosymexo.tex/div:135] Schwarz.
 1) On diagonalise, on décompose dans un bon, et on utilise Cauchy-

◆ **SYM.31**
 Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A antisymétrique et B symétrique.

- 1) Montrer que la seule valeur propre possible (éventuelle) de A est 0.
- 2) On suppose que A et B commutent.
 - a) Montrer que AX et BX sont orthogonaux pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - b) Montrer que $\|AAX + BX\| = \|AX - BX\|$ pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - c) On suppose de plus que B est inversible. Montrer que $A + B$ et $A - B$ sont inversibles et que $(A + B)(A - B)^{-1}$ est orthogonale.

◇ [Divers/endosymexo.tex/div:136]

◆ **SYM.32**
 Soient S et T deux matrices symétriques de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que S et $T - S$ soient définies positives. Montrer que T et $S^{-1} - T^{-1}$ sont inversibles. Trouver l'inverse de $S^{-1} - T^{-1}$.

◇ [Divers/endosymexo.tex/div:137]

◆ **SYM.33** (***)
 Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques définies positives. Montrer que $\det(A + B) \geq \det A + \det B$. Généraliser au cas où A et B sont seulement symétriques positives.

◇ [Divers/endosymexo.tex/div:138] *Cf. exercice SYM.76 page 258.*
 Difficile, non ? On commence par traiter le cas où A est diagonale. On note (B_1, \dots, B_n) les colonnes de B , on développe

$$\det(A + B) = \det(B_1 + \lambda_1 E_1, \dots, B_n + \lambda_n E_n).$$

avec des déterminants réduits. Ceux-ci sont des déterminants de matrices symétriques obtenues en prenant des sous-matrices de B . Une telle sous-matrice correspond à un endomorphisme du style $\pi \circ b \circ \pi$, où π est un projecteur orthogonal. C'est manifestement symétrique et positif car

$$\langle \pi b \pi(x) | x \rangle = \langle b \pi(x) | \pi(x) \rangle \geq 0.$$

Au total, tous les produits en plus sont bien positifs.

◆ **SYM.34** (**)
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de \mathbb{R}^n telle que $A = (u_i | u_j)_{i,j}$.

◇ [Divers/endosymexo.tex/div:139] Alors

$$A_{i,j} = \sum_{k,\ell} \Omega_{ki} D_{k\ell} \Omega_{\ell j} = \sum_k \lambda_k (C_i)_k (C_j)_k.$$

Autrement dit, en définissant u_j le vecteur colonne de k -ième coordonnée $(C_j)_k \cdot \sqrt{\lambda_k}$ pour $k = 1, \dots, n$, alors ça marche.

◆ **SYM.35** X PC – 2005
 Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(S) = 1$.

- 1) Montrer que $(A, B) \mapsto \text{tr}(S^t A B)$ définit un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) Trouver une base orthonormée contenant I_n .

◇ [Rec00/endosym-r0.tex/div:153] De plus, on diagonalise $S = {}^t \Omega \Delta \Omega$ avec $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les

1) Le produit est symétrique :

$$\begin{aligned} \langle B|A \rangle &= \text{tr}(S^t B A) \\ &= \text{tr}({}^t A B^t S) && (\text{tr } M = \text{tr } {}^t M) \\ &= \text{tr}({}^t A B S) && \text{car } S \text{ est symétrique} \\ &= \text{tr}(S^t A B) = \langle A|B \rangle \end{aligned}$$

λ_i sont strictement positifs. On suppose A non nulle, alors

$$\begin{aligned} \langle A|A \rangle &= \text{tr}(S^t A A) = \text{tr}({}^t \Omega \Delta \Omega^t A A) \\ &= \text{tr}(\Delta \cdot \underbrace{\Omega^t A A \Omega}_{M = {}^t C C}) \\ &= \sum_i \lambda_i m_{ii} \end{aligned}$$

avec $m_{ii} = \sum_{j=1}^n c_{ij}^2 \geq 0$ ne sont pas tous nuls (la somme est aussi la trace de ${}^t A A$, c'est-à-dire $\|A\|^2$...). Puisque les λ_i sont tous > 0 , on en déduit $\langle A|A \rangle > 0$.

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

2) On note d'abord que $\langle I_n | I_n \rangle = \text{tr}(S) = 1$.
1^{er} cas : $S = \frac{1}{n} I_n$.

◆ **SYM.36** CCP PC – 1993
 On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ que l'on munit du produit scalaire $\langle P|Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$. On considère l'application

$$u : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto 2XP' + (X^2 - 1)P'' \end{cases}$$

- 1) Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.
- 2) Montrer que u est diagonalisable et que, si P_k et P_ℓ sont des vecteurs propres de valeurs propres distinctes, alors $\langle P_k | P_\ell \rangle = 0$.
- 3) Trouver les éléments propres de u pour $n = 3$.

◇ [Rec00/endosym-r0.tex/pre:99] 2) u est autoadjoint pour le produit scalaire considéré.
 1) T. 3) $P_0 = 1, P_2 = X, P_6 = 3X^2 - 1$ et $P_{12} = 5X^3 - 3X$.

◆ **SYM.37** (♣) ESEM – 1991
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A = {}^t A$ et que $A^2 = 0$. Montrer que $A = 0$.

◇ [Rec00/endosym-r0.tex/pre:39] Alors $A^2 = 0$ implique $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [1; n]$ et donc $A = 0$.
 A étant symétrique, elles est diagonalisable dans une base orthogonale : il existe donc $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = \Omega^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Omega.$$

◆ **SYM.38 (tr(AB))** (***), X PC – 2004
 Soient $A, B \in S_2(\mathbb{R})$. Notons $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ les valeurs propres de A et $0 < \mu_1 \leq \mu_2$ celles de B . Montrer que $\text{tr}(AB) \leq \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2$.

◇ [Rec00/endosym-r0.tex/div:102] Choisissons une base (E_1, E_2) diagonalisante pour A . Alors

$$\text{tr}(AB) = \sum_i \langle E_i | A B E_i \rangle = \sum_i \lambda_i \langle E_i | B E_i \rangle.$$

et, par invariance de la trace par similitude :

$$\rho_1 + \rho_2 = \mu_1 + \mu_2.$$

Notons $\rho_i = \langle E_i | B E_i \rangle$, qui est le coefficient diagonal d'indice (i, i) de B . On a, par l'inégalité classique de Rayleigh,

$$\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 - (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\rho_2 - \mu_2) \leq 0.$$

◆ **SYM.39** (*), Centrale PC – 2004
 Soit $A = (a_{ij})_{i,j}$ une matrice symétrique d'ordre n . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (pas forcément distinctes). Montrer que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

◇ [Rec00/endosym-r0.tex/pre:15] Il suffit de remarquer que la somme demandée est

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 = \text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2).$$

◆ **SYM.40** CCP PC – 2001
 Donner la matrice, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , de la projection orthogonale sur le plan d'équation (P) : $x - y - 2z = 0$.

◇ [Rec01/endosym-r1.tex/bil-r:31] et on trouve la matrice

1^{re} méthode : On choisit une base du plan. Pour cela, on note que le vecteur $w = (1, -1, -2)$ est normal au plan, puis on choisit un vecteur au pif, par exemple $a = (1, 0, 0)$ et alors $u = w \wedge a = (0, 2, -1)$ est un vecteur de P . Enfin, on prend $v = w \wedge u = (5, 1, 2)$ et on obtient une base orthogonale du plan. On regarde ensuite la projection de chaque vecteur de la base canonique sur le plan,

2^e méthode : le vecteur $w = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)$ étant normé, on sait que, pour tout $x \in E$ on a $p(x) = x - \langle w|x \rangle w$ ce qui nous permet d'écrire la matrice de p en calculant les images de (e_1, e_2, e_3) .

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

◆ **SYM.41** (*) CCP PC – 2001
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que, si A est symétrique, alors $A = 0$.

◇ [Rec01/endsym-r1.tex/pre:83] $X(X^2 + X + 1)$ est polynôme annulateur de A , donc $\text{Sp}(A) \subset Z(\mathbb{P}) = \{0, j, \bar{j}\}$,
 Si A est symétrique, alors elle est diagonalisable. Or $P = X^3 + X^2 + X =$ mais le spectre de A étant réel, $A = 0$.

◆ **SYM.42** (***) X MP – 2001
 On définit la relation sur les matrices : $A \leq B$ lorsque $B - A$ est positive. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de matrices symétriques positives telles que $A_{n+1} \leq A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice symétrique positive.

◇ [Rec01/endsym-r1.tex/bil-r:22] Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul. La suite $\langle x | A_n x \rangle$ est décroissante donc converge. Montrons que la suite $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On va utiliser Cauchy-Schwarz : $\|A_n x\| \leq \langle x | A_n x \rangle$, mais comme le deuxième membre ne tend pas vers 0 on es coïncé. Pour pallier ce problème, il faut passer par le critère de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$ on a
 $|\langle x | A_p x \rangle - \langle x | A_q x \rangle| \leq \varepsilon$
 donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la suite $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge.
 Cela suffit pour prouver que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (puisque le coefficient d'une matrice est obtenu par $a_{ij} = \langle e_j | A e_i \rangle$).

◆ **SYM.43** Centrale MP – 2001
 Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit p un projecteur. On note $\| \cdot \|$ la norme subordonnée à la norme euclidienne.
 1) Montrer que p est autoadjoint si et seulement si $\|p\| \in \{0, 1\}$.
 2) Soit A et B deux sous-espaces vectoriels de E ; p_A (resp. p_B) désignant le projecteur autoadjoint d'image A (resp. B), montrer que $\|p_A - p_B\| \leq 1$. Que dire de $\dim A$ et $\dim B$ lorsque $\|p_A - p_B\| < 1$?

◇ [Rec01/endsym-r1.tex/bil-r:11] tout $x \in E$, et ensuite c 'est un exo classique (cf. **ISO.20**).
 1) Le sens \Rightarrow est trivial. On suppose donc $\|p\| = 1$ donc $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour

◆ **SYM.44** (*) Centrale MP – 2001
 Soit A une matrice nilpotente réelle, telle que ${}^t A \cdot A = A \cdot {}^t A$. Montrer que $A = 0$.

◇ [Rec01/endsym-r1.tex/bil-r:29] Ou, plus simple : $A {}^t A$ est une matrice symétrique, elle est donc diagonalisable ; de plus elle est nilpotente, donc elle est nulle ; la condition $\text{tr}(A {}^t A) = 0$ implique classiquement $A = 0$.

◆ **SYM.45** X MP – 2001
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
 1) Montrer qu'il existe $U, V \in O_n(\mathbb{R})$ tels que ${}^t U A V = D$ avec D diagonale à coefficients positifs. On pose alors $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0)$ avec $r = \text{rg } A$ et $\mu_i > 0$.
 2) On pose $\Delta = \text{diag}(\mu_1^{-1}, \dots, \mu_r^{-1}, 0, \dots, 0)$ et $A' = V \Delta {}^t U$, et $M = A A'$, $N = A' A$. Identifier M et N .
 3) En notant $U = (U_1 | \dots | U_n)$ et $V = (V_1 | \dots | V_n)$, montrer que $\text{Im } A = \text{Vect}(U_1, \dots, U_r)$ et $\text{Im } {}^t A = \text{Vect}(V_1, \dots, V_r)$.
 4) Calculer $A A' A$ et $A' A A'$. Pouvaient-on s'y attendre ?

◇ [Rec01/endsym-r1.tex/bil-r:14] ◆ **SYM.46** (***) Mines MP – 2001
 Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de trace nulle. Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice représentative de u est à diagonale nulle.

◇ [Rec01/endsym-r1.tex/bil-r:27] On peut prendre une base propre (e_1, \dots, e_n) orthonormée associée à la famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de valeurs propres, et on pose $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n e_i$. Alors $\langle u(x) | x \rangle = 0$. On prend un supplémentaire orthogonal : $E = \langle x \rangle \oplus F$ et on note que $v = p_F \circ u|_F$ est de trace nulle, ce qui fait la récurrence.
Note : une généralisation au cas où $u \in \mathcal{L}(E)$ est quelconque est faite dans le bel exercice **SYM.64**.

◆ **SYM.47 (Racine d'une matrice positive)** (***) Mines MP – 2002
 1) Soit S une matrice réelle symétrique positive. Montrer qu'il existe une unique matrice R positive telle que $S = R^2$.
 2) Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (Ω, S) avec Ω orthogonal et S définie positive telle que $A = \Omega S$. (Cf. exercice **SYM.53**)

◇ [Rec02/endsym-r2.tex/bil-r:2:9] (Cf. également **SYM.68** et **SYM.69**.)

1) On choisit une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$ diagonalisant S : $\text{mat}_B(S) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. D'après un résultat connu, tous les coefficients λ_i sont positifs. On définit alors l'endomorphisme R dont la matrice représentative dans la base B est $\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Alors, cet endomorphisme est symétrique, positif et vérifie bien $R^2 = S$ par construction.
 En notant E_1, \dots, E_r les sous-espaces propres de S , on a donc $S = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_n p_r$ où (p_1, \dots, p_r) est la famille de projecteurs associée à la décomposition en somme directe $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$. Par construction, $R = \sqrt{\lambda_1} p_1 + \dots + \sqrt{\lambda_r} p_r$.
 Supposons qu'il existe un endomorphisme positif C tel que $S = R^2 = C^2$; alors C commute avec S et laisse donc les sous-espaces propres de S invariants. Ainsi, pour toute valeur propre λ de S , la restriction de C à E_λ est un endomorphisme positif (cf. lemme ci-après) qui vérifie $C|_{E_\lambda}^2 = \lambda \text{Id}_{E_\lambda}$, donc sa matrice M_λ dans une base (de E_λ), or-

thonormée et diagonalisante, est diagonale, à coefficients positifs, et vérifie $M_\lambda^2 = \lambda I$ (où I est la matrice identité de taille convenable, à savoir $\dim E_\lambda$), c 'est donc obligatoirement $M_\lambda = \sqrt{\lambda} I$. Ainsi, la restriction de C à chaque espace E_λ est égale à l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda}$, ce qui montre que $C = \sqrt{\lambda_1} p_1 + \dots + \sqrt{\lambda_r} p_r = R$.

Il y a existence et unicité de l'endomorphisme symétrique positif B tel que $B^2 = S$.
 Voici maintenant le lemme promis :

LEMME Si f est positif et si V est un sous-espace vectoriel stable par f , alors $\tilde{f} = f|_V$ est positif.

Démonstration : Pour tout $x \in V$, on a $\langle \tilde{f}(x) | x \rangle = \langle f(x) | x \rangle \geq 0$. ■

2)

◆ **SYM.48** CCP PC – 2002
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \cdot {}^t A = {}^t A \cdot A$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. On note $S = {}^t A \cdot A$.
 1) Montrer que $S = 0$.
 2) En déduire que $A = 0$.

◇ [Rec02/endsym-r2.tex/bil-r:2:5] $\text{tr } S = \sum_{i,j} a_{ij}^2 = 0$
 S est symétrique, donc diagonalisable. De plus S est nilpotente grâce à la commutation de A et ${}^t A$. Donc S est nulle. Donc
 donc tous les coefficients de A sont nuls, donc $A = 0$.

◆ **SYM.49** CCP MP – 2002
 Soient E un espace vectoriel euclidien, a et b deux endomorphismes symétriques définis positifs tels que
 $\forall x \in E \setminus \{0\} \quad \langle a(x) | x \rangle < \langle b(x) | x \rangle$.
 Soit $\lambda \in \text{Sp}(b^{-1}a)$. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^n}{n}$ converge.

◇ [Rec02/endsym-r2.tex/bil-r:2:6] Or, a et b étant définis positifs, on en déduit que $\lambda > 0$ d'une part et que $\lambda < 1$ d'autre part. Et notamment, la série de l'énoncé converge.
 Soit $\lambda \in \text{Sp}(b^{-1}a)$. Alors il existe $x \neq 0$ tel que $b^{-1}(a(x)) = \lambda x$, donc $a(x) = \lambda b(x)$ donc
 $\langle a(x) | x \rangle = \lambda \langle b(x) | x \rangle < \langle b(x) | x \rangle$.

◆ **SYM.50** CCP PC – 2002
 Soit $N = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ une matrice colonne. Posons $A = N \cdot {}^t N$.
 1) Montrer que A est la matrice de projection orthogonale sur $\text{Vect}(n)$ dans \mathbb{R}^3 , où n est le vecteur de coordonnées a_1, a_2, a_3 .
 2) En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan de vecteur normal à n .

◇ [Rec02/endsym-r2.tex/bil-r:2:7] bien la matrice de projection orthogonale. On revient aux matrices initiales par un changement de base.
 Il suffit de vérifier que c'est vrai dans une base simple comme (n, b_2, b_3) .
 La symétrie orthogonale peut s'écrire comme $I_3 - 2A$.
 choisie orthonormée. Alors $N' = (1 \ 0 \ 0)$ et $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est

◆ **SYM.51** ENSAE MP – 2002
 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice réelle symétrique, définie positive telle que, pour tout $i \neq j$, $a_{ij} < 0$. Montrer que $\text{rg } A \geq n - 1$.
 INDICATION : Montrer que tous les éléments du noyau ont leurs coordonnées du même signe et en déduire que la dimension de $\text{Ker } A$ vaut 0 ou 1.

◇ [Rec02/endsym-r2.tex/bil-r:2:10] ◆ **SYM.52** INT MP – 2002
 Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soit $u \in E$. On définit f : $E \rightarrow E$
 $x \mapsto u \wedge (u \wedge x)$.
 Montrer que f est autoadjoint. Quelles sont les valeurs propres de f ?

◇ [Rec02/endorsym-r2.tex/bil-r2:32] trice de f dans cette base ; on obtient une matrice manifestement symétrique. On complète $(u/\|u\|)$ en une base orthonormée directe, et on écrit la matrice des valeurs propres sont 0 (multiplicité 1) et $-\|u\|^2$ (multiplicité 2).

◆ **SYM.53 (Décomposition)** (★★★) Navale MP – 2002
(Avec Maple)
Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 - (a) M est inversible ;
 - (b) il existe une matrice O orthogonale et une matrice S symétrique à spectre inclus dans \mathbb{R}^{*+} telles que $M = OS$.

INDICATION : On pourra étudier ${}^tM \cdot M$.

- 2) Étudier l'unicité de la décomposition.
- 3) À l'aide de MAPLE, trouver cette décomposition pour une matrice 3×3 donnée.

◇ [Rec02/endorsym-r2.tex/bil-r2:28] On pose alors

$$S = \Omega D \Omega^{-1} \quad \text{et} \quad O = M S^{-1}.$$

On vérifie simplement que S est symétrique définie positive, que $OS = MS^{-1}S = M$ et que O est orthogonale puisque

$${}^tO \cdot O = {}^tS^{-1} M M S^{-1} = S^{-1} (SS) S^{-1} = I_n.$$

On a donc montré l'existence. La réciproque est immédiate.

- 2) Pour l'unicité, supposons $A = O_1 S_1 = O_2 S_2$. Alors ${}^tA \cdot A = S_1^2 = S_2^2$. Hummm, compliqué. ... (Cf Monier page 290).

$${}^tM \cdot M = \Omega \Delta^t \Omega = (\Omega D) ({}^t D^t \Omega) = \underbrace{\Omega D^t \Omega}_{=S} \Omega D^t \Omega = S^2.$$

◆ **SYM.54** Télécom INT MP – 2002
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit u un endomorphisme antisymétrique de E . Montrer qu'il existe une base orthonormée directe de E dans laquelle la matrice de u s'écrit $k \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $k \in \mathbb{R}^+$.

◇ [Rec02/endorsym-r2.tex/bil-r2:31] ◆ **SYM.55** (♣) ENS PC – 2003
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive.

- 1) Montrer que $\det A \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.
- 2) Qu'en est-il si A est définie positive ?
- 3) Quand a-t-on l'égalité ?

◇ [Rec03/endorsym-r3.tex/r3:399] 2) Idem.
1) On peut essayer une décomposition de Choleski, cf. **SYM.59** page suivante.
3) Lorsque A est diagonale, d'après **SYM.59** page suivante

◆ **SYM.56** X MP – 2003
1) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{*+})^n$. Montrer que $(1 + x_1 \dots x_n)^n \leq \prod_{i=1}^n (1 + x_i^n)$.
2) Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\det(A + B) = \det A \det(I_n + C)$.

◇ [Rec03/endorsym-r3.tex/r3:286] ◆ **SYM.57** Centrale MP – 2003
Soit E un espace vectoriel euclidien. On note $B = \{x \in E ; \|x\| \leq 1\}$.

- 1) Décrire l'image de $B \times B$ par l'application $(x, y) \mapsto \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x|y \rangle^2$.
- 2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint positif. Décrire l'image de $B \times B$ par $(x, y) \mapsto \langle u(x)|x \rangle \cdot \langle u(y)|y \rangle - \langle u(x)|y \rangle^2$.

◇ [Rec03/endorsym-r3.tex/r3:275] ◆ **SYM.58 (rg A et Sp(tAA))** (★★) Mines MP – 2003
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le rang de A est égal au nombre de valeurs propres non nulles de tAA , comptées avec leur ordre de multiplicité.

◇ [Rec03/endorsym-r3.tex/r3:255] $\langle AX|AX \rangle = 0$ et donc $AX = 0$.
 tAA est symétrique donc diagonalisable. On a donc montré $\text{Ker}({}^tAA) \subset \text{Ker} A$.
Montrons maintenant que $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tAA)$.
– On a clairement $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}({}^tAA)$.
– Soit $X \in \text{Ker}({}^tAA)$. Alors ${}^tAAX = 0$ donc en multipliant par tX : non nulles de tAA , comptées avec leur ordre de multiplicité.
– La formule du rang permet de conclure.
Maintenant, il est clair que $\text{rg}({}^tAA)$ est égal au nombre de valeurs propres non nulles de tAA , comptées avec leur ordre de multiplicité.

◆ **SYM.59 (Décomposition de Choleski)** (★★) Centrale MP – 2003
1) Soit $B = (b_{ij})_{ij} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $B = {}^tTT$.
En déduire que $\det B \leq \prod_{i=1}^n b_{ii}$.
2) Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in]0 ; +\infty[$. On note $E_\alpha = \{A \in S_n^+(\mathbb{R}) ; \det A \geq \alpha\}$. Montrer que $\min_{A \in E_\alpha} \text{tr}(AS) = n [\alpha \det S]^{1/n}$.

◇ [Rec03/endorsym-r3.tex/r3:197] 1) On considère la forme bilinéaire ϕ dont la matrice représentative dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^n est B . On orthonormalise la base \mathcal{B} pour la forme ϕ , on note C la base ainsi obtenue. Dans cette base, on a $\text{mat}_C(\phi) = I_n$. Or la matrice T de passage de \mathcal{C} à \mathcal{B} est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs (procédé de Gram-Schmidt), et l'on a $B = {}^tT I_n T = {}^tTT$.
Pour l'unicité, supposons que l'on ait $B = {}^tTT = {}^tQQ$. Alors $M = {}^tQ^{-1}{}^tT = QT^{-1}$
2) est à la fois triangulaire supérieure et inférieure, elle est donc diagonale. De plus, ses coefficients diagonaux sont strictement positifs et égaux à leur inverse, donc $M = I_n$ et $T = Q$.
On a donc $\det B = \prod_{i=1}^n t_{ii}^2$. Enfin, on remarque que la décomposition de Choleski nous donne $b_{ii} = t_{ii}^2 + \text{termes positifs}$, ce qui montre l'inégalité demandée.

◆ **SYM.60 ($f = f^*$ et $\text{tr} f = 0$)** (★★) Centrale PC – 2003
Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique tel que $\text{tr}(f) = 0$.

- 1) Montrer qu'il existe au moins un vecteur x non nul de E tel que $f(x)$ soit orthogonal à x .
- 2) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{E}}(f)$ ait tous ses coefficients diagonaux nuls.

◇ [Rec03/endorsym-r3.tex/r3:444] 1) On choisit une base orthonormée diagonalisante (b_1, \dots, b_n) et on pose $x = \sum_{k=1}^n b_k$, alors on vérifie $\langle x|f(x) \rangle = \sum_i \lambda_i = \text{tr}(f) = 0$.
2) On effectue ensuite une récurrence sur la dimension n de l'espace. On suppose la propriété vraie au rang $n - 1$. On choisit x tel que $\langle f(x)|x \rangle = 0$. On pose H le supplémentaire orthogonal de $\langle x \rangle$. On considère ensuite l'endomorphisme de H dont la matrice représentative est la restriction de la matrice précédente au carré de taille $n - 1$ (c'est donc $p_H \circ f|_H$) et qui est donc de trace nulle, puis on applique la récurrence.
Une jolie généralisation dans **SYM.64**.

◆ **SYM.61** (♣) Centrale PC – 2003
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^tA = A^2$.

- 1) Comparer le rang de A et celui de A^2 .
- 2) Montrer que $\text{Ker} A$ et $\text{Im} A$ sont en somme directe.
- 3) La somme est-elle orthogonale ?
- 4) Montrer que A est symétrique.

◇ [Rec03/endorsym-r3.tex/r3:402] Conclusion : la somme est directe. De par les dimensions, on a même $E = \text{Ker} A \oplus \text{Im} A$.
On remarquera qu'on a pu montrer, par inclusion dans un sens puis égalité des dimensions, que $\text{Ker} A = \text{Ker} A^2 = \text{Ker} A^tA = \text{Ker} A$
et $\text{Im} A = \text{Im} A^2 = \text{Im} A^tA$.
1) On a $\text{Ker} {}^tA \subset \text{Ker} A^tA = \text{Ker} A^2$.
□ Soit $X \in \text{Ker} A^2$. Alors $A^tAX = 0$ donc $({}^tAX)({}^tAX) = 0$ donc $({}^tAX) = 0$ donc $X \in \text{Ker} {}^tA$. □ Donc $\text{Ker} A^2 \subset \text{Ker} {}^tA$.
On a donc montré que $\text{Ker} A^2 = \text{Ker} {}^tA$. Notamment,
 $\text{rg}(A^2) = \text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)$.
2) Soit $X \in \text{Ker} A \cap \text{Im} A$. Alors $X = AY$ et $AX = 0 = A^2Y$. On a donc $Y \in \text{Ker} A^2$. Or, $\text{Ker} A^2 \subset \text{Ker} A$ et on a égalité des dimensions, donc $\text{Ker} A = \text{Ker} A^2$. Ainsi, $Y \in \text{Ker} A$ d'après $X = AY = 0$.

3) Soient $X \in \text{Ker } A$ et $Y \in \text{Im } A$. On écrit $Y = AZ$ puis

$$\langle X|Y \rangle = \langle X|AZ \rangle = \langle {}^tAX|Z \rangle = 0$$

en vertu du fait que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}({}^tA)$. Ainsi, la somme est bien orthogonale.

4) Enfin, on considère une base orthonormée adaptée à $\text{Ker } A \oplus \text{Im } A$:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & B \end{pmatrix},$$

et de l'égalité $A^tA = A^2$ on tire $B^tB = B^2$. Sauf que cette fois-ci, B est inversible, donc en multipliant par B^{-1} à gauche : ${}^tB = B$. Par conséquent, A est symétrique.

◆ **SYM.62 (Matrice symétriques complexes)** (*) Centrale PC – 2003
 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Est-ce que toutes les matrices symétriques de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ sont diagonalisables ?

◆ [Rec03/endosym-r3.tex/r3:331] mais elle est de rang 1 et de polynôme caractéristique $\chi_A = X^2$, donc elle n'est pas diagonalisable.
 Non. Prendre par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$. C'est une matrice symétrique

◆ **SYM.63 (Une CNS pour $A > 0$)** (***) INT MP – 2003
 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice réelle symétrique définie positive. On note $A_p = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ la sous-matrice carrée de A d'ordre p (les déterminants $\det A_p$ sont appelés **mineurs principaux**).
 1) Que peut-on dire de A_p pour $p \in [1; n]$?
 2) En déduire que $\det A_p > 0$ pour tout $p \in [1; n]$.
 3) Réciproquement, montrer que si $\det A_p > 0$ pour tout $p \in [1; n]$, alors A est définie positive.

◆ [Rec03/endosym-r3.tex/r3:80] trique, on trouve une base C telle que
 1) Définie positive (prendre des vecteurs du style $(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0) \dots$)
 2) On diagonalise...
 3) On procède par récurrence : on suppose la propriété vraie en dimension $1, \dots, n-1$. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et l'on suppose $\Delta_p = \det A_p > 0$ pour $i = 1, \dots, n$. La forme ϕ de matrice représentative A , restreinte à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, est > 0 donc la signature de ϕ est $(n, 0)$ ou $(n-1, 1)$ ou $(n-1, 0)$. Bon, quoi qu'il en soit, puisque ϕ est symé-

◆ **SYM.64 ($\text{tr } u = 0$)** Centrale MP – 2003
 Soient E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
 1) Soient x et y deux vecteurs propres de u pour les valeurs propres λ et μ telles que $\lambda\mu \leq 0$. Montrer qu'il existe $z \in [x; y]$ tel que $z \neq 0$ et $u(z) \perp z$.
 2) On suppose $\text{tr}(u) = 0$. En commençant éventuellement par le cas où u est autoadjoint, puis en traitant le cas général, montrer l'existence d'un vecteur u unitaire tel que $u(x) \perp x$.
 3) Montrer que $\text{tr } u = 0$ si et seulement si il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice représentative de u n'a que des 0 sur la diagonale.
 4) On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $P \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ telle que tPAP n'a que des 1 sur la diagonale.

◆ [Rec03/endosym-r3.tex/r3:81] négatifs. S'il y en a un nul, c'est gagné, si non on choisit $f(e_i) > 0$ et $f(e_j) < 0$. Le segment $[e_i; e_j]$ ne passe pas par 0 et on pose
 $f(t) = \langle u(tx + (1-t)y) | tx + (1-t)y \rangle$.
 C'est une fonction continue telle que $f(0) \cdot f(1) \leq 0$, donc il existe $t \in [0; 1]$ tel que $f(t) = 0$. On vérifie que $tx + (1-t)y$ n'est pas nul car la famille (x, y) est libre.
 2) Si u est autoadjoint, on peut prendre une base propre (e_1, \dots, e_n) orthonormée associée à la famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de valeurs propres, et on pose $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n e_i$. Ou bien on remarque que si u est non nul, il y a un $\lambda_i > 0$ et un autre < 0 . Dans le cas général, on pose
 $f(x) = \langle u(x) | x \rangle$.
 On choisit une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) . Alors $\text{tr}(u) = \sum_{i=1}^n f(e_i) = 0$, ce qui montre qu'il y a des $f(e_i)$ positifs, et d'autres

◆ **SYM.65** Mines PC – 2003
 Trouver tous les endomorphismes symétriques vérifiant $f^3 = \lambda \text{Id}$.

◆ [Rec03/endosym-r3.tex/r3:178] On doit alors avoir $\mu_i^3 = \lambda$ pour tout i , ce qui fixe entièrement les μ_i qui sont donc égaux, et donc $f = \sqrt[3]{\lambda} \text{Id}$. Intéret ?
 f étant symétrique, il est diagonalisable ; on choisit une base B telle que
 $\text{mat}_B(f) = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

◆ **SYM.66** Mines MP – 2003
 Soient $A, B \in \mathbb{S}_n^+$. Montrer que $\det(A + B) \geq \det A$.

◆ [Rec03/endosym-r3.tex/r3:435] **À FINIR !!!**

◆ **SYM.67** ENSAE MP – 2003
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 (a) A est unitairement diagonalisable ;
 (b) $\text{tr}(AA^*) = \sum_{\lambda} |\lambda|^2$, la somme étant prise sur les éléments du spectre de A en tenant compte de leur multiplicité.

◆ [Rec03/endosym-r3.tex/r3:430] laire et U unitaire. On se souvient que l'inverse d'une matrice triangulaire l'est encore.
 (a) \Rightarrow (b) : immédiat.
 (b) \Rightarrow (a) : On établit tout d'abord :
 Puis, en écrivant $A = {}^tUTU$, on a

LEMME 1 Toute matrice A est trigonalisable au moyen d'une matrice unitaire.
 $\text{tr}(AA^*) = \text{tr}(T^*T) = \sum_{\lambda} |\lambda|^2 + \sum_{i < j} |t_{ij}|^2,$

Démonstration : On trigonalise $A = P^{-1}TP$ puis on orthonormalise la base associée à P ce qui donne $P = T^*U$ où T' est triangulaire et U unitaire. On se souvient que les termes non diagonaux sont tous nuls donc A est unitairement diagonalisable.

◆ **SYM.68 (Racine de $v \geq 0$)** (***) Mines PC – 2003
 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E . On note $v = u^* \circ u$.
 1) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme w autoadjoint positif tel que $w^2 = v$.
 2) Comparer $\text{Ker } u$ et $\text{Ker } w$, et montrer que $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } w$.

◆ [Rec03/endosym-r3.tex/r3:181] $\lambda \geq 0$, et notamment égalité des noyaux, donc $x \in \text{Ker } w$. On a donc montré
 (Cf. également **SYM.47** et **SYM.69**).
 1) v est un endomorphisme autoadjoint qui a le bon goût d'être positif puisque, pour tout $x \in E$, on a
 $\langle x|v(x) \rangle = \langle x|u^* \circ u(x) \rangle = \langle u(x)|u(x) \rangle \geq 0$.
 Il est donc diagonalisable, on le diagonalise ce qui permet d'extraire une racine carrée, qui est symétrique...
 Soit w un endomorphisme symétrique positif tel que $w^2 = v$. Alors w commute avec v donc laisse stable tous les sous-espaces propres de v et on peut le décomposer sous la forme
 $w = w_1 \oplus \dots \oplus w_k,$
 en notant w_i l'endomorphisme induit sur E_i . On a donc $w_i^2 = \lambda_i \text{Id}_{E_i}$ et w_i est diagonalisable ; sa matrice diagonale (à coefficients positifs) vérifie $D_i^2 = \lambda_i I_{n_i}$ donc $D = \sqrt{\lambda_i} I_{n_i}$ donc $w_i = \sqrt{\lambda_i} p_i$. En conclusion, $w = v$ et on a bien montré l'unicité.
 2) Soit $x \in \text{Ker } u$, alors $x \in \text{Ker } v$. Or, d'après la construction de w que l'on a faite (et qui est unique !), on a égalité de $E_{\lambda^2}(v)$ et $E_{\lambda}(w)$ pour tout

◆ **SYM.69 (Endomorphismes ≥ 0)** Centrale PC – 2003
 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $\dim E \geq 1$. On note
 $S = \{u \in \mathcal{L}(E) ; u = u^*\}$ et $\Sigma = \{u \in S ; \forall x \in E \langle x|u(x) \rangle \geq 0\}$.
 1) Montrer que S est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
 2) Montrer que, si $u \in S$, alors
 $u \in \Sigma \iff \exists v \in S \quad u = v^2.$
 3) Soit $w \in S$. Soit $u \in \Sigma$ tel que $\text{rg } u = n$. Montrer que $u \circ w$ et $w \circ u$ sont diagonalisables.
 4) Soient $w \in S$ et $u \in \Sigma$. Montrer que le polynôme caractéristique de $u \circ w$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

◆ [Rec03/endosym-r3.tex/r3:113] 2) Cf. **SYM.68**
 (Cf. également **SYM.47** et **SYM.68**).
 1) $n(n+1)/2$. 3) **À FINIR !!!**

◆ **SYM.70 ($A^tAA = I_n$ — ruse)** (***) Mines MP – 2003
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^tAA = I_n$. Que dire de A ?
 Même question dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

◇ [Rec03/endsym-r3.tex/r3:292]

LEMME 2 *L'inverse d'une matrice symétrique M est elle-même une matrice symétrique.*

Démonstration : On écrit $M \cdot M^{-1} = I_n$ et on transpose ce qui donne ${}^t(M^{-1}) \cdot {}^tM = I_n$ soit ${}^t(M^{-1}) \cdot M = I_n$ et donc ${}^t(M^{-1}) = M^{-1}$: M^{-1} est donc symétrique. ■

◆ **SYM.71** ($A {}^tAA = I_n$ — ruse) (*) Centrale PC – 2003
 L'inverse d'une matrice réelle symétrique inversible est-elle symétrique ?
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \cdot {}^tA \cdot A = I_n$. Déterminer A.

◇ [Rec03/endsym-r3.tex/r3:186]

On écrit $A \cdot A^{-1} = I_n$ et on transpose ce qui donne ${}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA = I_n$ soit ${}^t(A^{-1}) \cdot A = I_n$ et donc ${}^t(A^{-1}) = A^{-1}$: A^{-1} est donc symétrique.
 Si $A \underbrace{{}^tAA}_B = I_n$, on en déduit que A est l'inverse de la matrice symétrique B

Si $A \underbrace{{}^tAA}_B = I_n$, on en déduit que A est l'inverse de la matrice symétrique B et par conséquent A est symétrique. Il suffit donc de résoudre $A^3 = I_n$.
 Il n'y a pas trente-six solutions : A étant symétrique, elle est diagonalisable (dans \mathbb{R}), et ses valeurs propres ayant pour cube 1, on en déduit que $A = I_n$.
 Dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ en revanche, une matrice diagonale avec des 1, j et \bar{j} marche aussi. *Quid d'une matrice non diagonale ? Je ne sais pas...*

◆ **SYM.72** (Matrices antisymétriques) (***) CCP PC – 2003
 1) Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle d'ordre impair admet 0 comme unique valeur propre.
 2) Soit A une matrice antisymétrique. Montrer que, si A est d'ordre pair, son polynôme caractéristique est pair et que, si A est d'ordre impair, son polynôme caractéristique l'est aussi.
 3) Notons \mathcal{A}_n l'ensemble des matrices antisymétriques et O_n le groupe des matrices orthogonales. Déterminer $\mathcal{A}_n \cap O_n$ pour $n = 2$ et $n = 3$.

◇ [Rec03/endsym-r3.tex/r3:175]

1) Tout d'abord, on note que A étant d'ordre impair, elle admet au moins une valeur propre. Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$. On prend un vecteur propre X associé à λ : $AX = \lambda X$. Alors, puisque $A + {}^tA = 0$, on en déduit que $AX + {}^tAX = 0$ donc, en multipliant à gauche par tX :

$${}^tX \underbrace{AX}_{\lambda X} + \underbrace{{}^tX {}^tA X}_{\lambda {}^tX} = 0,$$

donc $2\lambda \|X\|^2 = 0$ et donc $\lambda = 0$.

Conclusion : $\text{Sp}(A) = \{0\}$.

Autre méthode : On peut remarquer que toute valeur propre de A^2 est négative ($A^2X = \lambda X$ donc $\lambda \|X\|^2 = {}^tXA^2X = -{}^t(A^2X)X \geq 0$) donc si μ est une valeur propre de A, on a immédiatement $\mu \leq 0$.

2) On a $\chi_A(-X) = \det(A+XI_n) = \det(-{}^tA-XI_n) = (-1)^n \det({}^tA-XI_n) = (-1)^n \chi_{{}^tA} = (-1)^n \chi_A$.
 3) Si $n = 2$, toutes les matrices orthogonales sont de rotation à un signe près, donc seules sont antisymétriques les rotations d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$.
 Si $n = 3$, puisque aucune matrice orthogonale n'admet 0 comme valeur propre, aucune ne saurait être antisymétrique !

◆ **SYM.73** (Endomorphismes antisymétriques) CCP MP – 2003
 On rappelle qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ d'un espace vectoriel euclidien E est dit *antisymétrique* si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u(x)|y \rangle = -\langle x|u(y) \rangle$.

1) a) Montrer que u est antisymétrique si et seulement si pour tout $x \in E$, on a $\langle u(x)|x \rangle = 0$.
 b) Montrer que u est antisymétrique si et seulement si la matrice de u dans une base orthonormée est antisymétrique.
 2) Montrer que $\text{Ker } u = (\text{Im } u)^\perp$ et que la dimension de $\text{Im } u$ est paire.
 3) Montrer que toute valeur propre réelle de u^2 est négative. u est-il diagonalisable dans \mathbb{R} ?

◇ [Rec03/endsym-r3.tex/r3:212]

1) a) Le sens \Rightarrow est immédiat. Pour le sens \Leftarrow , on applique la formule à $(x+y)$ et on développe.
 b) Cf cours.
 2) T.
À FINIR !!!

3) On suppose $u^2(x) = \lambda x$, alors

$$\lambda \|x\|^2 = \langle u^2(x)|x \rangle = -\langle u(x)|u(x) \rangle \leq 0,$$

donc $\lambda \leq 0$.

Si u était diagonalisable, ses valeurs propres seraient de carré négatif, donc il faut $u = 0$; sinon u n'est pas diagonalisable.

◆ **SYM.74** () Centrale PC – 2004
 ? On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, muni du produit scalaire $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. On définit $\phi : E \rightarrow E$.

$$P \mapsto x \mapsto \int_0^1 (x-t)^n P(t) dt$$

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E et que, pour tout $(P, Q) \in E^2$, on a $\langle \phi(P)|Q \rangle = \langle P|\phi(Q) \rangle$.
 2) Rappeler pourquoi ϕ est diagonalisable.

◇ [Rec04/endsym-r4.tex/r4:58]

(Cf. **SYM.77**)

◆ **SYM.75** ($A = \text{diag}(A_1, A_2) \Rightarrow \det(A) \leq \det(A_1) \det(A_2)$) Centrale MP – 2004
 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ {}^tB & A_2 \end{pmatrix}$. On suppose que A est réelle, symétrique, définie positive : $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

1) Montrer que A_1 et A_2 sont également symétriques, définies et positives.
 2) Montrer que $\det A \leq \det A_1 \cdot \det A_2$.

◇ [Rec04/endsym-r4.tex/r4:260]

1) A_1 et A_2 sont également symétriques. De plus, pour tout $X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, si l'on note $X' = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on obtient

$${}^tX A_1 X = {}^tX' A X' > 0$$

ce qui montre que A_1 est définie positive. On procède de même pour A_2 .

2) On choisit une base orthonormée (V_1, \dots, V_p) diagonalisante pour A_1 et une base orthonormée (W_1, \dots, W_{n-p}) diagonalisante pour A_2 .

Notamment, $\det A_1 = \prod_{k=1}^p {}^tV_k A_1 V_k$ et $\det A_2 = \prod_{k=1}^{n-p} {}^tW_k A_2 W_k$.

On définit ensuite la famille (U_1, \dots, U_n) par

$$U_k = \begin{pmatrix} V_k \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ W_k \end{pmatrix}$$

selon que $k \leq p$ ou $k > p$. Alors on vérifie aisément que la famille (U_1, \dots, U_n) est bien une base orthonormée de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Enfin, on a le résultat suivant :

LEMME $\det(A) \leq \prod_{k=1}^n {}^tU_k A U_k$

et ce dernier terme est égal à $\det(A_1) \cdot \det(A_2)$.

Démonstration du lemme : Notons B la matrice correspondant à A « dans la base (U_1, \dots, U_n) », ce qui donne notamment $b_{ij} = {}^tU_i A U_j$. On considère la forme bilinéaire ϕ dont la matrice représentative dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^n est B. On orthonormalise la base \mathcal{B} pour la forme ϕ , on note \mathcal{C} la base ainsi obtenue. Dans cette base, on a $\text{mat}_{\mathcal{C}}(\phi) = I_n$. Or la matrice T de passage de \mathcal{C} à \mathcal{B} est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs (procédé de Gram-Schmidt), et l'on a

$$B = {}^tT I_n T = {}^tT T.$$

On a donc $\det A = \det B = \prod_{i=1}^n t_{ii}^2$. Enfin, on remarque que la décomposition de Choleski nous donne

$$b_{ii} = t_{ii}^2 + \text{termes positifs},$$

ce qui montre l'inégalité demandée. ■

◆ **SYM.76** ($A, B \geq 0 \Rightarrow \det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$) (***) Centrale MP – 2004
 On veut montrer que $\forall (A, B) \in S_n^+(\mathbb{R})^2 \quad \det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$. (*)

1) Montrer (*) pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
 2) Montrer (*) pour $A, B \in S_n^+(\mathbb{R}) \setminus S_n^{++}(\mathbb{R})$. Conclure.

INDICATION : (Pendant la planche)
 1) Montrer que, si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tPAP = I_n$, puis poser $C = {}^tPBP$ et montrer que $C \in S_n^+(\mathbb{R})$. Il faut alors montrer que $\det(I_n + C) \geq \det(I_n) + \det(C)$.
 2) On peut conclure avec les deux questions.

◇ [Rec04/endsym-r4.tex/r4:263]

1) Cf. **exercice SYM.33 page 249**.
 On peut très bien suivre les indications, ça marche.
Autre méthode : On commence par traiter le cas où A est diagonale (ou on s'y ramène par changement de base orthonormée). On note (B_1, \dots, B_n) les colonnes de B, on développe $\det(A+B) = \det(B_1 + \lambda_1 E_1, \dots, B_n + \lambda_n E_n)$.
 On a, aux extrémités, $\det A$ et $\det B$. Entre les deux, des produits de quelques λ avec des déterminants réduits. Ceux-ci sont des déterminants

de matrices symétriques obtenues en prenant des sous-matrices de B. Une telle sous-matrice correspond à un endomorphisme du style $\pi \circ b \circ \pi$, où π est un projecteur orthogonal. C'est manifestement symétrique et positif car

$$\langle \pi b \pi(x)|x \rangle = \langle b \pi(x)|\pi(x) \rangle \geq 0.$$

Au total, tous les produits en plus sont bien positifs.

2) Si A et B sont simplement symétriques positifs, leur déterminant est nul à toutes deux. De plus, $A+B$ est symétrique positive donc de déterminant positif.

◆ **SYM.77** (★★) CCP PC – 2004

On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$.

1) Soit $P \in E$. Justifier l'existence et l'unicité du polynôme $T(P) \in E$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad T(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt.$$

2) Montrer que T est un endomorphisme symétrique de E .

3) Soit (P_0, \dots, P_n) une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres pour T . Notons λ_k la valeur propre associée au vecteur propre P_k pour $k \in [0; n]$.

Montrer que, pour tout $x, y \in [0; 1]$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x) P_k(y)$.

4) Calculer $\text{tr}(T)$.

◊ [Rec04/endsym-r4.tex/r4:60] (Cf. **SYM.74**)

◆ **SYM.78** (★★) CCP PC – 2004

On se place dans $\mathbb{R}_n[X]$, que l'on munit de l'application qui à $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ associe

$$\langle P|Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt.$$

1) Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

2) On définit l'endomorphisme H par

$$H(P) = X P'' + (1 - X) P'.$$

a) Calculer H^* .

b) En déduire qu'il existe une base (P_0, \dots, P_n) qui diagonalise H . Calculer les valeurs propres de H .

c) Calculer $\langle P_i|P_j \rangle$ pour tout $i \neq j$.

◊ [Rec04/endsym-r4.tex/r4:63]

◆ **SYM.79** (★★) X PC – 2005

Soit A une matrice symétrique réelle. Que cela implique-t-il pour A ? On définit la forme quadratique associée à A par :

$$q_A : \begin{cases} \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longmapsto q_A(X) = {}^t X A X. \end{cases}$$

On dit que A est définie positive si et seulement si :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad q_A(X) \geq 0 \quad \text{et} \quad q_A(X) = 0 \iff X = 0.$$

Dans toute la suite, on identifie $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^n . On définit enfin la *sphère unité* $\sigma_A = \{X \in \mathbb{R}^n ; q_A(X) = 1\}$.

1) Notons $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer si A et B sont définies positives. Expliciter σ_A et σ_B .

2) Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

(a) $A > 0$;
 (b) $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{*+}$;
 (c) σ_A est un compact de \mathbb{R}^n .

INDICATION : Pour montrer (c) \Rightarrow (b) : raisonner par l'absurde en traitant les différents cas.

◊ [Rec05/endsym-r5.tex/r5:131]

(c) \Rightarrow (b) par l'absurde. Si toutes les valeurs propres sont strictement négatives, $\sigma_A = \emptyset$. S'il y a une valeur propre nulle, c'est non borné dans la direction propre associée. S'il y a $\lambda > 0$ et $\mu < 0$, on peut trouver une hyperbole, c'est non borné.

- 1) Calcul : ce sont des ellipses.
 2) (a) \Rightarrow (b) et (b) \Rightarrow (a) : cours.
 (b) \Rightarrow (c) Ellipsoïdes.

◆ **SYM.80** (★) X PC – 2005

Soit $\rho \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive, c'est-à-dire que ${}^t X \rho X > 0$ pour tout vecteur colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. Montrer que l'application suivante est un produit scalaire :

$$\Phi : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) \longmapsto \text{tr}(\rho {}^t A B). \end{cases}$$

◊ [Rec05/endsym-r5.tex/r5:14]

◆ **SYM.81** (★★) X PC – 2005

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique non nulle. Montrer que $\text{rg}(M) \geq \frac{\text{tr}(M)^2}{\text{tr}(M^2)}$.

◊ [Rec05/endsym-r5.tex/r5:21]

Tout d'abord, en diagonalisant M , on vérifie que $\text{tr}(M^2) > 0$. De plus, en notant $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de M , dont les k premières sont non nulles, on peut appliquer Cauchy-Schwarz :

en notant $U = {}^t(1, \dots, 1) \in \mathfrak{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.
 Note : on pouvait aussi munir $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle A|B \rangle = \text{tr}({}^t A B)$ et appliquer Cauchy-Schwarz au produit scalaire $\langle M|P J_k {}^t P \rangle$ où ${}^t P M P$ est diagonale.

$$\frac{\text{tr}(M)^2}{\text{tr}(M^2)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right)^2}{\sum_{i=1}^k \lambda_i^2} = \frac{\langle \Lambda|U \rangle^2}{\langle \Lambda|\Lambda \rangle} \leq \|U\|^2 = k = \text{rg}(M),$$

◆ **SYM.82** (★★) X PC – 2005

On munit \mathbb{R}^n de sa structure d'espace vectoriel euclidien. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|u\| = 1$. On note \mathcal{P}_u la projection orthogonale sur $\text{Vect}(u)$.

1) Montrer que \mathcal{P}_u est symétrique, positif, et que $\text{tr}(\mathcal{P}_u) = 1$.

2) Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\text{tr}(A \mathcal{P}_u) = \langle u|A(u) \rangle$.

3) Soit A un endomorphisme symétrique, positif et de trace 1. Montrer que, pour tout $w \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|w\| = 1$, alors $\langle w|A(w) \rangle \in [0; 1]$.

4) Soient A et B symétriques, positifs et de trace 1. On suppose qu'il existe $\lambda \in]0; 1[$ tel que

$$\lambda A + (1 - \lambda)B = \mathcal{P}_u.$$

Montrer que $A = B = \mathcal{P}_u$.

5) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| = 1$ et tel que $\langle u|v \rangle = 0$. Montrer que $\langle v|A(v) \rangle = \langle v|B(v) \rangle = 0$.

6) Montrer que u est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1.

◊ [Rec05/endsym-r5.tex/r5:60]

◆ **SYM.83 (Matrice antisymétrique)** (★★★) Centrale PC – 2005

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^t A = -A$. Montrer que les racines du polynôme caractéristique de A sont imaginaires pures. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

◊ [Rec05/endsym-r5.tex/r5:62]

Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Alors $\langle X|AX \rangle = \lambda \|X\|^2$ et $\langle {}^t A X|X \rangle = -\bar{\lambda} \|X\|^2$, ce qui prouve, puisque ces quantités sont égales, que $\lambda = -\bar{\lambda}$ donc $\lambda \in i\mathbb{R}$.
 Pour la diagonalisabilité, prendre la même démonstration que dans le cours.

◆ **SYM.84 (Quotient de Rayleigh)** (★★) Centrale PC – 2005

Notons E l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^n et u un endomorphisme de E .

1) On définit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \frac{\langle u(x)|x \rangle}{\langle x|x \rangle}$.

a) Justifier que $\min_{x \neq 0} f(x)$ et $\max_{x \neq 0} f(x)$ existent.

b) On suppose que u est un endomorphisme symétrique non nul. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres ordonnées : $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Montrer que

$$\lambda_1 = \min_{x \neq 0} f(x) \quad \text{et} \quad \lambda_n = \max_{x \neq 0} f(x).$$

2) On définit les formes linéaires ℓ_1, \dots, ℓ_n par :

$$\ell_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j,$$

où les coefficients c_{ij} sont réels. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les ℓ_i (ou les c_{ij}) pour que l'application bilinéaire ϕ définie ci-dessous soit un produit scalaire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \ell_i(x) \ell_i(y).$$

3) Soit $(a_{ij})_{i,j}$ une famille de n^2 scalaires telle que $a_{ij} = a_{ji}$. Calculer le minimum et le maximum de la fonction

$$x \mapsto \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

◇ [Rec05/endorsym-r5.tex/r5:87] Cf. problème de l'ENS Cachan sur les produit de Rayleigh.

1) a) Notons $q_f(x)$ le quotient de Rayleigh ; on vérifie par double inclusion que

$$\{q_f(x) ; x \neq 0\} = \{q_f(x) ; \|x\| = 1\}$$

ce qui nous permet de nous ramener à des compacts ; sur lesquels la fonction f_q atteint son maximum et son minimum.

b) Diagonaliser et décomposer x sur une base orthonormée propre.

2) La seule chose à vérifier est l'aspect « défini ». On vérifie que $\ell_i(X) = \langle CX \rangle_i = \langle C_i | X \rangle$; il faut donc que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on ait $\phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$, c'est-à-dire

$$\ell_1(x) = \dots = \ell_n(x) = 0 \Rightarrow x = 0,$$

ou encore $CX = 0 \Rightarrow X = 0$: une condition nécessaire et suffisante est donc C est inversible. On peut vérifier que cela s'écrit également « (ℓ_1, \dots, ℓ_n) est libre » (puisque (C_1, \dots, C_n) l'est et que ce sont les matrices représentatives des ℓ_i ...) ou même « (ℓ_1, \dots, ℓ_n) est une base de E^* ».

3) Simple application.

◆ **SYM.85** (★★★) Centrale PC – 2005

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^{*+}$.

1) Montrer que, pour tout $U \in O_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(US) \leq \text{tr} S$. Montrer qu'il n'y a égalité que si $US = S$.

2) Montrer que $(M, N) \mapsto \text{tr}({}^tMN)$ définit un produit scalaire.

3) Calculer $d(S, O_n(\mathbb{R}))$.

4) Calculer $d(S, A_n(\mathbb{R}))$, où $A_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques.

◇ [Rec05/endorsym-r5.tex/r5:98] 3) 1) Classique. 2) T. 4)

◆ **SYM.86** (★★★) CCP PC – 2005

On note

$$\mathcal{A}_n = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) ; {}^tM = -M\}$$

$$\mathcal{B}_n = \{M \in O_n(\mathbb{R}) ; -1 \notin \text{Sp}(M)\}$$

$$\mathcal{C}_n = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) ; {}^tM = M \text{ et } \text{Sp}(M) \subset]0 ; 1[\}.$$

On définit $\phi : M \mapsto (I_n - M) \cdot (I_n + M)^{-1}$.

1) Montrer que ϕ réalise une bijection de \mathcal{A}_n dans \mathcal{B}_n .

2) Montrer que ϕ réalise une bijection involutive sur \mathcal{C}_n , c'est-à-dire que $\phi = \phi^{-1}$.

◇ [Rec05/endorsym-r5.tex/r5:50] 1) Tout d'abord, si $A \in \mathcal{S}'_n$, alors $1 \notin \text{Sp}(A)$ (démonstration classique). On peut donc poser $M = \phi(A) = (I - A)(I + A)^{-1}$. On vérifie alors que $(I + A)$ et $(I - A)$ commutent et donc que

$${}^tM \cdot M = I_n,$$

ce qui prouve que $\phi(A) \in \mathcal{B}_n$. De plus, l'injectivité de ϕ est à peu près immédiate (attention, ϕ n'est pas linéaire !). Montrons la surjectivité de ϕ .

□ Soit $M \in \mathcal{B}_n$. Tout d'abord on note que si $M \in \mathcal{B}_n$, alors $M + I_n$ est inversible donc $\phi(M)$ est bien défini. Notons

$$A = \phi(M) = (I_n - M) \cdot (I_n + M)^{-1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} {}^t(A) &\stackrel{\text{déf.}}{=} (I + {}^tM)^{-1} (I - {}^tM) \\ &= (I + M^{-1})^{-1} \cdot (I - M^{-1}) \\ &= (M + I)^{-1} M \cdot (I + M^{-1}) \\ &= (M + I)^{-1} (M - I). \end{aligned}$$

Or M commute avec $(M + I)^{-1}$ car il commute avec $(M + I)$ (multiplier à gauche et à droite par $(M + I)^{-1}$ la relation de commutation entre M et $(M + I)$ pour le voir), et I aussi, donc

$${}^tA = (M - I)(M + I)^{-1} = -{}^tA.$$

On a donc montré que $A = \phi(M) \in \mathcal{A}_n$. Par ailleurs, on tire de la définition de A les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} A(I + M) &= I - M \\ MA + M &= I - A \\ M(I + A) &= I - A \\ M &= (I - A)(I + A)^{-1} = \phi(A) \quad \square \end{aligned}$$

Ce qui montre donc la surjectivité de ϕ .

2) Même démarche ; il faut noter que l'intervalle $]0 ; 1[$ est stable par $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$.

Endomorphismes orthogonaux (isométries)

◆ **ISO.1** (♣)
 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in O(E)$. Soit V un sous-espace vectoriel de E stable par f. Montrer que $f(V) = V$ et que $f(V^\perp) = V^\perp$.

◇ [Divers/endoorthogexo.tex/pre:48] donc $y \in V$. Alors
 $f(V)$ est de même dimension que V car $f \in \mathcal{K}(E)$. On en déduit que $f|_V$ est une bijection $\langle f(x)|y \rangle = \langle x|f(y) \rangle = \langle x|f^{-1}(y) \rangle = 0$
 Montrons $f(V^\perp) \subset V^\perp$. □ Soit $x \in V^\perp$, montrons que $f(x) \in V^\perp$. Soit $y \in V$. Montrons $V^\perp \subset f(V^\perp)$: par les dimensions.

◆ **ISO.2** (★)
 Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $f \in O(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 (a) $f \circ f = -\text{Id}_E$;
 (b) $\forall x \in E, f(x) \perp x$;
 (c) $\forall x, y \in E, \langle f(x)|y \rangle = -\langle x|f(y) \rangle$.

◇ [Divers/endoorthogexo.tex/pre:35] $b \Rightarrow c$: on a pour tout $x, y \in E$:
 $\langle f(x)|y \rangle + \langle x|f(y) \rangle = \langle f(x)|y \rangle - \langle f(x)|x \rangle - \langle y|f(y) \rangle + \langle x|f(y) \rangle$
 $= \langle f(x)|y - x \rangle - \langle y - x|f(y) \rangle$
 $= \langle f(x - y)|y - x \rangle = 0$.
 $a \Rightarrow b$: pour tout $x \in E, \langle f(x)|x \rangle = \langle f(x)|-f^2(x) \rangle = -\langle f^*(f(x))|f(x) \rangle = -\langle x|f(x) \rangle$, ce qui ne peut donc être que 0. $c \Rightarrow a$: Soit $x \in E$, alors $\langle f \circ f(x)|y \rangle = -\langle f(x)|f(y) \rangle = -\langle f^* \circ f(x)|y \rangle = -\langle x|y \rangle$ pour tout $y \in E$.

◆ **ISO.3** (**)
 Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E.
 1) Soit $f : F \rightarrow E$ une application orthogonale. Montrer qu'on peut la prolonger en une application orthogonale de E dans E.
 2) Soient u_1, \dots, u_n et v_1, \dots, v_n des vecteurs de E tels que : pour tout $i, j \in [1; n]$, on ait $\langle u_i|u_j \rangle = \langle v_i|v_j \rangle$.
 a) Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0$, montrer que $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$.
 b) En déduire qu'il existe $f \in O(E)$ tel que : pour tout $i \in [1; n], f(u_i) = v_i$.

◇ [Divers/endoorthogexo.tex/pre:36] 2) Prendre le produit scalaire avec lui-même.
 1) La première question n'est pas claire. On choisit une b.o.n. (e_1, \dots, e_p) de F, on la complète en une b.o.n. (e_1, \dots, e_d) de E. On fait pareil avec $f(F)$ et (b_1, \dots, b_d) . et on prolonge f en posant $f(e_i) = (b_i)$ pour $i = p + 1, \dots, d$ par exemple.
 3) Posons $V = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. On pose $f(u_i) = v_i$ et on complète sur F par linéarité, en vérifiant que c'est compatible si la famille (u_1, \dots, u_n) n'est pas libre. On vérifie que f est orthogonale, puis on la prolonge sur E.

◆ **ISO.4** (♣)
 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in O(E)$. Soit V un sous-espace vectoriel de E tel que $f(V) \subset V$. Montrer que $f(V) = V$ et $f(V^\perp) = V^\perp$.

◇ [Divers/endoorthogexo.tex/pre:61] puisque $f^* = f^{-1}$ et $f^{-1}(x) \in V$. Ceci montre que $f(V^\perp) \subset V^\perp$ puis égalité par dimensions.
 Par bijectivité de f, f(V) et V ont même dimension donc sont égaux.
 Soit $x \in V$ et $y \in V^\perp$. Alors
 $\langle x|f(y) \rangle = \langle f^{-1}(x)|y \rangle = 0$

◆ **ISO.5** (★)
 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f : E \rightarrow E$ telle que $f(0) = 0$ et
 $\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
 Montrer que f est un automorphisme orthogonal de E.

◇ [Divers/endoorthogexo.tex/pre:89] On en déduit la linéarité de f en développant $\|f(x + \lambda y) - f(x) - \lambda f(y)\|^2$. C'est de plus une isométrie donc $f \in O(E)$.
 Par polarisation, f préserve le produit scalaire :
 $\langle f(x)|f(y) \rangle = -\frac{1}{2} (\|f(x) - f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2)$
 $= -\frac{1}{2} (\|x - y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \langle x|y \rangle$.

◆ **ISO.6** (♣)
 Dans \mathbb{R}^3 on considère la rotation r, d'axe $\mathbb{R}(1, -1, 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Donner la matrice de r dans la base canonique.

◇ [Divers/endoorthogexo.tex/pre:114] Alors $\text{mat}_B(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
 On utilise la base « sympathique » suivante :
 On a finalement $\text{mat}_{\text{can}}(r) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 & 1 - 6\sqrt{2} & 2 - 3\sqrt{2} \\ -1 + 6\sqrt{2} & 7 & -2 - 3\sqrt{2} \\ 2 + 3\sqrt{2} & -2 + 3\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$.
 $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

◆ **ISO.7** (★)
 On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Montrer que $O(n)$ est bornée et calculer son diamètre.

◇ [Divers/endoorthogexo.tex/pre:30] De plus ce diamètre est atteint (prendre I_n et $-I_n$. Donc $D = 2\sqrt{n}$.
 On a pour tout $M \in O(n) : \|M\| \leq \sqrt{n}$, donc le diamètre est au plus $2\sqrt{n}$.

◆ **ISO.8**
 Montrer que l'ensemble S des symétries orthogonales d'un espace euclidien E est compact.

◇ [Divers/endoorthogexo.tex/pre:29] sont fermés, donc leur intersection est fermée.
 Une symétrie est caractérisée par $s^* = \text{Id}_E$ et $s = s^*$. Or les deux ensembles $O(n) = \theta^{-1}(I_n)$ avec $\theta(A) = A^t A$ De plus, $O(n)$ est clairement bornée.
 et $\text{Sym}(n) = \psi^{-1}(0)$ avec $\psi(A) = A - {}^t A$ Par isomorphisme, S est compacte.

◆ **ISO.9** (♣)
 Compléter la matrice $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & \cdot \\ -2 & 6 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale positive. Quelle est alors l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice, dans la base canonique, est A ?

◇ [Divers/endoorthogexo.tex/pre:41] est donnée par $\text{Vect}(1, 1, 1)$.
 $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, de déterminant 1, c'est donc une rotation, l'axe

◆ **ISO.10** (♣)
 Compléter la matrice $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & \cdot \\ -3 & 2 & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale positive. Quelle est alors l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice, dans la base canonique, est A ?

◇ [Divers/endoorthogexo.tex/pre:41]

◆ **ISO.11** (♣)
 Soit $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue et dérivable sur \mathbb{R} , à valeurs matricielles, et telle que $M(0) = I_n$. Montrer que, si pour tout $x \in \mathbb{R}, M(x)$ est orthogonale, alors $M'(0)$ est antisymétrique.

◇ [Divers/endoorthogexo.tex/pre:51] donne, en $x = 0$:
 Il suffit de dériver la relation ${}^t M(x) \cdot M(x) = I_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui ${}^t M'(0) \cdot M(0) + {}^t M(0) \cdot M'(0) = {}^t M'(0) + M'(0) = 0$.

◆ **ISO.12** (**)
 Soit $A = (a_{ij})_{i,j}$ une matrice orthogonale. Montrer que
 $\sum_{i,j} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$ et $\left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \leq n$.

◇ [Divers/endoorthogexo.tex/pre:72] $S^2 \leq \sum_{i,j} 1^2 \cdot \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \leq n^2 \sum_i \sum_j \underbrace{a_{ij}^2}_{=1} = n^3$,

En utilisant Cauchy-Schwarz,

ce qui prouve $S \leq n\sqrt{n}$. (On peut aussi utiliser une matrice avec des \pm partout

selon le signe de a_{ij} , et on remarque que, en posant $S = \sum_{ij} a_{ij}$, et en prenant le produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$

$$|S| = |(A|J)| \leq \frac{\|A\| \cdot \|J\|}{\sqrt{n}}$$

En notant $u = (1, \dots, 1)$ et l'endomorphisme orthogonal f associé à A (qui est donc une *isométrie*), la deuxième somme vaut

$$T = \langle u|f(u) \rangle \leq \|u\| \|f(u)\| \leq \|u\|^2 = 1.$$

◆ **ISO.13 (Trigonalisation orthogonale)**
 Montrer que toute matrice réelle à polynôme caractéristique scindé est trigonalisable au moyen d'une matrice orthogonale.

◆ [Divers/endoorthogexo.tex/div:r:85] on schmidte la base diagonalisante, ce qui donne $P = \Omega \cdot T'$; on a alors
 $M = PT_1P^{-1} = \Omega T' T_1 T'^{-1} \Omega = \Omega T^t \Omega.$

◆ **ISO.14** Mines MP – 1998
 Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un réel λ tel que $(A - \lambda I_n)^2 = 0$. Montrer que $A = \pm I_n$.

◆ [Rec00/endoorthog-r0.tex/supp-r0:8] On a immédiatement $\text{Sp}(A) \subset \{\lambda\}$, ce qui nous donne déjà $\lambda \in \{-1, 1\}$.
 On bien alors on sait que A , en tant qu'endomorphisme normal, est diagonalisable dans \mathbb{C} ; on obtient alors un projecteur. Les seuls projecteurs qui sont des isométries sont $\pm I_n$.
 Par ailleurs on sait décomposer un endomorphisme orthogonal en matrices élémentaires d'ordre 1 et 2...

◆ **ISO.15** Centrale MP – 2001 (Avec Maple)
 Montrer que $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ est une isométrie négative de \mathbb{R}^3 si et seulement si a, b, c sont racines de $P(x) = x^3 + x^2 + p$ avec $p \in \left[0; \frac{4}{27}\right]$. Étudier en détail le cas $p = \frac{2}{27}$.

◆ [Rec01/endoorthog-r1.tex/bil-r:34] Il faut écrire $\det A = -1$ et ${}^tM \cdot M = I_n$, ce qui est équivalent à $a+b+c = -1$ et $ab+ac+bc = 0$, c'est-à-dire (en considérant les fonctions symétriques) qu'ils sont racines d'un polynôme
 $P = X^3 + X^2 - p.$
 De plus, pour que ce polynôme admette trois racines réelles (non forcément distinctes), il faut (étudier la fonction associée) $0 \leq p \leq \frac{4}{27}$.

◆ **ISO.16 (Similitude)** CCP/Mines PC – 2001
 Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :
 $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x|y \rangle = 0 \implies \langle f(x)|f(y) \rangle = 0.$
 Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \alpha \|x\|$.
 (Aux Mines seulement :) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $g \in O(E)$ tel que $f = \alpha g$.

◆ [Rec01/endoorthog-r1.tex/bil-r:41] (Cf. également l'exercice **PRE.7** page 216.)
 On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. de E et $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n) = f(\mathcal{B})$ la base image.
 Alors (u_1, \dots, u_n) est une base orthogonale.
 Notons $\mu = \|e_1\|$ et $\lambda = \|e_2\|$.
 Posons maintenant $v = e_1 + e_2$ et $w = e_1 - e_2$. Alors $\langle v|w \rangle = 0$. Donc $\langle f(v)|f(w) \rangle = 0$ c'est-à-dire
 $(u_1 + u_2|u_1 - u_2) = \|u_1\| - \|u_2\|,$
 ce qui montre $\|u_1\| = \|u_2\|$. On fait de même avec tous les vecteurs : $\|u_i\| = \lambda$ pour tout $i \in [1; n]$.
 Il ne reste plus qu'à montrer que
 $\|u(x)\|^2 = \left\| u \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i u_i \right\|^2 = \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda \|x\|^2.$
 Posons $g = (1/\alpha)f$ (si f est non nul; dans le cas contraire, c'est trivial). Alors g est une isométrie, donc $g \in O(E)$.

◆ **ISO.17** (**) TPE MP – 2001
 On note $\mathfrak{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients réels. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et A une application matricielle continue $A: I \rightarrow \mathfrak{A}_n(\mathbb{R})$. On considère une application $X: I \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation différentielle
 $X' = A \cdot X.$ On suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $X(t_0) \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
 $\forall t \in I \quad X(t) \in \text{SO}_n(\mathbb{R}).$

◆ [Rec01/endoorthog-r1.tex/bil-r:23] la continuité de X et du déterminant.
1^{er} méthode : considérer $\phi: t \mapsto {}^tX \cdot X$, et montrer que $\phi' = 0$. Puis utiliser **2^e méthode** : utiliser $\det \exp A = \exp(\text{tr} A)$.

◆ **ISO.18** (**) Mines MP – 2001
 Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\text{tr}(AU) \leq \text{tr} A$.

◆ [Rec01/endoorthog-r1.tex/bil-r:30] On prend une base orthonormée $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_n)$ de vecteurs colonnes
 Propres pour A .
 A est diagonalisable, $\text{tr} A = \sum \lambda_i$ avec $\lambda_i = {}^tB_i A B_i \geq 0$.
 De plus $\text{tr} AU = \sum_{i=1}^n {}^tB_i A U B_i = \sum \lambda_i {}^tB_i (U B_i)$ mais bien sûr ${}^tB_i U B_i \leq$
 $\|B_i\| \|U B_i\| \leq 1$ en vertu de Cauchy-Schwarz et du fait que c'est une isométrie. La positivité des λ_i fait le reste.
 On notera que l'inverse est vrai : si $\text{tr}(AU) \leq \text{tr}(A)$ pour tout $U \in O_n(\mathbb{R})$, alors $A \in S_n^+$ — c'est l'exercice **SYM.27** page 248.

◆ **ISO.19** CCP PC – 2001
 Soit A une matrice carrée d'ordre n . On suppose que A est orthogonale. Prouver (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz par exemple) que $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| \leq n.$

◆ [Rec01/endoorthog-r1.tex/bil-r:35] or on vérifie que $\|u\|^2 = n$.
 (Voir également **ISO.26** et **ISO.25**).
 En notant $u = (1, \dots, 1)$, la somme vaut
 $T = \langle u|f(u) \rangle \leq \|u\| \|f(u)\| \leq \|u\|^2,$

◆ **ISO.20** TPE MP – 2001
 Soient E un espace vectoriel euclidien, et p un projecteur de E . Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.

◆ [Rec01/endoorthog-r1.tex/bil-r:18] $\|a\| \leq \|x\|$. On en déduit $b = 0$ donc $x \in \text{Im } p$. □
 Le sens \implies est trivial.
 □ Soit $x \in [\text{Ker } p]^\perp$. Or $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ donc $x = a + b$. On a donc $\langle x|b \rangle = 0$ donc $\|x - b\|^2 = \|x\|^2 + \|b\|^2 = \|a\|^2$, mais $a = p(x)$ donc $\|a\| \leq \|x\|$. On a donc montré que $[\text{Ker } p]^\perp \subset \text{Im } p$, la dimension montre égalité. Donc p qui est un projecteur est un projecteur orthogonal.

◆ **ISO.21** CCP MP – 2001
 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^2 + \text{Id}_E = 0$.
 1) Montrer que f est un endomorphisme orthogonal.
 2) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ g^* = g^* \circ g$. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $(g - a \text{Id}_E)^2 + b^2 \text{Id}_E = 0$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels (V_1, \dots, V_r) stables par g et munis de bases \mathcal{B}_i tels que $\text{mat}_{\mathcal{B}_i} g|_{V_i} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ pour tout $i \in [1; r]$. Calculer $\det g$ et g^{-1} s'il existe.

◆ [Rec01/endoorthog-r1.tex/bil-r:38] **À FINIR !!!**
 1) f est annulé par $X^2 + 1$ donc n'admet pas de valeur propre réelle.

◆ **ISO.22** X-ESPCI PC – 2002
 Soit f une isométrie de E , espace euclidien de dimension n .
 1) Montrer que $f + {}^t f$ est diagonalisable.
 2) Montrer que $f = \bigoplus_i E_i$ avec $\dim E_1 = 1$ ou 2 et $f|_{E_i}$ une rotation ou $\pm \text{Id}$.

◆ [Rec02/endoorthog-r2.tex/bil-r2:25] On considère alors le supplémentaire de $\text{Vect}(x)$ sur lequel on prend toutes les restrictions, et on continue la récurrence.
 1) Cet endomorphisme est diagonalisable car il est autoadjoint.
 2) Le plus simple est sans doute une récurrence. On considère une valeur propre de $f + {}^t f$.
 - **1^{er} cas** : $\lambda \in \{-2, 2\}$. Par exemple, $\lambda = 2$. Alors $\|f(x) + {}^t f(x)\| = \|f(x)\| + \|{}^t f(x)\|$ ce qui montre que $f(x)$ et ${}^t f(x)$ sont colinéaires et de même direction, donc $f(x) = x$ (respectivement $f(x) = -x$).
 - **2^e cas** : $\lambda \in]-1; 1[$. Alors on vérifie que $f(x)$ n'est pas colinéaire à x (sinon ${}^t f(x)$ le serait aussi et on aurait un problème).
 Comme de surcroît $f^2(x) = \lambda f(x) - x$, le plan $\text{Vect}(x, f(x))$ est stable par f . La restriction de f à ce plan est alors une isométrie, en notant $\lambda = 2 \cos \theta$ on vérifie que c'est une rotation d'angle θ . On continue ensuite la récurrence.

◆ **ISO.23** Centrale PC – 2002
 On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que M soit une matrice de rotation est que a, b et c soient racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + k$ avec $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$.

◆ [Rec02/endoorthog-r2.tex/bil-r2:22] On reconnaît des polynômes symétriques, ce qui montre que a, b et c sont racine d'un polynôme du style
 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$
 $ab + bc + ca = 0$ (**)
 $X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + bc + ca)X - abc = X^3 - X^2 + \lambda.$

On écrit ensuite que $\det M = (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) = 1$,
 ce qui donne $a + b + c = 1.$ (*)
 Enfin, ce polynôme doit avoir toutes ses racines réelles, ce qui n'est possible, après étude, que si
 $\lambda \in \left[0; \frac{4}{27}\right].$

◆ **ISO.24** Centrale MP – 2002

On note (e_1, \dots, e_n) les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n .

- 1) Soit v un vecteur non nul de \mathbb{R}^n . On pose $P = \frac{v^t v}{v \cdot v}$. Que peut-on dire de P ? Interprétation géométrique? En déduire la matrice $H(v)$ de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à v .
- 2) Soit u un vecteur non nul de \mathbb{R}^n . Montrer qu'il existe un vecteur v de \mathbb{R}^n tel que $H(v)(u) \in \text{Vect}(e_1)$.
- 3) Application à une matrice.

◇ [Rec02/endoorthog-r2.tex/bil-r2:23]

◆ **ISO.25** CCP PC – 2002

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice orthogonale. On pose $L_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}$ pour tout $i \in [1; n]$ et $S = \sum_{i,j} a_{ij}$.

- 1) Montrer que $\sum_{i=1}^n L_i^2 = n$.
- 2) Montrer que $|S| \leq n$.
- 3) Peut-on avoir $|S| = n$?

◇ [Rec02/endoorthog-r2.tex/bil-r2:8]

Voir également Cf. **ISO.19** et **ISO.26**

1) 1^{re} méthode (bourrine) : on développe

$$\sum_i \left(\sum_k a_{ik} \right)^2 = \sum_i \sum_k \sum_\ell a_{ik} a_{i\ell}$$

or
$$\sum_i a_{ik} a_{i\ell} = \delta_{k\ell}$$

par orthogonalité de la matrice A , donc la somme vaut n .

2^e méthode (géométrique) : On note $L = {}^t(L_1, \dots, L_n)$, c'est-à-dire $L = AX$ où $X = {}^t(1, \dots, 1)$. Alors

$$\sum_{i=1}^n L_i^2 = \|L\|^2 = \|AX\|^2 = \|X\|^2 = n$$

par orthogonalité de A .

2) Notons $L = AX$ de sorte que les L_i sont les composantes de L . Alors

$$|(L|X)| \leq \sqrt{\|L\|_2} \sqrt{\|X\|}$$

c'est-à-dire

$$S \leq |(L|X)| \leq \sqrt{n} \sqrt{n}$$

3) Enfin, il suffit de prendre $A = I_n$.

◆ **ISO.26** CCP MP – 2002

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, notée $A = (a_{ij})$. Montrer que $\left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \leq n$.

◇ [Rec02/endoorthog-r2.tex/bil-r2:24]

(Cf. **ISO.19** et **ISO.25**) On pose $X = {}^t(1, 1, \dots, 1)$ et alors AX est un vecteur

colonne dont la i -ième composante vaut $\sum_{j=1}^n a_{ij}$. De plus $\|AX\|_2 = \|X\|_2 =$

\sqrt{n} . Alors la somme vérifie

$$T = \langle X|AX \rangle \leq \|X\| \|AX\| = \|X\|^2 = n.$$

◆ **ISO.27** Mines MP – 2003

Dans l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^3 , un endomorphisme est donné pas sa matrice dans la base canonique :

$$\text{mat}_{\text{can}}(u) = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il s'agit d'une matrice de rotation si et seulement si p, q, r sont solutions d'une équation de la forme

$$X^3 - X^2 + \lambda = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda \in \left[0; \frac{4}{27} \right].$$

◇ [Rec03/endoorthog-r3.tex/r3:134]

Le fait que u soit orthogonal donne les deux équations suivantes :

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1$$

$$pr + pq + qr = 0$$

De plus,

$$\det M = (p^2 + q^2 + r^2)(p + q + r) = 1,$$

d'où l'on déduit que

$$p + q + r = 1.$$

Alternativement, et de manière plus simple, on peut dire que le 3^e vecteur colonne est le produit vectoriel des deux premiers, ce qui donne $r = r^2 - qp$,

$p = p^2 - rq$ et $q = q^2 - rp$; en additionnant, on obtient encore

$$p + q + r = 1. \quad (*)$$

(**) On reconnaît des polynômes symétriques, ce qui montre que p, q et r sont racine d'un polynôme du style

$$X^3 - (p + q + r)X^2 + (pq + pr + qr)X - pqr = X^3 - X^2 + \lambda.$$

Enfin, ce polynôme doit avoir toutes ses racines réelles, ce qui n'est possible, après étude, que si

$$\lambda \in \left[0; \frac{4}{27} \right].$$

◆ **ISO.28 (Décomposition d'Iwasawa)** (**) INT MP – 2003

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O \in O(n)$ et $T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = OT$.

◇ [Rec03/endoorthog-r3.tex/r3:221]

obtenir B . Alors on a le schéma

$$\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}} f = \text{mat}_{\mathcal{E}, B}(\text{Id}) \cdot \text{mat}_{B, A}(\text{Id}) \cdot \text{mat}_{A, \mathcal{E}}(f)$$

On pose $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique, $A = \text{mat}_{\text{can}} f$, on pose $\mathcal{A} = f(\mathcal{E})$ qui est une base (f étant un automorphisme) et on Schmidte \mathcal{A} pour et donc $A = OT_n = OT$.

◆ **ISO.29** Navale MP – 2003

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $u \in O(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) u est involutif;
- (b) $\text{PoCa}(u)$ est scindé;
- (c) u est diagonalisable.

◇ [Rec03/endoorthog-r3.tex/r3:266]

– Montrons (a) \Rightarrow (b). Si u est involutif, cela veut dire que $u^2 = \text{Id}$ donc $(X - 1)(X + 1)$ annule u ; cela montre que u est diagonalisable, donc le polynôme caractéristique est scindé.
– Montrons (b) \Rightarrow (c). On peut bourriner et trigonaliser dans une base orthonormée, la normalisation des colonnes et le fait que les coefficients

diagonaux sont forcément dans le spectre de u (donc dans $\{-1, 1\}$) fait le reste.
– Montrons (c) \Rightarrow (a). Dans une base diagonalisante B , la matrice de u est de la forme $\text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$ puisque $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$. Cela montre que $u^2 = \text{Id}$.

◆ **ISO.30** (♣) CCP MP – 2003

Montrer que l'ensemble des endomorphismes orthogonaux forme un groupe.

◇ [Rec03/endoorthog-r3.tex/r3:375]

Scandale !

◆ **ISO.31** (**) Centrale MP – 2004

Montrer que tout endomorphisme orthogonal de l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^n se décompose en un produit d'au plus n symétries orthogonales hyperplanes.

INDICATION : Poser $k = n - \dim(u - \text{Id})$ et raisonner par récurrence sur k .

◇ [Rec04/endoorthog-r4.tex/r4:203]

◆ **ISO.32** (**) Mines MP – 2004

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension impaire $n \geq 3$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \text{Id}_E$, $f \neq \text{Id}_E$ et $f^* \circ f = f \circ f^*$. Montrer qu'il existe une base orthonormée \mathcal{B} dans laquelle la matrice de f est diagonale par bloc de la forme $\text{diag}(I_r, A, A, \dots, A)$ où $A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

◇ [Rec04/endoorthog-r4.tex/r4:234]

◆ **ISO.33** (**) Mines MP – 2004

On note $M = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{v}{u} & \frac{w}{u} \\ \frac{u}{v} & -\frac{1}{2} & \frac{w}{v} \\ \frac{u}{w} & \frac{v}{w} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer les valeurs propres de M . Est-elle diagonalisable?
- 2) À quelle(s) condition(s) M est-elle la matrice d'une isométrie?

◇ [Rec04/endoorthog-r4.tex/r4:140]

◆ **ISO.34** (*) Mines MP – 2004

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left| \sum_{i,j} M_{ij} \right| \leq n$.

◇ [Rec04/endoorthog-r4.tex/r4:160]

Notons U le vecteur colonne ${}^t(1, \dots, 1)$, alors

$$\left| \sum_{i,j} M_{ij} \right| = |(U|MU)| \leq \|U\|^2 = n.$$

◆ **ISO.35** Centrale PC – 2004
 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u^* \circ u = v^* \circ v$.
 1) Montrer que $\text{Ker}(u^* \circ u) = \text{Ker}(u)$ et $\text{rg}(u) = \text{rg}(v)$.
 2) Montrer qu'il existe $f \in \text{O}(E)$ tel que $v = f \circ u$.

◇ [Rec04/endoorthog-r4.tex/r4:21] ce qui montre que $\|u(x)\| = 0$ et donc $x \in \text{Ker}(u)$. □
 On en déduit donc $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^* \circ u) = \text{Ker}(v^* \circ v) = \text{Ker}(v)$ donc par la formule du rang, $\text{rg}(u) = \text{rg}(v)$.
 1) On a d'abord l'inclusion triviale $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^* \circ u)$.
 □ Soit $x \in \text{Ker}(u^* \circ u)$. Alors

$$0 = \langle x | u^* \circ u(x) \rangle = \text{bscalu}(x)u(x)$$

 2) **À FINIR !!!**

◆ **ISO.36** Mines PC – 2004
 On considère l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de \mathbb{R}^n .
 1) La demi-somme de deux matrices orthogonales est-elle orthogonale ?
 2) Soient Ω_1 et $\Omega_2 \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $\frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a + b = 1$, on a $a\Omega_1 + b\Omega_2 \in O_n(\mathbb{R})$.

◇ [Rec04/endoorthog-r4.tex/r4:98] **2) À FINIR !!!**
 1) Non : $\frac{1}{2}(I_n - I_n) = 0 \notin O_n(\mathbb{R})$.

◆ **ISO.37** (★) CCP PC – 2004
 Dans un espace euclidien E , on note la norme $\|\cdot\|$ et le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.
 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x | y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x) | f(y) \rangle = 0$.
 Prouvez qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que $\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \alpha \|x\|$.

◇ [Rec04/endoorthog-r4.tex/r4:410] pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
 (Cf. également les exercices **PRE.7** page 216 et **ISO.16** page 265.) Il ne reste plus qu'à montrer que
 On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. de E et $U = (u_1, \dots, u_n) = f(\mathcal{B})$ la base image.
 Alors (u_1, \dots, u_n) est une base orthogonale.
 Notons $\mu = \|e_1\|$ et $\lambda = \|e_2\|$.
 Posons maintenant $v = e_1 + e_2$ et $w = e_1 - e_2$. Alors $\langle v | w \rangle = 0$. Donc
 $\langle f(v) | f(w) \rangle = 0$ c'est-à-dire

$$\langle u_1 + u_2 | u_1 - u_2 \rangle = \|u_1\| - \|u_2\|,$$

 ce qui montre $\|u_1\| = \|u_2\|$. On fait de même avec tous les vecteurs : $\|u_i\| = \lambda$
Remarque Posons $g = (1/\alpha)f$ (si f est non nul ; dans le cas contraire, c'est trivial). Alors g est une isométrie, donc $g \in \text{O}(E)$.

◆ **ISO.38** (★) CCP MP – 2004
 Soient E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
 1) Montrer que si, pour tout $x, y \in E$, on a $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$, alors u est bijective.
 2) Montrer que l'ensemble des endomorphismes orthogonaux, muni de la loi « \circ », est un groupe.

◇ [Rec04/endoorthog-r4.tex/r4:161] Quel scandale !

◆ **ISO.39** (★) CCP PC – 2005
 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension ≥ 2 . Soit a un vecteur unitaire puis $\beta = (a = e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée.
 On considère H un hyperplan de E ne contenant pas a et on définit la projection p sur $\text{Vect}(a)$ parallèlement à H .
 1. Montrer que $\sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2 = 1$ si p est orthogonal.
 2. (a) Montrer que si $\sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2 = 1$ alors pour tout $x \in E$, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
 (b) Montrer qu'alors p est orthogonal.

◇ [Rec05/endoorthog-r5.tex/r5:503] Grand classique

◆ **ISO.40** (★) CCP PC – 2005
 Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soit (i, j, k) une base orthonormée de E . Écrire la matrice, dans cette base, de la rotation d'angle $2\pi/3$ et d'axe dirigé selon $i + j + k$.

◇ [Rec05/endoorthog-r5.tex/r5:85] (★) CCP PC – 2005
 ◆ **ISO.41**
 Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a & -2 & a+1 \\ a+1 & -a & -2 \\ 2 & a+1 & a \end{pmatrix}$. Déterminer a pour que M appartienne à $\text{SO}(3)$.

◇ [Rec05/endoorthog-r5.tex/r5:141]

Géométrie euclidienne du plan et de l'espace

◆ **ISO.42**
 Reconnaître la transformation géométrique dont la matrice représentative dans une base orthonormée d'un espace euclidien est

$$M = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

◇ [Divers/geomeucexo.tex/pre:63] On note que M est orthogonale. De plus, donc $\text{rg}(M - I_3) = 1$ donc M est une symétrie orthogonale par rapport à un plan, d'équation $3x - 2y + z = 0$.

$$M - I_3 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

◆ **ISO.43**
 Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , quel est l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$?
 INDICATION : On calculera la matrice de f^2 .

◇ [Divers/geomeucexo.tex/pre:90] L'axe est $\text{Ker}(g - \text{Id})$ soit la droite $\begin{cases} z = x, \\ y = 2x. \end{cases}$
 On vérifie que $A^2 = 9I_3$. Ainsi, en posant $g = \frac{1}{3}f$, on a $g \circ g = \text{Id}$ donc g est un automorphisme orthogonal involutif. De plus, $\det g = 1$ donc g est un demi-tour (un rotation d'angle π).
 Quant à f , c'est donc la composée de ce demi-tour et d'une homothétie de rapport 3.

◆ **ISO.44**
 Soit u un vecteur de \mathbb{R}^3 . On définit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$x \mapsto x \wedge u.$$

 1) f est-elle injective ? 2) Montrer que f^3 et f sont proportionnelles.

◇ [Divers/geomeucexo.tex/pre:91] et $f^3(x) = -\|u\|^2 x \wedge u$
 1) On a $\text{Ker } f = \text{Vect}(u)$.
 2) On utilise la formule du double produit vectoriel :

$$f^2(x) = (x \wedge u) \wedge u = (x \cdot u)u - (u \cdot u)x$$

 ce qui montre $f^3 = -\|u\|^2 f$.

◆ **ISO.45** (★)
 Déterminer la nature géométrique de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice représentative dans la base canonique est

$$A = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

◇ [Divers/geomeucexo.tex/pre:33] On reconnaît une matrice orthogonale. Comme elle est de déterminant -1 , c'est la composée d'une symétrie centrale et d'une rotation.
 On calcule d'abord $\text{tr } A = -1 + 2 \cos \theta$ ce qui donne $\cos \theta = \frac{4}{5}$.
 On calcule aussi l'axe de la rotation, qui est $\text{Ker } A + I = \text{Vect} \left(\frac{1}{2} \right)$.

◆ **ISO.46**
 E est l'espace \mathbb{R}^3 euclidien. Soit u un vecteur unitaire de E . On pose, pour tout $x \in E$:

$$f(x) = x + \langle x | u \rangle u + \sqrt{3}x \wedge u.$$

 Reconnaître f .

◇ [Divers/geomeuco.tex/pre:96] en écrivant la matrice dans une b.o.n. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.
C'est le double d'une rotation d'axe \mathbf{u} et d'angle $\pi/3$ (on le voit par exemple

◆ **ISO.47 (Homographies laissant un disque invariant)**

Trouver le groupe des homographies — c'est-à-dire des applications de \mathbb{C} dans \mathbb{C} du type $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ laissant le cercle unité invariant.

Déterminer le groupe des homographies laissant invariant le disque unité

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}.$$

◇ [Divers/geomeuco.tex/div:19] On caractérise d'abord le fait que le cercle unité soit invariant. Si a est non nul, on peut supposer sans restriction $a = 1$. On écrit alors $b = B e^{i\beta}$, $c = C e^{i\gamma}$ et $d = D e^{i\delta}$. Pour tout $z = e^{i\theta}$, on doit avoir $|f(z)| = 1$ ce qui donne

$$|1 + B e^{i(\beta-\theta)}|^2 = |C + D e^{i(\delta-\gamma-\theta)}|^2$$

et donc, après développement en partie réelle carrée et imaginaire carrée :

$$1 + B^2 + 2B \cos(\beta - \theta) = C^2 + D^2 + 2CD \cos(\delta - \gamma - \theta)$$

Cela nous donne donc par liberté de la famille $(\theta \mapsto 1, \theta \mapsto \cos \theta)$:

$$1 + B^2 = C^2 + D^2 \quad B = CD \quad \beta = \delta - \gamma.$$

On devrait trouver $z \mapsto e^{i\alpha} \frac{z+b}{bz+1}$, où $|b| < 1$ pour garder le disque invariant, et $|b| > 1$ pour échanger l'intérieur et l'extérieur.

À FINIR !!!

◆ **ISO.48** (*) X PC – 2005

Soit $\mathbf{n} = (a, b, c)$ un vecteur unitaire de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Caractériser l'endomorphisme associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

◇ [Rec00/geomeuc-r0.tex/r0:39] sur \mathbf{n} : en effet, $J = \mathbf{n}^t \mathbf{n}$ et donc $A\mathbf{x} = \langle \mathbf{n} | \mathbf{x} \rangle \mathbf{n}$. On remarque que $A = I - J$ où $J_{ij} = (x_i x_j)$, en notant $(a, b, c) = (x_1, x_2, x_3)$; or cette dernière matrice est la matrice de projection orthogonale sur $\text{Vect}(\mathbf{n})^\perp$. En conséquence de quoi, la matrice A est la matrice de projection orthogonale sur $\text{Vect}(\mathbf{n})^\perp$.

◆ **ISO.49** CCP PC – 2001

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice représentative dans la base canonique est $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une isométrie dont on précisera les caractéristiques.

◇ [Rec01/geomeuc-r1.tex/bil-r:8] $\text{tr } A = \frac{1}{3} = 1 + 2 \cos \theta$ donc $\theta = \pm \text{Arc cos}(-1/3)$. Enfin, l'axe est $\mathcal{D} = \text{Vect}(1, -1, 0)$. Clairement $f \in O(3)$ et $\det A = 1$ dont c'est une rotation. De plus

◆ **ISO.50** Centrale MP – 2001

Soit \mathcal{B} une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que f est le produit de deux transformations simples que l'on précisera entièrement.

◇ [Rec01/geomeuc-r1.tex/bil-r:28] f est une isométrie négative, donc le produit d'une symétrie centrale par une isométrie positive, en l'occurrence (puisque $\text{tr } f = 1 + 2 \cos \theta = 0$) une rotation de $2\pi/3$. D'ailleurs tout cela se voit bien avec un dessin.

◆ **ISO.51** Mines MP – 2002

Étudier la transformation ayant pour matrice

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

◇ [Rec02/geomeuc-r2.tex/bil-r:2:35]

◆ **ISO.52** Centrale MP – 2003

Soit (x, y) un point du plan. Combien peut-on y faire passer de normales à la parabole d'équation $y^2 = 2px$?

◇ [Rec03/geomeuc-r3.tex/r3:309]

◆ **ISO.53** Navale PC – 2003

On pose $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ -2 & 1 & b \\ -1 & 2 & c \end{pmatrix}$. Trouver a, b, c pour que M soit une matrice de rotation. Déterminer alors son axe et son angle.

◇ [Rec03/geomeuc-r3.tex/r3:101] Si on choisit un vecteur orthogonal à \mathbf{k} , par exemple $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors le signe de θ est donné par le signe de

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et } 1 + 2 \cos \theta = \text{tr } A = \frac{5}{3} \text{ donc } \theta =$$

$\pm \text{Arc cos} \left(\frac{1}{3} \right)$. L'axe est porté par le vecteur

$$\det(\mathbf{u}, f(\mathbf{u}), \mathbf{k}) = 2\sqrt{2},$$

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

ce qui montre que l'on doit prendre, pour aller avec l'orientation donnée par \mathbf{k} l'angle $\theta = + \text{Arc cos} \left(\frac{1}{3} \right)$.

◆ **ISO.54** CCP PC – 2003

On considère la courbe d'équation $\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = at^2. \end{cases}$

Montrer que les normales à la courbe en trois points sont concourantes si et seulement si l'isobarycentre de ces points se situe sur l'axe de symétrie de la parabole.

◇ [Rec03/geomeuc-r3.tex/r3:379]

◆ **ISO.55** CCP PC – 2003

Calculer la distance du point $A(1, -1, 2)$ au plan d'équation $x + y + z = 1$.

◇ [Rec03/geomeuc-r3.tex/r3:103]

◆ **ISO.56** (*) CCP MP – 2003

Nature et éléments caractéristiques de l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé à la matrice $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

◇ [Rec03/geomeuc-r3.tex/r3:319] rotation. Son axe est $\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Son angle est donné par $\text{tr}(A) = 1 = 1 + 2 \cos \theta$. C'est une matrice orthogonale de déterminant +1, c'est donc une matrice de donc $\cos \theta = 0$ donc $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$.

◆ **ISO.57** (***) X MP – 2004

Soit (ABCD) un tétraèdre de l'espace \mathcal{E} .

- 1) Montrer que si deux couples d'arêtes opposées sont tels que ces arêtes sont orthogonales, le dernier couple vérifie également cette propriété.
- 2) Montrer que, dans ce cas, les six milieux des arêtes sont cosphériques. Réciproque ?
- 3) Montrer que, toujours dans ce cas, la projection de A sur BC (qui est aussi celle de D) est également sur cette sphère.
- 4) Interpréter dans le plan le cas où ABCD sont coplanaires. Comment s'appelle alors ce cercle ? Pourquoi les 12 points (6 milieux et leurs projections) se réduisent-ils alors à 9 ?

◇ [Rec04/geomeuc-r4.tex/r4:200]

◆ **ISO.58** (*) Centrale PC – 2004

Soit (u_1, \dots, u_n) une famille de n réels tels que $\sum_{k=1}^n u_k^2 = 1$. On note A la matrice de coefficients $a_{ij} = u_i u_j$.

- 1) Montrer que $M = 2A - I_n$ est orthogonale.
- 2) On note f l'endomorphisme représenté par M dans la base canonique. Donner une représentation géométrique de f .

◇ [Rec04/geomeuc-r4.tex/r4:80] Or ${}^t A = A$ et ${}^t A A = A^2 = A$, donc ${}^t M M = I_n$: M est orthogonale.
1) On note $X = {}^t(u_1, \dots, u_n)$. Alors $A = X \cdot {}^t X$, avec ${}^t X \cdot X = \text{tr}(A) = 1$. On en déduit que
2) f est une isométrie. Puisque A représente la projection orthogonale sur $\text{Vect}(x)$, on en déduit que M est une symétrie axiale d'axe $\text{Vect}(x)$ (faire un dessin!).

$${}^t M M = 4{}^t A A - 2A - 2{}^t A + I_n.$$

◆ **ISO.59** (★) Mines MP – 2004
 On considère le cercle unité \mathcal{C} de centre O du plan muni d'un repère orthonormé $(O; i, j)$. Soit M un point du cercle. On note P le projeté orthogonal de M sur l'axe Ox, Q le projeté sur Oy et M' le symétrique de M par rapport à la droite (PQ). Trouver le lieu de M' lorsque M décrit \mathcal{C} .

◇ [Rec04/geomeuc-r4.tex/r4:226]

◆ **ISO.60** (▲) TPE PC – 2004
 On travaille dans \mathbb{R}^3 . On note (\mathcal{P}) le plan d'équation $x + 2y + z = 0$. On note (\mathcal{D}) la droite d'équation

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Trouver le symétrique (\mathcal{D}') de (\mathcal{D}) par (\mathcal{P}) .

◇ [Rec04/geomeuc-r4.tex/r4:51] Prendre des vecteurs normaux aux deux plans et calculer leur symétrique.

◆ **ISO.61** (★★) TPE PC – 2004
 On considère l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^3 . Soit R une rotation d'angle θ et de vecteur directeur unitaire ω . Soit $x \in E$.

- 1) Montrer que $R(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)(\omega \wedge x) + (1 - \cos(\theta)) \langle \omega | x \rangle \omega$.
- 2) On pose $u_0 = x$ et on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = \omega \wedge u_n$. Calculer u_{2n} et u_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) On pose $v_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\theta^k}{k!} u_k$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x)$.

◇ [Rec04/geomeuc-r4.tex/r4:125]

◆ **ISO.62** (★★) INT MP – 2004
 Soit Ω un point du plan affine \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé, de coordonnées (a, b) dans ce repère. Soit Δ_1 une droite du plan passant par Ω ; notons Δ_2 la droite passant par Ω et orthogonale à Δ_1 . On note enfin A et B les intersections de Δ_1 avec l'hyperbole équilatère d'équation $xy = 1$, et C et D les intersections de Δ_2 avec cette même hyperbole (on suppose que Ω et Δ_1 sont choisis de telle manière que A, B, C et D existent).
 Montrer que $\overline{\Omega A} \cdot \overline{\Omega B} = -\overline{\Omega C} \cdot \overline{\Omega D}$.

◇ [Rec04/geomeuc-r4.tex/r4:175]

◆ **ISO.63** (★★) CCP PC – 2004
 Notons \mathcal{H} l'hyperbole équilatère d'équation $xy = 1$. Soit un triangle dont les sommets appartiennent à \mathcal{H} . Montrez que l'orthocentre du triangle appartient à \mathcal{H} .

◇ [Rec04/geomeuc-r4.tex/r4:429]
 Notons $A(a, 1/a)$, $B(b, 1/b)$ et $C(1/c)$ les trois points. Notons $H(x, y)$ l'orthocentre.
 L'équation $\overline{CH} \cdot \overline{AB} = 0$ donne, après simplification par $(b - a)$, l'équation

$$ab(x - c) - y + \frac{1}{c} = 0.$$

La résolution (par substitution ou par combinaisons linéaires) donne

$$bc(x - a) - y + \frac{1}{a} = 0.$$

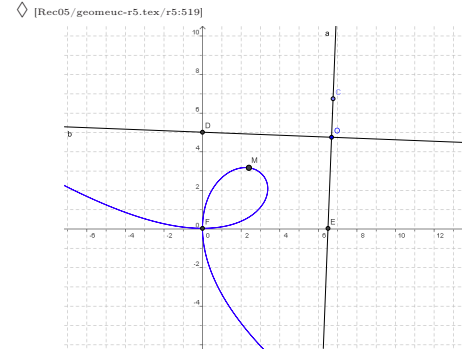
$$ab(x - c) - y + \frac{1}{c} = 0 \quad \text{et} \quad y = -abc \quad \text{et} \quad x = -\frac{1}{abc}$$

On effectue le même travail avec $\overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0$ ce qui donne ce qui montre que $H \in \mathcal{H}$.

◆ **ISO.64** (★) Mines PC – 2005
 Soit \mathcal{C} un cercle du plan affine. Soit P un point sur le cercle ou à l'intérieur du cercle. AB et CD sont deux cordes orthogonales du cercle passant par P. On pose $L = AB + CD$. Trouver la valeur minimale et maximale de L (si P $\in \mathcal{C}$, une corde sera un diamètre du cercle et l'autre sera réduite à un point).

◇ [Rec05/geomeuc-r5.tex/r5:513]

◆ **ISO.65** (★) Centrale PC – 2005
 (Avec Maple)
 (à partir d'un dessin).
 Soit $A\left(\frac{1}{2}\right)$ un point du plan. Un repère orthonormé tournant d'origine A coupe les axes (Ox) et (Oy) en M et N. Etudier le lieu géométrique décrit par P, projeté de l'origine O sur la droite (MN).



A(1, 1) pour simplifier.

```

axe1 := -sin(t)*x+cos(t)*y = -sin(t) + cos(t);
axe2 := cos(t)*x+sin(t)*y = cos(t) + sin(t);
interOx:=solve({axe1,y},{x,y});
interOy := {y = (cos(t)+sin(t))/sin(t), x = 0};
droite := x/(sin(t)-cos(t))*sin(t)
          + y/(cos(t)+sin(t))*sin(t) = 1;
sysproj:=fdroite,
y/((sin(t)-cos(t))/sin(t))-x/((cos(t)+sin(t))/sin(t));
    
```

$$\text{sysproj} := \left\{ \begin{aligned} & \frac{y \sin(t)}{\sin(t) - \cos(t)} - \frac{x \sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)}, \\ & \frac{x \sin(t)}{\sin(t) - \cos(t)} + \frac{y \sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} = 1 \end{aligned} \right\}$$

P:=solve(sysproj, {x,y});

$$P := \left\{ y = \frac{1}{2} \frac{-\tan(t) - \tan(t)^2 + \tan(t)^3 + 1}{\tan(t)(\tan(t)^2 + 1)}, x = \frac{1}{2} \frac{(\tan(t)^2 - 1)(1 + \tan(t))}{\tan(t)(\tan(t)^2 + 1)} \right\}$$

◆ **ISO.66** (▲) Centrale PC – 2005
 $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Soit $a \in E$, $a \neq 0$. Montrer que tout vecteur de E est entièrement déterminé par la donnée de $\langle a | x \rangle$ et de $a \wedge x$.

◇ [Rec05/geomeuc-r5.tex/r5:106] ce qui permet donc de reconstruire x.
 Quitte à rajouter un facteur multiplicatif, on suppose que $\|a\| = 1$, et on complète en une base (a, b, c) orthonormée. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$, alors

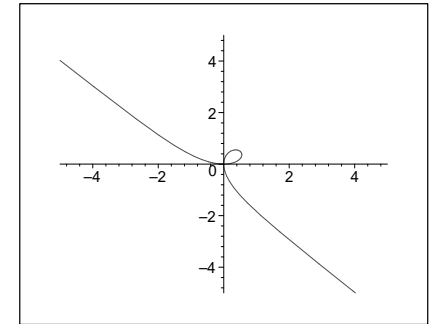
$$\langle a | x \rangle = x_1 \quad \text{et} \quad a \wedge x = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

◆ **ISO.67** (★) Centrale PC – 2005
 Soit C un cercle de centre O. Soient D et Δ deux droites orthogonales passant par O. Soit M \in C. Notons P le projeté orthogonal de M sur D, et Q le projeté orthogonal de M sur Δ . Enfin, notons A le projeté orthogonal de M sur la droite (PQ). Déterminer le lieu des points A.

◇ [Rec05/geomeuc-r5.tex/r5:135]

```

assign(P);
plot([x,y,t=0.01..Pi-0.01],-5..5,-5..5);
    
```



```

simp:=subs(tan(t)=sin(t)/cos(t), [x,y]);
simp:=simplify(simp);
simp := -1/2 * (2*cos(t)^3 + 2*sin(t)*cos(t)^2 - sin(t) - cos(t)) / sin(t)
        - 1/2 * (2*sin(t)*cos(t)^2 - 2*cos(t)^3 - sin(t) + cos(t)) / sin(t)
    
```

```

combine(2*cos(t)^3-cos(t), trig) ;
1/2*cos(t) + 1/2*cos(3*t)
x:=-1/2*(cos(2*t)+(1/2*cos(t)+1/2*cos(3*t))/sin(t));
y:=-1/2*(cos(2*t)-(1/2*cos(t)+1/2*cos(3*t))/sin(t));
    
```

Espaces hermitiens

♦ HER.1 (★★★)
 On note $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{C})$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0; 1]$.
 Si $f, g \in E$, on pose

$$\langle f | g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{f(a_n)} g(a_n)}{2^n}.$$

1) À quelle condition sur la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit-on ainsi un produit scalaire ?
 2) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ et $\{b_n; n \in \mathbb{N}\}$ sont distincts. Montrer que les normes correspondantes sont non équivalentes.
 3) Montrer que, quel que soit le choix de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, l'espace vectoriel E n'est pas complet.

◇ [Divers/hermitienexo.tex/pre:103]

par morceaux valant 1 en a_N , et 0 en dehors d'un voisinage de a_N ne rencontrant aucun de ces points-là. Il est immédiat de vérifier que

- 1) $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ soit être dense dans $[0; 1]$.
 - 2) On peut supposer, quitte à intervenir les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qu'il existe un élément, que nous noterons a_N , n'appartenant pas à $\{b_n; n \in \mathbb{N}\}$. On construit maintenant une suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $\|f_p\|_b \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ mais $\|f_p\|_a$ ne tend pas vers 0 quand $p \rightarrow \infty$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$. On sait que $\sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{p-1}}$. De plus, l'ensemble $\{b_0, \dots, b_p\}$ ne rencontre pas a_N . On fabrique une fonction f_p affine

$$\|f_p\|_b \leq \frac{1}{2^{p-1}} \quad \text{mais} \quad \|f_p\|_a \geq \frac{1}{2^N}. \quad \square$$

3) Si les $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont distincts (se ramener à ce cas...), on choisit une fonction f_n valant alternativement 1 et -1 en a_0, \dots, a_n et n'importe quoi en tous les autres. On vérifie que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy mais ne converge pas, car sa limite vérifierait $f^2 = 1$ et serait continue, donc $f = \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ ce qui est en contradiction avec la construction.

♦ HER.2 (★★★)
 L'espace ℓ^2 des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$, muni du produit scalaire

$$\langle a | b \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} b_n$$

est complet.

◇ [Divers/hermitienexo.tex/pre:104]

Le fait que le produit donné ci-dessus soit bien un produit hermitien est immédiat. On note ensuite que ℓ^2 est bien un espace vectoriel, grâce à l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il faut donc prouver que l'espace ℓ^2 est complet pour la norme associée, que nous noterons $\|\cdot\|_2$.

Soit $(u^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans ℓ^2 . Nous voulons montrer qu'elle converge dans ℓ^2 . La démonstration se fait en trois étapes : on trouve un candidat u pour la limite de $(u^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$, on montre que ce candidat est bien dans ℓ^2 , puis on démontre la convergence de $(u^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ vers u .

• La suite $(u^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ étant de Cauchy, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(u^{(p)}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que

$$\sum_n |u_n^{(p)}|^2 < +\infty.$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a

$$|u_n^{(p)} - u_n^{(q)}| \leq \|u^{(p)} - u^{(q)}\|^{1/2} \quad \text{pour tous } p, q \in \mathbb{N},$$

ce qui montre que $(u_n^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{C} , et qu'elle converge donc puisque \mathbb{C} est complet ; on peut alors définir

$$u_n \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} u_n^{(p)}.$$

Ceci étant fait pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela nous définit un candidat $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme limite putative de $(u^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$.

• La suite $(u^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$, comme toute suite de Cauchy, est bornée dans ℓ^2 . On peut donc trouver un réel $A > 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|u^{(p)}\|_2 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n^{(p)}|^2 \leq A.$$

Si l'on se fixe un entier $N \in \mathbb{N}$, on a donc notamment

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^N |u_n^{(p)}|^2 \leq \|u^{(p)}\|_2 \leq A,$$

d'où, en passant à la limite $[p \rightarrow \infty]$, qui est licite puisque la somme comprend un nombre fini et fixé de termes :

$$\sum_{n=0}^N \left| \lim_{p \rightarrow \infty} u_n^{(p)} \right|^2 = \sum_{n=0}^N |u_n|^2 \leq A.$$

Ceci étant vrai pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on en déduit que $u \in \ell^2$ et que $\|u\|_2 \leq A$.

• Il reste à montrer que $\|u^{(p)} - u\|_2 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$.

□ Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $p, q \geq N$, $\|u^{(p)} - u^{(q)}\|_2 \leq \varepsilon$. Fixons un entier $p \geq N$. Alors pour tout $q \geq p$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^k |u_n^{(p)} - u_n^{(q)}|^2 \leq \|u^{(p)} - u^{(q)}\|_2 \leq \varepsilon.$$

On garde k fixé et on passe à la limite $[q \rightarrow \infty]$, ce qui nous donne

$$\sum_{n=0}^k |u_n^{(p)} - u_n|^2 \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, et puisque $u^{(p)} - u \in \ell^2$ d'après le point précédent, on peut prendre la limite $[k \rightarrow \infty]$, ce qui nous donne $\|u^{(p)} - u\|_2 \leq \varepsilon$. □

On a donc bien montré $\|u^{(p)} - u\|_2 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$, ce qui achève la démonstration.

♦ HER.3 (★★)
 Soit E un espace hermitien de dimension $2 \leq \dim E < +\infty$. On note f l'application qui, à tout endomorphisme u hermitien associe $\min Sp(u)$.
 Montrer que f est u-continue mais non différentiable.

◇ [Divers/hermitienexo.tex/pre:106]

On travaillera aussi bien sur l'espace des matrices hermitiennes, et on le munit de la norme $\|A\| = n \max |a_{ij}|$.

Si A est hermitienne, on note que $f(A) = \inf_{\|X\|=1} X^*AX$, où la norme sur les

vecteurs colonne est la norme hermitienne $\|X\| = \sqrt{|x_i|^2}$.

Pour tout $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on a par ailleurs

$$X^*AX = \sum_{i,j} a_{ij} \overline{x_i} x_j$$

$$\|X^*AX\| \leq \frac{\|A\|}{n} \sum_{i,j} |x_i| |x_j| \leq \|A\|$$

en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (prendre le produit scalaire de X avec $(1, \dots, 1)$), plus petit que \sqrt{n} .

□ Soit $\varepsilon > 0$.

On suppose que $\|A - A'\| \leq \varepsilon$. On note u et u' les endomorphismes hermitiens associés, et $\lambda = f(u)$, $\lambda' = f(u')$, alors

$$|X^*AX - X^*A'X| = |X^*(A - A')X| \leq \|A - A'\| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que, pour tout $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ on a

$$\begin{cases} X^*AX - \varepsilon \leq X^*A'X \\ X^*A'X - \varepsilon \leq X^*AX \end{cases}$$

donc, en passant à la borne inférieure dans les membres de gauche

$$\begin{cases} \lambda - \varepsilon \leq X^*A'X \\ \lambda' - \varepsilon \leq X^*AX \end{cases}$$

donc, en passant à la borne inférieure dans les membres de droite

$$\begin{cases} \lambda - \varepsilon \leq \lambda' \\ \lambda' - \varepsilon \leq \lambda \end{cases}$$

et donc $|f(u) - f(u')| \leq \varepsilon$.

La fonction f est donc 1-lipschitzienne, donc u-continue. La propriété « être lipschitzien » ou « être u-continu » ne dépend pas de la norme équivalente choisie.

En revanche, en prenant l'exemple (généralisable par incrustation aux dimensions supérieures)

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix},$$

on calcule aisément que $f(A) = -|t|$, ce qui n'est évidemment pas différentiable...

♦ HER.4 (Produit de Schur) (★★★)
 Soit E un espace hermitien. Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, on pose

$$\langle u, v \rangle = \text{tr}(u^* \circ v).$$

1) Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme hermitienne définie positive. On notera alors $N(u) = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.
 2) Montrer que $N(u \circ v) \leq N(u)N(v)$. Montrer qu'il n'y a pas égalité en général.
 3) Si p est un endomorphisme unitaire, montrer que $N(p^{-1}up) = N(u)$.
 4) En déduire que, si A est une matrice hermitienne, alors en notant $\mu(\lambda)$ la multiplicité des valeurs propres de u , montrer que

$$\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \mu(\lambda) |\lambda|^2.$$

5) Est-il possible de trouver une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que

$$Nu = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| ?$$

◇ [Divers/hermitienexo.tex/pre:107]

1) T.

2) On peut écrire, en passant aux matrices représentatives dans une b.o.n. :

$$N^2(u \circ v) = \sum_{i,j} |c_{ij}|^2$$

où $c_{ij} = {}^t L_i \cdot \Gamma_j$, où L_i représente une ligne de A et Γ_j une colonne de B . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a alors

$$\begin{aligned} N^2(u \circ v) &\leq \sum_{i,j} \|L_i\|^2 \|\Gamma_j\|^2 \\ &\leq \sum_i \|L_i\|^2 \sum_j \|\Gamma_j\|^2 \\ &\leq N^2(u) N^2(v). \end{aligned}$$

3) $N^2(P^{-1}AP) = \text{tr}((P^{-1}AP)^*(P^{-1}AP)) = \text{tr}(A^*A) = N^2(A)$.

4) On diagonalise unitairement A .

5) Non car $N(\text{id}) = n$ et non 1.

◆ **HER.5 (Théorème de Fischer-Courant)** (★★★)

Soient E un espace hermitien, de dimension n , et $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. On note $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de u . L'ensemble des sous-espaces vectoriels de E est noté \mathcal{S} . Enfin, pour tout $x \in E$, on note

$$R(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\langle u(x)|x \rangle}{\|x\|^2}.$$

Montrer que :

$$\forall k \in [1; n] \quad \lambda_k = \sup_{\substack{F \in \mathcal{S} \\ \dim F = k}} \left[\inf_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} R(x) \right]$$

◇ [Divers/hermitienexo.tex/pre:16] Notons $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base spectrale de u , avec $u(e_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in [1; n]$. Soit $k \in [1; n]$. Posons $\mathcal{F}_k = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$. Pour tout $x \in \mathcal{F}_k$, on a $\lambda_k \leq R(x) \leq \lambda_1$. Puisque $R(e_k) = \lambda_k$, on en déduit

$$\inf_{x \in \mathcal{F}_k} R(x) = \lambda_k \quad F \cap G \neq \{0\}.$$

et donc

$$\sup_{\substack{F \in \mathcal{S} \\ \dim F = k}} \left[\inf_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} R(x) \right] \geq \lambda_k.$$

► **Supposons** $\sup_{\substack{F \in \mathcal{S} \\ \dim F = k}} \left[\inf_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} R(x) \right] > \lambda_k$. Alors il existe un espace vectoriel $F \in \mathcal{S}$ tel que $\inf_{x \in F} R(x) > \lambda_k$. Posons $G = \langle e_n, \dots, e_k \rangle$, alors $\dim G = n - k + 1$. Notamment $\dim F + \dim G > n$ donc $F \cap G \neq \{0\}$.

Soit donc $x \in F \cap G, x \neq 0$. D'après la formule de Rayleigh (exercice **SYM.14**), puisque $x \in G$ on a $\lambda_n \leq R(x) \leq \lambda_k$, mais comme $x \in F$ on a aussi $R(x) > \lambda_k$: **contradiction**. ◀

◆ **HER.6 (Application du théorème de Fischer-Courant)** (★★)

Soit E hermitien de dimension n , soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoints. On note $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ les éléments de $\text{Sp } u$ et $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$ ceux de $\text{Sp } v$. Montrer que, pour tout $k \in [1; n]$, on a $|\lambda_k - \mu_k| \leq \|u - v\|$.

◇ [Divers/hermitienexo.tex/pre:85] Soit $k \in [1; n]$. Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension k , alors

$$\inf_{x \in F} R_u(x) \leq \inf_{x \in F} R_v(x) + \|u - v\|.$$

On peut passer à la borne supérieure sur tous les sous-espace vectoriel de dimension k et on obtient, grâce au théorème de Fischer-Courant (exercice **HER.5**) :

$$\lambda_k \leq \mu_k + \|u - v\|.$$

On montre exactement de la même façon l'inégalité $\mu_k \leq \lambda_k + \|u - v\|$, ce qui achève la démonstration.

Donc

$$\langle u(x)|x \rangle \leq \langle v(x)|x \rangle + \|u - v\| \cdot \|x\|^2$$

soit

$$R_u(x) \leq R_v(x) + \|u - v\|,$$

où R_u et R_v sont bien sûr les quotients de Rayleigh associés à u et v .

◆ **HER.7 (Application du théorème de Fischer-Courant)** (★★)

Soit E un espace hermitien de dimension n . Soit f une forme quadratique. Soit H un hyperplan de E . On note q_1 la restriction de q à H . Soient f et f_1 les endomorphismes associés aux formes q et q_1 . Montrer que le spectre de f sépare celui de f_1 , c'est-à-dire

$$\text{si } \begin{cases} \text{Sp } f : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \\ \text{Sp } f_1 : \lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda'_{n-1}, \end{cases} \text{ alors } \lambda_1 \geq \lambda'_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda'_{n-1} \geq \lambda_n.$$

◇ [Divers/hermitienexo.tex/pre:86] On a (Fischer-Courant)

$$\lambda_k = \sup_{\dim F = k} \left[\inf_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{q(x)}{\|x\|^2} \right] \text{ et } \lambda'_k = \sup_{\substack{F \subset H \\ \dim F = k}} \left[\inf_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{q_1(x)}{\|x\|^2} \right]$$

ce qui donne immédiatement $\lambda_k \geq \lambda'_k$.

On a de plus

$$\lambda_{k+1} = \sup_{\dim F = k+1} \left[\inf_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{q(x)}{\|x\|^2} \right]$$

or si $\dim F = k + 1$ et $F \not\subset H$, alors $F \cap H$ est de dimension k , et « $\inf_{x \in F} \leq \inf_{x \in F \cap H}$ », ce qui prouve finalement que $\lambda_{k+1} \leq \lambda'_k$.

◆ **HER.8 ($\mathcal{L}(E) = U(E) + U(E) + U(E) + U(E)$)** (★★) Centrale MP

Soit E un espace hermitien. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

On note $U(E)$ le groupe des endomorphismes unitaires de E . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

(a) u est autoadjoint et $\|u\| \leq 1$;

(b) il existe $h \in U(E)$ tel que $u = \frac{1}{2}(h + h^*)$.

En déduire que tout endomorphisme s'écrit comme combinaison linéaire de quatre endomorphismes unitaires.

◇ [Divers/hermitienexo.tex/pre:108] (b) \Rightarrow (a) : tout automorphisme unitaire est trivialement de norme 1, donc $\|u\| \leq \frac{1}{2}(\|h\| + \|h^*\|) = 1$. De plus, u est trivialement autoadjoint.

(a) \Rightarrow (b) : soit u tel que $u = u^*$ et $\|u\| = 1$. On diagonalise u dans une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) , ce qui nous donne une matrice $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

De plus, pour tout $k \in [1; n]$, on a

$$\|u(e_k)\| = |\lambda_k| \leq \|u\| \cdot \|e_k\| = \|u\| \leq 1,$$

ce qui montre que tous les λ_k sont dans $[-1; 1]$. On peut donc écrire

$$\lambda_k = \cos \theta_k.$$

On note alors h l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base (e_1, \dots, e_n) est $\text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$. Cette matrice est unitaire et la base (e_1, \dots, e_n) est orthonormée, ce qui montre que h est unitaire, et $u = \frac{1}{2}(h + h^*) = \frac{1}{2}(h + h^{-1})$. Enfin, on écrit que $f = h + ik$ avec $h = \frac{1}{2}(f + f^*)$ et $k = \frac{1}{2i}(f - f^*)$, où h et k sont hermitiens. On applique le résultat précédent à $h/\|h\|$ et $k/\|k\|$.

◆ **HER.9** S' Cyr MP – 2001

Soit E un espace vectoriel hermitien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) Que peut-on dire des valeurs propres de $u^* \circ u$?
- 2) Soit λ une valeur propre de u . Montrer que $\alpha \leq |\lambda|^2 \leq \beta$, où α est la plus petite des valeurs propres de $u^* \circ u$ et β la plus grande.

◇ [Rec01/hermitien-r1.tex/bil-r:3] Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$. Soit x un vecteur propre unitaire associé à λ . Alors $\lambda = \langle u(x)|u(x) \rangle = \langle x|u^* \circ u(x) \rangle$ et on conclut avec la formule de Rayleigh.

- 1) Calcul classique, elles sont réelles positives.
- 2) On note que $u^* \circ u$ est autoadjoint, et donc diagonalisable. Il admet donc une plus petite et une plus grande valeur propre.

◆ **HER.10** Mines MP – 2002

Soit U une matrice unitaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $-1 \notin \text{Sp}(U)$. On note $H = -i(U + I_n)^{-1}(U - I_n)$.

- 1) Montrer que H est hermitienne.
- 2) On considère la matrice $M = \lambda I_n - H$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Exprimer M comme produit de matrices de la forme $(U - I_n)(U + k I_n)$.
- 3) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que λ soit une valeur propre de H .

◇ [Rec02/hermitien-r2.tex/bil-r2:37] Cf. exercice **SYM.86 page 261 pour version réelle PC**

U* de chaque parenthèse, ça marche.

- 1) On a $H^* = i(U^* - 1)(U^* + 1)^{-1}$. On fait commuter les deux facteurs (car U^* commute avec $(1 + U^*)$ donc avec son inverse) puis on fait sortir
- 2)
- 3) $\lambda \in]0; 1[$???

◆ **HER.11 ($f(A)$ où f convexe et A hermitienne)** ENS MP – 2004

Soient A et B deux matrices hermitiennes de taille $n \times n$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On note a et b les endomorphismes de \mathbb{R}^n dont les matrices représentatives dans la base canonique sont respectivement A et B .

- 1) Expliquer comment l'on peut définir $f(A)$.
- 2) On suppose de plus que $AB = BA$. Montrer que, pour tout $t \in [0; 1]$:

$$\text{tr } f(tA + (1-t)B) \leq \text{tr } (t f(A) + (1-t) f(B)).$$

On va montrer dans la suite que ce résultat est encore vrai si A et B ne commutent pas.
- 3) Montrer que a peut s'écrire $\sum \lambda p_\lambda$, où les λ sont des réels et p_λ des projecteurs orthogonaux tels que $\sum p_\lambda = I_d$. De même, on écrit $b = \sum \lambda q_\lambda$.
- 4) Soit $t \in [0; 1]$. Pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\xi\| = 1$, on définit

$$m_\xi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \lambda \mapsto \langle (t p_\lambda + (1-t) q_\lambda)(\xi) | \xi \rangle. \end{cases}$$

Montrer que $\sum m_\xi(\lambda) = 1$ et que $m_\xi(\lambda) \geq 0$ pour tout λ .
- 5) On pose $Y = tA + (1-t)B$. On choisit $\xi \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\xi\| = 1$ et $Y\xi = \gamma\xi$. Montrer que ξ est vecteur propre de $f(Y)$ et donner la valeur propre correspondante.
- 6) Exprimer γ et $f(\gamma)$ en fonction de m_ξ . En déduire que, pour tout $t \in [0; 1]$,

$$\text{tr } f(tA + (1-t)B) \leq \text{tr } (t f(A) + (1-t) f(B)).$$

◇ [Rec04/hermitien-r4.tex/r4:262] 4) 1) $A = P^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P$ donc $f(A) = P^{-1} \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))P$. 5) 2) 3)

◆ HER.12

Mines MP – 2004

? Soit U une matrice unitaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $1 \notin \text{Sp}(U)$.

- 1) Montrer que $(U - I_n)$ est inversible.
- 2) On note $H = -i(U + I_n)^{-1}(U - I_n)$. Montrer que H est hermitienne.
- 3) Quel est le lien entre les valeurs propres de H et celles de U ?

◇ [Rec04/hermitien-r4.tex/r4:245]

(Déjà donné en 2002 : HER.10.)

- 1) T.
- 2) On a $H^* = i(U^* - I)(U^* + I)^{-1}$. On a $(U + I)$ inversible et

$$(U + I)H = i(I - U).$$

Par ailleurs, puisque U est unitaire, U , U^* et I commutent, donc

$$\begin{aligned} (U + I)H^* &= i(U + I)(U^* - I)(U^* + I)^{-1} \\ &= i(U^* - I)(U + I)(U^* + I)^{-1} \\ &= i(U^* - I)U \underbrace{(I + U^*)(U^* + I)^{-1}}_I \\ &= i(I - U), \end{aligned}$$

ce qui montre $H^* = H$.

- 3) Soit $\mu = e^{i\phi}$ une valeur propre de U .

À FINIR !!!

Formes quadratiques

◆ **QAD.1** (*)
 Soit A une matrice carrée réelle inversible. On pose $B = {}^tAA$, et on définit la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n \simeq \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ par $q(X) = {}^tXBX$. Montrer que q est une forme quadratique définie positive.

◆ [Divers/quadratiqueexo.tex/pre:56f] trer que $\lambda \geq 0$. Montrer que $\lambda \neq 0$ car sinon $AX = 0$ ce qui n'est pas possible si B est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée. De plus on peut chercher ses valeurs propres. Écrire $BX = \lambda X$, et en calculant $\|BX\|$ mon-

◆ **QAD.2** (*)
 Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques. On suppose $q_1 + q_2 > 0$. Montrer qu'il existe une base orthogonale pour q_1 et q_2 .

◆ [Divers/quadratiqueexo.tex/pre:100] La théorème de diagonalisation simultanée permet de montrer qu'il existe une base \mathcal{B} orthogonale pour q_1 et pour $q_1 + q_2$. On montre alors qu'elle est également orthogonale pour q_2 .

◆ **QAD.3 (Formes quadratiques sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$)** (**)
 On pose $E = \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et on le munit de la base $\mathcal{B} = (I, J, K, L)$, où l'on a posé

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer que \det est une forme quadratique sur E . Écrire sa matrice représentative dans la base \mathcal{B} .
- 2) Trouver toutes les formes quadratiques sur E .

◆ [Divers/quadratiqueexo.tex/pre:57] On note que $q(I) = 1, q(E_{12}) = 0$ donc $q(M) = 0$ si M non inversible (car M est équivalente à E_{12}) et $q(M + \lambda I_2)$ est un polynôme de degré 2 en λ , s'annulant chaque fois que $\det(M + \lambda I_2)$ s'annule, et de même coefficient dominant, donc ce sont les mêmes applications. Ainsi $q = \det$.

◆ **QAD.4 (Petit piège)** (*)
 Trouver la signature de la forme quadratique $q(x, y, z) = (x - y)^2 + (y - z)^2 - (z - x)^2$.

◆ [Divers/quadratiqueexo.tex/pre:101] La signature est donc $(1, 1)$. Ne pas tomber dans le piège et dire qu'elle est de signature $(2, 1)$! La famille n'est en effet pas libre. Il faut développer, et gaussifier tout cela bien proprement :

$$q(x) = \frac{1}{2}(x - 2y + z)^2 - \frac{1}{2}(x - z)^2.$$

◆ **QAD.5** TPE MP – 2000
 Soit E un espace préhilbertien de dimension n . Soit (e_1, \dots, e_{n+1}) une famille vérifiant $\langle e_i | e_j \rangle < 0$ pour tout $i \neq j$. On suppose que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base. Montrer que les coordonnées de e_{n+1} dans \mathcal{B} sont strictement négatives.

◆ [Rec00/quadratique-r0.tex/bil-r:45]

◆ **QAD.6** (★) ENSAM PT – 2001
 On note q la forme quadratique sur \mathbb{R}^3 définie par $q(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$, et on note ϕ sa forme bilinéaire associée. Trouver une base orthonormée pour ϕ .

◆ [Rec01/quadratique-r1.tex/bil-r:9] On gaussifie : $q = -(x + y + z)^2 + (y + z)^2 - (y - z)^2$.

◆ **QAD.7** (★) Centrale MP – 2001
 On pose $q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 6yz$.

- 1) Signature de q ?
- 2) Trouver une base orthogonale pour q .
- 3) Trouver le sup et l'inf de q sur la sphère euclidienne $\mathcal{S} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
- 4) Quelle est la nature de l'ensemble défini par $q(x, y, z) = 1$?

◆ [Rec01/quadratique-r1.tex/bil-r:26] On utilise la méthode de Gauss, on trouve par exemple

$$q = \frac{1}{2}(x + 4y + z)^2 - \frac{1}{2}(x + 2y - z)^2 - 6y^2,$$

donc la signature est $(1, 2)$. On cherche ensuite une base orthogonale pour q , et on peut même la prendre orthogonale pour le produit scalaire euclidien. Cela permet de diagonaliser via une matrice orthogonale la matrice A représentant q , dont les valeurs propres

sont $-3, \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$, et l'inf et le sup sont donc donnés par la plus grande et la plus petite valeur propre.

◆ **QAD.8** Centrale MP – 2001
 On note Q_a et Q_b les deux formes quadratiques sur \mathbb{R}^2 définies par leur action sur tout $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$Q_a(X) = 2x^2 - 2xy + 2y^2, \quad Q_b(X) = -x^2 + 2xy.$$

- 1) Les formes Q_a et Q_b sont-elles définies positives ?
- 2) Trouver une base orthonormée de \mathbb{R}^2 pour l'une de ces formes quadratiques. Décomposer l'autre dans cette base.
- 3) Expliquer pourquoi il est possible de trouver une base orthonormée pour les deux formes. Trouver une telle base.

◆ [Rec01/quadratique-r1.tex/bil-r:32]

◆ **QAD.9** Centrale MP – 2001
 On pose $d(x, y, z) = 3x^2 - 2xz + 3z^2 + y^2$ et $n(x, y, z) = 3x^2 - xz + y^2$.

- 1) Rang et signature de n et d ?
- 2) Montrer qu'il existe une base dans laquelle n et d sont diagonales.
- 3) Trouver (sous forme matricielle) toutes les bases telles que cette propriété soit vraie.
- 4) On pose $F(x, y, z) = \frac{n(x, y, z)}{d(x, y, z)}$. Quelles sont les valeurs prises par F ?

◆ [Rec01/quadratique-r1.tex/bil-r:37]

◆ **QAD.10** (★★) ENSAE MP – 2001
 On définit en dimension n la forme multilinéaire symétrique $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} \min(i, j) x_i x_j$. Signature de f ?

◆ [Rec01/quadratique-r1.tex/bil-r:40] On vérifie aisément que ce qui amorce une récurrence, puis

$$f = x_1^2 + 2x_1(x_2 + \dots + x_n) + \sum_{i,j=2}^n \min(i, j) x_i x_j$$

$$= (x_1 + \dots + x_n)^2 + \sum_{i,j=2}^n \min(i-1, j-1) x_i x_j$$

et la signature est donc $(n, 0)$.

◆ **QAD.11** INT MP – 2001
 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n , et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Pour tout $x \in E$, on pose $Q(x) = \langle u(x) | x \rangle$.

⚡ **Question de cours** : que représente Q ?
 Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) $\text{tr } u = 0$;
- (b) il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) telle que $\langle u(e_i) | e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

◆ [Rec01/quadratique-r1.tex/bil-r:42] Q est une forme quadratique, de même matrice que u . Il existe une base (b_1, \dots, b_n) dans laquelle u est diagonale, de valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, avec $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$.
 On pose $x = \sum_{i=1}^n e_i$, alors

$$\langle u(x) | x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \left| \sum_{j=1}^n e_j \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0.$$

On effectue ensuite une récurrence sur la dimension n de l'espace. On suppose la propriété vraie au rang $n-1$. On choisit x tel que $\langle f(x) | x \rangle = 0$. On pose H le supplémentaire orthogonal de $\langle x \rangle$. On considère ensuite l'endomorphisme de H dont la matrice représentative est la restriction de la matrice précédente au carré de taille $n-1$, et qui est donc de trace nulle, puis on applique la récurrence (cela revient à considérer la restriction de Q sur H). L'implication réciproque est triviale.

◆ **QAD.12** ENSAE MP – 2001
 Dans \mathbb{R}^n , on pose $\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i < j} x_i x_j$. Trouver le rang et la signature de ϕ , ainsi qu'une base orthogonale pour ϕ .

◆ [Rec01/quadratique-r1.tex/bil-r:44]

◆ **QAD.13** TPE MP – 2001
 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A . Réduire la forme quadratique $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz$.

◇ [Rec01/quadratique-r1.tex/bil-r:36]

◆ QAD.14

Centrale MP – 2002

Soit Q une forme quadratique non dégénérée sur \mathbb{R}^n , de signature $(n-1, 1)$. Notons f la forme bilinéaire symétrique associée.

- 1) Montrer que, s'il existe un hyperplan H sur lequel $Q|_H$ est définie positive, alors il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $Q(u) < 0$ et $H = \{x \in \mathbb{R}^n ; f(x, u) = 0\}$. Étudier la réciproque.
- 2) On suppose que $n = 4$ et que $Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. Trouver les hyperplans H où Q est définie positive.

(On reconnaît l'espace de Minkowski et la métrique naturelle de la relativité restreinte.)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 < 1$. Que peut-on dire de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix} ?$$

◇ [Rec02/quadratique-r2.tex/bil-r2:26]

mard pour montrer qu'elle est inversible.

La matrice a des coefficients $\delta_{ij} - a_i a_j$. Cauchy-Schwarz plus indice d'Hada-

◆ QAD.15

TPE MP – 2002

Décomposition de Gauss, rang et signature des formes quadratiques suivantes :

- 1) sur \mathbb{R}^3 : $q(x, y, z) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$;
- 2) sur \mathbb{R}^n : $q(x) = \sum_{i,j=1}^n i x_i x_j$.

◇ [Rec02/quadratique-r2.tex/bil-r2:27]

◆ QAD.16

Centrale MP – 2002

- 1) Soient f_1 et f_2 deux formes multilinéaires sur \mathbb{R}^n . On pose

$$Q(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n) f_2(x_1, \dots, x_n).$$

Montrer que Q est une forme quadratique ; déterminer son rang, sa signature, sa décomposition en carrés.

- 2) On pose $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} \cos(a_i + a_j) x_i x_j$, avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Déterminer son rang, sa signature, sa décomposition en carrés.

◇ [Rec02/quadratique-r2.tex/bil-r2:38]

◆ QAD.17

Mines MP – 2003

On donne la forme quadratique

$$q(x, y, z) = x^2 + 4z^2 + 2xy + 2yz + 4xz.$$

Déterminer les plans de \mathbb{R}^3 sur lesquels la forme q est définie positive.

◇ [Rec03/quadratique-r3.tex/r3:159]

◆ QAD.18

CCP MP – 2003

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Si $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$, on définit

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 13x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3.$$

- 1) Trouver la forme polaire β associée à Q , puis la matrice de β .
- 2) Déterminer la signature et le rang de Q . β est-elle dégénérée ?
- 3) Trouver une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E , orthogonale pour β , puis la matrice de Q dans cette base.

◇ [Rec03/quadratique-r3.tex/r3:359]

◆ QAD.19

CCP MP – 2003

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On considère la forme quadratique q définie, pour tout vecteur v de coordonnées (x, y, z) dans la base \mathcal{E} , par

$$q(v) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy - 2yz + 4zx.$$

- 1) Appliquer la décomposition de Gauss à q .
- 2) En déduire une méthode pour trouver une base (e'_1, e'_2, e'_3) dans laquelle tout vecteur v de coordonnées (X, Y, Z) s'écrit $q(v) = \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2$.

◇ [Rec03/quadratique-r3.tex/r3:299]

Méthode de Gauss : $q = (x+y+2z)^2 + (y-3z)^2 - 14z^2$.

On a

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

◆ QAD.20 (Noyau de Poisson)

(■)

ENS Cachan MP – 2004

Soit $r \in]0; 1[$. On définit $\phi : \theta \mapsto \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \theta}$. Enfin, on note $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

- 1) On pose $\langle f|g \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(\theta)} g(\theta) \phi(\theta) d\theta$. Montrer que c'est un produit scalaire sur $C_{2\pi}$.
- 2) Soit $x \in \mathbb{C}^{n+1}$, $x = (x_0, \dots, x_n)$. On pose

$$f_x(\theta) = \sum_{k=0}^n x_k e^{ik\theta} \quad \text{et} \quad Q(x) = \langle f_x | f_x \rangle.$$

Montrer que Q est une forme hermitienne et donner une expression plus simple de $Q(x)$.

- 3) On pose $\tilde{Q}(x) = \sum_{k,\ell} \frac{x_k \overline{x_\ell}}{1+|k-\ell|}$. Montrer que \tilde{Q} est une forme hermitienne définie et positive (on pourra utiliser la question 2).
- 4) Donner une minoration d'une valeur propre quelconque de l'endomorphisme symétrique associé à \tilde{Q} . Pour ce faire, on cherchera $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{C}^{n+1}$, on ait $\tilde{Q}(x) \geq \alpha \|x\|_2^2$.

◇ [Rec04/quadratique-r4.tex/r4:271]

Réduction des coniques

◆ CON.1

On considère les courbes d'équations suivantes, que l'on demande d'écrire sous forme réduite, en les identifiant (dans le cas des paraboles et hyperboles, on donnera la direction des axes principaux)

$$\begin{aligned} \Gamma_1 & : x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x = 0 \\ \Gamma_2 & : x^2 + xy + y^2 - 6x + 5 = 0 \\ \Gamma_3 & : y^2 + 4xy + 4x^2 - 8y + 1 = 0 \end{aligned}$$

◇ [Divers/coniquesexo.tex/pre:37]

Γ_1 est une hyperbole caractérisée par la forme $q(x, y) = (x - y)(x - 2y)$ donc les asymptotes sont de pente 1 et $\frac{1}{2}$.

trinôme $x^2 + xy + y^2$ ne s'annule jamais.

Γ_2 est une ellipse, car le discriminant $B^2 - 4AC = -3$, c'est-à-dire que le Γ^3 a pour discriminant $\Delta = B^2 - 4AC = 0$, c'est donc une parabole, l'axe d'ailleurs pour pente -2 car $q = (y + 2x)^2$.

◆ CON.2

Reconnaître la conique suivante; donner son axe et, le cas échéant, son centre (cas ellipse/hyperbole) ou son sommet (cas de la parabole) : $(2x - y)^2 + 3x + y = 1$.

◇ [Divers/coniquesexo.tex/div:9]

On a une parabole gentiment écrite sous forme semi-réduite. On pose $Q(x, y) = (2x - y)^2$, forme bilinéaire dont un vecteur propre évident est $(1, 2)$ pour la valeur propre 0, et un second vecteur propre est orthogonal, donc $(-2, 1)$, pour la valeur propre $\text{tr}(A) = 1 + 2 = 5$.

ce qui, après transformation, donne

$$5 \left(Y - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right)^2 + \sqrt{5} X = \frac{3}{4}$$

ce qui nous donne comme sommet

$$X_0 = \frac{3}{4\sqrt{5}} \quad Y_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

c'est-à-dire

$$x_0 = -\frac{1}{20} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{1}{5}$$

et un axe de pente 2.

On pose donc $\Omega = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, alors ${}^t\Omega A \Omega = \text{diag}(0, 5)$.

De plus $q(x, y) = {}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Omega D^t \Omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5Y^2$ en posant

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^t \Omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ce qui donne comme nouvelle équation

$$5Y^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}(X - 2Y) + \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) = 1,$$

◆ CON.3

Discuter, selon la valeur de λ , de la nature de la conique d'équation $x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$.

◇ [Divers/coniquesexo.tex/div:92]

◆ CON.4

CCP PC – 2001

Réduire la conique $\mathcal{C} : 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$.

◇ [Rec01/coniques-r1.tex/geo-r:1]

◆ CON.5

CCP PC – 2003

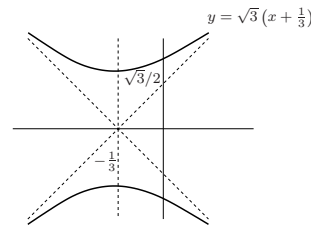
Notons \mathcal{C} la courbe d'équation $y^2 - (3x^2 + 2x + 1) = 0$. Déterminer l'allure de \mathcal{C} .

◇ [Rec03/coniques-r3.tex/r3:121]

On peut écrire

$$y^2 - 3 \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 = +\frac{2}{3},$$

c'est donc une hyperbole dont voici l'allure :



et dont les foyers sont en $\left(0, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) : c^2 = a^2 + b^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$.

◆ CON.6

CCP MP – 2003

Dans le repère (O, i, j) , tracer la courbe d'équation

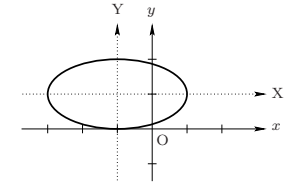
$$x^2 + 2x + 1 + 4y^2 - 8y = 0.$$

Trouver l'équation des tangentes au niveau de l'axe Oj .

◇ [Rec03/coniques-r3.tex/r3:43]

Il s'agit d'une simple ellipse; on pose $X = x + 1$ et $Y = y - 1$, l'équation devient

$$X^2 + 4Y^2 = 4,$$



◆ CON.7 (Coniques dégénérées)

(**)

Mines PC – 2004

Soit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Déterminer l'ensemble $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0\}$ en fonction des valeurs de a, b et c .

◇ [Rec04/coniques-r4.tex/r4:68]

- Si $ac - b^2 > 0$: ellipse réduite à un point : $\{0\}$.
- Si $ac - b^2 < 0$: hyperbole dégénérée : faisceau de droites.

◆ CON.8

(*)

CCP MP – 2004

Tracer la courbe d'équation $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$. Donner la pente des tangentes aux points d'intersection avec (Oj) .

◇ [Rec04/coniques-r4.tex/r4:230]

◆ CON.9

(*)

TPE PC – 2005

Soit (E) une ellipse du plan. Montrer que les milieux des cordes de (E) parallèles à une direction fixe (d) sont sur un segment de droite.

◇ [Rec05/coniques-r5.tex/r5:506]

Quadriques

◆ QDQ.1

Lieu des points tels que $d(a; D)^2 + d(a; D')^2 = 1$ où D et D' sont deux droites non coplanaires faisant un angle de 45° entre elles, et de distance égale à 1.

◇ [Divers/quadriquesexo.tex/div:16]

Ellipsoïde de révolution.

◆ QDQ.2

Nature de la surface d'équation $xy = z^2$ et représentation.

◇ [Divers/quadriquesexo.tex/div:17]

$(x + y)^2 + (x - y)^2 - 4z^2 = 0$: c'est un cône !

◆ QDQ.3

Déterminer la nature de la conique d'équation $xy + yz = 1$.

◇ [Divers/quadriquesexo.tex/div:89]

est $Y^2 - Z^2 = \sqrt{2}$: c'est un cylindre de révolution.

La forme bilinéaire associée a pour spectre $\{0, \pm 1/\sqrt{2}\}$ et l'équation réduite

◆ QDQ.4 (Hyperboloïde = surface réglée)

- 1) Notons D_λ la droite d'équation $(y = 1 \quad x = \lambda z)$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Déterminer une équation cartésienne de la surface \mathcal{S} obtenue par rotation de D_λ autour de Oz . Quelle est la nature de la surface S ?
- 2) En déduire que tout hyperboloïde de révolution à une nappe est réunion d'une famille de droites. On dit que c'est une **surface réglée**.
- 3) Généraliser à un hyperboloïde à une nappe quelconque.

◇ [Divers/quadriquesexo.tex/div:90]

3) Se ramener au cas d'une surface de révolution par une affinité orthogonale.

- 1) $x^2 + y^2 = 1 + \lambda^2 z^2$.
- 2)

◆ QDQ.5 (Plan tangent)

Soit Σ la quadrique d'équation cartésienne $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$. Montrer que le plan d'équation $ux + vy + wz = 1$ est tangent à Σ si et seulement si $\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = 1$. Quel est alors le point de contact ?

◇ [Divers/quadriquesexo.tex/div:91]

◆ QDQ.6 (Contour apparent)

On considère la surface \mathcal{S} d'équation $x^2 + z^2 - z^2 = 1$ et le vecteur $v_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$. Quel est, en fonction du paramètre α , le contour apparent de \mathcal{S} selon la direction v_α ?

◇ [Divers/quadriquesexo.tex/div:141]

- Si $\alpha = 1$, c'est la réunion de deux droites.

- Si $\alpha < 1$, c'est une hyperbole.

◆ QDQ.7

Nature de la surface d'équation $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = k$. Est-ce une surface de révolution ?

◇ [Divers/quadriquesexo.tex/div:145]

◆ QDQ.8

Trouver l'ensemble des points de l'espace tels que

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{et} \quad z > 0.$$

◇ [Rec05/quadriques-r5.tex/r5:105]

(★)

Mines PC – 2005

Deuxième partie

Analyse

Réels

◆ REEL.1 (Bornes sup et inf)

Soient A et B deux parties non vides de \mathbb{R} , vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad x < y.$$

Montrer que A admet une borne supérieure, que B admet une borne inférieure, et comparer sup A et inf B.

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:1]

$$\sup A \leq \inf B$$

◆ REEL.2

Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{p}} > \sqrt{p}$. (*)

◇ [Divers/reelsexo.tex/int:52]

On a $\sum_{k=1}^p \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} > \sum_{k=1}^p \frac{1}{p} = 1$, d'où le résultat.

◆ REEL.3

Calculer $\inf_{\theta \in]0; \pi[} \left(\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\theta)| \right)$. (***)

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:2]

alors, si q est pair, $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\theta)| = 1$, si q est impair, $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\theta)| = 1 \geq \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. La réponse cherchée est $\sqrt{3}/2$.

◆ REEL.4

Donner la borne supérieure et la borne inférieure de

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:3]

$$\inf A = -1 \text{ et } \sup A = 3/2.$$

◆ REEL.5

On construit une application $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ de la façon suivante :

- 1) si $x \notin \mathbb{Q}$, on pose $f(x) = 1$;
- 2) si $x \in \mathbb{Q}$, il existe deux entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\text{pgcd}(p, q) = 1$ et $x = p/q$; on pose alors $f(x) = 1/q$.

Calculer $\inf_{x \in [0; 1]} f(x)$.

Soit A un intervalle ouvert quelconque de $[0; 1]$. Calculer $\inf_{x \in A} f(x)$.

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:5]

$$0.$$

◆ REEL.6

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:6]

C'est juste une série géométrique.

◆ REEL.7

Soit A une partie bornée non vide de \mathbb{R} . Montrer que $\sup_{(x,y) \in A^2} |x - y| = \sup A - \inf A$.

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:7]

◆ REEL.8

Soit A une partie de \mathbb{R} . Y a-t-il équivalence entre les énoncés

- 1) $\exists \alpha > 0, \forall x \in A, x \geq \alpha$;
- 2) $\forall x \in A, x > 0$?

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:8]

L'ensemble $]0; 1]$ vérifie ii) mais pas i).

◆ REEL.9

Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}, E(x) + E(x+y) + E(y) \leq E(2x) + E(2y)$.

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:9]

◆ REEL.10

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx).$$

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:10]

On en déduit la formule demandée.

Notons $p = E(nx)$, q et r les quotient et reste de la division euclidienne de p par n (i.e. $p = qn + r$ avec $r < n$.) On a alors

$$E\left(x + \frac{k}{n}\right) = \begin{cases} q & \text{si } k \in [0, n-r-1] \\ q+1 & \text{si } k \in [n-r, n-1]. \end{cases}$$

◆ REEL.11

Montrer que, pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, on a

$$E\left(\frac{p+q}{2}\right) + E\left(\frac{p-q+1}{2}\right) = p.$$

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:11]

Séparer les cas $p+q$ pair ou impair.

◆ REEL.12

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $0 \leq E(2x) - 2E(x) \leq 1$ et que $-2 \leq 3E(2x) - 2E(3x) \leq 1$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:12]

Ensuite, encadrer $2x$ et $3x$ par des entiers, et séparer des cas.

◆ REEL.13 ((a, b) ∈ Q² tq a^b ∈ Q)

Calculer $\left(\sqrt{2}\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$. En déduire qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b est un rationnel.

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:4]

$\left(\sqrt{2}\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$. Il faut maintenant séparer deux cas :

- si $\sqrt{2}\sqrt{2}$ est irrationnel, on pose $a = \sqrt{2}\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$;
- dans le cas contraire, on pose $a = b = \sqrt{2}$.

◆ REEL.14 (Problème des zouaves)

(***)

Soient a_{ij} (avec $i \in [1; n]$ et $j \in [1; p]$) des réels.

Comparer $\max_{i \in [1; n]} \left(\min_{j \in [1; p]} a_{ij} \right)$ et $\min_{j \in [1; p]} \left(\max_{i \in [1; n]} a_{ij} \right)$.

INDICATION : On commencera par fixer i et j dans $[1; n]$ et, en comparant a_{ij} à d'autres éléments, on montrera que

$$\min_{k \in [1; p]} a_{ik} \leq \max_{\ell \in [1; n]} a_{\ell j}.$$

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:13]

$$\text{et} \quad a_{ij} \leq \max_{\ell \in [1; n]} a_{\ell j}$$

Note : ça marche aussi avec autre chose que des zouaves.

On se souviendra des ces deux implications élémentaires, mais à la base de ce qui montre que

$$\left(\forall x \quad T(x) \leq A \right) \Rightarrow \sup_x T(x) \leq A \quad (*)$$

L'équation (*) étant vraie pour tout $i \in [1; n]$, on peut passer au max, ce qui donne

$$\text{et} \quad \left(\forall x \quad T(x) \geq A \right) \Rightarrow \inf_x T(x) \geq A \quad (**)$$

Fixons $i \in [1; n]$ et $j \in [1; p]$. On a alors

Enfin, on passe au min sur j , ce qui donne

$$\min_{k \in [1; p]} a_{ik} \leq a_{ij} \quad \max_{i \in [1; n]} \left(\min_{k \in [1; p]} a_{ik} \right) \leq \min_{j \in [1; p]} \left(\max_{\ell \in [1; n]} a_{\ell j} \right).$$

Il ne reste plus qu'à changer les noms des variables (*muettes* !!!) pour avoir la formule désirée :

$$\max_{i \in [1; n]} \left(\min_{j \in [1; p]} a_{ij} \right) \leq \min_{j \in [1; p]} \left(\max_{i \in [1; n]} a_{ij} \right).$$

◆ REEL.15

(★)

Soient A et B deux parties bornées et non vides de \mathbb{R} . On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cap B$ est bornée et que

$$\min(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B).$$

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:15]

◆ REEL.16

(★★)

Calculer les bornes supérieure et inférieure de $\mathcal{E} = \left\{ \frac{p-q}{p+q+1} ; (p, q) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } 0 < q < p \right\}$.

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:14]

La borne inférieure vaut 0 et la borne sup vaut 1.

◆ REEL.17

(★★)

Calculer les bornes supérieure et inférieure de $\mathcal{E} = \left\{ \frac{3p-q}{2p+q+1} ; (p, q) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } 0 < q < p \right\}$.

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:16]

en déduit que $\inf(\mathcal{E}) = \frac{2}{3}$.

À p fixé, $\frac{3p-q}{2p+q+1}$ est minimal pour $q = p - 1$, au vaut donc $\frac{2p+1}{3p}$; on Ce nombre est maximal pour $q = 1$, donc $\sup(\mathcal{E}) = \frac{3}{2}$.

◆ REEL.18

(★★)

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$.

INDICATION : On remarquera que $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$.

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:17]

On a $(n!)^2 = \prod_{k=1}^n k(n+1-k)$ et on montre aisément, par étude d'une parabole, que

$$\forall k \in [1; n] \quad n \leq k \cdot (n+1-k) \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^2.$$

La majoration demandée s'ensuit immédiatement.

◆ REEL.19

Montrer que, si $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Q}^3$ vérifient

$$\alpha + \sqrt{2}\beta + \sqrt{3}\gamma = 0,$$

alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

On pourra commencer par établir les résultats suivants :

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; | 3) $\sqrt{3/2} \notin \mathbb{Q}$; |
| 2) $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$; | 4) si $\gamma = 0$, alors nécessairement $\alpha = \beta = 0$. |

◇ [Divers/reelsexo.tex/re:18]

◆ REEL.20

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$.

◇ [Divers/reelsexo.tex/div:127]

Complexes, majorations, ...

◆ **COM.1** (***)
 Soit n un entier naturel non nul, et $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que

$$\frac{\left| \sum_{k=1}^n z_k \right|}{1 + \left| \sum_{k=1}^n z_k \right|} \leq \sum_{n=1}^k \frac{|z_k|}{1 + |z_k|}.$$

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:1]

◆ **COM.2 (Inégalité de Ptolémée)** (**)

1) Soient x et y deux nombres complexes. Montrer que

$$\left| \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right| = \frac{|x-y|}{|x| \cdot |y|}.$$

2) Montrer que, pour tout $x, y, z \in \mathbb{C}$, on a

$$|x| \cdot |y-z| \leq |y| \cdot |z-x| + |z| \cdot |x-y|.$$

3) En déduire l'inégalité suivante, dite **inégalité de Ptolémée**, valable pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$:

$$|x-y| \cdot |z-t| \leq |x-z| \cdot |y-t| + |x-t| \cdot |y-z|.$$

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:2]

On applique ensuite cette formule à x, y, z et une inégalité triangulaire.

On a

$$\left| \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right| = \left| \frac{1}{\bar{x}} - \frac{1}{\bar{y}} \right| = \left| \frac{\bar{y}-\bar{x}}{\bar{x}\bar{y}} \right| = \left| \frac{y-x}{xy} \right|.$$

◆ **COM.3**
 Les trois questions sont indépendantes.

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|e^{ix} - 1| \leq |x|$.

2) Montrer que, pour tout $z \in \mathbf{U}$, on a $|1+z| \geq 1$ ou $|1+z^2| \geq 1$.

3) Montrer que, pour tout nombre complexe z vérifiant $\Re e(z) < \frac{1}{2}$, on a $|z/(1-z)| < 1$. Y a-t-il réciproque ?

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:3]

1) on a $|e^{ix} - 1| = 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|$.

2) $z = \rho e^{i\theta}$. Alors

$$|1+z| \geq 1 \Leftrightarrow \cos \theta \geq -\frac{1}{2},$$

et

$$|1+z^2| \geq 1 \Leftrightarrow |\cos 2\theta| \geq \frac{1}{2}.$$

3) en posant $z = x + iy$, il y a équivalence entre les énoncés :

(a) $\left| \frac{z}{1-z} \right| < 1$;

(b) $z^2 < |1-z|^2$;

(c) $2x < 1$.

◆ **COM.4**

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$, et notons $\omega = e^{2i\pi/n}$. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{m=0}^{n-1} z^m.$$

En déduire que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:4]

On a

$$(z-1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = (z^n - 1) = (z-1) \sum_{m=0}^{n-1} z^m.$$

On prend ensuite $z = 1$ et on passe au module.

◆ **COM.5**

Soit ABC un triangle équilatéral du plan. On note $\mathcal{R}_A, \mathcal{R}_B$ et \mathcal{R}_C les trois rotations de centre A, B et C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Expliciter la transformation $\mathcal{R}_C \circ \mathcal{R}_B \circ \mathcal{R}_A$.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:25]

Symétrie par rapport à B.

◆ **COM.6**

Soit ABC un triangle équilatéral du plan, non réduit à un point. Montrer qu'au moins un des points A, B, C a une coordonnée non entière.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:26]

donc... puis $\sqrt{3}$ irrationnel.

En notant $A = a + ia'$, $B = b + ib'$ et $C = c + ic'$, on a $A + jB + j^2C = 0$

◆ **COM.7**

Montrer que l'application $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est telle que l'image du disque $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$ est incluse dans \mathcal{D} .

$$z \mapsto z - z^2$$

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:5]

◆ **COM.8** (**)

Soit $c \in \mathbb{C} \setminus [-1; 1]$. Montrer qu'il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$ et $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = c$.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:6]

On résout, et on montre que l'une des racines a un module plus grand que 1.

◆ **COM.9**

Soient $u, v \in \mathbf{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, et on suppose que $uv \neq -1$.

Montrer que le nombre $Z = \frac{u+v}{1+uv}$ est réel.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:7]

Il suffit de vérifier que $\bar{Z} = Z$, et n'oublant pas que $\bar{u} = 1/u$ et $\bar{v} = 1/v$.

◆ **COM.10**

Déterminer l'ensembles des complexes z tels que les modules de $z, 1/z$ et $1-z$ soient égaux.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:8]

M soit équidistant de l'origine et du point d'affixe 1, il n'y a que $z = e^{i\pi/3}$ et $|z| = |1/z|$ donne $|z| = 1$, il faut donc que $|z| = |z-1|$, donc que le point

◆ **COM.11**

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|e^{ix} - 1| \leq |x|$.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:9]

◆ **COM.12**

Montrer que, pour tout $z \in \mathbf{U}$, l'élément $i \frac{1+z}{1-z}$ est réel. Interprétation géométrique.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:10]

On se souvient $\bar{z} = 1/z$ et on écrit

$$\bar{Z} = -i \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} = -i \frac{z+1}{z-1} = Z.$$

Le théorème des angles droits dans un cercle.

◆ **COM.13**

Soit ω une racine cinquième de l'unité telle que $\omega \neq 1$. Montrer que

$$(\omega^2 + \omega + 1)(\omega^3 + \omega + 1)(\omega^4 + \omega + 1) = \omega(\omega + 1).$$

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:11]

On développe simplement.

◆ **COM.14**

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -i$. Démontrer que $\left| \frac{1+iz}{1-iz} \right| = 1$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)^n = a$$

admet des solutions dans \mathbb{R} si et seulement si $|a| = 1$. Dans le cas où $|a| = 1$, déterminer ces solutions dans \mathbb{R} (en écrivant $a = e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$).

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:12]

◆ **COM.15**

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, et ω une racine n -ième de l'unité. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:13]

On note que si $\omega \neq 1$, alors

$$(1-\omega) \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k - n\omega^n = -n.$$

◆ **COM.16**

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, et ω une racine n -ième de l'unité. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \omega^k$.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:14]

On note $\omega = \exp\left(\frac{2ip\pi}{n}\right)$ avec $p \in [0; n-1]$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \omega^k = (1+\omega)^n - \omega^n = 2^n (-1)^p \cos^n \frac{p\pi}{n} - 1.$$

◆ **COM.17**

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|$.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:15]

On note que $|\omega^k - 1| = 2 \left| \sin \frac{k\pi}{n} \right|$, et le sinus est toujours positif. On se ramène donc au calcul de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \cotan \frac{\pi}{2n}$$

en regardant aussi la somme des cosinus et en sommant la série géométrique.

◆ **COM.18**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|1+z| \geq 1/2$ ou $|1+z^2| \geq 1$. Interprétation géométrique ?

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:16]

On pose $z = x + iy$. Si $|1+z^2| < 1$, alors $(x^2+y^2)^2 + 2(x^2-y^2) < 0$ et donc $x^2 < y^2$. Si de plus $|1+z| < 1/2$ alors $x^2 + y^2 + 2x + 3/4 < 0$ et donc, avec la première condition, on obtient $2x^2 + 2x + 3/4 < 0$. Si on étudie

ce polynôme de degré 2 sur \mathbb{R} , on s'aperçoit qu'aucune valeur de x ne convient.

Géométriquement, le disque de centre -1 et de rayon $1/2$ est disjoint de la lemniscate $(x^2+y^2)^2 + 2(x^2-y^2) < 0$.

◆ **COM.19**

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sqrt{x+1} = x-1$.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:19]

La première idée qui vient à l'esprit est d'élever au carré. On trouve alors $x+1 = x^2 - 2x + 1$ donc $x^2 - 3x = 0 = x(x-3)$ donc $x \in \{0, 3\}$. Or

évidemment la solution $x = 0$ ne convient pas dans la première équation. Donc $\mathcal{S} = \{3\}$.◆ **COM.20**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(a+kb)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(a+kb)$.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:20]

On note que $C_n + iS_n = e^{ia} \sum_{k=0}^n e^{ikb}$. Si $e^{ib} = 1$, cette somme vaut

$\exp\left\{i\left(a + \frac{nb}{2}\right)\right\} \frac{\sin(n+1)b/2}{\sin b/2}$, sinon elle vaut $(n+1)e^{ia}$. Il ne reste plus qu'à prendre les parties réelle et imaginaire.

◆ **COM.21**

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$ et $F_n(x) = \sum_{k=0}^n D_k(x)$.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:21]

La somme de Dirichlet vaut $D_n(x) = \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin x/2}$ et la somme de Féjér

$$\text{vaut } F_n(x) = \left\{ \frac{\sin(n+1)x/2}{\sin x/2} \right\}^2.$$

◆ **COM.22**

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^{2n} - 2z^n \cos n\theta + 1 = 0$.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:22]

L'équation s'écrit $(z^n - e^{in\theta})(z^n + e^{in\theta}) = 0$, les solutions sont donc les

 $\omega_k e^{\pm i\theta}$, où $(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$ sont les racines n -ièmes de l'unité.◆ **COM.23**

Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:23]

Ce sont les parties réelle et imaginaire de la somme des racines de $e^{in\theta}$.◆ **COM.24**

Résoudre $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:24]

On a donc $\frac{z+i}{z-i} = \omega$ avec $\omega \in \{1, i, -1, -i\}$, et donc $z(1-\omega) = -i(\omega+1)$.

La solution $w = 1$ ne donne rien, On en déduit les autres solutions : $\mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$.◆ **COM.25**

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Soit u une racine carrée de zz' . Montrer que

$$|z| + |z'| = \left| \frac{z+z'}{2} + u \right| + \left| \frac{z+z'}{2} - u \right|.$$

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:27]

On choisit $u = ab$. On a alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{z+z'}{2} + u \right| + \left| \frac{z+z'}{2} - u \right| &= \left| \frac{a^2+b^2}{2} + ab \right| + \left| \frac{a^2+b^2}{2} - ab \right| \\ &= \left| \frac{(a+b)^2}{2} \right| + \left| \frac{(a-b)^2}{2} \right| \\ &= |a|^2 + |b|^2 = |z| + |z'|. \end{aligned}$$

On choisit a et b tels que $a^2 = z$ et $b^2 = z'$, alors $u = \pm ab$, par exemple◆ **COM.26**

Trouver $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = |z-2|$ et $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(z+3+i)$.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:28]

$$z = 1 + \frac{i}{3}.$$

◆ **COM.27**

Soient $x, y, z \in \mathbf{U}$. Comparer $|x+y+z|$ et $|xy+yz+zx|$.

◇ [Divers/complexesexo.tex/comp:29]

Diviser le second par $|xyz|$, puis observer que $1/x = \bar{x}$, etc. Ces nombres

sont égaux.

◆ **COM.28**

Résoudre $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^n = \frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta}$, où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.

◇ [Divers/complexesexo.tex/div:56]

On calcule pour commencer

$$\frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta} = e^{2i\theta}.$$

Cela nous donne

$$iz(1+\omega_k u) = 1 - \omega_k u$$

En écrivant $1 \pm \omega_k u$ en mettant en facteur l'angle moitié, on aEn notant $u = e^{2i\theta/n}$, on a donc

$$\frac{1-iz}{1+iz} = \omega_k u \quad \omega_k = e^{2i\pi k/n}.$$

$$z_k = -\tan\left(\frac{\theta + k\pi}{n}\right) \quad k \in [0; n-1].$$

◆ **COM.29**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $e^{i \text{Arc tan } x}$.

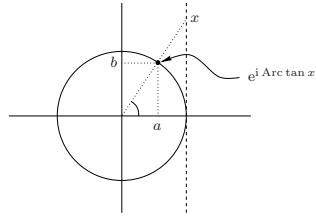
◇ [Divers/complexesexo.tex/div:73]

Utilisons la formule

$$e^{i \text{Arc tan}(x)} = \cos(\text{Arc tan } x) + i \sin(\text{Arc tan } x).$$

Solution graphique

Or, si l'on trace sur le cercle trigonométrique les quantités x et $e^{i \text{Arc tan } x}$:



ce que l'on résout ainsi :

$$ax = \sqrt{1-a^2} \quad a^2 x^2 = \sqrt{1-a^2}$$

$$a^2 = \frac{1}{1+x^2} \quad a = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (a \geq 0)$$

et donc $b = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Solution analytique

Posons $t = \text{Arc tan } x$, on a alors $t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On obtient $x = \tan t$, donc $1+x^2 = 1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$ et, puisque $\cos t \geq 0$, on en déduit que $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}$.

Par conséquent, $\sqrt{1+x^2} \cos(\text{Arc tan } x) = 1$

et $\sqrt{1+x^2} \sin(\text{Arc tan } x) = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t = x$.

on s'aperçoit, en notant $e^{i \text{Arc tan } x} = a + ib$ avec $a \geq 0$, que l'on a (théorème de Thales) la proportionnalité suivante :

$$\frac{x}{1} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$

◆ **COM.30** Lieu des points M d'affixe z tels que z, z^2 et z^3 soient alignés ?

◇ [Divers/complexesexo.tex/div:113]

◆ **COM.31** On cherche à résoudre l'équation $(1-iz)^3(1+i \tan \alpha) = (1+iz)^3(1-i \tan \alpha)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, où $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est fixé. **1)** Montrer que $-i$ n'est pas solution. **2)** Déterminer $\left| \frac{1+iz}{1-iz} \right|$ et en déduire que les solutions sont réelles. **3)** En déduire l'ensemble des solutions. Petites Mines – 2000

◇ [Rec00/complexes-r0.tex/comp:17]

◆ **COM.32** Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n - \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = 0$. CCP PC – 2002

◇ [Rec02/complexes-r2.tex/alg-r2:1] $e^{i\pi/6}$; ce qui arrive pour $z^n \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire pour $z \equiv 0 \pmod{6}$. On normalise et on s'aperçoit que l'on doit résoudre $z^n = \bar{z}^n$ avec $z =$

◆ **COM.33** Soit z un complexe. Trouver une condition sur z pour que z, z^2 et z^4 soient alignés. CCP PC – 2002

◇ [Rec02/complexes-r2.tex/alg-r2:2] les points sont alignés si z est solution d'une équation de la forme $z^2 + z + \lambda = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Selon la valeur de λ , on est donc dans \mathbb{R} ou sur la droite de partie réelle $-\frac{1}{2}$.
Si $z \neq 0, 1, z, z^2$ et z^4 sont alignés si et seulement si $\frac{z^4-z}{z^2-z} \in \mathbb{R}$. En simplifiant,

◆ **COM.34** Trouver l'ensemble des points M du plan, d'affixe $z \in \mathbb{C}$, tel que z, z^2 et z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle. CCP PC – 2002

◇ [Rec02/complexes-r2.tex/alg-r2:3] Supposons $z \neq 0, 1$. La multiplication par $1/z$ conserve l'orthogonalité, donc on cherche les points tels que $1, z$ et z^2 forment un triangle rectangle. On distingue suivant que le triangle est rectangle en $1, z$ ou z^2 ; ce qui revient à résoudre $\frac{z^2-1}{z-1} \in i\mathbb{R}, \dots$

◆ **COM.35** On définit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f(z) = 1 + e^{iz}$. On note $D = \{z \in \mathbb{C} ; \Re(z) \leq 0 \text{ et } 0 \leq \Im(z) \leq \frac{\pi}{4}\}$. Déterminer l'image de D par f . TPE MP – 2003

◇ [Rec03/complexes-r3.tex/r3:326]

◆ **COM.36** Soit $M(z)$ un point d'affixe z . Trouver le lieu des points M tels que $M(z), M'(z^2)$ et $M''(z^5)$ sont alignés. CCP MP – 2003

◇ [Rec03/complexes-r3.tex/r3:122]

◆ **COM.37** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$; on note $z = x + iy$. Existe-t-il un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$? (★★★) Mines MP – 2004

◇ [Rec04/complexes-r4.tex/r4:236] ???

Suites réelles ou complexes

◆ SUI.1 (Moyenne de Cesàro) (★★)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \dots + u_n),$$

que l'on appelle **moyenne de Cesàro** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- 1) Si on note $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .
- 2) Montrer que la réciproque est fautive (on considèrera la suite de terme général $(-1)^n$).
- 3) Montrer que le résultat peut être étendu aux cas où $\ell = \pm\infty$.
- 4) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers une limite ℓ . Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:6]

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Posons $M = \max\{|u_0|, \dots, |u_N|\}$, alors

$$|v_n - \ell| \leq \frac{MN}{n} + \varepsilon \frac{n-N}{n} \leq 2\varepsilon$$

pour $n \geq \max(N, \frac{MN}{\varepsilon})$.

◆ SUI.2 (Cesàro ++) (★★)

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes convergentes, de limites respectives a et b . Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n}{n+1}.$$

On pourra commencer par étudier le cas où $a = 0$.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:22]

puis le théorème de Cesàro pour conclure que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$.

On utilise des ε pour montrer que si $a = 0$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 ;

◆ SUI.3 (Cesàro +) (★★)

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$. On définit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n 2^k u_k.$$

Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:30]

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 2ℓ .

◆ SUI.4 (Cesàro +) (★★)

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$. On définit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k u_k.$$

Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:31]

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell/2$.

◆ SUI.5 (Cesàro +) (★★)

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$. On définit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}.$$

Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

INDICATION : On utilisera la propriété suivante : il existe un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{o(1)}{n}.$$

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:32]

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

◆ SUI.6 (Cesàro +) (★★)

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. On définit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{u_n}{1} + \frac{u_{n-1}}{2} + \frac{u_{n-2}}{4} + \dots + \frac{u_0}{2^n} = \sum_{k=0}^n \frac{u_{n-k}}{2^k}.$$

Que peut-on dire de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:33]

Converge vers 0 ?

◆ SUI.7 (Changement d'ordre dans $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$) (★★)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente, notons ℓ sa limite. Soit $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une *bijection*. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_{\phi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est donc l'analogie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mais après qu'on a « changé l'ordre des termes » (l'ordre est maintenant quelconque.) Montrer que, malgré ce changement d'ordre, on a $\lim v = \ell$.

Peut-on généraliser à ϕ injective ? ϕ surjective ?

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:4]

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon$. On pose $J = \phi^{-1}(\{0, \dots, N\})$, et $P = \max J$. Alors, pour tout $p \geq P$, on a $p \notin J$ et par conséquent, ϕ étant bijective, on a $\phi(p) \notin \phi(J) = \{0, \dots, N\}$, et donc $\phi(p) > N$. En conséquence de quoi, pour tout $p \geq P$, on a $|u_{\phi(p)}| \leq \varepsilon$. □

◆ SUI.8 (♣)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel ℓ . La suite $(E(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:18]

Non, il suffit de prendre par exemple $u_n = (-1)^n/n$, alors $E(u_n) = 0$ si n est pair et -1 si n est impair.

◆ SUI.9 (Limites doubles différentes) (♣)

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(n+1)^k} \right)$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(n+1)^k} \right)$.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:19]

0 et 1 respectivement.

◆ SUI.10 (♣)

On se place dans \mathbb{Q} . L'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}^+ ; x^2 < 2\}$ admet-t-il un plus grand élément dans \mathbb{Q} ? Un majorant dans \mathbb{Q} ? Une borne supérieure dans \mathbb{Q} ?

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:0]

Non, oui, non.

◆ SUI.11 (★★)

On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_1 + \dots + u_n}$.

Donner un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $n \rightarrow \infty$.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:1]

À FINIR !!!

◆ SUI.12 (♣)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle tendant vers $+\infty$. Montrer que $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:1bis]

Soit M un réel. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geq N \Rightarrow x_n \geq M$. Ce qui veut dire que l'ensemble des x_n tels que $x_n < M$ est fini. Alors $\min(x_0, \dots, x_N)$ est le plus petit élément de $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

◆ SUI.13 (★★)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Montrer que $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément ou un plus grand élément.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:2]

◆ SUI.14 (♣)

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application injective. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = f(n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:5]

◆ SUI.15 (♣)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général

$$u_n = \frac{E(x) + E(2x) + \dots + E(nx)}{n^2}.$$

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:7]

Par un bête encadrement, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{x}{2}$.

◆ **SUI.16** (*)
 Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = a$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = a.$$

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:8]

□ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $|x_{n+1} - x_n - a| < \varepsilon$. On a alors, pour tout $n \geq N$:

$$x_n - na = \sum_{k=N}^{n-1} (x_{k+1} - x_k - a) + x_N - Na$$

donc $\left| \frac{x}{n} - a \right| \leq \left(\frac{n-N}{n} \right) \varepsilon + \frac{x_N - Na}{n}$,

et, pour n suffisamment grand, cette dernière quantité est inférieure à 2ε . □

◆ **SUI.17** (*)
 Étudier, selon les valeurs de l'entier p , la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \frac{1 + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}$$

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:9]

Pour $p \geq 2$ on peut simplement majorer $k!$ par $n!$ et montrer que la suite tend vers 0. Pour $p = 1$, on sépare la somme en deux : les $n - 1$ premiers termes (et ça tend vers 0 d'après le résultat précédent) et le dernier qui est $n!/(n+1)!$, et

tend aussi vers 0. Pour $p = 0$, pareil, mais le dernier terme est égal à 1, et la suite tend vers 1.

Cf. la version où l'on étudie $\sum u_n$ dans l'exercice **SRN.81** page 419.

◆ **SUI.18** (♣)
 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle *non majorée*. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:10]

Faire une construction explicite de la sous-suite.

◆ **SUI.19** (♣)
 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive tendant vers 0. Alors l'ensemble

$$\{p \in \mathbb{N} ; \forall n \in \mathbb{N}, p \leq n \implies u_n \leq u_p\}$$

est infini.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:11]

Par l'absurde, en prenant le plus grand de ces éléments, et en montrant (on

fabrique une sous-suite croissante par récurrence...) que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas tendre vers 0.

◆ **SUI.20** (♣)
 Que dire de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0; 1]$ et telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot v_n = 1$?

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:14]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \cdot v_n \leq u_n \leq 1$, donc $\lim u_n = 1$. De même avec $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◆ **SUI.21 (Suites convexes)** (*)
 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que : $\forall n \geq 1, 2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}$ (on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **convexe**). Montrer que cette suite est convergente.

INDICATION : On étudiera la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:15]

On pose $w_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la convexité de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entraîne la croissance de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si $w_N > 0$, alors $w_{N+k} > w_N$ et la suite

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 0, donc toujours négative donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît donc converge.

◆ **SUI.22** (*)
 Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn}$ est convergente.

INDICATION : On montrera que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et bornée.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:16]

On écrit que

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{m=k(n+1)}^{kn+k} \frac{1}{m} - \frac{1}{n+1},$$

et dans cette somme, chacun des k termes est supérieur ou égal au dernier, ce qui montre la croissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

premier $\frac{1}{n+1}$. On a alors

$$u_n \leq \frac{(k-1)n}{n+1} \leq k-1,$$

De plus, dans l'expression $u_n = \sum_{m=n+1}^{kn} \frac{1}{m}$, on majore chaque terme pas le premier $\frac{1}{n+1}$. On a alors

ce qui montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, donc converge. Des techniques différentes permettent de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ln k$.

◆ **SUI.23** (*)
 1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\frac{u_n}{1+u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
 2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée telle que $\frac{u_n}{1+u_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:20]

Ce sont des majorations immédiates.

$$u_n = \frac{u_n}{1+u_n^2} (1+u_n^2),$$

1) Posons $\alpha_n = \frac{u_n}{1+u_n} \neq 1$, alors $u_n = \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}$.

on obtient

$$\frac{u_n}{1+u_n^2} \leq u_n \leq \frac{u_n}{1+u_n^2} (1+M^2)$$

2) Notons M un réel tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $1 \leq 1+u_n^2 \leq 1+M^2$ donc, en écrivant u_n sous la forme

ce qui permet de conclure grâce au théorème d'encadrement.

◆ **SUI.24**
 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe bornée. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:12]

On pose $u_n = v_n + iw_n$, alors il existe une sous-suite convergente $(v_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et comme la suite $(w_{\phi(n)})$ est bornée, elle admet une sous-suite

$(u_{\phi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente. On montre ensuite que $(u_{\phi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

◆ **SUI.25**
 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe non bornée. Montrer qu'il existe une sous-suite $(u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $|u_{\psi(n)}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. En déduire qu'il existe une sous-suite $(u_{\pi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\Re(u_{\phi(n)}) \rightarrow +\infty \text{ ou } \Re(u_{\phi(n)}) \rightarrow -\infty \text{ ou } \Im(u_{\phi(n)}) \rightarrow +\infty \text{ ou } \Im(u_{\phi(n)}) \rightarrow -\infty.$$

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:13]

◆ **SUI.26** (***)
 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbf{U}$. Étudier la suite de terme général $u_n = \frac{z^n}{(1+z)(1+z^2) \dots (1+z^n)}$.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:17]

On vérifie que

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{z}{1+z^{n+1}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| \rightarrow 1 \\ |z| & \text{si } |z| < 1. \end{cases}$$

Si $|z| < 1$, on pose $r = \frac{1}{2}(1+|z|)$ donc $|z| < r < 1$; donc à partir d'un certain rang $\left| \frac{z}{1+z^{n+1}} \right| < r$; en comparant avec une suite géométrique, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Si $|z| > 1$ alors clairement $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc la suite des modules est décroissante minorée et ne peut tendre que vers 0 : plus vite que $1/2^n$ par exemple...

Puis on utilise d'Alembert, ou on le redémontre.

◆ **SUI.27** (**)
 Étudier la suite complexe définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|).$$

Montrer qu'il existe une courbe de \mathbb{C} , d'équation simple, contenant tous les points de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:23]

La partie imaginaire est exponentiellement décroissante. Quant au module, il ne saurait que décroître, ce qui fait que la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Ces deux résultats mènent à la convergence de la suite des parties réelles (positive pour $n \geq 2$) et donc de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Plus précisément, si $u_0 \in \mathbb{R}^-$ on a $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Sinon, $u_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui permet de noter $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ avec la coupure sur \mathbb{R}^- .

rence :

$$\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n} \quad \rho_n = \rho_0 \frac{\sin \theta_0}{2^n \sin \left(\frac{\theta_0}{2^n} \right)}$$

Cela donne

$$\theta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \rho_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho_0 \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}$$

On obtient facilement $\rho_{n+1} = \rho_n \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$ et $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$ donc, par récurrence

et

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho_0 \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} = \frac{\text{Im } z_0}{\text{Arg } z_0}}$$

◆ **SUI.28 (Utilisa. du critère de Cauchy)** (★★)
 Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction injective. Montrer que

$$\frac{f(1)}{1^2} + \frac{f(2)}{2^2} + \dots + \frac{f(n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:21] $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{(2n)^2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{8}.$
 On montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est croissante, n'est pas de Cauchy. En effet, puisque notamment $f(u_{n+1}) + \dots + f(u_{2n}) \geq 1 + 2 + \dots + n.$

◆ **SUI.29** (★★★)
 Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^n x^k = 1$ admet une et une seule solution $u_n \in [0; 1]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. En notant ℓ sa limite, trouver un équivalent de $u_n - \ell.$

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:24] $x^y - 2x + 1 = 0$ et y , en fonction de x , s'exprime comme $y = \frac{\ln(2x-1)}{\ln x}.$
 (Cf également une autre solution en SUI.39 page suivante)
 On étudie $f_n(x) = x \frac{1-x^n}{1-x}$. On note que $f_n(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$ donc $\frac{1}{2} < u_n$. De plus $f_n(u_{n-1}) = 1 + u_{n-1}^n > 1$ donc $u_n < u_{n-1}$. Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ donc converge.
 Sa limite est $\lim u_n = \frac{1}{2}$ (dans le cas contraire, injecter et trouver une contradiction).
 Puisque u_n est racine de l'équation $x^{n+1} - 2x + 1 = 0$, on note y tel que

En récrivant $\varepsilon = u_n - \frac{1}{2}$ et $y = n + 1$, on obtient

$$y = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}} + 2\varepsilon \sim \frac{\ln 2\varepsilon}{\ln \frac{1}{2}}.$$

$$a_n - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{2^{n+2}}.$$

◆ **SUI.30** (*)
 Soit f une bijection de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* telle que la suite $\left(\frac{f(n)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente. Que peut-on dire de la limite de cette suite?

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:25] Elle vaut 1. (Raisonnement par l'absurde).

◆ **SUI.31 (Exercice faux)**
 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers cette valeur. ????

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:26] On peut alors construire une suite extraite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $|u_{\phi(n)} - x_0| > \varepsilon.$
 C'est faux ! en prenant $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x > 1 \\ 1/x + 1 & \text{si } x \leq 1, \end{cases}$ alors 0 est la seule valeur d'adhérence mais les termes pairs tendent vers $+\infty$. Il faut donc une hypothèse supplémentaire.
 Notons x_0 l'unique valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas. Alors il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N}; |u_n - x_0| > \varepsilon\}$ est infini.
 Seulement, $\mathcal{A} = \mathbb{N} \setminus \mathcal{A}'$ est également infini puisque x_0 est valeur d'adhérence. On fabrique donc une suite extraite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $|x_0 - w_n| < \varepsilon$. Cette suite est bornée et admet une sous-suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente; elle converge bien sûr vers x_0 (qui est la seule valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$).
 De plus on a $f(x_0) = x_0$.
 On prend un module de continuité de f

◆ **SUI.32**
 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant

$$\forall q, p \in \mathbb{N} \quad |u_{p+q} - u_p - u_q| \leq 1.$$

Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:27] On montre que $|u_{kq} - u_q| \leq k - 1$. Ensuite ???

◆ **SUI.33** (★★)
 Donner un exemple de suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles, bornée, divergente, telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0.$$

Donner un exemple de suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles strictement positives, bornée, divergente, telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:34] Poser $u_n = \sin\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$ puis $v = e^{u_n}.$

◆ **SUI.34 (Nombres de Pisot)** (★★★)
 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.
 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \in \mathbb{Z}.$
 2) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:35] T.

◆ **SUI.35**
 Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn}.$

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:36] donc la suite est décroissante. Moralité : elle converge.
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0 et

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} < 0$$

◆ **SUI.36**
 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs réelles positives. On note $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}.$
 1) Montrer que si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée, alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On dit alors que **la série $\sum u_n$ converge**. La réciproque est-elle vraie ?
 2) On suppose que $0 \leq u_n \leq v_n$ et que la série $\sum v_n$ converge. Montrer que $\sum u_n$ converge.
 3) Calculer $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Montrer que la série $\sum \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$ converge.
 4) En déduire que la série $\sum 1/n^2$ converge.

◇ [Divers/suitesexo.tex/sui:37]

◆ **SUI.37** (♣)
 On admet ici que l'ensemble E des rationnels compris entre 0 et 1 : $E = \mathbb{Q} \cap [0; 1]$, est **dénombrable**, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $E = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}.$
 Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

◇ [Divers/suitesexo.tex/div:106]

◆ **SUI.38** (★★)
 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$ Que peut-on dire de ces suites?

$$= \left(u_n + \frac{v_n}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}v_n^2 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0.$$

◇ [Divers/suitesexo.tex/div:129]

◆ **SUI.39** (★★★) X PC - 2005
 Notons $P_n = X^n + X^{n-1} + \dots + X - 1.$
 1) Montrer que P_n admet une unique racine $x_n > 0$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge; on notera ℓ sa limite, que l'on déterminera.
 2) Trouver un équivalent de $x_n - \ell.$

◇ [Rec00/suites-r0.tex/div:170] donc $2x_n + o(x_n) = 1$
 (Cf également une autre solution en SUI.29 page précédente)
 1) On vérifie que $P_n(0) = -1$ et $P_n(1) > 0$ donc P_n admet une racine; de plus, P_n est strictement monotone sur $[0; +\infty[$ donc cette racine est unique. Enfin, il est aisé de prouver que la suite *suitex* décroît donc admet une limite.
 2) On écrit $x_n = \frac{1}{2} + h_n$. Alors $\left(\frac{1}{2} + h_n\right) \left(1 - \left(\frac{1}{2} + h_n\right)^n\right) = \frac{1}{2} - h_n.$
 On a $x_n - x_n^{n+1} = 1 - x_n$ mais $0 < x_n < x_2 < 1$ donc $x_n^n < x_2^n = o(1),$

De même, la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît, $h_n < h_2 < \frac{1}{2}$ et, puisque $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, pour tout $1 > \lambda > \frac{1}{2}$, on peut trouver un rang à partir duquel

$$\frac{1}{2} + h_n < \lambda < 1$$

donc $h_n = o(\lambda^n)$; notamment, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)h_n = 0$. On revient à notre

équation :

$$\begin{aligned} 2h_n &= \left(\frac{1}{2} + h_n\right)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} [1 + 2h_n]^{n+1} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} e^{(n+1) \ln(1+2h_n)} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} e^{(n+1)[2h_n + o(h_n)]} \\ &\sim \frac{1}{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

donc

$$h_n \sim \frac{1}{2^{n+2}}$$

◆ **SUI.40** ICNA PC – 2001
 Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

◇ [Rec01/suites-r1.tex/sui-r:1] On encadre par n fois le plus petit (resp. grand) terme :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad \text{donc} \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

◆ **SUI.41** CCP MP – 2001
 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \stackrel{\text{déf.}}{=} X^{2n+1} - X^{n+1} - 1$.
 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n possède une unique racine réelle. On note u_n cette racine.
 2) Étudier les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(u_n^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(nu_{n-1})_{n \geq 2}$.

◇ [Rec01/suites-r1.tex/sui-r:2] $P(0) = -1 < 0$ donc P_n a une et une seule racine réelle (faire un dessin). De plus, $P_n(2) > 0$ donc $u_n \in [1; 2]$.
 1) La dérivée $P'_n = (2n+1)X^{2n} - (n+1)X^n$ s'annule en 0 et en $\ell_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{1/n}$, ce qui donne l'allure de P' et donc de P ; or
 2) On va montrer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ en posant $u_n = 1 + \varepsilon_n$ et en injectant.

◆ **SUI.42** TPE MP – 2001
 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit a_n par $\frac{\tan a_n}{a_n} = \frac{1}{n}$. Existence, limite et DL en $1/n$ de a_n ?

◇ [Rec01/suites-r1.tex/sui-r:3]

◆ **SUI.43** TPE MP – 2001
 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Soient $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux sous-suites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui convergent. Est-il suffisant que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réalisent une partition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que cette dernière converge? Sinon, contre-exemple.

◇ [Rec01/suites-r1.tex/sui-r:6] Il faut que $\lim v = \lim w$.

◆ **SUI.44** Centrale-Supélec MP – 2001
 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
 1) Montrer que l'équation $x^n = x + n$ admet une unique solution sur \mathbb{R}^{++} , notée x_n .
 2) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et trouver sa limite ℓ .
 3) Trouver un équivalent de $(x_n - \ell)_n$.

◇ [Rec01/suites-r1.tex/sui-r:10]
 1) $f : x^n - x - n$ est croissante sur $\left[\frac{1}{n^{1/(n-1)}}; +\infty\right]$ et décroissante avant, ce qui montre, avec $f(0) = -n$, qu'il y a une unique solution.
 2) On va montrer que x_n tend vers 1; pour cela, on pose $x_n = 1 + \varepsilon_n$, alors $\varepsilon_n > 0$ car $f(1) = -n$, et $\varepsilon \leq 1$ car $f(2) \geq 0$. Ainsi, $\varepsilon_n \in [0; 1]$. De plus, $n+1 \leq (1+\varepsilon)^n \leq n+2$ donc $(n+1)^{1/n} \leq 1+\varepsilon_n \leq (n+2)^{1/n}$

et, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow \infty} 1+\varepsilon_n = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.
 On peut donc injecter ceci dans l'équation $(1+\varepsilon_n)^n = x+n$ en passant aux notations logarithmiques et on trouve

$$\varepsilon_n \sim \frac{\ln n}{n}.$$

◆ **SUI.45** ENS Cachan MP – 2002
 (sans préparation, durée 45 min.)
 On considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < a_n \leq M \quad \text{et} \quad a_n \leq \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

Étudier l'existence et l'unicité d'une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad a_j = \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

◇ [Rec02/suites-r2.tex/sui-r:17]
 $c_n = \sum_{k \geq 1} k(-u_k + u_{k-1})$ converge, or on sait que u_n est positive décroissante et $\sum u_n$ converge. Comme $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k - nu_n$, il suffit de voir que $nu_n \rightarrow 0$, ce qui est vrai car $nu_n \leq 2 \sum_{k=n/2}^n u_k \rightarrow 0$. Cela permet alors de définir λ_0 , il faut encore vérifier...
 La série $\sum_{k \geq 1} \lambda_k$ converge; si $u_n = -a_{n+1} + a_n$, on veut montrer que

◆ **SUI.46** Mines PC – 2002
 Soit $x \in]0; 1[$. Montrer qu'il existe une unique suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs, croissante, telle que

$$x = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} + \dots$$

◇ [Rec02/suites-r2.tex/sui-r:16]
 Comme la suite doit être croissante, on a $\frac{1}{x_1} < x \leq \sum_{k \geq 1} x_1^{-k} = \frac{1}{x_1 - 1}$, on trouve x_1 (unicité), puis on continue...
 Il faut simplement la calculer. Notamment, montrer que $x_1 = E(1/x) + 1$ puis faire une récurrence. Montrer ensuite que la suite obtenue converge, et qu'elle converge bien vers x .

◆ **SUI.47** Centrale PC – 2002
 Montrer qu'il existe, dans $[0; 1]$, une unique solution x_n à l'équation $x^n + x - 1 = 0$. Étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Rec02/suites-r2.tex/sui-r:14]
 On trace le graphe de $x \mapsto x^n$ et celui de $x \mapsto 1 - x$: on montre ainsi l'existence et l'unicité de la solution. Par ailleurs, il est clair que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. En effet, la courbe de $x \mapsto x^{n+1}$ étant en-dessous de la courbe $x \mapsto x^n$, on a nécessairement croissance de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme cette suite est majorée (par 1), elle converge vers une limite ℓ . Si $\ell < 1$, on peut passer à la limite dans l'équation $x_n^n = 1 - x_n$ et trouver $\ell = 1$: contradiction. Donc $\ell = 1$ (remarque : on ne peut alors plus passer à la limite dans l'équation!). On peut chercher un équivalent de $1 - x_n = h_n$: on a $((1 - h_n)^n - h_n)/h_n = 0$, comme $h_n \rightarrow 0$ une formule de Taylor à l'ordre 2, on montre que $h_n \sim 1/n$.

◆ **SUI.48** CCP PC – 2002
 Écrire le développement généralisé en $1/n$ à l'ordre 2 de $u_n = \sum_{k=2}^n \sin \frac{k}{n^2}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

◇ [Rec02/suites-r2.tex/sui-r:8]
 On applique encore une formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 et l'on tombe sur une somme de Riemann pour $f(x) = x$ sur $[0; 1]$: $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$.

◆ **SUI.49** CCP PC – 2002
 Étude de la suite définie par $u_n = \cos n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 INDICATION : *On pourra considérer $u_{n+2} - u_n$ et $u_{n+2} + u_n$, et raisonner par l'absurde.*

◇ [Rec02/suites-r2.tex/sui-r:9]
 On a $\cos(n+2) - \cos n = -2\sin 1 \sin(n+1)$ et $\cos(n+2) + \cos n = 2\cos 1 \cos(n+1)$. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait vers une limite ℓ , alors on aurait $2\ell = 2\ell \cos 1$ ce qui n'est possible que si $\ell = 0$. De plus, la suite $(\sin n)$ convergerait vers 0 puisque $\sin 1 \neq 0$. Mais on a toujours $\sin^2 n + u_n^2 = 1$, contradiction.

◆ **SUI.50** TPE PC – 2002
 Montrer que l'équation $\text{th}(x) \cdot \tan(x) = 1$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$. Calculer $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n\pi)$. Donner un équivalent de $(x_n - n\pi - \alpha)$ en $+\infty$.

◇ [Rec02/suites-r2.tex/sui-r:6]
 Pour l'existence, on fait le tableau de variations. Comme $x_n \rightarrow +\infty$ on a $\text{th}(x_n) \rightarrow 1$ et $\tan x_n \rightarrow 1$, on devine donc que $\alpha = \pi/4$.
 On pose

$$\text{th}(\delta_n + n\pi + \frac{\pi}{4}) \cdot \tan(\delta_n + n\pi + \frac{\pi}{4}) = 1,$$

soit

$$\text{th}(\delta_n + n\pi + \frac{\pi}{4}) \cdot \tan(\delta_n + \frac{\pi}{4}) = 1,$$

l'équation $\text{th}(x_n) \cdot \tan(x_n) = 1$ devient donc

$$\delta_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{4}.$$

avec $\delta_n \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. On en déduit donc que $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \delta_n\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ et on injecte ce qui donne donc que δ_n tend vers 0.

Des développements $(1 + 2e^{-2n\pi - \pi/2} + o(e^{-2n\pi})) \cdot (1 + 2\delta_n + o(\delta_n)) = 1,$

et $\text{th}(A) = 1 - 2e^{-2A} + o(e^{-2A})$ donc $2\delta_n + o(\delta_n) = 2e^{-2n\pi - \pi/2} + o(e^{-2n\pi})$

et $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 + 2x + o(x),$

on tire $\text{th}\left(\delta_n + n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2e^{-2n\pi - \pi/2} + o(e^{-2n\pi}),$ et donc finalement : $\boxed{\delta_n \sim e^{-2n\pi - \pi/2}}$

◆ **SUI.51** TPE MP – 2002

Soit $a_1 > 0$. Montrer l'existence de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{1 + \cos t}{t} dt = \frac{1}{n}.$$

Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. Étudier la suite $(a_n/n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Rec02/suites-r2.tex/sui-r2:11] On commence par remarquer que l'intégrale est positive et diverge (car $\int dt/t$ diverge en $+\infty$ et $\int \frac{\cos t}{t} dt$ converge). Donc si F est la primitive de $t \mapsto \frac{1 + \cos t}{t}$, qui s'annule en a_1 sur $]0; +\infty[$. F est strictement croissante de limite $+\infty$ en $+\infty$, donc $a_n = F^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)$ est uniquement déterminée et croissante tendant vers $+\infty$. En intégrant, on a $\ln(a_n/a_1) + \int_{a_1}^{a_n} \frac{\cos t}{t} dt \sim \ln n + o(1)$. Comme $\int_{a_1}^{a_n} \frac{\cos t}{t} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$, il vient $a_n/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a_1 e^{-l}$.

◆ **SUI.52** INT Management MP – 2002

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

- 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $\tan x_n = x_n$.
- 2) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
- 3) On pose $z_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$. Donner un équivalent de z_n .

◇ [Rec02/suites-r2.tex/sui-r2:13] On doit avoir $((2n+1)\frac{\pi}{2} - z_n) \sin z_n = \cos z_n$, or $\cos z_n$ reste bornée donc $\sin z_n$ tend vers 0 donc $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. On écrit ensuite un développement limité : $\frac{1}{z_n} \sim \frac{1}{\tan z_n} = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n\pi$ et donc $z_n \sim \frac{2}{(2n+1)\pi} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$.

◆ **SUI.53** CCP PC – 2002

Montrer que

$$\inf_{\alpha \in]0; \pi[} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} |\sin n\alpha| \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

◇ [Rec02/suites-r2.tex/sui-r2:18] Si $\theta \notin \pi\mathbb{Q}$, alors $\sup_n |\sin(n\theta)| = 1$, si $\theta \in \pi\mathbb{Q}$, alors $\sup_n |\sin(n\theta)| \geq \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. Si $\theta \in \pi\mathbb{Q}$ et si on a $\alpha = p\pi/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux,

◆ **SUI.54** X PC – 2003

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x + \sin x = n \tag{E_n}$$

- 1) Montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, l'équation (E_n) admet une unique solution réelle x_n .
- 2) Trouver un équivalent de x_n .
- 3) Trouver les termes suivants du développement de x_n (autant de termes que le temps le permet).

◇ [Rec03/suites-r3.tex/r3:17] 3) Posons $\delta_n = x_n - \ln n$. On obtient en injectant :

$$e^{\delta_n} = 1 - \frac{1}{n} \sin(\delta_n + \ln n),$$

ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$. On peut donc développer e^{δ_n} :

$$1 + \delta_n + o(\delta_n) = 1 - \frac{\sin(\delta_n + \ln n)}{n}$$

- 1) Pour $n \geq 2$ suffisamment grand, la fonction $x \mapsto e^x + \sin x$ établit une bijection de \mathbb{R}^+ sur $]1; +\infty[$, de \mathbb{R}^- sur $]-1; 1[$, la fonction est toujours < 2 (faire un dessin). Donc à partir de $n \geq 2$, la solution existe et est unique.
- 2) $x_n \sim \ln n$ de manière évidente puisque $|e^{x_n} - n| \leq 1$ donc $\ln(n-1) \leq x_n \leq \ln(n+1)$.

montre que $\delta_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc $\delta_n = -\frac{\sin(\ln n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Cela permet d'écrire, en utilisant une égalité des accroissement finis (et non un développement limité, qui se justifie mal...) :

$$1 + \delta_n + o(\delta_n) = 1 - \frac{\sin(\ln n)}{n} + \frac{\delta_n \cos(\xi_n)}{n},$$

Conclusion : $x_n = \ln n - \frac{\sin(\ln n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

◆ **SUI.55** Mines PC – 2003

Montrer que l'équation suivante :

$$(n-1)\ln(1-x) + nx = 0 \tag{E_n}$$

admet une unique solution x_n . Étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Rec03/suites-r3.tex/r3:227]

◆ **SUI.56** CCP MP – 2003

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites équivalentes. Montrer qu'à partir d'un certain rang, elles ont le même signe. En déduire le signe de

$$u_n = \text{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \text{Arc tan}\left(\frac{1}{n}\right)$$

au voisinage de $+\infty$.

◇ [Rec03/suites-r3.tex/r3:120]

◆ **SUI.57 (Cesàro ++)** CCP PC – 2003

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de limite L. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n^2}.$$

◇ [Rec03/suites-r3.tex/r3:391] Ça devrait bien tendre vers L/2 c'te chose-là. M'est avis que c'est du Cesàro qui se cache là-d'ssous, démonstration bien identique aux autres.

◆ **SUI.58** CCP PC – 2003

Notons E l'ensemble des suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $A_0 = 1, A_n \geq 1$ et $A_n^2 \leq A_{n+1} A_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

- 1) Trouver les suites constantes de E. Montrer que la suite $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$ est élément de E.
- 2) Notons $\lambda_0 = \mu_0 = 1, \lambda_n = \frac{A_{n-1}}{A_n}$ et $\mu_n = \frac{1}{A_n^{1/n}}$.
 - a) Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que $\lambda_n^n \leq \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.
 - b) Montrer que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - c) Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq j \leq n$. Montrer que $\frac{A_{n+1}}{A_{n+1-j}} \leq \frac{A_n}{A_{n-j}}$ et en déduire que $A_j \cdot A_{n-j} \leq A_n^2$.

◇ [Rec03/suites-r3.tex/r3:140]

◆ **SUI.59** INT Management PC – 2003

On note n_k le reste de la division euclidienne de n par k . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_n}{n^2}.$$

Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Rec03/suites-r3.tex/r3:54] Précédente peut être affinée en quelque chose qui tend vers 1/4. De plus, on a une minoration facile en 1/8. Puisque $n_k \leq k$, on en déduit que $u_n \leq \frac{n+1}{2n}$. Donc si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, sa limite est comprise entre 1/8 et 1/4. Puisque, pour $k \geq E\left(\frac{n}{2}\right), n_k = n - k$, on en déduit que la majoration **À FINIR !!!**

◆ **SUI.60** IIE MP – 2003
 On pose

$$u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

- 1) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- 2) Rappeler la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 3) Étudier la limite de la suite de terme général $\sin(n! \pi e)$.

◇ [Rec03/suites-r3.tex/r3:131]

◆ **SUI.61** X MP – 2004
 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives. Soit p un réel, $p \geq 1$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n a_{n+1} a_{n+2}^p - a_n = 0$. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

◇ [Rec04/suites-r4.tex/r4:275]

◆ **SUI.62** (★★) Mines PC – 2004
 On définit $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in]0; 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
- 2) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
- 3) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- 4) Montrer que $0 \leq x - a \leq a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICATION : Calculer $-f_n(a) + f_n(x)$ et $f(a) - f_n(a)$.

◇ [Rec04/suites-r4.tex/r4:127]

◆ **SUI.63** $(x^{2n} - 2nx + 1 = 0)$ (*) INT Télécom MP – 2004
 On considère l'équation $E_n : x^{2n} - 2nx + 1 = 0$. Montrer qu'il existe une plus grande racine x_n dans \mathbb{R} à E_n . Donner le développement asymptotique de x_n à l'ordre 2 quand n tend vers l'infini.

◇ [Rec04/suites-r4.tex/r4:174]

◆ **SUI.64 (Limites doubles)** (★★) CCP PC – 2004
 Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note $u_{n,p} = \frac{1}{p^n} \left[\sum_{k=1}^p \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{1/n} \right]^n$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} u_{n,p}$ et $\lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n,p}$.

◇ [Rec04/suites-r4.tex/r4:112] que l'on traite (difficilement !) en passant au logarithme.
 On fixe n , alors la limite $p \rightarrow \infty$ est simplement **À FINIR !!!**

$$\int_0^1 (1+x)^{1/n} dx$$

◆ **SUI.65** (★★) X PC – 2005
 Étudier la suite complexe définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|).$$

◇ [Rec05/suites-r5.tex/r5:23] rence :
 La partie imaginaire est exponentiellement décroissante. Quant au module, il ne saurait que décroître, ce qui fait que la suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Ces deux résultats mènent à la convergence de la suite des parties réelles (positive pour $n \geq 2$) et donc de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 Plus précisément, si $z_0 \in \mathbb{R}^-$ on a $z_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Cela donne
 Sinon, $z_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui permet de noter $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ avec la coupure sur \mathbb{R}^- .
 On obtient facilement $\rho_{n+1} = \rho_n \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\theta_{n+1} = \frac{\theta}{2}$ donc, par récurrence et

$$\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n} \quad \rho_n = \rho_0 \frac{\sin \theta_0}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

$$\theta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \rho_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho_0 \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}$$

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho_0 \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} = \frac{\text{Im } z_0}{\text{Arg } z_0}$$

◆ **SUI.66** (★★★) Centrale PC – 2005
 (Avec Maple)
 On définit $f_n : x \mapsto x - n \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$.

- 1) Étudier $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2) Montrer que $f_n(-1) < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \in]-2; -1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
- 4) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers -2 .
- 5) Vérifier avec Maple.
- 6) On pose $v_n = x_n - 2$. Trouver un équivalent de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- 7) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

◇ [Rec05/suites-r5.tex/r5:12]

- 1) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers 0.
- 2) On cherche à montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(-1) < 0$, ce qui revient à dire que

$$1 + n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > 0.$$

On utilise pour cela la fonction auxiliaire

$$g : t \mapsto 1 + t \ln\left(1 - \frac{1}{t+1}\right).$$

On calcule alors que $g(0) = 0$ on voudrait maintenant montrer que $g'(t) > 0$ pour tout $t > 0$ — on peut demander à Maple de calculer g' , tant qu'à faire :

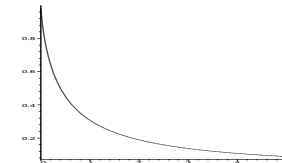
```
g:=t->1+t*ln(1-1/(t+1));
diff(g(t),t);
```

et le résultat est

$$\ln\left(1 - \frac{1}{t+1}\right) + \frac{t}{(t+1)^2} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right),$$

ce qui malheureusement n'est pas éclairant. Pourtant, un simple affichage de la fonction semble suggérer que le résultat est vrai :

```
plot(g,0..5);
```



Qu'à cela ne tienne, on peut toujours dériver deux fois : le résultat affiché par Maple est horrible, mais on peut forcer la simplification algébrique :

```
simplify(diff(g(t),t,t));
```

et le résultat est nettement plus sympathique :

$$g'' : t \mapsto \frac{1}{(t+1)^2 t}$$

ce qui prouve que $g'' > 0$; puisque de plus on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} g'(t) = 0$, on en déduit que $g'(t) > 0$ pour tout $t > 0$, donc que $g(t) > 0$ pour tout $t > 0$ et finalement que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(-1) < 0.$$

- 3) Montrons que f_n est injective sur $]-2; -1[$: pour cela, il suffit de prouver qu'elle est monotone. Or la dérivée de f_n est aisée à calculer — mais comme on est paresseux, on demande quand même à Maple :

```
f:=(n,x)->x-n*ln(1+x/(n+1));
diff(f(n,x),x);
```

$$1 - \frac{n}{(n+1) \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)}$$

ce qui prouve que $f'_n(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-2; 1[$. Il reste maintenant à prouver que $f_n(-2) \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. Pour cela, on définit une fonction auxiliaire

$$h : t \mapsto 2 - n \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right),$$

par exemple avec l'ordre

```
h:=t->f(t,-2);
```

(On notera que h est définie sur $]1; +\infty[$ seulement.) Pour étudier le signe de h , on calcule d'abord la dérivée

```
simplify(diff(h(t),t));
```

ce qui n'est guère éclairant, puis la dérivée seconde :

```
simplify(diff(h(t),t,t));
```

ce qui est mieux : $h'' : t \mapsto \frac{4}{(t-1)^2(t+1)^2} > 0$; puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} h'(t) = 0$, on en déduit que $h'(t) < 0$ pour tout $t > 1$ et finalement h est décroissante et de limite nulle en $+\infty$, ce qui montre que h est strictement positive sur $]1; +\infty[$ et finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(-2) > 0.$$

On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe au moins une solution à l'équation $f_n(x) = 0$ sur $]-2; -1[$. Par injectivité de f_n sur cet intervalle :

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } x_n \in]-2; -1[\text{ tel que } f_n(x_n) = 0.}$$

- 4) On sait que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée. On écrit alors que $f_n(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne successivement

$$x_n - n \ln\left(1 + \frac{x_n}{n+1}\right) = 0,$$

$$x_n - n \left[\frac{x_n}{n+1} - \frac{x_n^2}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = 0.$$

On simplifie alors par x_n (qui est toujours non nul) :

$$x_n \cdot \frac{n}{2(n+1)^2} = -\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$x_n = -2 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -2.$$

- 5) On commence par essayer de voir si Maple sait trouver les solutions de l'équation :

```
solve(f(n,x)=0,x);
```

mais le résultat est décevant : Maple ne donne comme solution que... 0! En fait, Maple étant bête comme ses pieds, il n'a même pas idée que n puisse être un entier. Pour autant qu'il sache, n peut tout aussi bien être un complexe, ou une autre bête sordide (une liste, un tableau, un booléen...), auquel cas la résolution est évidemment moins triviale. On lui suggère donc que n est un réel positif et on repose la question :

```
assume(n>=0);
solve(f(n,x)=0,x);
```

La réponse est alors

$$-n \operatorname{LambertW}\left(-\frac{n+1}{n} \cdot e^{-(n+1)/n}\right) - n - 1,$$

où la fonction « LambertW » désigne la « fonction W de Lambert », fonction connue en interne par Maple et désignant la bijection réciproque de $x \mapsto x e^x$. On définit alors l'application `sol` et on vérifie sur un exemple :

```
sol:=n->solve(f(n,x)=0,x)
sol(16);
```

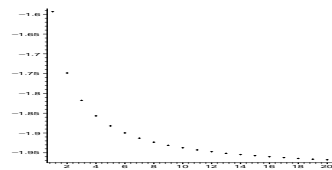
$$-16 \operatorname{LambertW}\left(-\frac{17}{16} \frac{1}{e^{17/16}}\right) - 17, 0$$

C'est là qu'on s'aperçoit qu'il y a un lièvre : Maple donne deux solutions ! On sélectionne la première en posant par exemple

```
u:=n-> sol(n)[1];
```

On affiche ensuite le graphe de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour des valeurs de n comprises entre 1 et 20 :

```
plot([seq([n,u(n)], n=1..20)],
style=point,color=black);
```



6) On écrit $f_n(x_n) = 0$ et on écrit $x_n = 2 + v_n$, puis on développe à l'ordre 2...

7) Montrons enfin que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante (la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sera alors également décroissante). Tout d'abord, l'on commence par noter que, si $t \in]-2; -1[$, la suite de terme général $f_n(t)$ est strictement décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc

$$f_{n+1}(x_n) < f_n(x_n) = 0,$$

et, puisque f_{n+1} est décroissante sur $] -2; -1[$, on en déduit que f_{n+1} ne peut s'annuler qu'à gauche de x_n , ou encore que

$$x_{n+1} < x_n.$$

◆ SUI.67

(★★★)

Mines PC – 2005

Calculer $\inf_{\substack{\alpha \in]0;1[\\ \alpha/\pi \in \mathbb{Q}}} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} |\sin(n\alpha)| \right)$.

Que dire si $\alpha/\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

◇ [Rec05/suites-r5.tex/r5:125]

Fonctions, continuité

Fonctions usuelles (Maths. Sup)

◆ **FON.1** (L) Résoudre l'équation $\operatorname{sh} x = 1$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/ fon:53] $\operatorname{ch} x = \sqrt{2}$, puis $e^x = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = 1 + \sqrt{2}$, Notons x l'unique solution. On obtient successivement $\operatorname{sh}^2 x = 1$, $\operatorname{ch}^2 x = 2$, donc $x = \ln(1 + \sqrt{2})$.

◆ **FON.2** Montrer que la famille $(x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{R}}$ est libre, c'est-à-dire que, si $n \in \mathbb{N}$ et si $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ est un n -uplet de réels *distincts*, alors pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{a_i x} = 0 \right) \implies (\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0).$$

◇ [Divers/usuellesexo.tex/ fon:1] vers $+\infty$ pour avoir $\lambda_n = 0$. On itère le processus. On divise par $e^{a_n x}$, où les a_i sont dans l'ordre croissant, et on fait tendre x

◆ **FON.3** Montrer que, pour tout $x \in [-1; 1]$, $\operatorname{Arc} \sin x + \operatorname{Arc} \cos x = \frac{\pi}{2}$.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{Arc} \tan x + \operatorname{Arc} \tan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/ fon:46]

◆ **FON.4** Étudier la continuité et la dérivabilité sur \mathbb{R} de $f(x) = \sin[\pi(x - E(x))]$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/ fon:2] Continue mais pas dérivable sur les points entiers.

◆ **FON.5** Montrer que la fonction $x \mapsto \operatorname{sh} x$ admet une fonction réciproque, que l'on notera $\operatorname{Arg} \operatorname{sh}$. Étudier la dérivabilité de cette fonction.
Déterminer la dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{sh} x$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/ fon:3]

◆ **FON.6** Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto f(x)$ définie par
1) $f(x) = \operatorname{Arc} \sin(\sin x)$;
2) $f(x) = \operatorname{Arc} \cos(\cos x)$;
3) $f(x) = \operatorname{Arc} \tan(\tan x)$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/ fon:4]

◆ **FON.7** Après avoir déterminé le domaine de la fonction $x \mapsto f(x) = \operatorname{Arc} \sin(2x\sqrt{1-x^2})$, simplifier au maximum son expression, et tracer le graphe.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/ fon:5]

La racine est bien définie si $|x| \leq 1$. On remarque qu'alors le terme $2x\sqrt{1-x^2}$ est toujours dans $[-1; 1]$. Ainsi, le domaine de définition de f est $[-1; 1]$.

Soit $x \in [-1; 1]$. Alors en posant $\theta = \operatorname{Arc} \sin x$, on a $x = \sin \theta$. De plus, $2x\sqrt{1-x^2} = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$.

On rappelle par ailleurs que

$$\operatorname{Arc} \sin(\sin \phi) = \begin{cases} \phi & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ \pi - \phi & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}; \pi] \\ -\pi - \phi & \text{si } x \in [-\pi; -\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

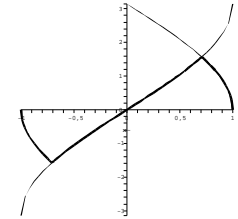
Cela montre que si $x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$, alors $f(x) = 2 \operatorname{Arc} \sin(x)$.

Si $x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}; 1]$, $\operatorname{Arc} \sin(x) \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ donc $2 \operatorname{Arc} \sin(x) \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ donc

$$f(x) = \pi - 2 \operatorname{Arc} \sin(x).$$

Enfin, si $x \in [-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}]$, alors $f(x) = -\pi - \operatorname{Arc} \sin(x)$.

Le graphe est le suivant :



◆ **FON.8** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(a + kb)$ et $B_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(a + kb)$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/ fon:6]

◆ **FON.9** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^n \cos(a + kb)$ et $B_n = \sum_{k=0}^n \sin(a + kb)$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/ fon:7]

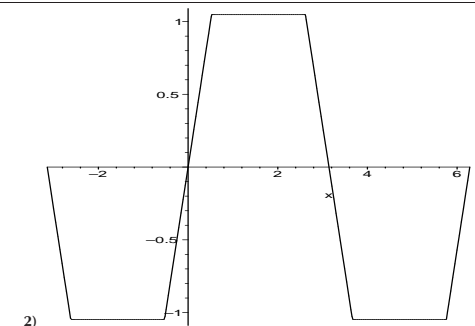
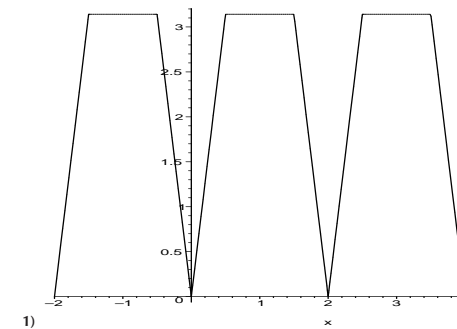
◆ **FON.10** Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

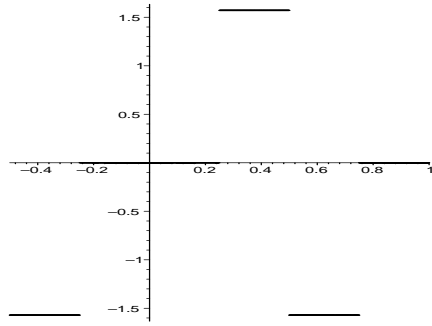
◇ [Divers/usuellesexo.tex/ fon:8]

◆ **FON.11** Étudier les fonctions
1) $f : x \mapsto \operatorname{Arc} \cos(\cos x) + \frac{1}{2} \operatorname{Arc} \cos(\cos 2x)$;
2) $g : x \mapsto \operatorname{Arc} \sin(\sin x) + \frac{1}{3} \operatorname{Arc} \sin(\sin 3x)$;
3) $h : x \mapsto \operatorname{Arc} \tan(x) - \frac{1}{2} \operatorname{Arc} \tan(2x)$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/ fon:9]

Les courbes caractéristiques sont données ci-dessous :





3) **FON.12**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que la courbe d'équation $y = \operatorname{sh} x$ est coupée par la droite d'équation $y = ax + b$ en un ou en trois points.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:10]

FON.13
Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc} \tan x + \operatorname{Arc} \tan \frac{1}{x}$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:11]

$$\operatorname{Arc} \tan x + \operatorname{Arc} \tan \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2}.$$

FON.14
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arc} \sin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \operatorname{Arc} \tan x$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:27]

On vérifie que $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$ et on pose $y = \operatorname{Arc} \sin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$ ce qui implique notamment que $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$. Alors on obtient successivement

$$\sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

et donc, puisque $\cos y \geq 0$,

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \tan y = x.$$

FON.15
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\operatorname{Arg} \operatorname{sh} \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \operatorname{Arg} \operatorname{th} x$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:28]

On pose $y = \operatorname{Arg} \operatorname{sh} \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$, alors

$$\operatorname{sh}(y) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

d'où l'on déduit que $\operatorname{th}(x) = x$.

FON.16 (*)
1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$.
2) En déduire $\sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k x)$.
3) Qu'en déduit-on pour la convergence de la suite de terme général $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \operatorname{th} \left(\frac{x}{2^k} \right)$?

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:29]

2) Essayons avec $n = 3$:

$$\begin{aligned} \operatorname{th} x + 2 \operatorname{th} x + 4 \operatorname{th} x &= \frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x} + 2 \operatorname{th} 2x + 4 \operatorname{th} 4x \\ &= 2 \left(\frac{1}{\operatorname{th} 2x} + \frac{1}{\operatorname{th} 2x} \right) + 4 \operatorname{th} 4x - \frac{1}{\operatorname{th} x} \\ &= 2 \left(\frac{2}{\operatorname{th} 4x} \right) + 4 \operatorname{th} 4x - \frac{1}{\operatorname{th} x} \\ &= 4 \left(\frac{1}{\operatorname{th} 4x} + \operatorname{th} 4x \right) - \frac{1}{\operatorname{th} x} \\ &= \frac{8}{\operatorname{th} 8x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}. \end{aligned}$$

[Divers/usuellesexo.tex]

1) Mettre au même dénominateur $\operatorname{th} x + \operatorname{coth} x$.

Cette astuce nous permet d'écrire ensuite une récurrence montrant que 3) La suite converge vers $\frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{x}$.

$$\sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k) = \frac{2^n}{\operatorname{th} 2^n x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

FON.17 (*)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre $\operatorname{sh} a + \operatorname{sh}(a+x) + \operatorname{sh}(a+2x) + \operatorname{sh}(a+3x) = 0$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:42]

On développe $e^a(1+e^x+e^{2x}+e^{3x}) = e^{-a}(1+e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x})$

donc, puisque $(1+e^x+e^{2x}+e^{3x}) \neq 0$, $e^{2a} = e^{-3x}$ donc

c'est-à-dire $e^a(1+e^x+e^{2x}+e^{3x}) = e^{-a}e^{-3x}(1+e^x+e^{2x}+e^{3x})$

$$x = -\frac{2a}{3}.$$

FON.18
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{1}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{coth} \frac{x}{2} - \operatorname{coth} x$. Qu'en déduit-on pour la suite de terme général $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\operatorname{sh} 2^k x}$?

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:43]

Elle converge vers $\frac{1}{\operatorname{th} x/2} - 1$.

FON.19
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le système $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = b. \end{cases}$

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:44]

On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$. Alors $\begin{cases} X+Y = a+b \\ XY = \frac{a+b}{a-b}. \end{cases}$

On reconnaît un système donnant les racines d'un polynôme de degré 2, il existe donc des racines réelles pour $a \geq \sqrt{b^2+4}$.

FON.20 (★)
Résoudre l'équation $x\sqrt{x} = \sqrt{x^x}$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:59]

$$(\sqrt{x} - \frac{x}{2}) \ln x = 0 \text{ donc } x \in \{1, 4\}.$$

FON.21 (*)
Résoudre l'équation $2^{x^3} = 3^{x^2}$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:60]

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

FON.22
Déterminer, si elles existent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}(2x))$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} (2 \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}(2x))$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:61]

La premier expression vaut $e^{-2x} + 1$ et tend vers 1.

FON.23
Résoudre $\operatorname{Arc} \tan(x) + \operatorname{Arc} \tan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:62]

FON.24
Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:63]

= 0.

FON.25 (**)
Résoudre l'équation $\sum_{k=1}^{100} \operatorname{sh}(2+kx) = 0$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:64]

On passe en notation exponentielle, on obtient

$$e^{-2} \sum_{k=1}^{100} e^{kx} = e^{-2} \sum_{k=1}^{100} e^{-kx} = e^{-2-100x} \sum_{k=1}^{100} e^{kx}.$$

◆ FON.26

Montrer que, pour tout $x \in]-1; 1[$, $\text{Arg ch} \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right) = 2 \text{Arg th } |x|$.Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arc cos} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) = 2 \text{Arc tan } |x|$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:65]

2) Supposons dans un premier temps $x \geq 0$. Posons $y = 2 \text{Arc tan } x$; alors $y \in [0; \pi[$ et de plus $x = \tan \left(\frac{y}{2} \right)$. On écrit alors

$$1 - x^2 = \frac{\cos^2(y/2) - \sin^2(y/2)}{\cos^2(y/2)} \quad \text{et} \quad 1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2(y/2)},$$

$$\text{et donc } \frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos^2 \left(\frac{y}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{y}{2} \right) = -1 + 2 \cos^2 \left(\frac{y}{2} \right) = \cos y.$$

Puisque $y \in [0; \pi[$, on peut conclure que $\text{Arc cos} \frac{1-x^2}{1+x^2} = y$.Si $x < 0$, on peut conclure par parité.

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = \text{ch } y$$

et on conclut, puisque $y > 0$, que $y = \text{Arg ch} \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)$. Enfin, pour le cas $x < 0$, on traite par parité.

◆ FON.27

Calculer, si $1 < a < b$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{bx}}{b^{ax}}$.Calculer, si $a > 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^{ax}}$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:66]

lim = $+\infty$ dans les deux cas.

◆ FON.28

(★)

Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On pose $x = \ln \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$ et on demande de calculer $\text{ch } x$, $\text{sh } x$ et $\text{th } x$ en fonction de θ .

◇ [Divers/usuellesexo.tex/fon:67]

On a successivement :

$$\begin{aligned} \text{ch } x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}}{2} \\ &= \frac{\tan^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + 1}{2 \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1}{\sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{1}{\cos \theta} \end{aligned}$$

$$\text{sh } x = \frac{\tan^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - 1}{2 \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = -\frac{1}{\tan \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)} = \tan \theta$$

$$\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \tan \theta \cos \theta = \sin \theta$$

◆ FON.29

(★)

Calculer $\cos(\text{Arc tan } x)$ et $\sin(\text{Arc tan } x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/div:74]

Posons $t = \text{Arc tan } x$, on a alors $t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On obtient $x = \tan t$,donc $1 + x^2 = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$ et, puisque $\cos t \geq 0$, on en déduit que

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t},$$

Par conséquent, $\sqrt{1+x^2} \cos(\text{Arc tan } x) = 1$

$$\text{et} \quad \sqrt{1+x^2} \sin(\text{Arc tan } x) = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t = x.$$

◆ FON.30

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Montrer que la fonction $f: \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante.

$$x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$$

◇ [Divers/usuellesexo.tex/div:107]

◆ FON.31

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence de solutions au système $\begin{cases} \text{ch } x + \text{ch } y = a \\ \text{sh } x + \text{sh } y = b \end{cases}$ On divise par $e^x + e^{2x} + \dots + e^{99x} + e^{100x}$ qui est non nul. On trouve alors

$$x = -\frac{4}{100} = -\frac{1}{25}.$$

◇ [Divers/usuellesexo.tex/div:108]

Poser $X = e^x$ et $Y = e^y$. Alors $X + Y = a + b$ et $XY = \frac{a+b}{a-b}$, donc il n'y ades solutions que si $a \geq \sqrt{b^2 + 4}$.

◆ FON.32

Résoudre $\text{Arg ch}(x) = \text{Arg sh} \left(x - \frac{1}{2} \right)$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/div:109]

 $x = 5/4$.

◆ FON.33

Résoudre $2^x + 2^{x+1} + \dots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \dots + 3^{x+n}$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/div:110]

◆ FON.34

On place une caméra devant la scène suivante. À quelle distance doit-on la placer pour que la scène apparaisse avec le plus grand angle possible ?

◇ [Divers/usuellesexo.tex/div:192]

maximal pour $x = \sqrt{ab}$. $\theta = \text{Arctan} \left(\frac{b}{x} \right) - \text{Arctan } ax = -\text{Arc tan } xb + \text{Arc tan } xa$ donc est

◆ FON.35

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que les courbes d'équation $y = \text{sh } x$ et $y = 2x + a$ aient trois points communs distincts.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/div:193]

◆ FON.36

Montrer que, pour $n \geq 7$, on a $\sqrt{n} \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} \sqrt{n}$.

◇ [Divers/usuellesexo.tex/div:194]

◆ FON.37

CCP PC – 2001

1) Calculer $\tan \pi/12$.2) On considère 13 nombres réels deux à deux distincts $x_1 < x_2 < \dots < x_{13}$. Montrer qu'il existe $i \in [1; 12]$ tel que $0 < \frac{x_{i+1} - x_i}{1 + x_{i+1} \cdot x_i} < 2 - \sqrt{3}$.

◇ [Rec01/usuelles-r1.tex/fon-r:12]

Grâce aux formules $\tan 2\theta = 2 \tan \theta / (1 - \tan^2 \theta)$ et la valeur $\tan \pi/6 = 1/\sqrt{3}$, on obtient $\tan \pi/12 = 2 - \sqrt{3}$. On se place dans l'intervalle $] -\pi, \pi[$ sur lequel \tan est bijective, et on note $x_i = \tan \theta_i$. Alors deux des θ_i sont éloignées de moins de $\pi/12$ (lemme des pigeons).

◆ FON.38

CCP PC – 2002

Étudier la fonction $x \mapsto \text{Arc sin} (2 \cos(x/2))$.

◇ [Rec02/usuelles-r2.tex/fon-r:2:12]

◆ FON.39

Centrale MP – 2003

1) Montrer que $E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$.2) On définit $f_\alpha: x \mapsto E \left(\frac{x}{\alpha} \right)$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$.a) Montrer que $f_\alpha \circ E = f_\alpha$.b) Montrer que $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha\beta}$.c) Montrer que, dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers, la multiplicité de p est $e_p(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} E \left(\frac{n}{p^k} \right)$.3) Montrer que $\frac{(2m)! (2n)!}{n! m! (n+m)!} \in \mathbb{N}$.

◇ [Rec03/usuelles-r3.tex/r3:371]

◆ FON.40

(★)

ENSAE MP – 2004

Étudier $f: x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \text{Arc sin } \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arc cos } \sqrt{t} dt$.

◇ [Rec04/usuelles-r4.tex/r4:207]

On dérive : $f'(x) = 2 \sin x \cdot \text{Arcsin} |\sin x| + 2 \cos x \cdot \text{Arcos} |\cos x| \dots$

Fonctions continues

◆ FON.41

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. Montrer que l'on peut prolonger $f \circ \tan :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ par continuité.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:12]

◆ FON.42

Soient deux fonction $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que : f est continue, et g est bornée. Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:13]

T.

◆ FON.43

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:14]

◆ FON.44 (Problème du marcheur)

Un marcheur parcourt 6 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 3 km.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:16]

des valeurs intermédiaires, et $g(0) = -g(\frac{1}{2})$ donc g s'annule.On pose $g(t) = f(t + \frac{1}{2}) - f(t) - 3$, qui est continue et vérifie le théorème

◆ FON.45

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- f est continue en 0 ;
- $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:18]

 $f(x)$, donc f est continue en x .On a $f(0) = 1$ ou $f \equiv 0$. Par ailleurs, si $x \in \mathbb{R}$, $f(x+h) = f(x)f(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0}$ ◆ FON.46 ($f(x^2) = f(x)$)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application, continue en 0 et en 1. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:19]

 $n \rightarrow \infty$, en séparant les cas $x \in]0, 1[$ et $x \in]1, +\infty[$ On a, pour tout $x > 0$, $f(x) = f(x^{2^n}) = f(x^{1/2^n})$. On passe à la limite

◆ FON.47 (Points fixes)

Soient f et g deux fonctions continues de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$.

- Montrer que f admet un point fixe (c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0; 1]$ tel que $f(x) = x$).
- On suppose f monotone et $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f - g$ s'annule.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:20]

obtient :

- On pose $g(x) = f(x) - x$, alors $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 1$, donc g s'annule pas le théorème des valeurs intermédiaires.

- Supposons que f et g n'admettent pas de valeur commune, et donc par exemple $f > g$.

On note F l'ensemble des points fixes de f : d'après la question précédente, $F \neq \emptyset$. De plus, on vérifie immédiatement que F est stable par g . On choisit $x_0 \in F$, et on pose $x_n = g^n(x_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors on

$$f(g^n(x_0)) > g(g^n(x_0))$$

$$g^n(f(x_0)) > g^{n+1}(x_0)$$

$$x_n > x_{n+1}.$$

Cela montre que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et comme elle est minorée, elle converge vers une limite ℓ . Alors, par continuité de g , on obtient $\ell = g(\ell)$. Par continuité de f , on obtient aussi $\ell = f(\ell)$, donc $f(\ell) = g(\ell)$: contradiction. □

◆ FON.48

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ telle que $\int_a^b P(t)f(t) dt = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que f admet au moins $(n+1)$ zéros sur $[a; b]$.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:24]

f s'annule au moins une fois car f est continue et $\int f = 0$. Si f a un nombre finis de zéros, notons x_1, \dots, x_k les zéros où f change de signe, et notons

$P = \prod_i (X - x_i)$. Alors si $k \leq n$, on a $\int fP = 0$, or cette fonction est de signe constant...

◆ FON.49 (Existence d'un point fixe)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soit $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$.

- Montrer que si f est continue, elle admet un point fixe.
- Même question si f est croissante (on pourra alors raisonner par l'absurde et considérer l'ensemble $E \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x \in [a; b] ; f(x) < x\}$.)

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:21]

$g = f - 1$ est continue, et valeurs intermédiaires car $g(a) \geq 0, g(b) \leq 0$. Supposons f croissante et sans point fixe. Alors

$$E = \{x \in [a; b] ; f(x) < x\}$$

n'est pas vide car $b \in E$. On pose $c = \inf E$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in [c, c + \varepsilon[$ tel que $x \in E$, ce qui montre que $f(c) \leq f(x) < x < c + \varepsilon$; ce qui montre $f(c) \leq c$.

Par ailleurs, pour tout $y \in [a, c[$, on a $y \leq f(y) \leq f(c)$ donc $c \leq f(c)$, donc en faisant tendre y vers c , on a $c \leq f(c)$.

On a donc montré $f(c) = c$: contradiction.

Donc f admet au moins un point fixe.

◆ FON.50 (Existence d'un point fixe)

Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:23]

on a de plus $\int_0^1 g(t) dt = 0$, donc g s'annule.On pose $g = f - \frac{1}{2}$. g a donc un signe constant si elle ne s'annule pas, mais

◆ FON.51

Si $x \in \mathbb{Q}$, on note $\frac{p(x)}{q(x)}$ l'unique représentant irréductible de x tel que $q(x) \in \mathbb{N}^*$ et $p(x) \in \mathbb{Z}$. On définit ensuite la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q(x)} & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est continue à gauche et à droite en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

INDICATION : On pourra considérer, si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, l'ensemble $A_n(x) = \{y \in [x-1, x+1] ; q(y) < n\}$.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:25]

l'ensemble A_n est fini, la distance de x à $A_n(x)$ est donc strictement positive.

◆ FON.52

Montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est k -lipschitzienne et $g : I \rightarrow \mathbb{J}$ est k' -lipschitzienne, telles que $f(I) \subset \mathbb{J}$, alors $g \circ f$ est kk' -lipschitzienne.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:30]

T.

◆ FON.53

Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f^{-1}(\{c\})$ ne contienne pas exactement deux éléments.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:31]

Supposons que tous les éléments de $[0; 1]$ admettent exactement deux antécédents. En particulier, il existe $a < a' < b < b'$ tels que $f(a) = f(a') = 0$ et $f(b) = f(b') = 1$. Montrer par le théorème des valeurs intermédiaires que, si $a < a' < b < b'$, alors l'image de $\frac{1}{2}(a + a')$ a trois antécédents au moins. Raisonner pareil si l'ordre est différent.

◆ FON.54

Soient $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $0 < g(x) < f(x)$ pour tout $x \in [a; b]$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $(1 + \alpha)g \leq f$.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:32]

 f/g atteint son minimum.

◆ FON.55

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(|x|) = |f(x)| > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est paire ou impaire.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:33]

plus, $f(-x) = f(x)$. Donc f est paire.On montre d'abord que si f ne s'annule pas, elle est de signe constant. De◆ FON.56 ($f \circ f = -\text{Id}$)

On va chercher à résoudre l'équation $f \circ f + \text{Id} = 0$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow I$ une application continue et injective. Montrer que f est strictement monotone.
- Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement décroissante. Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \phi$.
- Existe-t-il une application continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f + \text{Id} = 0$?

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:35]

1) On choisit $a < b$ dans \mathbb{I} .

□ Soit $(x, y) \in \mathbb{I}^2$ tel que $x < y$. Construisons

$$\phi: \begin{cases} [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f((1-t)b + ty) - f((1-t)a + bt). \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $[0; 1]$ De plus $\phi(0) = f(b) - f(a)$ et $\phi(1) = f(y) - f(x)$.

Ainsi si $f(y) - f(x)$ n'a pas le même signe que $f(b) - f(a)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, ϕ s'annule en un point $c \in]0, 1[$.

Puisque f est injective, on en déduit notamment que $(1-c)(b-a) = -c(y-x)$ ce qui n'est pas possible.

2) S'il existait une telle fonction f , on aurait $f \circ f$ strictement décroissante et donc injective, donc f serait injective. La question précédente montre que f serait strictement monotone et donc $f \circ f$ serait strictement croissante.

3) En prenant $\phi(x) = -x$, la question précédente montre que f ne saurait exister.

Remarque : si on enlève l'hypothèse « continue », on peut trouver f , mais c'est assez délicat.

◆ FON.57

Soient $f, g : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ deux applications continues telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{*+}, \exists x \in [0; 1], f(x) = \lambda g(x).$$

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:36]

On construit $h_\lambda : x \mapsto f(x) - \lambda g(x)$ et on applique le théorèmes des valeurs intermédiaires avec $h_\lambda(0) = -\lambda$ et $h_\lambda(1) = 1$.

◆ FON.58

Trouver $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ discontinue en tout point de \mathbb{R} telle que $f \circ f$ soit continue sur \mathbb{R} .

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:37]

Prendre la fonction caractéristique de \mathbb{Q} .

◆ FON.59 (Heine généralisé) (*)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue vérifiant $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est uniformément continue.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:55]

Soit $\varepsilon > 0$. En dehors d'un certain $[-M; M]$, $|f| < \varepsilon$ et, sur $[-M; M]$, f est u -continue.

◆ FON.60 (Fonction continue C^1 si non nulle) (*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . On suppose que f est constante sur tout intervalle inclus dans I où elle ne s'annule pas. Montrer que f est constante.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/fon:34]

On note $I = [a; b]$ (les bords pouvant éventuellement être ouverts). Posons $Z = \{x \in I ; f(x) = 0\}$. C'est un fermé. Plusieurs cas sont possibles :

ii) $Z \neq \emptyset$. Soit $y \in Z$. On note $x = \inf \{t \in [a; y] ; [t; y] \cap Z = \emptyset\}$.

Si $x > a$, il existe un **À FINIR !!!**

◆ FON.61

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est continue si et seulement si $f(\mathbb{R})$ est un intervalle.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/div:63]

Supposons par exemple f croissante. Supposons que f est un intervalle. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que f est croissante sur $[x-1; x+1]$, et de plus bornée, donc elle admet une limite à gauche en x . De même, elle admet une limite à droite en x . Si enfin $\ell_g < \ell_d$, il est clair que $\ell_g; \ell_d [\notin f(\mathbb{R})$, ce qui entraîne une contradiction. Donc f est continue. Le réciproque est immédiate par le théorème des valeurs intermédiaires.

◆ FON.62

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1) x \mapsto x - E(x) + (x - E(x))^2;$$

$$2) x \mapsto \sqrt{x - E(x)} + E(x);$$

$$3) x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/div:75]

◆ FON.63 (Problème du marcheur (2))

Un marcheur parcourt 20 kilomètres en 5 heures. Prouver qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel il parcourt exactement 4 kilomètres.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/div:76]

◆ FON.64

Soit f une fonction croissante et T-périodique. Montrer que f est constante.

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/div:77]

Montrer que $f(x) = f(0)$ pour tout x , en disant que $x \in [0; nT]$ où $n = E(x/T)$ et $f(0) = f(nT)$ donc f est constante sur $[0; nT]$.

◆ FON.65 (Produit de deux fonctions lipschitziennes)

Si I est un intervalle compact de \mathbb{R} , montrer que $\text{Lip}(I, \mathbb{R})$ est stable par multiplication. Que se passe-t-il si l'on ne suppose plus I compact ?

◇ [Divers/foncontinuesexo.tex/div:87]

Soit f et g deux fonctions continues et lipschitziennes sur I . Notons $m = \|f\|_\infty$ et $M = \|g\|_\infty$ (qui sont bien définis puisque f et g sont continues sur un compact), $k = k(f)$ et $K = k(g)$.

Alors, pour tout $(x, y) \in I$, on a

$$f g(y) - f g(x) = f(x)[g(y) - g(x)] + g(x)[f(y) - f(x)]$$

donc $|f(y)g(y) - f(x)g(x)| \leq (mK + Mk)|y - x|$.

Les autres propriétés de l'algèbre sont des évidences.

$\text{Lip}(I, \mathbb{R})$ est une algèbre lorsque I est compact.

Un exemple classique de fonction non lipschitzienne sur $[0; 1]$ est

$$f : x \mapsto \sqrt{x},$$

puisque

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}$$

ce qui prouve que f ne peut pas être lipschitzienne.

Si $I = \mathbb{R}$ par exemple, ça ne va plus : $x \mapsto x$ est lipschitzienne mais pas $x \mapsto x^2$.

◆ FON.66 (Application propre) (***) Centrale, X,...

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

(a) l'image réciproque de tout compact et compact ;

(b) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = +\infty$.

◇ [Rec00/foncontinues-r0.tex/fon:115]

propriété (b) et il existe α, β tels que

(a) \Rightarrow (b) : soit $M > 0$, il existe B tel que $f^{-1}([-A; A]) \subset [-B; B]$, donc si $|x| > B$, alors $|f(x)| > A$, ce qui montre (b).

(b) \Rightarrow (a) : soit K un compact de \mathbb{R} , comme K est fermé, $f^{-1}(K)$ est fermé. De plus K est borné donc il existe A > 0 tel que $K \subset [-A; A]$. On utilise la

$$x > \alpha \Rightarrow |f(x)| > A \Rightarrow f(x) \notin K \Rightarrow x \notin f^{-1}(K),$$

$$x > \beta \Rightarrow |f(x)| > A \Rightarrow f(x) \notin K \Rightarrow x \notin f^{-1}(K)$$

donc $f^{-1}(K) \subset [\alpha; \beta]$ donc est borné donc est compact.

◆ FON.67 (***) Mines MP – 1999

Déterminer les fonction continues $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ telles que $f \circ f = f$. Déterminer, parmi celles-ci, celles qui sont dérivables.

◇ [Rec00/foncontinues-r0.tex/div:124]

Ce sont les fonctions telles que la restriction de f à $f([0; 1])$ est égale à l'identité. (Il faut le montrer par condition nécessaire et suffisante, ce qui est assez simple en fait.)

Faire ensuite un dessin, pour prouver que les seules solutions dérivables sont l'identité et les fonctions constantes : on note $[a; b] = f([0; 1])$ et on montre que si $a > 0$, alors la dérivée à gauche de f en a est négative, alors qu'elle vaut $+1$ à droite.

◆ FON.68 (***) Mines MP – 2002

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a, b tels que $|f(x)| \leq a|x| + b$.

◇ [Rec00/foncontinues-r0.tex/div:125]

◆ FON.69 (***) ENS Ulm MP – 2001

Soit $f \in \mathcal{C}[2\pi]$.

1) On suppose $\int_0^{2\pi} f = 0$. Montrer que f a au moins deux zéros avec changement de signe dans $[0; 2\pi]$.

2) On suppose $\int_0^{2\pi} f = \int_0^{2\pi} f(t) \cos t dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt = 0$. Montrer que f a au moins quatre zéros avec changement de signe dans $[0, 2\pi]$.

3) Généralisation : on suppose $\int_0^{2\pi} f = \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt = 0$ pour tout $k \in [1, n]$. Montrer que f a au moins $2n + 2$ zéros avec changement de signe.

◇ [Rec01/foncontinues-r1.tex/fon-r:3]

la forme $a + b \cos(x + \phi)$ qui est positive sur $[\alpha; \beta]$ et négative ailleurs, et on aboutit à une contradiction (un dessin permet de se convaincre que c'est aisément possible).

1) f a un nombre pair de zéros avec changement de signe, et ce nombre ne saurait être égal à 0.

2) On suppose que f n'a que deux zéros avec changement de signe, en α et β . On construit une combinaison linéaire de $\mathbf{1}$, \sin et \cos (donc un truc de

3) Pareil, de proche en proche.

◆ FON.70 Mines MP – 2001

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(0) = 0$ et $f(x) = (\exp(x^2) - 1)/x$ si $x \neq 0$.

1) Montrer que f admet une fonction réciproque g sur \mathbb{R} .

2) Calculer le développement limité de g à l'ordre 5 au voisinage de 0.

◊ [Rec01/foncontinues-r1.tex/fon-r:1]

♦ **FON.71** (**) ENSAE MP – 2001
 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $k \in]0; 1[$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq k$.
 On considère la fonction $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Montrer que g est une bijection.
 $(x, y) \mapsto (x + f(y), y + f(x))$.

◊ [Rec01/foncontinues-r1.tex/fon-r:4] $\Phi: x \mapsto x + f(\beta - f(x))$.
 L'injectivité est immédiate en utilisant une inégalité des accroissements finis.
 Pour la surjectivité, on choisit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On cherche (x, y) tel que

$$\begin{cases} x + f(y) = \alpha \\ y + f(x) = \beta. \end{cases}$$
 Alors Φ est continue, dérivable et de dérivée $\Phi'(x) = 1 - f'(x) \cdot f'(\beta - f(x))$
 donc $|\Phi'(x) - 1| \leq k^2 < 1$. Donc Φ est de dérivée strictement positive, donc

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi(x) = \pm\infty$$
 donc par le théorème des valeurs intermédiaires, Φ atteint la valeur α en un certain x_0 , et en posant $y_0 = \beta - f(x_0)$, on a $g(x_0, y_0) = (\alpha, \beta)$.

♦ **FON.72 (Le problème du marcheur)** (♣) CCP MP – 2001
 1) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ telle que $f([a; b]) \subset [a; b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = c$.
 2) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ tel que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in [0; \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.
 3) Un mobile se déplace à vitesse variable et parcourt une distance d pendant une unité de temps. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-unité de temps pendant lequel il parcourt la distance $d/2$.

◊ [Rec01/foncontinues-r1.tex/fon-r:6] 2) On pose $g(x) = f(x) - f(x+1/2)$, et on utilise le TVI car $g(0) \cdot g(1/2) \leq 0$.
 1) On construit $g(x) = f(x) - x$ et on applique le théorème des valeurs intermédiaires (TVI). 3) On note $t \mapsto f(t)$ la distance parcourue et on considère $g(t) = f(t) - f(t+1/2)$, alors $g(0) \cdot g(1/2) \leq 0$.

♦ **FON.73** (*) CCP PC – 2001
 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\text{Arc tan}(1+x)}{\text{Arc tan } x} \right]^{x^2}$.

◊ [Rec01/foncontinues-r1.tex/fon-r:15] $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^{2/\pi}$.
On peut également utiliser
 Grâce à l'égalité des accroissements finis, on peut écrire

$$\text{Arctan}(1+x) = \text{Arctan } x + \frac{1}{(x+\theta(x))^2 + 1}, \quad \text{Arctan } \frac{1}{y} + \text{Arctan } y = \frac{\pi}{2}$$
 où $x \mapsto \theta(x)$ est une fonction à valeurs dans $[0; 1]$. On en déduit aisément que pour obtenir un DL de $\text{Arctan}(x)$ en $+\infty$.

♦ **FON.74** (**) CCP PC – 2001
 Donner un exemple de fonction $f: [2; 3] \rightarrow [1; 3]$ continue et surjective.

◊ [Rec01/foncontinues-r1.tex/fon-r:41] $f: x \mapsto 2 + \frac{x}{3} \sin \frac{1}{3-x}$.

♦ **FON.75** (**) ENS Lyon PC – 2002
 Soit f une fonction continue de périodes a et b telles que $a/b \notin \mathbb{Q}$. Montrer que f est constante.
 Soient f une fonction continue a -périodique et g une fonction continue b -périodique avec $a/b \notin \mathbb{Q}$, et telle que $(f+g)$ soit c -périodique. Démontrer que f ou g est une fonction constante.
 INDICATION : Utiliser la fonction $\phi: x \mapsto f(x+c) - f(x)$.

◊ [Rec02/foncontinues-r2.tex/fon-r:2:19] Comme $f+g$ a pour période c , on a $\phi(x) = g(x) - g(x+c)$, ainsi ϕ a pour périodes a et b donc est constante égale à t . On a alors $f(x+c) = f(x) + t$, ainsi $f(x+nc) = f(x) + nt$, mais puisque f est continue périodique, elle est bornée donc $t = 0$. f et g sont donc c périodiques, mais comme $a/b \notin \mathbb{Q}$, soit a/c ou c/b n'est pas dans \mathbb{Q} et f ou g est constante.
 Si f est périodique de période a et b , alors pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $f(x) = f(x + an + bm)$. L'ensemble des réels $an + bm$ forme un sous-groupe de \mathbb{R} , il est soit discret (si $a/b \in \mathbb{Q}$) soit dense (sinon) (il suffit de considérer $\inf_{(n,m) \neq 0} |an + bm|$). Dans notre cas, il est dense, comme f est continue en faisant tendre $an + bm$ vers $-x$, on obtient $f(x) = f(0)$.

♦ **FON.76** X MP – 2002
 Que peut-on dire des points de discontinuité d'une fonction croissante $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$?

◊ [Rec02/foncontinues-r2.tex/fon-r:2:18] un cardinal inférieur à
 L'ensemble D des points de discontinuité est au plus dénombrable.
 En effet, si $x \in D$, on note x^+ le saut de f en x :
$$x^+ \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - f(x-h) > 0.$$
 (la somme des sauts est plus petite que la variation totale de f), donc est fini.
 Comme $D = \bigcup_n D_{1/n}$, il est dénombrable.

♦ **FON.77** Mines PC – 2002
 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $f(x) = o_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(a) - f(b)}{\varepsilon} \right)$.
 Passer par des ε , ça marche tout seul.

♦ **FON.78 ($f \circ f \circ f = \text{Id}$)** ENS MP – 2003
 Déterminer les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant $f \circ f \circ f = \text{Id}$. Généraliser.

◊ [Rec03/foncontinues-r3.tex/r3:135]

♦ **FON.79** X MP – 2003
 On pose $I = [a; b]$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $c \in]a; b[$. Si $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ est une subdivision de $[a; b]$, on pose

$$V(f, I, \sigma) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$V(f, I) = \sup_{\sigma} V(f, I, \sigma).$$
 1) Montrer que si f est de classe \mathcal{C}^1 ou monotone, alors $V(f, I) \in \mathbb{R}$.
 2) Trouver les relations entre
 a) $V(f, I)$ et $V(-f, I)$;
 b) $V(f+g, I)$, $V(f, I)$ et $V(g, I)$;
 c) $V(f, [a; b])$, $V(f, [a; c])$ et $V(f, [c; b])$.
 3) Trouver $f \in \mathcal{C}(I)$ telle que $V(f, I) = +\infty$. Peut-on trouver $f \in \mathcal{C}(I)$ telle que $V(f, I) = +\infty$?

◊ [Rec03/foncontinues-r3.tex/r3:67] 3) $V(f, [a; b]) = V(f, [a; c]) + V(f, [c; b])$. L'inégalité \geq est immédiate, on montre l'inégalité inverse en montrant que $V(f, [a; b]) \geq V(f, [a; c]) + V(f, [c; b]) - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.
 1) Si f est \mathcal{C}^1 , alors $V(f, I) = \int_a^b |f'|$ (l'inégalité est plus ou moins triviale et est suffisante; l'égalité vient des sommes de Riemann obtenues grâce au théorème des accroissements finis). Si f est continue, alors $V(f, I) = |f(b) - f(a)|$.
 2) $V(f+g, I) \leq V(f, I) + V(g, I)$.
 4) Prendre $f(x) = x \sin \frac{1}{x^2}$, ça doit marcher.

♦ **FON.80** (***) Centrale MP – 2004
 On définit $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sup_{t \in [0; \frac{x}{2}]} |\sin(t) - xt|.$$
 1) Montrer que ϕ est continue sur \mathbb{R} .
 2) Montrer que ϕ admet un minimum sur \mathbb{R} .
 3) Montrer que $\phi\left(\frac{2}{\pi}\right) \leq \phi(1)$.

◊ [Rec04/foncontinues-r4.tex/r4:244]

♦ **FON.81** (*) CCP PC – 2004
 Soient a, b, c et d des éléments de \mathbb{R}^{++} .
 On pose :
$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{d} \right)^{1/x}.$$
 Étudier $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

◆ **FON.91** (★★) X MP – 2002
 Chercher toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on ait

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

◇ [Rec02/eqfonc-r2.tex/fon-r2:17]
 Tout d'abord $f(0) = 0$ et $f(1) \in \{0, 1\}$.
 En jouant avec les relations, on montre par récurrence que f est \mathbb{Q} -linéaire (où \mathbb{R} est vu comme \mathbb{Q} -e.v.). Puisque $f(x^2) = f(x)^2$, f est positive sur \mathbb{R}^+ , la première relation nous dit alors que f est croissante.

– Si $f(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$ alors $f = 0$.
 – Si $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, alors $f(r) = r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Si λ est un réel, on l'approche par deux suites de rationnels par excès et par défaut, et la croissance de f sur \mathbb{R} permet de montrer que $f(\lambda) = \lambda$.

◆ **FON.92** Centrale PC – 2002
 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues, vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Trouver toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$(g(x) + g(y))g\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2g(x)g(y)$$

lorsque g ne s'annule pas.
 Que se passe-t-il lorsque g s'annule ?

◇ [Rec02/eqfonc-r2.tex/fon-r2:4]
 f conserve les barycentres, c'est une application affine. Plus en détail, $f - f(0)$ vérifie les hypothèses. On suppose $f(0) = 0$, on a alors $f(x)/2 = f(x/2)$ puis $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et f est une homothétie voir **FON.91**.
 Si g ne s'annule pas, on considère $f = 1/g$, elle vérifie la condition du début. Ainsi $g(x) = 1/(ax + b)$ ce qui n'est possible que si $a = 0$ (sinon elle n'est pas définie en $-b/a$) donc g est constante non nulle. Si g s'annule, alors elle est identiquement nulle : comme la propriété est invariante par translation, on peut supposer $g(0) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on montre que $g(x) = 0$: on a $g(x)g(x/2) = 0$, soit $g(x) = 0$ et c'est fini, soit $g(x/2) = 0$, dans ce cas l'identité en x et $x/2$ donne $g(3x/4)g(x) = 0$ donc $g(x) = 0$ et c'est fini, ou alors $g(3x/4) = 0$. Dans ce cas, on recommence... Donc $g(x) = 0$ ou alors pour tout $n > 0$, $g((1 - 2^{-n})x) = 0$. En passant à la limite, $g(x) = 0$.

◆ **FON.93** ENSAE MP – 2002
 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{(x+1)(x+2)}.$$

◇ [Rec02/eqfonc-r2.tex/fon-r2:7]
 $f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x}{(x+2^n)(x+2^{n+1})}$
 On itère la relation et passe à la limite pour montrer que avec $f(0) \in \mathbb{R}$ arbitraire (convergence normale sur les compacts).

◆ **FON.94** (★★) Centrale PC – 2002
 Soit $a > 1$. Trouver toutes les fonctions f continues telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - f(y) = \int_{x+ay}^{ax+y} f(t) dt.$$

◇ [Rec02/eqfonc-r2.tex/fon-r2:3]
 f est nulle.
 On fixe y , on voit que f est dérivable — et même \mathcal{C}^∞ — et

$$f'(x) = a f(ax + y) - f(x + ay) \quad (*)$$

et

$$f''(x) = a^2 f'(ax + y) - f'(x + ay) \quad (**)$$

puis, en dérivant (**) par rapport à y et en posant ensuite $x = 0$:

$$0 = a^2 f''(y) - a f''(ay), \quad (***)$$

En dérivant (*) deux fois par rapport à y puis en posant $x = 0$, on a

$$0 = a f''(ay) - a^2 f''(ax + y) \quad (***)$$

La comparaison de (***) et de (***) donne que $f''(y) = 0$; ceci étant vrai pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a donc f affine. Enfin, on vérifie que la seule fonction qui convient est : $f = 0$.

◆ **FON.95** (★★) Centrale/Supélec PC – 2002
 Trouver les fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) \cdot f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt.$$

◇ [Rec02/eqfonc-r2.tex/fon-r2:3]
 On inverse les rôles de x et y pour voir que

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = \int_{y-x}^{x+y} f(t) dt,$$

donc pour tout x avec $y = -x$,

$$\int_{2x}^0 f(t) dt = \int_{-2x}^0 f(t) dt.$$

En dérivant, f est paire. D'un autre côté,

$\int_0^{2x} f(t) dt = f(x)^2 = f(-x)^2 = \int_0^{-2x} f(t) dt$, donc en dérivant $f(2x) = -f(-2x)$ donc f est impaire. Finalement f est nulle.

◆ **FON.96** (★★★) Mines MP – 2002
 Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in [-1; 1]$. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t) dt.$$

- 1) Montrer que f est infiniment dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f^{(n)}$ en fonction de f pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) À l'aide d'une formule de Taylor, montrer que f est la fonction nulle.

◇ [Rec02/eqfonc-r2.tex/fon-r2:5]
 Par récurrence, $f^n(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$. En particulier, $f^n(0) = 0$, la formule de Taylor-Lagrange donne que pour tout x et n , il existe $0 < c < 1$ tel que

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} a^{(n+1)n/2} f(a^{n+1} cx),$$

comme f est bornée sur $[0; x]$ ($|a| \leq 1$), à la limite $f(x) = 0$.

Bon, Taylor-Lagrange étant H-P, on utilise plutôt Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = \frac{1}{n!} a^{(n+1)(n+2)/2} \int_0^x (x-t)^n f(a^{n+1}t) dt$$

donc, en utilisant $M_x = \sup_{t \in [0; x]} |f(t)|$ et $|a| < 1$:

$$|f(x)| \leq M_x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

donc en passant à la limite $n \rightarrow \infty$ on obtient encore $f(x) = 0$.

◆ **FON.97** Centrale MP – 2003
 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $a \in]-1; 1[$. Montrer que

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t) dt \right) \implies f = 0.$$

◇ [Rec03/eqfonc-r3.tex/r3:289]
 Par récurrence, $f^n(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$. En particulier, $f^n(0) = 0$, la formule de Taylor-Lagrange donne que pour tout x et n , il existe $0 < c < 1$ tel que

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} a^{(n+1)n/2} f(a^{n+1} cx),$$

comme f est bornée sur $[0; x]$ ($|a| \leq 1$), à la limite $f(x) = 0$.

Bon, Taylor-Lagrange étant H-P, on utilise plutôt Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = \frac{1}{n!} a^{(n+1)(n+2)/2} \int_0^x (x-t)^n f(a^{n+1}t) dt$$

donc, en utilisant $M_x = \sup_{t \in [0; x]} |f(t)|$ et $|a| < 1$:

$$|f(x)| \leq M_x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

donc en passant à la limite $n \rightarrow \infty$ on obtient encore $f(x) = 0$.

◆ **FON.98** Petites Mines MP – 2003
 On définit l'ensemble \mathcal{S} des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables en 0 et vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

- 1) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f'(0)$.
- 2) Expliciter \mathcal{S} .

◇ [Rec03/eqfonc-r3.tex/r3:223]

◆ **FON.99** CCP PC – 2003
 On note \mathcal{G} l'ensemble des fonctions $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \quad g(x + y) + g(x - y) = 2(g(x) + g(y)).$$

- 1) Montrer que $g(0) = 0$ et que g est paire.
- 2) Montrer que, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $g(nx) = n^2 g(x)$.
- 3) En déduire que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad g\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p^2}{q^2} g(x).$$

- 4) En déduire l'ensemble \mathcal{G} .
- 5) On note \mathcal{F} l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \quad f(x + y) \cdot f(x - y) = (f(x) \cdot f(y))^2.$$

On admet que, si f n'est pas la fonction nulle, alors $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{*+}$ ou $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{*-}$. Déterminer l'ensemble \mathcal{F} .

◊ [Rec03/eqfonc-r3.tex/r3:173]

◆ **FON.100** (**) INT Télécom PC – 2004
 Trouver l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continues en 0, telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x) \cos(x)$.

◊ [Rec04/eqfonc-r4.tex/r4:96]

Analyse : par récurrence, $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$. Il faut maintenant étudier la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Tout d'abord, par un équivalent simple, la suite des logarithmes converge vers un réel non nul, donc la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $u : x \mapsto \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

La formule $\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$ mène à $\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2 \sin(x)}$ et donc

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^n \frac{\sin(x/2^{k-1})}{2 \sin(x/2^k)} = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Synthèse : réciproquement, la fonction $f : x \mapsto \frac{\alpha \sin x}{x}$ convient.

Conclusion : $f : x \mapsto f(0) \cdot \frac{\sin x}{x}$

◆ **FON.101** (**) CCP PC – 2005
 On pose $\mathcal{D} =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$. Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f dérivables sur \mathcal{D} et vérifiant l'équation fonctionnelle

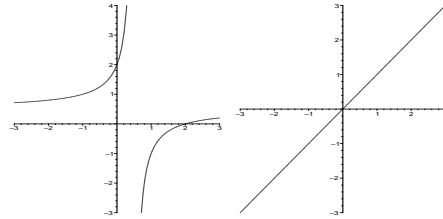
$$\forall x \in \mathcal{D} \quad f'(x) = f\left(\frac{x-2}{2x-1}\right).$$

- On pose $\phi : x \mapsto \frac{x-2}{2x-1}$. Déterminer $\phi\left] -\infty; \frac{1}{2}[\right]$ et $\phi\left] \frac{1}{2}; +\infty[\right]$. Que peut-on dire de $\phi \circ \phi$?
- Soit f une fonction dérivable sur \mathcal{D} et vérifiant l'équation fonctionnelle.
 - Chercher une équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par f .
 - La résoudre sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

INDICATION : On peut chercher des solutions particulières sous la forme $x \mapsto |1 - 2x|^\alpha$.

3) Conclure.

◊ [Rec05/eqfonc-r5.tex/r5:48]



1) f envoie chaque intervalle sur l'autre, et $f \circ f = \text{Id}_{\mathcal{D}}$. Voici des graphes :

Fonctions convexes

◆ **FON.102 (Inégalité de somme de fractions)**
 Soient x_1, x_2, \dots, x_n des réels strictement positifs. Montrer que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$.

◊ [Divers/convexeexo.tex/fon:47]

Posons $y_i = \frac{x_i}{x_{i+1}}$, $y_n = \frac{x_n}{x_1}$. Alors $y_1 \cdot y_2 \cdots y_n = 1$. Enfin, on on a l'inégalité de convexité :

$$\ln\left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n} [\ln(y_1) + \dots + \ln(y_n)] = 0$$

ce qui, passé à l'exponentielle, donne

$$\frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \geq 1.$$

Enfin, on montre que l'inégalité ne peut pas être améliorée puisque les valeurs $x_1 = \dots = x_n$ conduisent à une expression valant exactement n .

◆ **FON.103 (Fonctions convexes bornées)** (**)
 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et bornée. Montrer que f est décroissante.
 Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe bornée. Montrer que g est constante.

◊ [Divers/convexeexo.tex/fon:48]

- On suppose f non décroissante. On peut trouver x_0 et y_0 tels que $f(x_0) < f(y_0)$. Alors pour tout $z \in]y_0; +\infty[$ on a $f(z) \geq$
- Même raisonnement mais à gauche si on f non croissante et à droite si f non décroissante. Alors f est croissante et décroissante, donc constante.

$$\frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0} f(x_0) (z - x_0) \text{ donc } f(x) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} +\infty : \text{contradiction.}$$

◆ **FON.104 (f convexe \leq g affine)** (**)
 Soit $f : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $g : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$ affine. On suppose que

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) & \forall x > 0, \\ f(1) = g(1). \end{cases}$$

Montrer que $f = g$.

◊ [Divers/convexeexo.tex/fon:49]

On suppose que $f \neq g$. Alors il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Si $0 \leq x_0 < 1$, alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x > 1$ et vice-versa. On montre de plus que cela implique $f = g$ partout. D'où contradiction.

◆ **FON.105** (**)
 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(0)$. Montrer qu'il existe $c \in]0; +\infty[$ tel que $f''(x) = 0$.

◊ [Divers/convexeexo.tex/fon:50]

Par l'absurde. Si f'' ne s'annule pas, alors par Darboux, f'' est de signe constant, donc f est convexe (ou concave). Par ailleurs, nécessairement $f'(0) = f'(+\infty)$ (avec Rolle, existence de x tel que $f'(x) = 0$).

$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc f' est de signe constant, ce qui est en contradiction avec $f(0) = f(+\infty)$ (avec Rolle, existence de x tel que $f'(x) = 0$).

◆ **FON.106 (Constante γ d'Euler)**
 Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave, dérivable, décroissante.

- Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$.
- On pose $u_n = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) - f(n)$ et $v_n = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) - f(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que ces suites convergent.
- On prend $f = \ln$. On note $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ (constante d'Euler-Mascheroni). Calculer γ à 10^{-2} près.

◊ [Divers/convexeexo.tex/fon:51]

- On a $f(x+1) - f(x) = f'(c)$ pour $c \in]x; x+1[$ et ensuite f' est croissante.
- On montre que ce sont deux suites adjacentes.
- Il faut prendre suffisamment de termes pour que $|u_n - v_n| \leq 10^{-2}$.

◆ **FON.107** (*)
 Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x, y \in [a; b]$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.

◊ [Divers/convexeexo.tex/fon:52]

Soit $\lambda \in [0; 1]$. On approche λ par nombres diadiques et on utilise la continuité de f .

◆ **FON.108 (CVS + convexe \Rightarrow CVU sur \mathbb{K})** (***)
 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes sur $[a; b]$, convergeant simplement vers une fonction f continue. En utilisant l'uniforme continuité de f , montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

◊ [Divers/convexeexo.tex/fon:56]

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier p tel que, pour tout $x, y \in [a; b]$, si $|x - y| \leq \frac{b-a}{p}$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Or, pour n suffisamment grand ($\geq N$), on a $|f_n(a_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon$ pour tout $k \in [0, p+1]$ car ils sont en nombre fini.

On obtient alors, pour $n \geq N$

$$\text{On note } (a_1, \dots, a_p) \text{ la subdivision } a_k = a + k \left(\frac{b-a}{p}\right). \quad |f_n(ta_k + (1-t)a_k) - f(ta_k + (1-t)a_k)| \leq 5\varepsilon,$$

Pour tout $t \in [0; 1]$ et tout $k \in [0, p]$ on a $f_n(ta_k + (1-t)a_k) \leq t[f_n(a_k) - f_n(a_{k+1})] + f_n(a_{k+1})$ et ce pour tout k et tout t , ce qui prouve bien la convergence uniforme.

◆ **FON.109** (***)
 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- On suppose f continue. Montrer que, si f satisfait

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad (*)$$

- alors f est convexe.
- On considère \mathbb{Q} en tant que sous-espace vectoriel du \mathbb{Q} -e.v. \mathbb{R} . Il admet donc (en vertu de l'axiome du choix ou, ce qui est équivalent, du lemme de Zorn), un supplémentaire E . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut alors écrire $x = r + u$ avec $r \in \mathbb{Q}$ et $u \in E$, et cette décomposition est unique. On pose alors $f(x) = r^2$. Montrer que f satisfait l'équation (*) mais qu'elle n'est pas convexe.

◇ [Divers/convexeexo.tex/fon:58]

De $(r - s)^2 \geq 0$ on tire

$$\frac{rs}{2} \leq \frac{r^2}{4} + \frac{s^2}{4}$$

ce qui montre (*).

Si l'on choisit $u \in \mathbb{E}$, $u > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < r < u$ (ou u négatif et r à l'avenant), on pose $\lambda = \frac{u-r}{u}$, alors $\lambda \in]0; 1[$ et $r = \lambda \cdot 0 + (1-\lambda)u$.

Or $f(r) = r^2 > 0$ et $\lambda f(0) + (1-\lambda)f(u) = 0$! Donc f n'est pas convexe.

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{r+s}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{s^2}{4} + \frac{rs}{2}$$

tandis que

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} = \frac{r^2}{2} + \frac{s^2}{2}$$

◆ FON.110 (Inégalités de Jensen) (★★★)

On montre ici les inégalités de JENSEN.

- 1) Soit φ une fonction convexe. Montrer l'inégalité de Jensen : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pour tout n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{*+})^n$ et pour tout n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in]0; 1[$ tel que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, on a

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i).$$

- 2) Soient f et g deux fonctions continues, définies sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} et à valeurs réelles. On suppose que f est positive sur $[a; b]$, que $\int_a^b f(x) dx = 1$ et que g est à valeurs dans I . Montrer que l'on a une inégalité de Jensen généralisée :

$$\varphi\left(\int_a^b g(x) f(x) dx\right) \leq \int_a^b \varphi(g(x)) f(x) dx.$$

◇ [Divers/convexeexo.tex/div:62]

Si $\sigma_n = (\xi_0, \dots, \xi_n)$, on remarque que

$$\frac{b-a}{n} \cdot \frac{\sum_{k=0}^n g(\xi_k) f(\xi_k)}{\sum_{k=0}^n f(\xi_k)} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^n \lambda_k g(\xi_k)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) f(x) dx.$$

On compose ensuite par ϕ et on conclut par continuité. La question précédente plus le théorème sur les sommes de Riemann permet de conclure.

- 1) On prend une suite de subdivisions $(\sigma^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ régulières. On pose $\lambda_i^{(n)} = \frac{f(\xi_i)}{\sum_{k=0}^n f(\xi_k)}$, ce qui montre que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^{(n)} = 1.$$

◆ FON.111 (DL d'une fonction convexe) (★★★) ENS MP

Soit f une fonction continue et croissante sur \mathbb{R}^+ . On pose $F(x) = \int_0^x f$ et on suppose que $F(x) = x^2 + o(x)$. Montrer que $f(x) = 2x + o(\sqrt{x})$.

◇ [Rec00/convexe-r0.tex/fon:57]

□ Soit $\varepsilon > 0$. On choisit A tel que

$$x \geq A \Rightarrow |\phi(x)| \leq \varepsilon^2.$$

On prend $h = \varepsilon\sqrt{x}$ et on obtient, pour $x > A$:

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = 2x + h + x \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} + \phi(x+h),$$

$$f(x) - 2x \leq \varepsilon^2\sqrt{x} + 2\varepsilon\sqrt{x} + \varepsilon^2$$

donc

$$f(x) - 2x \leq h + \frac{x}{h}[\phi(x+h) - \phi(x)] + \phi(x+h).$$

d'où $f(x) - 2x \leq o(\sqrt{x})$. □

L'inégalité inverse se montre de même.

◆ FON.112 (Application de la convexité) (★) Centrale PC – 2003

- 1) Rappeler la définition et les propriétés des fonctions convexes.
2) Montrer que, pour tous $a_1, \dots, a_n > 0$, on a

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

- 3) Montrer que, pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{*+}$, en notant $a_{n+1} = a_1$, on a

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} \geq n.$$

- 4) Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et convexe avec $f([a; b]) \subset I$. Montrer que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi \circ f(t) dt.$$

- 5) Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n-1} \int_1^n \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Rec03/convexe-r3.tex/r3:400]

Enfin, on note que pour $a_1 = \dots = a_n = 1$, l'expression vaut exactement n .

- 1) T.
2) Inégalité de convexité du logarithme.
3) Pour cela, posons $y_i = \frac{a_i}{a_{i+1}}$, $y_n = \frac{a_n}{a_1}$. Alors $y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n = 1$. Enfin, on a l'inégalité de convexité :

$$\ln\left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n} [\ln(y_1) + \dots + \ln(y_n)] = 0$$

ce qui, passé à l'exponentielle, donne

$$\frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \geq 1.$$

- 4) On approche la première intégrale par des suites de Riemann

$$\phi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi \circ f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi \circ f.$$

- 5) À FINIR !!!

◆ FON.113 (★) ISUP MP – 2003

Quelles valeurs prend l'expression $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ quand (x, y, z) parcourt $(\mathbb{R}^{*+})^3$?

◇ [Rec03/convexe-r3.tex/r3:189]

ce qui, passé à l'exponentielle, donne

$$\frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \geq 1.$$

On montre le résultat plus général suivant : soient x_1, x_2, \dots, x_n des réels strictement positifs, alors

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Pour cela, posons $y_i = \frac{x_i}{x_{i+1}}$, $y_n = \frac{x_n}{x_1}$. Alors $y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n = 1$. Enfin, on a l'inégalité de convexité :

$$\ln\left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n} [\ln(y_1) + \dots + \ln(y_n)] = 0$$

Enfin, on note que pour $x_1 = \dots = x_n = 1$, l'expression vaut exactement n . Dans notre cas, les valeurs prises sont $[3; +\infty[$.

Fonctions dérivables

◆ **DER.1**
 La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^?$ de classe \mathcal{C}^k ? de classe \mathcal{C}^k par morceaux ?

$$x \mapsto E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:1] classe \mathcal{C}^k sur $]0; +\infty[$ par exemple. Juste continue, pas \mathcal{C}^k par morceaux car il n'y a pas de prolongement de

◆ **DER.2 (Dérivée de $\|f\|$)**
 Soit E un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $(\cdot | \cdot)$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ une fonction dérivable. Montrer que $x \mapsto \|f(x)\|$ est dérivable en tout point où f ne s'annule pas. Calculer sa dérivée.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:2] $\|f(t)\|' = \frac{\langle f(t) | f'(t) \rangle}{\|f(t)\|}$

◆ **DER.3**
 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la classe de la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en fonction de α .

$$x \mapsto |x|^\alpha$$

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:3] Si $\alpha \in \mathbb{N}$ impair : classe $\mathcal{C}^{\alpha-1}$.
 Si $\alpha = 0$: la fonction n'est même pas continue.
 Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ est pair : classe \mathcal{C}^∞ .
 Si $\alpha \notin \mathbb{N}$: classe $\mathcal{C}^{E(\alpha)}$.

◆ **DER.4 (Rolle généralisé)** (*)
 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur \mathbb{R} , admettant 0 pour limite en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:4] piquer Rolle. Considérer $g = f \circ \tan^{-1}$ complétée par continuité sur $[-\pi/2, \pi/2]$, et ap-

◆ **DER.5**
 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$, et soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(c)/c = f'(c)$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:5] On pose $g(t) = \frac{1}{t}f(t)$, alors $g(a) = g(b) = 0$ et on applique Rolle.

◆ **DER.6**
 Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une application $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que, pour tout $x \geq 0$, on ait $f(x) = g(x^2)$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:6] Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. De plus, pour tout $x > 0$:

On pose $g(x) = f(\sqrt{x})$, alors $g(0) = 0$, et on a
$$\left| f(x) - f(0) - x f'(0) - \frac{x^2}{2} f''(0) \right| = o(x^2) \quad (\text{Taylor}).$$

Donc
$$\frac{g(x)}{x} = \frac{f(0) + \sqrt{x} f'(0) + \frac{x}{2} f''(0) + o(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} f''(0).$$

Donc g' est continue en 0, donc g est bien \mathcal{C}^1 .
 On pouvait aussi remarquer que $g'(x)$ admettait une limite finie en 0 et utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

◆ **DER.7**
 Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que l'équation
$$18ax^{17} + 14bx^{13} + 5cx^4 - (a + b + c) = 0$$
 possède au moins une solution dans $]0; 1[$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:12] et Rolle. On pose $f(x) = ax^{18} + bx^{14} + cx^5 - (a + b + c)x$, alors $f(0) = f(1) = 0$

◆ **DER.8** (*)
 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable vérifiant la condition $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = 1$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:7] À partir d'un certain point, f est strictement croissante. Alors, soit elle admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$, soit elle tend vers $+\infty$.
 □ Supposons $f(x) \rightarrow \ell$. Il existe $A \in \mathbb{R}$, à partir duquel $|f(2x) - f(x)| < \frac{1}{4}$,
 et $B \in \mathbb{R}$ à partir duquel $x f'(x) > \frac{1}{2}$.
 Après le plus grand des deux, avec le théorème des accroissements finis, $ds |f(2x) - f(x)| = x f'(\zeta) = \frac{x}{\zeta} \zeta f'(\zeta) > \frac{x}{\zeta} \cdot \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$
 avec $\zeta \in [x; 2x]$, d'où contradiction.

◆ **DER.9**
 Soit $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$. Montrer qu'il existe un point $(x, f(x))$, $x \neq 0$, de la courbe représentative de f tel que la tangente à cette courbe en ce point passe par 0.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:8] On pose $g(x) = f(x)/x$ et $g(0) = 0$, puis Rolle sur g .

◆ **DER.10**
 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ Montrer que f peut se prolonger par continuité sur \mathbb{R} . Montrer que la fonction
$$x \mapsto e^{-1/x^2}$$
 ainsi obtenue est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$. Montrer qu'elle est infiniment dérivable en 0, et montrer que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ .

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:9] On procèdera par récurrence pour montrer que $f^{(k)}(x)$ est de la forme $P_k(x)e^{-1/x^2}$, où P_k est une fraction rationnelle que l'on ne cherchera pas à déterminer.

◆ **DER.11**
 Soit $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant les propriétés suivantes :
 (a) f est continue sur $]0; 1[$;
 (b) f est dérivable à droite et à gauche en tout point de $]0; 1[$;
 (c) $f(0) = f(1)$;
 (d) f est non constante.
 Montrer qu'il existe un réel $c \in]0; 1[$ tel que $f'_d(c) \cdot f'_g(c) \leq 0$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:10] fonction est constante). Il existe donc $c \in]0; 1[$ tel que $f(c)$ soit un maximum (ou un minimum). Alors on calcule aisément que $f'_g(c) \geq 0$ et $f'_d(c) \leq 0$.
 Si f est non constante, elle admet alors un maximum et un minimum sur $]0; 1[$. Ce max et ce min ne peuvent pas tout deux être en 0 ou 1 (sinon la

◆ **DER.12** (**)
 Quelle est, en fonction de l'entier n , la classe de la fonction
$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:11]

◆ **DER.13** (**)
 Soit $\alpha > 0$, déterminer la classe exacte de l'application
$$g_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:11b] Classe $\mathcal{C}^{E(-\alpha/2)-1}$.

◆ **DER.14 (Application de l'égalité de Taylor-Lagrange)** (**)
 Soit $f : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 telle que f et f'' admettent des limites finies en $+\infty$. Montrer que f' et f'' tendent vers 0 en $+\infty$.
 INDICATION : On utilisera la formule de Taylor-Lagrange entre $f(x+1)$ et $f(x)$, avec $x \in \mathbb{R}$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:13] Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur $[x, x+1]$: il existe $c \in [x, x+1]$ tel que $f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}f''(c)$. On fait tendre x vers l'infini, ce qui montre l'existence d'une limite pour f' . Cette limite ne saurait être autre que 0.

◆ **DER.15** (♣)
Déterminer la classe exacte de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x|x| \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:14] Classe \mathcal{C}^1 .

◆ **DER.16** (♣)
Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application dérivable, et si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$, alors f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
 Vrai Faux

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:15] th n'est pas une bijection.

◆ **DER.17** (♣)
Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur \mathbb{R}^+ , vérifiant $xf'(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:16] positive donc g croissante donc $f(x) - f(M) \geq \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln M$.
Pour $x \geq M$, on a $f'(x) \geq 1/2x$ donc, en posant $g = f - \frac{1}{2} \ln$, on a g'

◆ **DER.18**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^5 sur $[a; b]$. On note $c = (a+b)/2$ et $d = (b-a)/2$. Enfin, on définit

$$g : \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(c+dx) - f(c-dx). \end{cases}$$

- 1) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^5 sur $[0; 1]$ et calculer $g^{(k)}$ pour tout $k \in [1, 5]$.
- 2) On note $A = \frac{g'(1)+2g'(0)}{3} - g(1)$, et on considère l'application $h : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0; 1], \quad h(x) = g(x) - \frac{g'(x) + 2g'(0)}{3}x + Ax^5.$$

Montrer que h est de classe \mathcal{C}^4 sur $[0; 1]$ et calculer $h^{(k)}(x)$ pour tout $k \in [1, 4]$ et tout $x \in [0; 1]$.

- 3) Montrer qu'il existe $\theta \in]0; 1[$ tel que $A = g^{(5)}(\theta)/180$.
- 4) En déduire qu'il existe un $x \in]a; b[$ tel que

$$f(x) = f(a) + \frac{b-a}{6} \left[f'(a) + 4f' \left(\frac{a+b}{2} \right) + f'(b) \right] - \frac{(b-a)^5 f^{(5)}(x)}{2880}.$$

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:17]

◆ **DER.19** (★)
Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 , vérifiant la relation : $f \circ f(x) = x/3 + 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \left(\frac{x}{3} + 4 \right) = \frac{f(x)}{3} + 4.$$

En déduire que f' est constante. Déterminer f .

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:18] On applique f à la relation. On en déduit en dérivant que $f'(x/3 + 4) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc en réitérant que $f'(x) = f'(6)$ (car la suite $u_{n+1} = u_n/3 + 4$ converge vers 6, soit d'après les études générales de suites récurrentes, soit en calculant explicitement $u_n = u_0/3^n + \sum_{p=0}^{n-1} 4/3^p$ qui converge vers 6) pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est affine, on détermine ensuite ses coefficients.

◆ **DER.20** (★)
Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une application dérivable. On suppose qu'il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $x \in [0; 1]$, $|f'(x)| \leq A|f(x)|$. On suppose de plus que $f(0) = 0$.

- 1) En supposant que f est à valeurs dans \mathbb{R}^+ , montrer que f est nul (on considérera la fonction $g : x \mapsto f(x)e^{-Ax}$).
- 2) Dans le cas général où f est à valeurs complexes, considérer la fonction $F(x) = |f(x)|^2$ et montrer que $f = 0$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:19] $|f(x)\overline{f'(x)} + f'(x)\overline{f(x)}| \leq 2A|f(x)|$, et on applique le résultat précédent.
1) On montre que $g(0) = 0$, que g est positive et décroît, donc $g = 0$.
2) On montre que F est dérivable, que $F(0) = f(0) = 0$ et que $|F'(x)| =$

◆ **DER.21** (♣)
Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0; 1]$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \geq mx$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:20] f' atteint son minimum m sur $[0; 1]$ car elle est continue.

◆ **DER.22 (Accumulation de zéros)**
Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $I = [a; b]$. On suppose que f admet une infinité de zéros sur I . Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = f'(c) = 0$.
Que peut-on dire de plus si f est de classe \mathcal{C}^∞ ?

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:21] L'ensemble des zéros admet un point d'accumulation, c'est-à-dire qu'on peut trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments distincts de zéros de f convergant vers un point c . Alors par continuité de f , $f(x) = 0$, et par une succession de Rolle et continuité de f' , on a aussi $f'(c) = 0$.
Si f est de classe \mathcal{C}^∞ , on montre aisément que toutes les dérivées s'annulent en c .

◆ **DER.23**
Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivables sur \mathbb{R} et vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:22] En $y = 0$ on obtient $2f(x) = 2f(x)f(0)$ donc $f(0) = 1$ (ou bien $f = 0$) et en $x = 0$ on obtient $f(x) + f(-x) = 2f(x)f(0) = 2f(x)$, donc f est paire. En dérivant par rapport à y en $y = 0$ on trouve $0 = 2f(x)f'(0)$ et en dérivant deux fois par rapport à x : $f''(x) = f(x)f'(0)$, ce qui montre que f est essentiellement une combinaison de sinus ou cosinus, donc c'est cos.

◆ **DER.24** (★)
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$ et $g(a) = g(b)$. Montrer que $f' + fg'$ admet un zéro sur $]a; b[$.
INDICATION : On posera $h = fe^g$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:23] On applique Rolle à $h = fe^g$, $h' = (f' + fg')e^g$.

◆ **DER.25** (★★★)
Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ une application continue à valeurs dans un espace vectoriel normé. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) f est dérivable en 0;
- (b) $x \mapsto \frac{f(2x) - f(x)}{x}$ admet une limite en 0 dans \mathbb{E} .

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:24] D'après la définition de la dérivabilité, donné, et par inégalité triangulaire on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x). \quad \left\| f(x) - f \left(\frac{x}{2^N} \right) - \ell \sum_{n=1}^N \frac{x}{2^n} \right\| \leq \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{2^n} = \varepsilon |x|.$$

On a donc $f'(2x) - f(x) = f'(0)x + o(x)$ et donc la limite demandée vaut $f'(0)$. Réciproquement, si cette limite existe, notons-la ℓ .
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [-\alpha, +\alpha]$, on ait

$$\|f(2x) - f(x) - \ell x\| \leq \varepsilon |x|.$$

On remplace x par $x/2^n$ et on somme pour $1 \leq n \leq N$, pour un certain N ce qui est la définition de la dérivabilité de f en 0 avec $f'(0) = \ell$.

◆ **DER.26** (★★)
Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0; 1]$, dérivable en 0.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \sum_{k=1}^n f \left(\frac{1}{n+k} \right)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et calculer alors sa limite.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:28] Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta \in]0; 1]$ tel que

(Voir également l'exercice **DER.27** page suivante, plus détaillé.)

Une condition nécessaire est bien entendu $f(0) = 0$. Montrons qu'elle est suffisante.

$$\forall x \in]0; \eta[\quad \left| \frac{f(x)}{x} - f'(0) \right| \leq \varepsilon.$$

On pose $N = E[1/\eta] + 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \geq N$ alors

$$\forall k \in [1; n] \quad \left| f\left(\frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n+k} f'(0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+k}$$

et donc

$$\left| u_n - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \right) f'(0) \right| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \varepsilon \ln 2,$$

♦ **DER.27**

Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$ est convergente. On pose $u = \lim_n u_n$.

- 1) Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(0) = 0$ et f dérivable en 0. Montrer que la suite de terme général

$$v_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

est convergente, et montrer que $\lim u_n = u f'(0)$.

- 2) En utilisant la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$, calculer u .
3) Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right).$$

et
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\text{Arc tan } \frac{1}{n} + \text{Arc tan } \frac{1}{n+1} + \dots + \text{Arc tan } \frac{1}{2n} \right).$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et de plus $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$. Donc elle converge. De plus, $u \neq 0$.

De plus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $1/n \leq \eta$. On vérifie alors que $|v_n - u f'(0)| \leq \varepsilon u_n / u \leq \varepsilon$.

- 1) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [0; \eta]$, on a $\left| \frac{f(x)}{x} - f'(0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{u}$.
2) La somme est télescopique, et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $u = \ln 2$.
3) Les limites sont respectivement 0 et $\ln 2$.

♦ **DER.28**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t) + f'(t)) = \ell$.

Montrer que $\lim_{+\infty} f = \ell$.

INDICATION : On considérera la fonction $g : t \mapsto e^t f(t)$, et on utilisera la formule des accroissements finis.

On en déduit

1^{re} solution : Quitte à prendre $f - \ell$, on peut supposer $\ell = 0$. La dérivée de g est $g' : t \mapsto e^t (f(t) + f'(t))$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $b \in \mathbb{R}$ à partir duquel $|f(t) + f'(t)| \leq \varepsilon$, donc $|g'(t)| \leq \varepsilon e^t$. Pour tout $t \geq b$, on a alors, en intégrant $g' : \left| g(t) - g(b) \right| \leq \int_b^t |g'(t)| dt \leq \varepsilon (e^t - e^b)$.

$$|f(t)| \leq \varepsilon (1 - e^{b-t}) + e^{-t} |g(b)|.$$

La deuxième membre tendant vers 0, il existe $c \in \mathbb{R}$, $c \geq b$ à partir duquel $|f(t)| \leq \varepsilon$.

2^e solution : On pose $h(t) = f(t) e^t$, alors

$$h'(t) = [f(t) + f'(t)] e^t = g(t) e^t.$$

On en déduit

$$\int_0^x g(t) e^t dt = f(x) e^x - f(0),$$

donc
$$\int_0^x g(t) e^{t-x} dt = f(x) - f(0) e^{-x}$$

ou encore
$$\int_0^x g(x-t) e^{-t} dt = f(x) - f(0) e^{-x}.$$

Le théorème de convergence dominée (g est bornée, et on peut l'étendre à \mathbb{R} en posant $g(t) = 0$ pour tout $t < 0$) donne alors que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell.$$

3^e solution qui revient presque à la 2^e. On résout l'équation différentielle $f(x) + f'(x) = g(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$.

♦ **DER.29**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^∞ , telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $f^{(n)}(x_n) = 0$.

Réurrence. Construire x_1 . Si x_n existe mais pas x_{n+1} , montrer qu'il y a une

contradiction car $f^{(n)}$ doit diverger.

♦ **DER.30**

Trouver tous les couples (f, g) d'applications dérivables telles que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f \circ g = \text{Id}$ et $f' \circ g = \text{Id}$.

On a $(f \circ g)' = 1 = f' \circ g \times g'$ ce qui montre que $g' : x \mapsto 1/x$. Par suite

$g : x \mapsto \ln x + K$, et donc $f : x \mapsto e^{x-K}$.

♦ **DER.31**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 . On définit

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) < 0 \\ (f(x))^2 & \text{si } f(x) \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \neq 0$, alors g coïncide, sur un voisinage de x_0 , avec une fonction dérivable (0 ou f^2). Si $f(x_0) = 0$, alors

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) < 0 \\ (f(x) + f(x_0)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{si } f(x) \geq 0, \end{cases}$$

donc admet 0 pour limite en x_0 , ce qui montre que g est dérivable en x_0 . Au total, g est dérivable sur \mathbb{R} et vérifie

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) < 0 \\ 2f(x) f'(x) & \text{si } f(x) > 0. \end{cases}$$

Cela montre également la continuité de g' .

♦ **DER.32**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle I quelconque. On suppose qu'il existe deux constantes réelles $\alpha > 1$ et $K \geq 0$ telle que

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq K |x - y|^\alpha.$$

Montrer que f est constante.

Si l'on calcule $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$, cela tend vers 0 quand $x \rightarrow y$, ce qui montre

que f est dérivable en y de dérivée nulle. Donc f dérivable sur I , de dérivée nulle, donc $f = C^{\text{te}}$.

♦ **DER.33 (Pseudo-dérivée seconde)**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$D^2 f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

existe.

- 1) Si f est de classe \mathcal{C}^2 , calculer $D^2 f$.
2) On suppose qu'il existe $a < b < c$ tels que $f(a) = f(b) = f(c)$. Montrer qu'il existe $x \in]a; c[$ tel que $D^2 f(x) \leq 0$.

2) Prendre x tel que $f(x)$ est maximal par exemple.

♦ **DER.34 (Égalité de Taylor-Lagrange)**

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ et deux fois dérivable sur $[0; 1]$. Soit $x \in [0; 1]$. Montrer qu'il existe $\xi \in]0; x[$ tel que

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\xi).$$

INDICATION : On commencera par montrer la formule pour $x = 1$. On posera pour cela $\phi(t) = f(t) + (1-t)f'(t) + \frac{\lambda}{2!}(1-t)^2$ en choisissant λ de manière « astucieuse » (c'est-à-dire pour pouvoir utiliser Rolle).

Proposer une généralisation.

On pose $\phi(x) = f(x) + (1-x)f'(x) + \frac{\lambda}{2!}(1-x)^2$ en choisissant λ pour que $\phi(0) = \phi(1)$, il existe donc $\xi \in]0; 1[$ tel que

$$\phi'(\xi) = 0 = \frac{(1-\xi)^2}{2!} (f''(\xi) - \lambda)$$

donc $f''(\xi) = \lambda$, ce qui est le résultat recherché. On pose ensuite $g(t) = f(xt)$ ce qui donne la formule en x .

♦ **DER.35 (Théorème de Darboux)**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$. Montrer que f' prend toutes les valeurs de l'intervalle $[f'(a); f'(b)]$.

INDICATION : On commencera par supposer que $f'(a) \cdot f'(b) < 0$ et on montrera l'existence d'un point $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:34]

On suppose que $f'(a) \cdot f'(b) < 0$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f'(a) < 0$. On note $c \in]a; b[$ un minimum de f . Puisque $f'(a) < 0$, on a donc $c \neq a$. De même, puisque $f'(b) > 0$, on a $c \neq b$. Au total, on a donc

$c \in]a; b[$. Ainsi, on a obligatoirement $f'(c) = 0$ (minimum dans l'intervalle ouvert).
Cas général. Soit $\lambda \in]f'(a); f'(b)[$. On pose $g = f - \lambda \text{Id}$ et on applique le cas précédent.

◆ **DER.36** (♣)
 Soit $f : [-A; A]$ une fonction dérivable. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire, et réciproquement.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:35]

◆ **DER.37** ()
 ? Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et périodique. Montrer que f' est périodique. Y a-t-il une réciproque ?

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:36]

◆ **DER.38**
 Calculer la dérivée n -ième de $f : x \mapsto x^n(1-x)^n$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:37]

◆ **DER.39**
 Déterminer $(a, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*+}$ pour que la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } x \in]0; x_0[\\ x^2 + 12 & \text{si } x \in [x_0; +\infty[\end{cases}$$

soit de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:38]

◆ **DER.40**
 Quelle est la classe de $x \mapsto x|x|$?

◇ [Divers/derivableexo.tex/der:39]

◆ **DER.41** (★)
 Soit $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe des réels (x_1, \dots, x_n) deux à deux distincts, appartenant à $]0; 1[$, tels que

$$\sum_{i=1}^n f'(x_i) = n.$$
- On suppose désormais que f' est une fonction à valeurs strictement positives. Montrer qu'il existe des réels (y_1, \dots, y_n) deux à deux distincts, appartenant à $]0; 1[$, tels que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{f'(y_i)} = n.$$

◇ [Divers/derivableexo.tex/div:130]

2) Appliquer le résultat précédent à la bijection réciproque de f .

◆ **DER.42** (★★)
 Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$. On suppose qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que, pour tout $x \in [a; b]$, on ait $|f'(x)| \leq \lambda|f(x)|$. Montrer que $f = 0$.

INDICATION : On utilisera la fonction auxiliaire $g(x) = f^2(x)e^{-2\lambda x}$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/div:131]

égalité triangulaire, en séparant par exemple les cas selon le signe de $f(x)$, donc g est décroissante, mais $g(0) = 0$ donc g est nulle.

◆ **DER.43** (★★)
 Soient $u, v :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables, vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0$. On suppose de plus que $u' = o(v')$. Montrer que $u = o(v)$.

◇ [Divers/derivableexo.tex/div:132]

□ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un réel M tel que, pour tout $x \geq M$, on ait $|u'(x)| \leq \varepsilon|v'(x)|$. Alors, pour tous $x, y \geq M$, on a, en passant à l'intégrale :

$$|u(y) - u(x)| \leq \varepsilon|v(y) - v(x)|.$$

On fait tendre y vers $+\infty$ et on conclut que pour tout $x \geq M$, on a

$$|u(x)| \leq \varepsilon|v(x)|. \square$$

◆ **DER.44** (★★★) X PC – 2004
 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} .

- On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Que fait f' ?
- On suppose f de classe \mathcal{C}^2 , que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et que f'' est bornée. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f' = 0$.

◇ [Rec00/derivable-r0.tex/div:103]

(Cf. exercices IG.22 page 584 et IG.23 page 584)

- f' peut faire n'importe quoi (exemple : $f(x) = \sin(e^x)e^{-x}$).
- En revanche, dans ce cas, f' est donc intégrable, et f'' bornée. En utilisant (MP) l'uniforme continuité ou (PC), par l'absurde la négation de

« $\lim f' = 0$ » et le caractère lipschitzien de f' , on en déduit que $\lim f' = 0$ (cf. exercice IG.23 page 584 ou faire un dessin : il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $|f|$ dépasse ε une infinité de fois ; alors l'intégrale de $|f|$ autour de ce point est au moins ε/k où k est la constante de lipshitz ; donc $|f|$ n'est pas intégrable.)

◆ **DER.45** Mines MP – 2000
 Chercher toutes les fonctions continues vérifiant $\int_0^x f(t) dt = 1 - f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

◇ [Rec00/derivable-r0.tex/fon-r:13]

◆ **DER.46** ENS ULC MP – 2001
 Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x^2)$. La fonction g est-elle \mathcal{C}^∞ ?

◇ [Rec01/derivable-r1.tex/fon-r:14]

◆ **DER.47** Centrale PC – 2001
 Soit $f \in \mathcal{C}^2([a; b], \mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in [a; b]$, $f(x)f''(x) = 0$. On note $Z(f) = \{x \in [a; b] ; f(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros de f .

- Montrer, en étudiant la fonction ff' , que $Z(f)$ est réduit à l'ensemble vide, ou bien est un intervalle fermé inclus dans $[a; b]$.
- Montrer que f est une fonction affine.

◇ [Rec01/derivable-r1.tex/fon-r:9]

On note que $(ff')' = f'^2 = ff'' = f'^2 \geq 0$, donc ff' est une fonction croissante (et c'est la dérivée de $\frac{1}{2}f^2$).
 On suppose Z non vide. Soient $x, y \in [a; b]$ tels que $f(x) = f(y) = 0$. Alors $ff'(x) = ff'(y) = 0$ donc $ff'(z) = 0$ pour tout $z \in [x, y]$. Donc $\frac{1}{2}f^2$

est constante sur $[x; y]$, donc nulle sur cet intervalle car elle est nulle au bord. Donc $Z(f)$ est un intervalle ; de plus Z est fermé puisque $Z = f^{-1}(\{0\})$.
 On regarde ensuite $x = \inf Z$ et $y = \sup Z$ et on montre aisément que $x = a$ et $y = b$ ou bien $x = y$.
 Si $Z = \emptyset$, alors $f'' = 0$ donc $f' = C^{\text{te}}$ donc f est affine.

◆ **DER.48** ENS MP – 2002
 Soient $a < b$ deux réels. Soit f une fonction continue sur $]a; b[$. On suppose qu'il existe une fonction z telle que, pour tout couple (x, h) convenable, on ait

$$\left| \frac{2f(x) - f(x+h) - f(x-h)}{h} \right| < z(h)$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} z(h) = 0.$$

- Montrer que f est bornée sur $]a; b[$.
- Donner des exemples de fonctions vérifiant cette propriété.
- Soit $x_0 \in]a; b[$ tel que f ait un extremum en x_0 . Étudier la dérivabilité de f en x_0 .

◇ [Rec02/derivable-r2.tex/fon-r:2:8]

1) z est bornée sur un voisinage de 0, donc il existe $M > 0$ et $\delta > 0$ (aussi petit que l'on veut) tels que si $|h| \leq \delta$ alors

$$|f(x+h)| \leq |2f(x) - f(x-h)| + M\delta.$$

Comme $2f(x) - f(x-h)$ est définie et continue sur $[a + 2\delta; b - \delta]$, elle y est bornée par M' ; donc pour x dans cet intervalle (ouvert) $|f(x+\alpha)| \leq M' + M\delta$, ainsi f est bornée au voisinage de b . Idem en a .

- L'égalité des accroissements finis montre que si f est \mathcal{C}^1 sur $]a; b[$ à dérivée uniformément continue alors f convient.
- Admettons que x est un extremum. Alors pour tout h convenable, $f(x) - f(x+h)$ et $f(x) - f(x-h)$ sont de même signe donc

$$\left| \frac{f(x) - f(x+h)}{h} \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(x+h) - f(x-h)}{h} \right|,$$

on en déduit que f est dérivable en x_0 de dérivée nulle.

◆ **DER.49** (★) Centrale/Supélec PC – 2002
 Trouver toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f'(x) = f(2-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

◇ [Rec02/derivable-r2.tex/foir-r2-1]

Soit f une fonction vérifiant cette équation fonctionnelle. Alors f est clairement de classe \mathcal{C}^∞ par une récurrence immédiate. De plus, en dérivant, on

obtient $f'' + f = 0$ donc f est une combinaison linéaire de sinus et de cosinus. On utilise ensuite les formules $\cos(2-x) = ??$ et $\sin(2-x) = ??$ pour obtenir une relation entre les coefficients.

◆ **DER.50** Centrale PC – 2002
 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 et telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = \ell \quad \text{avec} \quad \ell \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

◇ [Rec02/derivable-r2.tex/foir-r2-6]

On pose $h(t) = f(t)e^t$, alors

$$h'(t) = [f(t) + f'(t)]e^t = g(t)e^t.$$

donc

$$\int_0^x g(t)e^{t-x} dt = f(x) - f(0)e^{-x}$$

ou encore

$$\int_0^x g(x-t)e^{-t} dt = f(x) - f(0)e^{-x}.$$

On en déduit

Le théorème de convergence dominée (g est bornée, et on peut l'étendre à \mathbb{R} en posant $g(t) = 0$ pour tout $t < 0$) donne alors que

$$\int_0^x g(t)e^t dt = f(x)e^x - f(0),$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell.$$

◆ **DER.51** INT MP – 2003
 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{*+}$ dans \mathbb{R} , dérivables, telles que

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

◇ [Rec03/derivable-r3.tex/r3-427]

◆ **DER.52** (★) Mines PC – 2005
 On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} .

◇ [Rec05/derivable-r5.tex/r5-46]

◆ **DER.53 (Rolle généralisé)** (★) Centrale PC – 2005
 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{\pm\infty} f = a$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$.

◇ [Rec05/derivable-r5.tex/r5-56]

applique ensuite Rolle.

On pose $g = f \circ \text{Arc tan}$ et on la prolonge par continuité en π et en $-\pi$. On

◆ **DER.54** (★) TPE PC – 2005
 Soit f dérivable sur \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = L$.
 Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$ et $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

◇ [Rec05/derivable-r5.tex/r5-507]

d'où $g(x) = \left[K + \int_0^x a(t)e^t dt \right] e^{-x}$ et on prouve (méthode à la Cesaro)

On se ramène à $L = 0$ en posant $g(x) = f(x) - L$ puis on écrit que g est solution de $y' + y = a(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = 0$

que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\int_0^x a(t)e^t dt \right] e^{-x} = 0$, donc $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ puis $g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Développements limités

Calculs de limites

◆ **DL.1**
Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x e^x (x+1)} - \frac{1}{x \cos x}$.

◇ [Divers/dlimeso.tex/dl:1] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x e^x (x+1)} - \frac{1}{x \cos x} = -2.$

◆ **DL.2**
Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}$.

◇ [Divers/dlimeso.tex/dl:2] $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} = -\frac{1}{2}.$

◆ **DL.3**
Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\ln(x^2+1)} - \sqrt{\ln(x^2-1)})$.

◇ [Divers/dlimeso.tex/dl:3] $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\ln(x^2+1)} - \sqrt{\ln(x^2-1)}) = 0.$

◆ **DL.4**
Calculer $\lim_{x \rightarrow e^-} (\ln x)^{\ln(e-x)}$.

◇ [Divers/dlimeso.tex/dl:4] $\ln(\ln x) \cdot \ln(e-x) = (e-x) \ln(e-x) + o(e-x)$ donc tend vers 0. La fonction cherchée tend vers 1.

◆ **DL.5**
Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{ch} \sqrt{x+1} - \operatorname{ch} \sqrt{x})^{1/\sqrt{x}}$.

◇ [Divers/dlimeso.tex/dl:5] $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{ch} \sqrt{x+1} - \operatorname{ch} \sqrt{x})^{1/\sqrt{x}} = e.$

◆ **DL.6**
Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 (e^{1/x} - e^{1/(x-1)})$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^{1/x} - e^{1/(x-1)})$.

◇ [Divers/dlimeso.tex/dl:6] et $f(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{1/x} \rightarrow +\infty.$

On pose $f(x) = \dots$, alors

$$f(x) = x^2 e^{1/x} (1 - e^{-1/(x-1)})$$

$$\sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x(x-1)} e^{1/x}$$

$$\sim_{x \rightarrow +\infty} -e^{1/x} \rightarrow -1.$$

◆ **DL.7**
Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\frac{x}{4} - \operatorname{Arc} \tan x} + \frac{2}{x-1} \right)$.

◇ [Divers/dlimeso.tex/dl:7] Probablement -1.

◆ **DL.8**
Calculer la limite suivante $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan x \right]^{\tan x}$.

◇ [Divers/dlimeso.tex/dl:9] qu'il faut élever à la puissance x (en gros), on passe aux notations log...
On se ramène à $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cotan x)^{\cotan x} = 1$, car $x \cotan x = 1 + \frac{5}{6}x^2$,

◆ **DL.9**
Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{sh}(\operatorname{ch} x) - \operatorname{ch}(\operatorname{sh} x))$.

◇ [Divers/dlimeso.tex/dl:10] développés en exponentielle, deux d'entre elles tendent vers 0, et les autres (par $+\infty$ grâce à un développement asymptotique : les ch et sh extérieurs sont comparés dans l'exposant) vers $+\infty$.

◆ **DL.10**
Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ deux réels non nuls. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} \right)$.

◇ [Divers/dlimeso.tex/dl:11] $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} \right) = \frac{a-b}{2}.$

◆ **DL.11**
Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1}$.

◇ [Divers/dlimeso.tex/dl:18] $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1} = 1.$

◆ **DL.12**
Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right]^{x \ln x}$.

◇ [Divers/dlimeso.tex/dl:29] En utilisant les accroissements finis, on montre que la limite est e

◆ **DL.13**
Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 (e^{1/x} - e^{1/(x-1)})$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^{1/x} - e^{1/(x-1)})$.

◇ [Divers/dlimeso.tex/fon:26] et $f(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{1/x} \rightarrow +\infty.$
On pose $f(x) = \dots$, alors

$$f(x) = x^2 e^{1/x} (1 - e^{-1/(x-1)})$$

$$\sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x(x-1)} e^{1/x} \sim_{x \rightarrow +\infty} -e^{1/x} \rightarrow -1.$$

◆ **DL.14** CCP PC - 2001
Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\operatorname{Arc} \tan(1+x)}{\operatorname{Arc} \tan x} \right]^{x^2}$.

◇ [Rec01/dlim-r1.tex/dl:28] tité des accroissement finis :
On peut effectuer un DL de $\operatorname{Arc} \tan(1/y)$ en 0 en disant que, pour $y > 0$,

$$\operatorname{Arc} \tan(x+1) = \operatorname{Arc} \tan x + \frac{1}{1+(x+\theta_x)^2},$$

$$\operatorname{Arc} \tan \frac{1}{y} + \operatorname{Arc} \tan y = \frac{\pi}{2}.$$

avec $\theta_x \in [0, 1]$. Alors

Une autre manière plus rusée (mais moins au programme !) est d'employer l'éga-

$$\exp \left\{ x^2 \ln \left[1 + \frac{1}{1+(x+\theta_x)^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{Arc} \tan x} \right] \right\} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{2/\pi}.$$

◆ **DL.15** (♣) CCP PC - 2003
Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right]^n$.

◇ [Rec03/dlim-r3.tex/r3:14] Passer aux notations exponentielles, la limite est égale à 1.

◆ **DL.16** (★★) CCP PC - 2003
Soient $a, b \in \mathbb{R}^{*+}$. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)^x \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)^x$$

◇ [Rec03/dlim-r3.tex/r3:14] $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)^x = \max(a, b)$ (démonstration en ε).
tielles. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)^x = \sqrt{ab}$ en passant partout aux notations exponentielles.

◆ **DL.17** CCP PC - 2003
Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}}}$.

◇ [Rec03/dlim-r3.tex/r3:176]

ce qui montre que, pour x suffisamment grand,

On commence par remarquer que, pour x suffisamment grand,

$$0 \leq f(x) \leq \sqrt{x + \sqrt{3x}} - \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$x + \sqrt{x} \leq 2x \quad \text{et} \quad x + \sqrt{2x} \leq 3x$$

en utilisant par exemple la formule de Taylor-Young ou un développement limité.

◆ **DL.18** Centrale MP – 2002

Pour tout $x > 0$, on pose $y(x) = \frac{1}{1 - x^{\sin x}} + \frac{1}{x \ln x}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x)$.

◇ [Rec03/dlim-r3.tex/fon-r2:10]

Résultat $\frac{1}{2}$.

◆ **DL.19** CCP PC – 2002

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt[3]{3x+5}}{\ln(x) \left(1 - \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)}$.

◇ [Rec03/dlim-r3.tex/fon-r2:11]

Résultat 0.

Développements limités, équivalents

◆ **DL.20**

Trouver la partie principale, dans l'échelle $x \mapsto x^n$, et au voisinage de 0 par valeurs positives, de la fonction

$$x \mapsto \tan x - (\tan x^2)^{1/2}.$$

◇ [Divers/dlexo.tex/dl:8]

$\frac{1}{3}x^3$.

◆ **DL.21**

Trouver la partie principale, au voisinage de 0, de $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{sh} x} \right]$.

◇ [Divers/dlexo.tex/dl:12]

$-7/360x^3$.

◆ **DL.22**

Trouver la partie principale, au voisinage de 0, de $x \mapsto \sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)$.

◇ [Divers/dlexo.tex/dl:13]

$-x^7/45$.

◆ **DL.23**

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \left(3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{3}\right)^n$.

◇ [Divers/dlexo.tex/dl:15]

$1/e$. (??)

◆ **DL.24**

Prolonger $x \mapsto f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ à \mathbb{R} pour que f soit continue. Quelle est alors la classe de f ?

◇ [Divers/dlexo.tex/dl:16]

Classe \mathcal{C}^∞ .

◆ **DL.25** (♣)

Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$ où $a, b \in \mathbb{R}^*$.

◇ [Divers/dlexo.tex/dl:17]

a^2/b^2 .

◆ **DL.26 (DL variés)**

Effectuer les DL à l'ordre n et au voisinage de 0 de f dans les cas suivants :

$f(x)$	n	DL(0)	$f(x)$	n	DL(0)
$\frac{1}{\cos x}$	5	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$	$\frac{x}{\sin x}$	5	$1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + o(x^5)$
$\frac{\ln(1+x)}{1+x}$	4	$x - \frac{3}{2}x + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)$	$\tan^2 x$	7	$x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + o(x^7)$
$\ln \frac{\sin x}{x}$	5	$-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^5)$	$e^{x \sin x}$	6	$1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{120}x^6 + o(x^6)$
$(1+x)^x$	5	$1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{6}x^4 - \frac{3}{4}x^5 + o(x^5)$	$(1+x)^{1/x}$	3	$e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + o(x^3)$
$\exp\left(\frac{x}{\tan x}\right)$	4	$e \left[1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{30}x^4\right] + o(x^5)$	$\sqrt{1+e^{2x}}$	3	$\sqrt{2} \left[1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{48}x^3\right] + o(x^4)$

◇ [Divers/dlexo.tex/dl:19]

◆ **DL.27 (DL de fonctions trigonométriques)**

$f(x)$	a	n	DL
$x/\sin x$	0	4	$1 + x^2/6 + 7x^4/360$
$1/\cos x$	0	4	$1 + x^2/2 + 5x^4/24$
$\ln(\sin x/x)$	0	6	$-x^2/6 - x^4/180 - x^6/2835$
$\exp(\sin x/x)$	0	4	$e(1 - x^2/6 + x^4/45)$
$\sqrt{\tan x}$	$\pi/4$	2	$1 + h + h^2/2$
$\sin(x + x^2 + x^3 - x^4)$	0	4	$x + x^2 + \frac{5x^3}{6} - \frac{3x^4}{2}$
$\ln(x \tan(1/x))$	∞	4	$x^{-2}/3 + 7x^{-4}/90$
$(1 - \cos x)/(e^x - 1)^2$	0	2	$1/2 - x/2 + x^2/6$
$\sin((\pi \cos x)/2)$	0	6	$1 - \pi^2 x^4/32 + \pi^2 x^6/192$
$\cos x \ln(1+x)$	0	4	$x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$
$(\sin x - 1)/(\cos x + 1)$	0	2	$-1/2 + x/2 - x^2/8$
$\ln(2 \cos x + \tan x)$	0	4	$\ln 2 + x/2 - 5x^2/8 + 11x^3/24 - 59x^4/192$
$e^{\cos x}$	0	5	$e(1 - x^2/2 + x^4/6)$

◇ [Divers/dlexo.tex/dl:21]

◆ DL.28 (DL de fonctions circulaires inverses)

$f(x)$	a	n	DL
$\text{Arc sin}^2 x$	0	6	$x^2 + x^4/3 + 8x^6/45$
$1/\text{Arc sin}^2 x$	0	2	$x^{-2} - 1/3 - x^2/15$
$\text{Arc tan } \sqrt{(x+1)/(x+2)}$	∞	2	$\pi/4 - x^{-1}/4 + 3x^{-2}/8$
$\text{Arc cos}(\sin x/x)$	0	3	$ x /\sqrt{3}(1 - x^2/90)$
$1/\text{Arc tan } x$	0	5	$x^{-1} + x/3 - 4x^3/45 + 44x^5/945$
$\text{Arc sin } \sqrt{x}$	1/4	3	$\pi/6 + 1/\sqrt{3}(2h - 4h^2/3 + 32h^3/9)$
$\text{Arc sin}(\sin^2 x)$	0	8	$x^2 - x^4/3 + 19x^6/90 - 107x^8/630$
$\text{Arc tan}(1+x)$	0	4	$\pi/4 + x/2 - x^2/4 + x^3/12$
$\text{Arc sin } x/(x - x^2)$	0	2	$1 + x + 7x^2/6$
$e^{\text{Arc sin } x}$	1/2	2	$e^{\pi/6}(1 + 2h/\sqrt{3} + 2(1 + \sqrt{3})h^2/(3\sqrt{3}))$
$e^{1/x} \text{Arc tan } x$	∞	3	$\frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - 1)x^{-1} + (\frac{\pi}{4} - 1)x^{-2} + (\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6})x^{-3}$

◆ [Divers/dlexo.tex/dl:22]

◆ DL.29 (DL d'exponentielles et logarithmes)

$f(x)$	a	n	DL
$x/(e^x - 1)$	0	2	$1 - x/2 + x^2/12$
$\ln x/\sqrt{x}$	1	3	$h - h^2 + 23h^3/24$
$\ln((2-x)/(3-x^2))$	0	2	$\ln(2/3) - x/2 + 5x^2/24$
$\ln(1+x)/(1-x+x^2)$	0	3	$x + x^2/2 - x^3/6$
$\text{ch } x/\ln(1+x)$	0	1	$x^{-1} + 1/2 + 5x/12$
$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$	0	3	$-\frac{x}{2} + \frac{5x^2}{24} - \frac{x^3}{8}$
$\ln(a^x + b^x)$	0	2	$\ln 2 + x \ln \sqrt{ab} + x^2 \ln^2(a/b)/8$
$\exp(1/x)/x^2$	1	3	$e(1 - 3h + 13h^2/2 - 73h^3/6)$

◆ [Divers/dlexo.tex/dl:23]

◆ DL.30 (Fonctions hyperboliques inverses)

$f(x)$	a	n	DL
$\text{Arg th}(\sin x)$	0	5	$x + x^3/6 + x^5/24$
$\text{Arg sh}(e^x)$	0	2	$\ln(1 + \sqrt{2}) + 1/\sqrt{2}(x + x^2/4)$

◆ [Divers/dlexo.tex/dl:24]

◆ DL.31 (DL de fonctions puissances)

$f(x)$	a	n	DL
$(1-x+x^2)^{1/x}$	0	2	$e^{-1}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{19x^2}{24}\right)$
$((1+x)/(1-x))^\alpha$	0	3	$1 + 2\alpha x + 2\alpha^2 x^2 + 2\alpha(2\alpha^2 + 1)x^3/3$
$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2/x^2}$	0	3	$e^{-1/3}\left(1 - \frac{x^2}{90}\right)$
$(\sin x/x)^{3/x^2}$	0	4	$e^{-1/2}(1 - x^2/60 - 139x^4/151200)$
$(1 + \sin x)^{1/x}$	0	2	$e(1 - x/2 + 7x^2/24)$
$(1 + \sin x + \cos x)^x$	0	2	$1 + x \ln 2 + x^2(\ln^2 2 + 1)/2$
$(\sin x)^{\sin x}$	$\pi/2$	4	$1 - h^2/2 + 7h^4/24$
$(\tan x)^{\tan 2x}$	$\pi/4$	4	$e^{-1}(1 + 2h^2/3 + 4h^4/5)$

INDICATION : Pour le DL de $(\tan x)^{\tan 2x}$, développer d'abord $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

◆ [Divers/dlexo.tex/dl:25]

◆ DL.32 (DL de Radicaux)

$f(x)$	a	n	DL
$x\sqrt{(x-1)/(x+1)}$	2	3	$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2 + \frac{5h}{3} + \frac{h^3}{54}\right)$
$\sqrt{1 + \sqrt{1-x}}$	0	3	$\sqrt{2}\left(1 - \frac{x}{8} - \frac{5x^2}{128} - \frac{21x^3}{1024}\right)$
$\sqrt{1 - \sqrt{1-x^2}}$	0	5	$\frac{ x }{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{x^2}{8} + \frac{7x^4}{128}\right)$
$e^x - \sqrt{1+2x}$	0	5	$x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} - \frac{13x^5}{15}$
$\frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2} + \sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x}$	∞	3	$2 - \frac{2x^{-2}}{9}$

◆ [Divers/dlexo.tex/dl:26]

◆ DL.33

(★)

Soit n un entier naturel non nul. On pose, pour tout $x \neq 0$: $f(x) = x^{n+1} \sin(1/x^n)$. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre n en 0. Que peut-on dire de la classe de f ?

◇ [Divers/dlexo.tex/dl:29]

 $f(x) = o(x^n)$ mais f' n'est pas continue en 0.◆ **DL.34** (★★)

Trouver un équivalent de la n -ième racine positive u_n de l'équation $x = \tan x$. Puis donner un développement à l'ordre suivant de u_n .

◇ [Divers/dlexo.tex/dl:30]

◆ **DL.35** EIT – 1999

Calculer le développement limité de $\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$ en 0 à l'ordre 3.

◇ [Rec00/dl-r0.tex/dl:27]

$$e^{1/3} \left(1 + \frac{7}{90}x^2 + o(x^3)\right).$$

◆ **DL.36** TPE MP – 2001

On considère l'équation $\tan x = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$. Trouver un DL à l'ordre 2 de la n -ième racine réelle positive.

◇ [Rec01/dl-r1.tex/fon-r:7]

◆ **DL.37** CCP PC – 2001

Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \frac{1}{\ln \cos x} + \frac{2}{\sin^2 x}$.

◇ [Rec01/dl-r1.tex/fon-r:8]

◆ **DL.38** CCP PC – 2002

D.L. de $\text{Arc tan} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

◇ [Rec02/dl-r2.tex/fon-r:2:13]

intégrer.

Une bonne idée est de calculer la dérivée, simplifier, effectuer un DL puis

◆ **DL.39** CCP PC – 2002

On définit sur \mathbb{R} les fonctions x et y par

$$x(t) = t - \sin t \quad y(t) = 1 - \cos t.$$

Montrer qu'il existe une unique fonction f vérifiant $y = f \circ x$. Donner un développement limité à l'ordre 5 de f au voisinage de $x = \pi$.

◇ [Rec02/dl-r2.tex/fon-r:2:15]

 $y \circ x^{-1}$, puis on calcule ... !

On vérifie que x est bijective, et donc f est uniquement définie comme

Topologie

Ouverts, fermés

◆ **TOPO.1 (Boule ouverte = ouvert)** (♣)
 Montrer qu'une boule ouverte est ouverte, qu'une boule fermée est fermée.
 Montrer que, si $A \subset E$, alors $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert et \overline{A} est un ouvert.

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:8]
 □ Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe $r > 0$ tel que la boule de centre x et de rayon r soit incluse dans A . Montrons alors que $\mathcal{B}(x; \frac{r}{2}) \subset \overset{\circ}{A}$. ► Soit $y \in \mathcal{B}(x; \frac{r}{2})$. Alors il est facile de montrer par inégalité triangulaire que $\mathcal{B}(y; \frac{r}{2}) \subset A$, ce qui montre que $y \in \overset{\circ}{A}$ (par définition de l'intérieur). ◀ On a bien $\mathcal{B}(x; \frac{r}{2}) \subset \overset{\circ}{A}$. □ Conclusion :

$\overset{\circ}{A}$ est un fermé.
 Montrons que $\overline{\overset{\circ}{A}}$ est un ouvert. □ Soit $x \in \overline{\overset{\circ}{A}}$. Supposons que pour toute boule ouvert de centre x , on ait $\mathcal{B}(x; r) \cap A \neq \emptyset$. Alors on aurait par définition $x \in A$; ce qui n'est pas vrai. Donc il existe un réel $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x; r) \cap A = \emptyset$. □ Ce qui montre que $\overline{\overset{\circ}{A}}$ est un ouvert et donc \overline{A} est un fermé.

◆ **TOPO.2** (♣)
 Montrer que si A et B sont deux parties non vides bornées d'un e.v.n. E , alors $A + B$ est bornée.

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:11]
 Il existe deux réels positifs r et r' tels que $A \subset \mathcal{B}(0; r)$ et $B \subset \mathcal{B}(0, r')$. On a alors $A + B \subset \mathcal{B}(0, r + r')$.

◆ **TOPO.3** (♣)
 Soient $a, a' \in E$ et $r, r' > 0$. Montrer que $\mathcal{B}(a; r) + \mathcal{B}(a'; r') = \mathcal{B}(a + a'; r + r')$.

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:11bis] Double inclusion triviale.

◆ **TOPO.4** (★)
 Soit A une partie non vide de E , et $x \in E$. Comparer $d(x; A)$ et $d(x; \overset{\circ}{A})$ où $\overset{\circ}{A}$ est l'intérieur de A . Comparer $d(x; A)$ et $d(x; \overline{A})$.

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:12]
 On a $d(x; A) \leq d(x; \overset{\circ}{A})$, mais on ne peut rien dire de plus, comme le prouve un contre-exemple bien choisi ($A = \mathbb{Q} \cup [0; 1]$, $x = 2$, $d(x; A) = 0$ et $d(x; \overset{\circ}{A}) = 1$).
 De même, on a trivialement $d(x; \overline{A}) \leq d(x; A)$.
 □ Soit $\varepsilon > 0$, il existe $y \in \overline{A}$ tel que $d(x, y) \leq d(x; \overline{A}) + \varepsilon/2$ d'après la définition de l'inf. Or si $y \in \overline{A}$, il existe $z \in A$ tel que $d(y, z) \leq \varepsilon/2$. Alors
 $d(x; A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq d(x; \overline{A}) + \varepsilon$. □
 Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $d(x; A) \leq d(x; \overline{A})$, ce qui finalement montre l'égalité.

◆ **TOPO.5 (Un ouvert)** (★★)
 Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n ; \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour tout } i \neq j\}$$
 est un ouvert de \mathbb{R}^n .

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:5] car le premier terme est $\geq 2r$ et le second $< 2r$.
 Soit $x \in A$, on pose $r = \frac{1}{2} \max_{i \neq j} |x_i - x_j|$, et si $y \in \mathcal{B}(x; r)$, on a
 $|y_i - y_j| = |y_i - x_i + x_i - x_j + x_j - y_j|$
 $\geq |x_i - x_j| - |y_i - x_i - (y_j - x_j)| > 0$

◆ **TOPO.6 (GL_n(C) ouvert)** (★)
 Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert, et que son complémentaire n'est pas compact si $n \geq 2$.

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:22] N_∞ arbitrairement grande, en posant $M = nE_{1,1}$, mais il faut être en dimension supérieurs ou égale à 2, sinon le complémentaire de $GL_n(\mathbb{C})$ est simplement $\{0\}$.
 Ouvert car c'est $\det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$. Le complémentaire n'est pas compact car il n'est pas borné. En effet on peut trouver une matrice non inversible de norme

◆ **TOPO.7** (★)
 Soit E un e.v.n. Montrer que
 1) la somme de deux ouverts est ouverte;
 2) si K est compacte et F fermé, $K + F$ est fermé;
 3) (plus dur) la somme de deux fermés n'est pas forcément un fermé.

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:9]
 1) Soient A et B deux ouverts, montrons que $A + B$ est ouvert.
 □ Soit $x \in A + B$. Alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Or A est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a; r) \subset A$. ► Soit $y \in \mathcal{B}(x; r)$. Alors en posant $a' = y - b$, on a $y = a' + b$ et $\|a' - a\| = \|y - (a + b)\| = \|y - x\| < r$, ce qui montre que $a' \in A$. Ces deux relations montrent que $y \in A + B$. ◀ En conséquence de quoi on a $\mathcal{B}(x; r) \subset A + B$. □ On a bien montré $A + B$ ouvert.
 2) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $K + F$, et convergente dans E . Notons ℓ sa limite, et montrons qu'alors $\ell \in K + F$. Il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des éléments $k_n \in K$ et $e_n \in F$ tels que $x_n = k_n + e_n$. Or $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans un compact, elle admet donc une sous-suite $(k_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, de limite k . Comme $x_{\phi(n)} = k_{\phi(n)} + e_{\phi(n)}$ et que $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors $(e_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente aussi, notons e sa limite. On a $e \in F$ et $k \in K$ car ce sont des fermés, et donc $x = k + e \in K + F$.
 3) Prendre $F_1 = \mathbb{Z}$ et $F_2 =$ un représentant de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} dans chaque $[n; n + 1[$, alors $F_1 + F_2 = \mathbb{Q}$.
 Autre contre-exemple : $A = \{(x, y) ; xy = 1\}$ et $B = \{(x, 0) ; x \geq 0\}$.
 Autre contre-exemple : $A = \mathbb{Z}$ et $B = \left\{n + \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$: alors $0 \in \overline{A + B}$ mais $0 \notin A + B$.

◆ **TOPO.8 (Intérieur et adhérence. d'un s.e.v.)** (★★)
 Notons $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E ; f(0) = f(1) = 0\}$. Déterminer $\overset{\circ}{F}$ et \overline{F} lorsque E est muni de la norme
 1) $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$;
 2) $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:80]
 Pour la première norme, on remarque que l'application $f \mapsto (f(0), f(1))$ est continue, donc F est fermé, donc $\overline{F} = F$. En revanche, si $f \in F$, on pose $f_\varepsilon = f + \varepsilon \cdot 1$ et on remarque que $\|f - f_\varepsilon\|_\infty = \varepsilon$ mais que $f_\varepsilon \notin F$ et ce, pour tout $\varepsilon > 0$. Par conséquent, F n'est voisinage d'aucun de ses points. Par suite, $\overset{\circ}{F} = \emptyset$.
 Pour la seconde norme, on montre que $\overline{F} = E$; en effet, si $f \in E$, on peut aisément fabriquer une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers f (en multipliant par la fonction g_ε , affine par morceaux, valant 1 sur $[\varepsilon; 1 - \varepsilon]$ et appartenant à F). De plus, $\overset{\circ}{F} = \emptyset$ puisque, si $f \in F$, $f_\varepsilon = f + \varepsilon \cdot 1$ vérifie $\|f - f_\varepsilon\|_\infty = \varepsilon$ mais que $f_\varepsilon \notin F$.

◆ **TOPO.9 (Int. et adh. d'un s.e.v.)** (★★)
 Soit E un e.v.n. de dimension quelconque, et soit F un s.e.v. de E . Montrer que \overline{F} est un s.e.v. de E . Si E est de dimension finie, montrer que $\overline{F} = F$. Dans le cas général, montrer que $F = E$ ou $\overset{\circ}{F} = \emptyset$. Enfin, montrer que si F est un hyperplan, alors ou bien F est fermé (et $F = \overline{F}$), ou bien F est dense dans E (et donc $\overline{F} = E$.)

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:26]

◆ **TOPO.10 (Int. et adh. d'un convexe)** (★★)
 Soit E un e.v.n. et C une partie convexe de E . Montrer que \overline{C} et $\overset{\circ}{C}$ sont convexes.

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:52]
 □ Soient $x, y \in \overline{C}$, et $\theta \in [0; 1]$. Alors il existe des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E telles que $x = \lim_n x_n$ et $y = \lim_n y_n$. Par convexité de C , le point $\theta x + (1 - \theta)y$ appartient à C , donc la suite $(\theta x_n + (1 - \theta)y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans C , donc sa limite (qui est bien définie) est dans \overline{C} , donc $\theta x + (1 - \theta)y \in \overline{C}$. □ Donc \overline{C} est convexe.
 □ Soient $x, y \in \overset{\circ}{C}$, et $\theta \in [0; 1]$. On pose $z = \theta x + (1 - \theta)y$. On suppose $\theta \neq 0$ (sinon c'est fini). Il existe une boule $\mathcal{B}(x, R) \subset C$. Montrons que la boule $\mathcal{B}(z, \theta R) \subset \overset{\circ}{C}$.
 On peut, dans un premier temps et sans restriction, considérer que $y = 0$, quitte à tout translater !
 □ Soit $w \in \mathcal{B}(z, \theta R)$. On pose $w' = w/\theta$. Alors $w' - x = \frac{w}{\theta} - x = \frac{w - \theta x}{\theta}$ donc $\|w' - x\| \leq R$ ce qui prouve que $w' \in C$, mais comme $y \in C$ on en déduit que $w = \theta w' + (1 - \theta)y \in C$. □
 On a donc bien montré que la boule $\mathcal{B}(z, \theta R) \subset C$, ce qui montre que $z \in \overset{\circ}{C}$. En conséquence de quoi $[x; y] \subset \overset{\circ}{C}$ et $\overset{\circ}{C}$ est convexe.

◆ **TOPO.11** (♣)
 Soit A une partie non vide de E (e.v.n.). Soit $x \in E$. Montrer que $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x; A) = 0$.

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:59]
 □ Soit $x \in \overline{A}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathcal{B}(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ donc il existe un élément $y \in A$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$, ce qui montre que $d(x, y) = 0$. □
 □ Soit $x \in E$ tel que $d(x; A) = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\varepsilon > \inf_{y \in A} d(x, y)$ donc il existe $y \in A$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$, donc $\mathcal{B}(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. □

◆ **TOPO.12** (★)
 Soit E un e.v.n. et A une partie non vide de E . Montrer que
 1) $\overset{\circ}{A}$ est ouvert ;
 2) $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A ;
 3) $\overset{\circ}{A}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans A .

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:55]
 $\overset{\circ}{A}$ est ouvert.
 2) Soit B un ouvert contenu dans A , alors si $x \in B$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subset B \subset A \subset \overset{\circ}{A}$ donc $x \in \overset{\circ}{A}$; ainsi $B \subset \overset{\circ}{A}$.
 3) Double inclusion triviale.

◆ **TOPO.13** (*)
 Soit A une partie non vide de E. Alors montrer que
 1) \bar{A} est fermé ;
 2) \bar{A} est le plus petit fermé de E contenant A ;
 3) \bar{A} est l'intersection de tous les fermés de E contenant A.

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:23] $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également à éléments dans F qui est fermé, donc sa limite x est dans F. □
 1) On montre que $\bar{C}_E \bar{A}$ est ouvert (voir exercice **TOPO.1**).
 2) Soit F un fermé contenant A. Montrons que $\bar{A} \subset F$. □ Soit $x \in \bar{A}$. Alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x. La suite
 3) \bar{A} est un fermé contenant A, donc $\bigcup F \subset \bar{A}$; par ailleurs, $\bigcup F$ est un fermé, et il contient A, donc d'après b), $\bar{A} \subset \bigcup F$, ce qui montre l'égalité.

◆ **TOPO.14** (♣)
 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = +\infty$, alors l'ensemble $\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est fermé.

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:51] née, $|v_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $U \cap \bar{B}(0, M)$ est finie, et donc fermée. Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $U \cap \bar{B}(0, M)$.
 Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente à valeurs dans U. Alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bor-

◆ **TOPO.15** (*)
 On note E le \mathbb{R} -e.v. des applications continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} , muni de la norme infinie. On pose

$$A = \left\{ f \in E ; f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f \geq 1 \right\}.$$

Montrer que A est une partie fermée de E. Montrer que $\|f\|_\infty > 1$ pour tout $f \in A$. Calculer enfin $d(0; A)$.

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:61] A est l'image réciproque d'un fermé par l'application continue
 $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $f \mapsto \left(f(0), \int_0^1 f \right)$.
 Soit $f \in E$. Supposons $f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0; 1]$, alors $\int_0^1 f \leq 1$. Si de plus $\int_0^1 f = 1$, on en déduit que $f(f-1) = 0$ et $(f-1)$ est une fonction continue négative d'intégrale nulle, donc $f = 1$: contradiction avec $f(0) = 0$.
 $d(0; A) \geq 1$ par la question précédente. De plus, posons $f_n(x) = \frac{n+1}{n} [1 - (1-x)^n]$, alors $f_n \in E$ et $d(0, f_n) = \|f_n\|_\infty = \frac{n+1}{n}$.

◆ **TOPO.16** (***)
 On note E l'ensemble des suites réelles bornées. On pose, pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $\| \cdot \|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

- 1) Montrer que l'on a défini une norme sur E.
- 2) On pose $F = \{u \in E ; u_0 = 1\}$, $G = \{u \in E ; u \text{ converge}\}$, $H = \{u \in E ; \lim u = 0\}$. Quels sont les ensembles fermés parmi E, F et G ?
- 3) On note maintenant $H' = \{u \in E ; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = 0\}$. H' est-il fermé dans E ?
- 4) L'espace $(E, \| \cdot \|_\infty)$ est-il complet ?

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:20] Trois fermés, mais H' ne l'est pas, et E est complet.

◆ **TOPO.17**
 On note E le \mathbb{R} -e.v. des applications bornées de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} . On note $A = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E. On munit E de la norme $\| \cdot \|_\infty$, et on considère la fonction $f_0 \in E$ définie par

$$\forall x \in [0; 1], f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; \frac{1}{2}] \\ 2 & \text{si } x \in]\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

Calculer $d(f_0; A)$.

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:64] En posant $g = C^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$ on a $d(f, g) = \frac{1}{2}$. Donc $d(f; A) \leq \frac{1}{2}$.
 De plus, si $g \in A$ et $g(\frac{1}{2}) = a$, alors (obtenu pour $a = \frac{3}{2}$). Donc $d \geq \frac{1}{2}$.

◆ **TOPO.18 (Distance à une partie)** (*)
 Soit $(E, \| \cdot \|)$ un \mathbb{R} -e.v. normé. Si $x \in E$ et si A et B sont deux parties non vides de E, on pose

$$d(x; A) = \inf \{ \|x - a\| ; a \in A \} \quad \text{et} \quad d(A; B) = \inf_{b \in B} d(b, A).$$

- 1) Montrer que, pour tout $x \in E$, on a : $(x \in \bar{A} \Leftrightarrow d(x; A) = 0)$.
- 2) Montrer que $d(x; A) = d(x; \bar{A})$.
- 3) Montrer que $d(A; B) = d(\bar{A}; \bar{B})$.
- 4) Montrer que l'application $x \mapsto d(x; A)$ est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in E \quad |d(x; A) - d(y; A)| \leq \|x - y\|.$$

- 5) Si A est bornée, on note $\delta(A) = \sup_{(a, a') \in A^2} \|a - a'\|$ le **diamètre** de A. Montrer que, si A est bornée, alors $\overset{\circ}{A}$ et \bar{A} le sont aussi et que

$$\delta(\overset{\circ}{A}) \leq \delta(A) = \delta(\bar{A}).$$

Cette inégalité peut-elle être stricte ?

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:91] Tout est trivial, l'inégalité peut être stricte : par exemple, $E = \mathbb{R}$, $A = [0; 1] \cup \{2\}$, $\delta(A) = 2$ et $\delta(\overset{\circ}{A}) = 1$.

◆ **TOPO.19 (Ens. des mat. de rang $\leq p$)** (♣)
 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{A}_n = \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) ; \text{rg } A = p\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_n = \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) ; \text{rg } A \leq p\}$$

Les ensembles \mathcal{A}_p et \mathcal{B}_p sont-ils ouverts ? Fermés ?

◇ [Divers/topoexo.tex/evn:92] qu'elle est à valeurs dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathcal{A}_p$.
Études les ensembles \mathcal{A}_p .
 - Si $p > n$, $\mathcal{A}_n = \emptyset$ est ouvert et fermé.
 - Si $p = n$, $\mathcal{A} = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ est fermé.
 - Supposons $p \in [1; n-1]$. Alors \mathcal{A}_p n'est pas fermé car $\frac{1}{k} J_p \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. Il n'est pas non plus ouvert ; en effet, si $A \in \mathcal{A}_p$, on peut écrire $A = P J_p Q$ et la suite de terme général $A_k = P (J_p + \frac{1}{k} I_n) Q$ converge vers A alors
Études les ensembles \mathcal{B}_p .
 - Si $p \geq n$, $\mathcal{B}_p = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui est ouvert & fermé.
 - Si $p = 0$, $\mathcal{B} = \{0\}$ qui est fermé.
 - Si $p \in [1; n-1]$, alors \mathcal{B}_p n'est pas ouvert (même contre-exemple) mais il est fermé, puisque si on note Φ l'application de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{K}(C_n^{p+1})^2$ qui à une matrice associe tous les déterminants extraits de A d'ordre $p+1$, Φ est continue et $\mathcal{B}_p = \Phi^{-1}(0, \dots, 0)$.

◆ **TOPO.20** (***)
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(I_n + \frac{1}{k} A \right)^k = \exp(A)$.

◇ [Divers/topoexo.tex/red:96] On passe aux normes et on utilise la propriété connue sur \mathbb{R} .

◆ **TOPO.21 (L'ouvert des scindés simples unitaires)** (**)
 X MP - 2000
 Soit $P = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$ un polynôme à coefficients réels, scindé sur \mathbb{R} et à racines simples. Soit $Q = X^n + b_1 X^{n-1} + \dots + b_n$ un polynôme à coefficients réels. Montrer que si les b_i sont proches des a_i , alors Q est scindé à racines simples.

◇ [Rec00/topo+0.tex/r0:25] Notons x_1, \dots, x_n les racines de P dans l'ordre croissant. P s'annule avec changement de signe en chaque x_k .
 Considérons $y_1 < x_1 < y_2 < \dots < x_n < y_n$. On a alors $P(y_k) \cdot P(y_{k+1}) < 0$ pour $k \in [1; n]$. La fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\Phi(b_1, \dots, b_n) = (Q(y_1)Q(y_2), \dots, Q(y_n)Q(y_{n+1}))$ (les coefficients b_k interviennent dans la définition de Q) est continue car polynomiale, et $\Phi(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{*-})^n$, qui est ouvert. Ainsi, pour (b_1, \dots, b_n) suffisamment proche de (a_1, \dots, a_n) , $\Phi(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}^{*-})^n$ ce qui montre que Q est scindé simple.

◆ **TOPO.22** (♣) ENSAE MP - 2001
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $E \stackrel{\text{def.}}{=} \{P^{-1}AP ; P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\}$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable.

INDICATION : Commencer par montrer que : A non diagonalisable \Rightarrow E non fermée. (Traiter d'abord le cas A nilpotente, puis le cas général.) Puis démontrer la réciproque.

◊ [Rec01/topo-r1.tex/evn-r:7]
 E est la classe d'équivalence par similitude de A dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
 □ Supposons A non diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On peut trouver une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $\dim E_\lambda(A) < \text{mult}(\lambda, A)$. On sait (par Jordan ou autre...) qu'il existe une matrice de E qui est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

On pose $A_k = \text{diag}(k^{-1}, 1, \dots, 1) \cdot T \cdot \text{diag}(k, 1, \dots, 1)$ et on vérifie rapidement que $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge : notons L sa limite. Il est clair que $\text{mult}(\lambda, L) <$

$\text{mult}(\lambda, T) = \text{mult}(\lambda, A)$, donc L n'est pas dans E.
 Donc E n'est pas fermé. □
 □ Supposons A diagonalisable. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de E convergeant vers une matrice L. Chacune de ces matrices a donc les mêmes valeurs propres que A et avec des espaces propres de même dimension. Le polynôme caractéristique est le même et passe bien à la limite (c'est une fonction continue des matrices).

LEMME 1 *L'ensemble des matrices de rang $\leq r$ est un fermé.*

Démonstration : Son complémentaire est un ouvert, on le voit en regardant les déterminants extraits (démonstration à préciser). ■

On en déduit que L diagonalisable avec le bon spectre et les bons ordres de multiplicité ! Ce qui prouvera que $L \in E$. □

◆ **TOPO.23** (★★★) ENS Cachan MP – 2001
 On pose $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $F \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x \mapsto \sigma(\omega x + \theta) ; \omega, \theta \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\overline{F} = E$ si et seulement si σ n'est pas un polynôme.

◊ [Rec01/topo-r1.tex/evn-r:9]

◆ **TOPO.24** (GL_n(C) connexe par arcs) Centrale MP – 2002
 Montrer que GL_n(C) est connexe par arcs dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

◊ [Rec02/topo-r2.tex/evn-r:6]
 On montre que toute matrice est « connectée » à la matrice identité.
 Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. On peut trigonaliser M :

$$M = P^{-1}TP$$

où $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = D + S$

où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et S est supérieure stricte. On pose alors $T(x) = D(x) + xS$, où $D(x) = \text{diag}(\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x))$ et où l'on a défini

$$\lambda_i : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$$

comme un chemin quelconque reliant $\lambda_i(0) = 1$ à $\lambda_i(1) = \lambda_i$ sans passer par 0 (c'est facile puisque tous les λ_i sont non nuls et \mathbb{C}^* est connexe par arcs, d'ailleurs on peut trouver une formule explicite avec les modules et les arguments).

On pose enfin $M(x) = P^{-1}T(x)P$; alors $M(x) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ pour tout $x \in [0; 1]$, $M(0) = I_n$ et $M(1) = M$.

◆ **TOPO.25** (*) INT MP – 2002
 Soit $k \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{k^2}{n^2} \right\}.$$

On pose $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$. Pour quelles valeurs de k l'ensemble B est-il fermé ?

◊ [Rec02/topo-r2.tex/evn-r:7]
 Faire un joli dessin : les B_n sont des disques fermés de centre $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ et de rayon $\frac{k}{n}$. On a donc $0 \in \overline{B}$. Si $0 \leq k < \sqrt{2}$, 0 n'appartient à aucun des B_n donc B n'est pas fermé.
 Si $k \geq \sqrt{2}$, alors $B_m \subset B_n$ pour tout $m \geq n$ donc $B = B_1$ donc B est fermé.

◆ **TOPO.26** (■) ENS Ulm MP – 2003
 Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ une partie bornée non vide.
 1) Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant P. On la note $\overline{B}(x_0 ; r_0)$.
 2) Montrer que toutes les isométries f de \mathbb{R}^n telles que $f(P) \subset P$ ont un point fixe commun.
 3) Montrer que si P est fermé, le centre x_0 de la boule de la question 1) est dans l'enveloppe convexe de $P \cap S(x_0 ; r_0)$, où $S(x_0 ; r_0)$ est la sphère de centre x_0 et de rayon r_0 .

◊ [Rec03/topo-r3.tex/r3:270]

Densité

◆ **TOPO.27** (Q² dense dans R²) (♣)
 Montrer que Q² est dense dans R² muni de la norme N₁.

◊ [Divers/densiteexo.tex/evn:17]
 Soit P \in Q², alors il existe deux rationnels p et p' tels que P = (p, p').
 □ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux réels r et r' tels que $|p - r| < \varepsilon/2$ et $|p' - r'| <$

$\varepsilon/2$ puisque Q est dense dans R. On a donc $\|(p, p') - (r, r')\|_1 = |p - r| + |p' - r'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

◆ **TOPO.28**
 Soit G un sous-groupe additif de R, non réduit à {0}. On note $G_+ = \{s \in G ; s > 0\}$. Montrer que
 1) $a = \inf G_+$ existe dans R ;
 2) si $a > 0$ alors $G = a\mathbb{Z}$ (on utilisera la division euclidienne) ;
 3) si $a = 0$ alors G est dense dans R ;
 4) $\{\sin n ; n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

◊ [Divers/densiteexo.tex/evn:6]

◆ **TOPO.29** (D_n(R) dense dans T_n(R)) (**)
 On note T_n(R) l'ensemble des matrices semblables à une matrice triangulaire supérieure (on dit que les matrices de T_n(R) sont **trigonalisables**).
 Montrer que toute matrice de T_n(R) est limite d'une suite de matrices de D_n(R), autrement dit : l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans l'ensemble des matrices trigonalisables.

◊ [Divers/densiteexo.tex/evn:84]
 Soit T \in T_n(R), on pose
 Alors $D_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} T$ et pour $p \geq p_0$ tel que $n/p_0 < \min |\lambda_i - \lambda_j|$, les v.p. de D_p sont simples et D_p \in D_n(R).

$$D_p = T + \frac{1}{p} \text{diag}(1, 2, \dots, n).$$

◆ **TOPO.30** (T_n(R) n'est pas dense) (★★★)
 L'ensemble T_n des matrices trigonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est-il dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$?

◊ [Divers/densiteexo.tex/red:97]
 Bien sûr que non. On prend par exemple $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si on ne la modifie que d'une quantité H epsilonesque, son polynôme caractéristique bouge d'une quantité epsilonesque, ainsi que le discriminant de celui-ci, qui reste donc négatif ; ainsi, le spectre de M + H n'est pas dans R.

◆ **TOPO.31** (**)
 Soit A une partie infinie et bornée de R. On pose $B = \{x \in \mathbb{R} ; \text{Card}(A \cap [x ; +\infty[) = +\infty\}$. Montrer que
 1) B est non vide et majorée ;
 2) sup(B) est un point d'accumulation de A.

◊ [Rec03/densite-r3.tex/r3:124]
 1) Soit m un minorant de A, alors $[m ; +\infty[\cap A = A$ donc $m \in B$;
 B $\neq \emptyset$.
 Soit M un majorant de A. Alors $[M ; +\infty[\cap A \subset \{M\}$ donc $M \notin B$ et donc $B \subset]-\infty ; M[$, ce qui montre que B est majoré.
 2) Posons $M = \sup B$. Alors $B =]-\infty ; M[$ ou $B =]-\infty ; M]$.
 □ Soit $\varepsilon > 0$. Alors $M - \varepsilon \in B$ donc
 Card $(A \cap [M - \varepsilon ; +\infty[) = +\infty$.
 De plus, $B + \varepsilon \notin B$ ce qui montre que
 Card $(A \cap [M + \varepsilon ; +\infty[) < +\infty$.
 De ces deux dernières relations, on tire que
 Card $(A \cap [M - \varepsilon ; M + \varepsilon]) = +\infty$. □
 C'est suffisant pour montrer que M est un point d'accumulation de A.

Compacts

◆ **TOPO.32** (*)
 Montrer que si K et K' sont des compacts, alors K + K' est compact.

◊ [Divers/compactsexo.tex/evn:44]
 K+K' est l'image du compact K×K' de E×E par l'application (x, y) \mapsto x+y qui est continue.

◆ **TOPO.33**
 Soient K, K' deux compacts d'un e.v.n. E ; Montrer que la réunion des segments [k, k'] avec $k \in K$ et $k \in K'$ est un compact.

◊ [Divers/compactsexo.tex/evn:43]
 Notons L = cet ensemble. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de L, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = k + \theta_n(k'_n - k_n)$ avec $\theta_n \in [0, 1]$. On prend un sous-suite convergente de $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis un sous-sous-suite convergente de $(k'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis un sous-sous-sous-suite de $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et ça converge.
 Ou alors on dit que L est l'image de $K \times K' \times [0, 1]$ par $(k, k', \theta) \mapsto \theta k + (1 - \theta)k'$.

◆ TOPO.34

(★)

Soit E un e.v.n. de dimension finie.

- 1) Soient K et K' deux compacts de E . On munit $E \times E$ d'une norme produit, c'est-à-dire l'une des normes

$$N_1(x, y) = \|x\| + \|y\| \quad N_2(x, y) = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} \quad N_\infty(x, y) = \max(\|x\|, \|y\|).$$

Montrer que $K \times K'$ est compact dans $E \times E$.

- 2) Soit A un compact de E , montrer qu'il existe $a, b \in A$ tels que

$$\|a - b\| = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|.$$

◇ [Divers/compactsexo.tex/evn:54]

- 2) On pose $f : \begin{cases} A \times A \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \|x - y\|, \end{cases}$ qui est une fonction continue, qui atteint donc son *supremum* sur $A \times A$ qui est compact d'après le théorème de Weierstrass.

- 1) $K \times K'$ est borné, et bien sûr fermé par caractérisation séquentielle par exemple, donc c'est un compact.

Normes ; Équivalence des normes

◆ **NOR.1 (Deux normes)** (*)

On note $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ et

$$F = \{f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}) ; f(0) = 0\}.$$

Pour tout $f \in E$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|$ et on pose, pour tout $f \in F$:

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f'\|_\infty.$$

- 1) Montrer que N_2 est une norme sur F .
- 2) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

◆ [Divers/normeexo.tex/evn:89] 2) Non. Prendre $f_n : x \mapsto x^n$ par exemple : la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée au sens de N_1 car $N_1(f_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors qu'elle ne l'est pas pour $N_2 : N_2(f_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◆ **NOR.2 (Une norme sur $\mathbb{R}[X]$)** (♣)

On pose $E = \mathbb{R}[X]$, et pour tout $P \in E$, on pose $\|P\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |P(t) - P'(t)|$.

Montrer que $P \mapsto \|P\|$ est une norme.

◆ [Divers/normeexo.tex/evn:20bis] Enfin, si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a $|P(t) + Q(t) - P'(t) - Q'(t)| \leq |P(t) - P'(t)| + |Q(t) - Q'(t)|$.
Si $N(P) = 0$ alors $P = P'$ donc $P = 0$.

◆ **NOR.3 (Jauge)** (***)

Soit E un e.v.n. réel, K un convexe borné de E , tel que 0 est dans l'intérieur de K .

- 1) Montrer que l'application

$$\rho : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R} ; \lambda > 0 \text{ et } \frac{x}{\lambda} \in K \right\}$$

vérifie

- a) $\rho(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ et $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- b) $\rho(\mu x) = \mu \rho(x)$ si $\mu \geq 0$;
- c) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

Montrer de plus que ρ est continue.

- 2) soient K, K' des fermés bornés convexes de E , 0 étant intérieur à chacun d'eux. Montrer que

$$\phi : E \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \phi(x) = \frac{\rho(x)}{\rho'(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \phi(0) = 0 \end{cases}$$

est un homéomorphisme de E et que $\phi(K) = K'$.

- 3) Si K est borné symétrique et convexe, alors ϕ est une norme.

◆ [Divers/normeexo.tex/evn:21]

◆ **NOR.4**

Notons $E = \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$. Soient $f \in E$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Comparer les énoncés

- i) $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;
- ii) $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;
- iii) $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;

Y a-t-il des implications ? des équivalences ?

◆ [Divers/normeexo.tex/evn:15] prendre $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $f_n = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n$.
On a clairement $N_1 \leq (b-a)N_\infty$, mais ces normes ne sont pas équivalentes : Pour comparer N_2 , il faut l'inégalité de Schwarz : plus tard !

◆ **NOR.5 (Une inégalité rusée)** (**)

Soient x, y, z trois vecteurs d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$, vérifiant $x + y + z = 0$. Montrer que

$$\|x - y\| + \|y - z\| + \|z - x\| \geq \frac{3}{2} (\|x\| + \|y\| + \|z\|).$$

◆ [Divers/normeexo.tex/evn:59] Cela nous donne
On peut écrire que

$$3(\|x\| + \|y\| + \|z\|) = \|2x - y - z\| + \|2y - x - z\| + \|2z - x - y\| \leq 2(\|x - y\| + \|y - z\| + \|z - x\|).$$

$$3x = 2x + x = 2x - y - z \quad \&c.$$

◆ **NOR.6** (***)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $E = \mathbb{K}^n$. On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$N_p : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto N_p(x) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$$

On admet que N_p est une norme pour tout $p \in \mathbb{N}$.
Soit $x \in E$. Montrer que la suite $p \mapsto N_p(x)$ converge dans \mathbb{R} vers $N_\infty(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \max_k |x_k|$. On pourra commencer par raisonner dans des cas simples ($n = 3$ par exemple).

◆ [Divers/normeexo.tex/evn:45]

◆ **NOR.7 (Normes sur $\mathbb{R}[X]$)** (***)

On note E le \mathbb{R} -e.v. $\mathbb{R}[X]$. Pour tout $P \in E$, on pose $\theta_n(P) = \int_0^1 P(t) t^n dt$. On définit alors, pour tout $P \in E$:

$$\rho_1(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\theta_n(P)| \quad \rho_2(P) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(P)^2 \right)^{1/2}$$

$$\rho_3(P) = \int_0^1 |P(t)| dt \quad \rho_4(P) = \sup_{t \in [0; 1]} |P(t)|.$$

- 1) Justifier l'existence de ρ_1 à ρ_4 .
- 2) Montrer que ce sont des normes.
- 3) Déterminer quatre réels α, β, γ et δ strictement positifs tels que

$$\rho_1 \leq \alpha \rho_2 \leq \beta \rho_4 \quad \text{et} \quad \rho_1 \leq \gamma \rho_3 \leq \delta \rho_4.$$

- 4) Montrer que ces quatre normes sont deux à deux non équivalentes (on pourra par exemple calculer les $\rho_i(X^p)$ et broder...)

◆ [Divers/normeexo.tex/evn:88] $\rho_1(X^n) = \frac{1}{n+1}$,
1) On vérifie rapidement que ces normes existent.
2) Que ce soient des normes est à peu près évident pour chaque.
3) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n(P) \leq \rho_4(P) \frac{1}{(1+n)^2}$, ce qui montre que

$$\rho_2(X^n) = 1 \quad \rho_3(X^n) = \frac{1}{n+1}$$

$$\rho_2 \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \rho_4.$$

On a de plus

$$\rho_1(P) \leq |\theta_0(P)| \leq \rho_3(P).$$

Enfin

$$\rho_3(P) \leq \rho_4(P) \quad \text{et} \quad \rho_1(P) \leq \rho_2(P)$$

de manière évidente.
Au total,

$$\rho_1 \leq \rho_2 \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \rho_4 \quad \text{et} \quad \rho_1 \leq \rho_3 \leq \rho_4.$$

Quant aux inégalités dans l'autre sens, on commence par calculer les normes des polynômes X^n :

et

$$\rho_2(X^n) = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n+1)^2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(en comparant le reste de la série avec une intégrale).

De $\rho_4(X^n) = 1$ et $\rho_3(X^n) = \frac{1}{n+1}$ on déduit que :

$$\rho_4 \text{ n'est pas dominée par } \rho_3.$$

Pour la comparaison ρ_1 et ρ_3 , c'est plus délicat. Il faut une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\rho_3(P_n) \geq C$ mais $\rho_1(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On prend par exemple

$$P_n = (n + 1)(1 - X)^n$$

alors $\rho_3(P_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais

$$0 \leq \int_0^1 P_n(t) t^k dt \leq \int_0^1 P_n(t) t dt = \frac{1}{n+2},$$

donc $\rho_1(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

ρ_3 n'est pas dominée par ρ_1 .

De plus, $\rho_1(X^n) = \frac{1}{n+1}$ et $\rho_2(x^n) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ on tire que

ρ_2 n'est pas dominée par ρ_1 .

Enfin, de $\rho_2(x^n) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\rho_4(X^n) = 1$, on déduit que

ρ_4 n'est pas dominée par ρ_1 .

♦ **NOR.8 (Norme inv.^{1e} par similitude?)** (★★)

Existe-t-il sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une norme $\|\cdot\|$ telle que

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \|P^{-1}AP\| = \|A\| \quad ?$$

◊ [Divers/normeexo.tex/evn:68]

Cela voudrait dire que $\|AP\| = \|PA\|$ pour tout $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Mais puisque $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, cela voudrait dire

que la relation précédente est vraie pour tout $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (par continuité de la norme et de la multiplication matricielle). Ceci est clairement faux, il suffit d'exhiber un couple (A, P) tel que $AP = 0$ et $PA \neq 0$!

♦ **NOR.9 (Normes de suites)** (♣)

Notons E l'ensemble des suites réelles bornées. On définit sur E

$$\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|u_n| + |u_{2n}|).$$

Montrer que ce sont deux normes et qu'elles sont équivalentes.

◊ [Divers/normeexo.tex/evn:94]

On a $\|\cdot\| \leq N \leq 2\|\cdot\|$.

♦ **NOR.10 (Équiv. des normes \Leftrightarrow dim. finie)** (★★)

Soit E un espace vectoriel normé sur lequel toutes les normes sont supposées équivalentes.

- 1) Soit $f \in E^*$. En choisissant une norme $\|\cdot\|$ sur E et en considérant $x \mapsto \|x\| + |f(x)|$, montrer que f est continue sur E.
- 2) En déduire que E est de dimension finie (on raisonnera par l'absurde).

◊ [Divers/normeexo.tex/evn:96]

2) Supposons E de dimension infinie. On choisit une famille *libre* de cardinal strictement dénombrable (e_1, \dots, e_n) , extraite d'une base \mathcal{B} , dénombrable ou non, et on pose $f(e_k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $f(b) = 0$ si b est un élément de \mathcal{B} n'appartenant pas à (e_1, \dots, e_n) . On a ainsi entièrement déterminé f , qui n'est clairement pas continue.

♦ **NOR.11 (Deux normes)** (♣)

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0; 1]$ et denses dans $[0; 1]$ (c'est-à-dire que $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ et $\{b_n; n \in \mathbb{N}\}$ sont denses). On note $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$.

- 1) Montrer que les applications

$$\|\cdot\|_a : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f(a_n)|}{2^n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \|\cdot\|_b : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f(b_n)|}{2^n} \end{cases}$$

sont des normes.

- 2) Montrer que si $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas dense, alors $\|\cdot\|_a$ n'est pas une norme.
- 3) On suppose que $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ et $\{b_n; n \in \mathbb{N}\}$ sont distincts. Montrer que les normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ ne sont pas équivalentes.

◊ [Divers/normeexo.tex/evn:103]

- 1) T.
- 2) On trouve une boule ouverte ne contenant aucune des éléments de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On fabrique alors une fonction nulle partout sauf dans cette boule ouverte, elle vérifie $f \neq 0$ mais $\|f\|_a = 0$.
- 3) On peut supposer, quitte à intervenir les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qu'il existe un élément, que nous noterons a_{n_0} , n'appartenant pas à $\{b_n; n \in \mathbb{N}\}$. On construit maintenant une suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $\|f_p\|_b \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ mais $\|f_p\|_a$ ne tend pas vers 0 quand $p \rightarrow \infty$.

□ Soit $p \in \mathbb{N}$. On sait que $\sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{p-1}}$. De plus, l'ensemble

$\{b_0, \dots, b_p\}$ ne rencontre pas a_{n_0} . On fabrique une fonction f_p affine par morceaux valant 1 en a_{n_0} , et 0 en dehors d'un voisinage de a_{n_0} ne rencontrant aucun de ces points-là. Il est immédiat de vérifier que

$$\|f_p\|_b \leq \frac{1}{2^{p-1}} \quad \text{mais} \quad \|f_p\|_a \geq \frac{1}{2^p}. \quad \square$$

♦ **NOR.12** (★★)

On considère le \mathbb{C} -espace vectoriel des suites complexes bornées. Pour toute suite $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\mathcal{N}_1(U) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_2(U) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{n!}.$$

- 1) Vérifier que \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_2 sont des normes.
- 2) Montrer que $\mathcal{N}_2 \leq 2\mathcal{N}_1$ mais qu'elles ne sont pas équivalentes.

◊ [Divers/normeexo.tex/div:58]

On utilise le fait que $n! \geq 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (vérifier pour les trois

premiers rangs, puis récurrence triviale.)

♦ **NOR.13** (★★)

On note $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. Soit $g \in E$. On définit, pour tout $f \in E$: $\|f\|_g = \|f \cdot g\|_{\infty}$.

- 1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\|\cdot\|_g$ soit une norme.
- 2) Montrer que $\|\cdot\|_g$ est équivalente à $\|\cdot\|_{\infty}$ si et seulement si g ne s'annule pas.

◊ [Divers/normeexo.tex/div:115]

- 1) Seule la condition $(\|f\|_g = 0 \Rightarrow f = 0)$ est éventuellement problématique. Cette condition est réalisée si et seulement si g ne s'annule sur aucun segment.
- 2) On suppose que g ne s'annule pas. On note $m = \inf |g|$ et $M = \sup g$.

Alors $m\|\cdot\|_{\infty} \leq \|\cdot\|_g \leq M\|\cdot\|_{\infty}$. Donc $\|\cdot\|_g$ est équivalente à $\|\cdot\|_{\infty}$.

Réciproquement, si g s'annule en x_0 , prendre une suite de fonctions piquée en x_0 (par exemple $f_n(x) = e^{-n(x-x_0)^2}$) doit permettre de conclure.

♦ **NOR.14**

◊ [Divers/normeexo.tex/div:116]

♦ **NOR.15**

◊ [Divers/normeexo.tex/div:117]

♦ **NOR.16** (★★)

X PC - 1998

On note E l'espace vectoriel normé des suites bornées de premier terme nul. Pour tout $u \in E$, on pose

$$N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n - u_{n-1}|.$$

- 1) Montrer que N est une norme sur E.
- 2) Trouver une inégalité entre $N(u)$ et $M(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n|$.
- 3) M et N sont-elles équivalentes ?

◊ [Rec00/norme-r0.tex/supp-r0:15]

- 1) T.
- 2) $N \leq 2M$.

3) Non équivalentes : poser $u_n^p = n/p$ pour $n \in [0; p]$. Alors $N(u^p) = 1/p$ et tend vers 0 tandis que $M(u^p) = 1$.

♦ **NOR.17** (★★)

IDN

On pose $E = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$, et on définit les applications

$$N : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto N(f) \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \sup_{[0; 1]} |f|, \end{cases} \quad \text{et} \quad N' : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto N'(f) \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} N(f) + N(f'). \end{cases}$$

- 1) Est-ce que N et N' sont des normes ? Sont-elles équivalentes ?
- 2) Montrer que $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ muni de N et $\mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ muni de N' sont complets.
- 3) L'espace vectoriel $\mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ muni de N est-il complet ?

◊ [Rec00/norme-r0.tex/evn:3]

Ce sont bien des normes, mais pas équivalentes, car la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie

par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$, à valeurs dans E, converge vers 0 au sens de N, mais pas au sens de N' car $N'(f_n) = 1 + \frac{1}{n}$.

◆ **NOR.18** Mines
 Montrer que $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur \mathbb{R}^2 ; dessiner la boule unité.

$$X = (x, y) \mapsto N(X) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2}$$

◇ [Rec00/norme-r0.tex/evn:3bia]

◆ **NOR.19 (Une norme sur $\mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$)** (*) Centrale – 2001
(Ceci est une question de l'exercice d'origine.)
 On considère $F = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ et $N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'^2}$. Montrer que N est une norme.

◇ [Rec01/norme-r1.tex/evn:65]
 Seule l'inégalité triangulaire pose des problèmes. Il faut utiliser d'une part une inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int f'g' \leq \sqrt{\int f'^2} \sqrt{\int g'^2}$$

ce qui permet d'avoir

$$\int (f' + g')^2 \leq \left(\sqrt{\int f'^2} + \sqrt{\int g'^2} \right)^2$$

et donc, puisque $N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ vérifie l'inégalité triangulaire dès que N_1 et N_2 le font (cf. ci-dessous), N est bien une norme.

Le résultat utilisé est classique en utilisant le lemme suivant :

◆ **NOR.20** Centrale MP – 2001
 Soit U un ouvert convexe. Soit $F \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ une application convexe.
 1) Montrer que, pour tout $M, M_0 \in U^2$, on a $F(M) \geq F(M_0) + dF_{M_0}(M - M_0)$.
 2) Montrer que $dF_M = 0 \Rightarrow F(M)$ est un minimum local.
 3) On pose $E = \{M \in U ; dF_M = 0\}$. Montrer que E est fermé convexe.
 4) On pose $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $M = (x, y) \mapsto \|OM\| + ax + by$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Trouver les minima absolus de F .

◇ [Rec01/norme-r1.tex/evn-r:15]

◆ **NOR.21** (***) Centrale MP – 2001
 On pose $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
 1) On pose $\phi : E \rightarrow E$, $f \mapsto \exp \circ f$. L'application ϕ est-elle continue ?
 2) On considère $F = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ et $N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'^2}$. Montrer que N est une norme. Comparer N et $\|\cdot\|_\infty$.

◇ [Rec01/norme-r1.tex/evn-r:11]

1) Soit $f_0 \in E$ et montrons que ϕ est continue en f_0 . On sait que f_0 est bornée, prenons M un majorant de $|f_0|$. Alors pour tout $f \in \mathcal{B}(f_0; 1)$, on a

$$|e^{f(t)} - e^{f_0(t)}| \leq e^{M+1} |f(t) - f_0(t)|,$$

ce qui montre que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f et pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que $\|f_n - f_0\|_\infty \leq 1$, on a

$$\|\phi(f_n) - \phi(f)\|_\infty \leq e^{M+1} \|f_n - f_0\|_\infty.$$

On en déduit la continuité de ϕ en f_0 .

2) Montrons que N est une norme. Seule l'inégalité triangulaire pose des problèmes. Il faut utiliser d'une part une inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int f'g' \leq \sqrt{\int f'^2} \sqrt{\int g'^2}$$

ce qui permet d'avoir

$$\int (f' + g')^2 \leq \left(\sqrt{\int f'^2} + \sqrt{\int g'^2} \right)^2$$

et donc, puisque $N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ vérifie l'inégalité triangulaire dès que N_1 et N_2 le font (cf. ci-dessous), N est bien une norme.

Le résultat utilisé est classique en utilisant le lemme suivant :

LEMME Soient N_1 et N_2 vérifiant l'inégalité triangulaire. Alors $N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ vérifie aussi l'inégalité triangulaire.

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} N^2(x + y) &= N_1^2(x + y) + N_2^2(x + y) \\ &\leq N_1^2(x) + N_1^2(y) + 2[N_1(x)N_1(y) + N_2(x)N_2(y)] \\ &\leq N_1^2(x) + N_1^2(y) + 2 \begin{pmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_1(y) \\ N_2(y) \end{pmatrix} \\ &\leq N_1^2(x) + N_1^2(y) + 2N(x)N(y) \\ &\leq (N(x) + N(y))^2. \end{aligned}$$

On a

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

or

$$\left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq \int_0^1 |f'(t)| dt \leq \|f'\|_1 \leq \|f'\|_2 \cdot 1.$$

On a donc

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \|f'\|_2.$$

Or d'une manière générale, on a

LEMME Pour tout $a, b \geq 0$,

$$a + b \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

ou encore

$$\|\cdot\|_1 \leq \sqrt{2} \|\cdot\|_2.$$

Démonstration : Un simple calcul montre qu'il y a équivalence entre les énoncés :

(a) $a + b \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$;

(b) $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$;

(c) $2ab \leq a^2 + b^2$;

(d) $0 \leq (a - b)^2$.

Cette dernière proposition étant vraie...

On en déduit

$$\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} \sqrt{f'(0)^2 + \|f'\|_1^2},$$

ce qui montre que $\|\cdot\|_\infty \leq \sqrt{2}N$.

Mais si on pose $f_n(x) = \sin \pi n x$, alors $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ donc ces normes ne sont pas équivalentes.

◆ **NOR.22 (Une norme)** (★) Centrale PC – 2001
 On note E l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telles que $\lim_{x \rightarrow \infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0$. On note F l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{C} à support borné, c'est-à-dire telles que : il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq A \Rightarrow f(x) = 0$.
 1) Montrer que E et F sont deux espaces vectoriels.
 2) On définit $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Montrer que N définit une norme sur E .

◇ [Rec01/norme-r1.tex/evn-r:16]

T.

◆ **NOR.23 (Comparaison de deux normes)** (★) X MP – 2002
 On note $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R}) ; f(0) = f(1) = 0 \right\}$. On définit l'application N_2 sur E par $N_2(f) = \left(\int_0^1 f''(t)^2 dt \right)^{1/2}$.
 1) Montrer que N_2 est une norme.
 2) Comparer $\|\cdot\|_\infty$ et N_2 .

◇ [Rec01/norme-r1.tex/evn-r:2:8]

$$\forall x \in [0; 1] \quad |f'(x)| \leq N_2(f).$$

1) Si $N(f) = 0$ alors $f'' = 0$ donc $f' = C^{\text{te}}$, avec $f(0) = f(1)$, $f' = C^{\text{te}} = 0$. Les autres propriétés sont immédiates.

L'inégalité des accroissement finis permet alors de conclure

2) Soit $f \in E$. Alors f' s'annule en (au moins) un point $c \in]0; 1[$. On a alors, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$\|f\|_\infty \leq N_2(f).$$

Posons $f_n : x \mapsto \sin \pi n x$. Alors

$$\|f_n\|_\infty = 1 \text{ mais } N_2(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Cela nous mène ainsi à :

Ces deux normes ne sont pas équivalentes.

◆ **NOR.24 (Comparaison de deux normes)** (***) X MP – 2002
 On note $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R}) ; f(0) = f(1) = 0 \right\}$. On définit l'application N_2 sur E par $N_2(f) = \left(\int_0^1 f''(t)^2 dt \right)^{1/2}$.
 1) Montrer que N_2 est une norme.
 2) Comparer $\|\cdot\|_\infty$ et N_2 .

◇ [Rec02/norme-r2.tex/evn-r:2:8]

La même inégalité nous mène ainsi à :

1) Si $N(f) = 0$ alors $f'' = 0$ donc $f' = C^{\text{te}}$, avec $f(0) = f(1)$, $f' = C^{\text{te}} = 0$. Les autres propriétés sont immédiates.

$$\forall x \in [0; 1] \quad |f'(x)| \leq 2N_2(f).$$

2) Soit $f \in E$. On a alors, pour tout $x \in [0; 1]$:

L'inégalité des accroissement finis permet alors de conclure

$$\begin{aligned} |f'(x) - f'(0)| &= \left| \int_0^x f''(t) \cdot 1 dt \right| \\ &\leq \left(\int_0^x f''(t)^2 dt \right)^{1/2} \cdot \sqrt{x} \leq N_2(f). \end{aligned}$$

$$\|f\|_\infty \leq 2N_2(f).$$

(On doit même sans doute pouvoir faire mieux !)

Posons $f_n : x \mapsto \sin \pi n x$. Alors

$$\|f_n\|_\infty = 1 \text{ mais } N_2(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Or, la fonction f' s'annule en au moins un point $c \in [0; 1]$ (théorème de Rolle), donc l'inégalité précédente prise en $x = c$ permet de donner la majoration suivante :

$$|f'(0)| \leq N_2(f).$$

◆ **NOR.25** (★) ENSEA PC – 2002

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

(N1) $\forall x \in E \setminus \{0\} \quad N(x) > 0;$
 (N2) $N(0) = 0;$
 (N3) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in E^2$

$$N(\lambda x + y) \leq |\lambda|N(x) + N(y).$$

Montrer que N est une norme.

◇ [Rec02/norme-r2.tex/r2-1] donc $N(\lambda x) \geq |\lambda|N(x)$,
 L'inégalité triangulaire est vérifiée en prenant $\lambda = 1$. On a de plus $N(\lambda x) \leq |\lambda|N(x)$ pour tout $x \in E$.
 □ Soient $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$. Si $\lambda = 0$, c'est terminé. Sinon, il suffit d'écrire que

$$N(x) = N\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda x)\right) \leq \frac{1}{|\lambda|}N(\lambda x),$$

ce qui, conjointement avec la propriété (N3), donne $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$. Donc N est une norme.

◆ **NOR.26** (★★) ENS MP – 2003

Notons $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$.

1) Soit F un sous-espace vectoriel de E tel qu'il existe une constante $C > 0$ vérifiant :

$$\forall f \in F \quad \|f\|_\infty \leq C \|f\|_2.$$

2) Montrer que $F \neq E$.
 3) Montrer que F est de dimension finie $\dim F \leq C^2$.
 4) Soit $n \geq 1$. Existe-t-il un sous-espace vectoriel E_n de E , de dimension n , tel que

$$\forall f \in E_n \quad \|f\|_\infty \leq \sqrt{n} \|f\|_2 \quad ?$$

◇ [Rec03/norme-r3.tex/r3-57] et donc $\forall x \in [0; 1] \quad f_1(x)^2 + \dots + f_p(x)^2 \leq C^2$.
 Il ne reste plus qu'à intégrer sur $[0; 1]$ et utiliser le fait que les fonctions f_k sont normées : on obtient $p \leq C^2$.
 3) Dans le cas précédent, si l'on veut une égalité et non une inégalité, il faut que $f_1^2(x) + \dots + f_p^2(x) = C^2$ pour tout $x \in [0; 1]$.
 – Si $n = 2p$ est pair, on définit

$$c_k : t \mapsto \sqrt{2} \cos(2k\pi t) \quad \text{et} \quad s_k : t \mapsto \sqrt{2} \sin(2k\pi t).$$

La famille $(c_1, \dots, c_p, s_1, \dots, s_p)$ convient dans l'espace engendré par icelle.
 – Si $n = 2p + 1$ est impair, il suffit d'ajouter la fonction constante en 1 :

$$F = \text{Vect}(c_1, \dots, c_p, s_1, \dots, s_p, \mathbf{1}).$$

◆ **NOR.27** (★★★) Mines MP – 2003

On note $E = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\mathcal{N}(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

1) Vérifier que \mathcal{N} est une norme sur E .
 2) Montrer que $\|\cdot\|_\infty \leq \sqrt{2}\mathcal{N}$.
 3) $\|\cdot\|_\infty$ et \mathcal{N} sont-elles équivalentes ?

◇ [Rec03/norme-r3.tex/r3-133] Démonstration : On a

$$\begin{aligned} N^2(x + y) &= N_1^2(x + y) + N_2^2(x + y) \\ &\leq N^2(x) + N^2(y) + 2[N_1(x)N_1(y) + N_2(x)N_2(y)] \\ &\leq N^2(x) + N^2(y) + 2 \begin{pmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_1(y) \\ N_2(y) \end{pmatrix} \\ &\leq N^2(x) + N^2(y) + 2N(x)N(y) \\ &\leq (N(x) + N(y))^2. \end{aligned}$$

LEMME Soient N_1 et N_2 vérifiant l'inégalité triangulaire. Alors $N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ vérifie aussi l'inégalité triangulaire.

2) Utiliser

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

or

$$\left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq \int_0^1 |f'(t)| dt \leq \|f'\|_2 \cdot 1.$$

On a donc $|f(x)| \leq |f(0)| + \|f'\|_2$.
 Or d'une manière générale, on a

LEMME Pour tout $a, b \geq 0$,

$$a + b \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

ou encore $\|\cdot\|_1 \leq \sqrt{2}\|\cdot\|_2$.

Démonstration : Un simple calcul montre qu'il y a équivalence entre les énoncés :

(a) $a + b \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2};$
 (b) $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2);$
 (c) $2ab \leq a^2 + b^2;$
 (d) $0 \leq (a - b)^2.$

Cette dernière proposition étant vraie...
 On en déduit $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} \sqrt{f'(0)^2 + \|f'\|_2^2}$,
 ce qui est la majoration voulue.
 3) Si l'on pose $f_n(x) = \sin \pi n x$, alors $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\mathcal{N}(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ donc ces normes ne sont pas équivalentes.

◆ **NOR.28** (★★) Centrale MP – 2003

On note $E = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .

1) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
 2) On pose $N_1(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |e^{-|t|} f(t)|$ et $N_2(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |(1 - e^{-|t|}) f(t)|$.
 Montrer qu'il s'agit de normes sur E .
 3) Montrer qu'il n'existe aucun réel $a > 0$ tel que $N_1 \leq aN_2$, ni aucun $b > 0$ tel que $N_2 \leq bN_1$ (aucune norme ne domine l'autre).
 4) On choisit $c \in \mathbb{R}$. On pose

$$\Psi_c : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(c). \end{cases}$$

Montrer que Ψ_c est continue de (E, N_1) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Calculer sa norme linéaire.

◇ [Rec03/norme-r3.tex/r3-216] 4) On peut écrire

1) T.
 2) T.
 3) On choisit des fonctions en triangle f_n de largeur 1 et centrées en n . Alors $N_1(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ tandis que $N_2(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. L'inexistence de b est donc montrée.
 Inversement, prenons une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où g_n est centrée en 0 et de largeur $2/n$, alors $N_1(g_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ tandis que $N_2(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ce qui montre l'inexistence de a .

$$|\Psi_c(f)| = e^{|c|} |e^{-|c|} f(x)| \leq e^{|c|} N_1(f),$$

ce qui assure la continuité et montre que $\|\Psi_c\| \leq e^{|c|}$.
 L'autre inégalité se fait en prenant une fonction triangle piquée en c . On trouve donc

$$\|\Psi_c\| = e^{|c|}.$$

◆ **NOR.29** (★★) Centrale MP – 2004

On note $E = \mathbb{R}[X]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On définit l'application $N_{a,b} : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $N_{a,b} : P \mapsto \sup_{t \in [a; b]} |P(t)|$.

1) Vérifier que $N_{a,b}$ est une norme.
 2) On définit $\phi_c : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ P \mapsto P(c). \end{cases}$
 Étudier la continuité de ϕ_c selon les valeurs de a, b et c .
 3) Montrer que $N_{a,b}$ est équivalente à $N_{a',b'}$ si et seulement si $(a, b) = (a', b')$.

◇ [Rec04/norme-r4.tex/r4-186]

◆ NOR.30

(★★★)

Mines MP – 2004

Soit $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, noté génériquement $P = \sum_{k=0}^d P_k X^k$, on pose

$$N_A(P) = \sum_{k=0}^d |a_k P_k|.$$

- 1) À quelle condition l'application N_A est-elle une norme ?
- 2) À quelle condition N_A et N_B sont-elles équivalentes ?
- 3) À quelle condition l'application $P \mapsto P'$ est-elle continue pour N_A ?

◇ [Rec04/norme-r4.tex/r4:07]

donc qu'une condition nécessaire est au moins :

- 1) Il faut et il suffit que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Il faut que les suites (a_n/b_n) et (b_n/a_n) soient bornées. Sinon, contre-exemple évident.
- 3) Prenons $P_n = \frac{x^n}{a_n} X^n$, où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite quelconque tendant vers 0. Alors $N_A(P_n) = x_n$ donc la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 au sens de N_A , mais la suite des dérivées vérifie $N_A(P'_n) = nx_n \frac{a_{n-1}}{a_n}$. On voit

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

sans quoi on choisit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ assez embêtante pour ne pas avoir la continuité (c'est-à-dire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît très vite : au moins en $n!$). Cette condition est également suffisante.

Suites à valeurs dans un e.v.n.

◆ **EVN.1** (**) Soit E un e.v.n. de dimension finie, et soient u, v deux vecteurs de E. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de E vérifiant

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \quad v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$$

et telles que u_n est colinéaire à v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u et v sont colinéaires.

◇ [Divers/evnexo.tex/evn:56]

et $v_n = (b_1, \dots, b_p)$, on obtient donc

$$\frac{2}{3} \leq |a_1| \leq \frac{4}{3} \quad |a_2| \leq \frac{1}{3}$$

$$|b_2| \leq \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \leq |b_1| \leq \frac{4}{3}.$$

Ce la montre notamment que u_n et v_n sont non nuls, et qu'il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = kv_n$.

► On suppose que (u, v) est libre, et on la complète en une base \mathcal{B} de E. On munit E de la norme infinie associée à cette base. Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(1, 0, \dots, 0)$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $(0, 1, 0, \dots, 0)$, donc il existe un rang n tel que $\|u_n - u\| \leq \frac{1}{3}$ et $\|v_n - v\| \leq \frac{1}{3}$. En notant $u_n = (a_1, \dots, a_p)$

De $a_1 = kb_1$ on tire $|k| \geq 2$; de $a_2 = kb_2$ on tire $|k| \leq \frac{1}{2}$: **contradiction.** ◀ Donc (u, v) est liée.

◆ **EVN.2** (GL $_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$) (**) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrice *inversibles* qui converge vers A.

◇ [Divers/evnexo.tex/evn:19]

On utilise une norme $\|A\| = \max_{i,j} |A_{ij}|$.
 □ Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$, et montrons qu'il existe dans un voisinage de A de rayon ε une matrice inversible. Il existe P, Q $\in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que $A = PA'Q$ avec $A' = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.
 L'application

est linéaire (et polynômiale dans les coefficients) donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\|\Theta(X)\| \leq a\|X\|$ pour tout $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Posons alors $A'_\varepsilon = \text{diag}(1, \dots, 1, \frac{\varepsilon}{a}, \dots, \frac{\varepsilon}{a})$ et $A_\varepsilon = \Theta(A'_\varepsilon) = PA'_\varepsilon Q$.

On a alors $A_\varepsilon \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ (elle est de rang n) et par ailleurs

$$\|A - A_\varepsilon\| = \|\Theta(A' - A'_\varepsilon)\| \leq a\|A' - A'_\varepsilon\| = \varepsilon.$$

$$\Theta : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ X \longmapsto PXQ \end{cases}$$

◆ **EVN.3** (**) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(I_n + \frac{1}{k}A \right)^k = \exp(A)$.

◇ [Divers/evnexo.tex/red:96]

On passe aux normes et on utilise la propriété connue sur \mathbb{R} .

◆ **EVN.4** (***) Soit $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$ une application continue. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in [a; b]$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

(a) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ;
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

◇ [Divers/evnexo.tex/sui:28]

La première implication est triviale.
 On suppose donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. On montre quelques résultats intermédiaires.

$(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers γ . On a alors

$$f(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_{\phi(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{\phi(n)+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\phi(n)} = \gamma$$

en vertu de notre hypothèse de travail.

LEMME 1 L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un segment.

En effet, soient α et β deux valeurs d'adhérence, et soit $\gamma \in [\alpha; \beta]$. (Faire un dessin pour comprendre pourquoi γ est valeur d'adhérence !)

Terminons par une remarque : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède au moins une valeur d'adhérence α .

□ Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas. Alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée et en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède au moins une deuxième valeur d'adhérence. Ainsi, si l'on note β une seconde valeur d'adhérence, on a $\alpha; \beta [\neq \emptyset$. Il existe un rang $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \in]\alpha; \beta [$, mais alors u_k est également une valeur d'adhérence, donc un point fixe de f , et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire en u_k : **contradiction.** □

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

LEMME 2 Toute valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un point fixe de f .

Soit γ une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors il existe une suite extraite

◆ **EVN.5** (Suite admettant deux limites) (*) On note $E = \mathbb{R}[X]$. Si $P = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$, on note

$$N(P) = |a_0 - a_1 - \dots - a_n| + |a_1| + \frac{|a_2|}{2} + \dots + \frac{|a_n|}{n}$$

$$N'(P) = \sup_{x \in [0; \frac{1}{2}]} |P(x)|.$$

1) Montrer que N et N' sont deux normes sur E.
 2) Montrer que $X^n \xrightarrow{N} -1$ tandis que $X^n \xrightarrow{N'} 0$.

◇ [Divers/evnexo.tex/evn:104]

2) $N(X^n - 1) = \frac{1}{n}$ et $N'(X^n - 0) = \frac{1}{2^n}$.

1) T.

◆ **EVN.6** (***) On note $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n , à coefficients complexes. Pour toute matrice $A = (a_{ij})_{i,j}$ de E, on définit

$$N(A) \stackrel{\text{déf.}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \quad \text{et} \quad \rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|.$$

$\rho(A)$ est appelé le **rayon spectral** de la matrice A.

- 1) Montrer que N est une norme sur E, qui vérifie $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour toutes matrices A et B. ρ est-elle une norme sur E ?
- 2) Montrer que, pour tout $A \in E$, $\rho(A) \leq N(A)$.
- 3) On considère une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, vérifiant $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ pour tous A, B $\in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\rho(A) \leq \|A\|$ pour tout A $\in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
- 4) Soit A une matrice telle que $N(A) < 1$. Montrer que la série $\sum A^k$ converge et calculer sa somme.
- 5) On pose $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la série $\sum B^k$ converge et calculer sa somme.

◇ [Divers/evnexo.tex/evn:105]

- 1) Si $n = 1$, ρ est bien une norme, mais sinon il suffit de considérer une matrice nilpotente non nulle, pour laquelle le rayon spectral est nul, pour conclure à la négative.
- 2) Trivial en remarquant que N est la norme subordonnée à $\|X\|_\infty$.
- 3) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. On choisit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Notons $M = (X, \dots, X)$ la matrice carrée obtenue en concaténant n fois le vecteur X. Alors $AM = \lambda M$ donc $\|\lambda\| \|M\| = \|\lambda M\| = \|AM\| \leq \|A\| \|M\|$. Or $M \neq 0$ donc $|\lambda| \leq \|A\|$.
- 4) Puisque $\|\cdot\|$ est une norme matricielle, on a donc $\|A^2\| = \|A \cdot A\| \leq \|A\| \cdot \|A\| = \|A\|^2$ puis, par une récurrence immédiate :
 $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \|A^k\| \leq \|A\|^k$.

On en déduit, puisque la série $\sum \|A\|^k$ est géométrique et convergente, que

La série $\sum A^k$ converge absolument.

L'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ étant de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Pour étudier la convergence de la série $\sum A^k$, on va munir $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $N(M)_\infty = \max_{i,j} |m_{i,j}|$. On a, pour tout couple d'indices $(i, j) \in [1; n]^2$,

$$|(A^k)_{ij}| \leq \|A^k\| \leq \|A\|^k,$$

ce qui prouve que la série $\sum (A^k)_{i,j}$ converge absolument, donc converge dans \mathbb{R} . Ceci étant vrai pour tout $(i, j) \in [1; n]^2$, on sait que cela entraîne que

La série $\sum A^k$ converge.

Enfin, un calcul immédiat montre que

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I_n - A)^{-1}.$$

- 5) B est malheureusement de norme $N(B) = 1$. On ne peut pas conclure. Mais si on diagonalise B, on trouve que

$$B \sim \text{diag} \left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2} \right) = A,$$

qui est de norme $1/\sqrt{2} < 1$; la série $\sum A^k$ converge, donc la série $\sum B^k$ aussi, et après un calcul rapide,

$$\sum_{k=0}^{\infty} B^k = (I_2 - B)^{-1}.$$

◆ **EVN.7** Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (on prendra une matrice M astucieuse telle qu'il existe une boule ouverte centrée sur M ne contenant aucune matrice diagonalisable). Soit A $\in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe une suite de matrices diagonalisables convergeant vers A.

◇ [Divers/evnexo.tex/div:119]

du polynôme caractéristique.

- 1) Prendre $M = \text{AntiDiag}(-1, 1)$ et utiliser la continuité du discriminant

- 2) Trigonaliser et ajouter des ε .

◆ **EVN.8** (★) Mines PC – 1998
 Soit B une matrice antisymétrique, et on suppose que la suite $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons C sa limite. Que peut-on dire de C ?

◇ [Rec00/evn-r0.tex/evn-4]

La question est de savoir si l'ensemble A des matrices (anti)-symétriques de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est fermé ou non. Or si on pose

$$f: \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \longmapsto M \pm {}^t M, \end{cases}$$

on a clairement $A/S = f^{-1}(\{0\})$, et comme f est continue et $\{0\}$ fermé, A est fermé. Donc $C = \lim B_{2n+1}$ est antisymétrique, mais $C = \lim B_{2n}$ est symétrique, donc au final $C = 0$.

◆ **EVN.9 (Convergence de $\sum A^n$)** (★★) CCP PC – 2001
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier la convergence de la série $\sum A^k$. On notera $\|A\| = \sup_{i,j} |a_{ij}|$.

◇ [Rec01/evn-r1.tex/evn-r:2]

De $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ on tire $\|A^k\| \leq n^{k-1} \|A\|^k$, donc si $\|A\| < \frac{1}{n}$ la série $\sum \|A\|^k$ converge ; puisque $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est complet, on en déduit que $\sum A^k$ converge.

Il va sans dire que cette condition n'est que *suffisante* et pas nécessaire. Ainsi, $A = kI_n$ avec $0 \leq k < 1$ mène à une série convergente.

On peut affiner les choses en choisissant d'autres normes, ce qui permet de récupérer d'autres cas. Le mieux est cependant d'utiliser le rayon spectral, hors programme PC.

◆ **EVN.10 (Existence d'un polynôme t.q. $e^A = P(A)$)** (★★★) Mines MP – 2003
 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $e^A = P(A)$.

◇ [Rec03/evn-r3.tex/r3:358]

A admet un polynôme annulateur (de degré $\leq n$). On en conclut que $\mathbb{K}[A] = \mathbb{K}_p[A]$ (inutile d'ailleurs).

La suite de terme général $\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$ est à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}[A]$ qui est de dimension finie et donc complet et donc fermé ; elle converge dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ (c'est bien connu), donc sa limite est dans $\mathbb{K}[A]$.

Suites de Cauchy, espace complets

◆ CAU.1 (*)

Notons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

En réécrivant la fraction $1/k(k+1)$ sous la forme d'une différence, montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite. En déduire que la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k(k+1)}$$

est convergente.

◇ [Divers/cauchyexo.tex/evn:16]

On écrit $1/k(k+1) = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}$, ce qui montre que

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2},$$

et donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles converge vers $\frac{1}{2}$.

On montre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, et par inégalité triangulaire, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy donc converge.

◆ CAU.2 (♣)

Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(2n)^k}$ est de Cauchy.

◇ [Divers/cauchyexo.tex/evn:18]

◆ CAU.3 (($\mathbb{R}[X]$, N_∞) n'est pas complet) (*)

On munit l'e.v. $\mathbb{R}[X]$ de sa norme $N_\infty(P) = \max\{|a_n| ; n \in \mathbb{N}\}$. Vérifier que cette écriture a bien un sens (i.e. que le « max » existe...)

On note $P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \dots + \frac{X^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Converge-t-elle dans $\mathbb{R}[X]$?

◇ [Divers/cauchyexo.tex/evn:7]

On a, pour tout $p, q \in \mathbb{N}^*$, $N_\infty(P_p - P_q) \leq \frac{1}{\min(p,q)+1}$ ce qui montre que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Elle ne converge pas (sa limite, si elle existait, ne saurait être dans $\mathbb{R}[X]$ car son support ne peut être borné.)

◆ CAU.4

Soit E un e.v.n. vérifiant la propriété :

$$\forall (a, b) \in E^2, \quad \|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2[\|a\|^2 + \|b\|^2]$$

que l'on appelle **identité du parallélogramme**.

Soit F un s.e.v. complet de E et $x \in F$. On pose $d \stackrel{\text{def}}{=} d(x; F)$. Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E telle que $d(y_n; F) \leq d + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. En déduire que $d(x; F)$ est atteinte (i.e. qu'il existe $z \in F$ telle que $d(x; F) = d(x, z)$.)

INDICATION : On prendra $a = y_p - x$ et $b = y_q - x$ par exemple.

◇ [Divers/cauchyexo.tex/evn:7bis]

Une fois la suite créée (on utilise la propriété de l'inf d'une partie de \mathbb{R}), on utilise astucieusement l'identité du parallélogramme (faire un dessin) en posant

$a = y_p - x$ et $b = y_q - x$ par exemple, ce qui donne après deux lignes de calcul :

$$\|y_p - y_q\|^2 \leq 2d \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}.$$

◆ CAU.5 (CY + ss. suite convergente \Rightarrow CV) (♣)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans un espace vectoriel normé de dimension quelconque. Montrer que si elle admet une sous-suite convergente, alors elle converge.

◇ [Divers/cauchyexo.tex/evn:34]

On suppose que $(u_{\phi(n)})_n$ converge vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $p, q \geq N \Rightarrow \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$. Notamment, $p, q \geq N \Rightarrow p, \phi(q) \geq N \Rightarrow$

$\|u_p - u_{\phi(q)}\| \leq \varepsilon$, et on peut passer à la limite $q \rightarrow \infty$ puisque $(u_{\phi(q)})_q$ converge, donc $p \geq N \Rightarrow \|u_p - \ell\| \leq \varepsilon$. □

◆ CAU.6 (♣)

Soit E un espace vectoriel normé, $r \in \mathbb{R}^*$ et A une partie non vide de E vérifiant : pour tout $x \in A$, $[B(x, r) \setminus x] \cap A = \emptyset$. Alors A est complet.

Évident

◇ [Divers/cauchyexo.tex/evn:40]

◆ CAU.7 (*)

Soit E un e.v.n., et D une partie dense dans E. Montrer que E est complet si et seulement si toute suite de Cauchy dans D converge dans E.

◇ [Divers/cauchyexo.tex/evn:41]

Seule \Leftarrow est non triviale.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E. On construit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs

dans D telle que $\|v_n - u_n\| \leq 1/n$, on vérifie que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans D, donc elle converge, ce qui assure la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◆ CAU.8 (Un espace non complet) (*)

Notons E l'espace vectoriel des suites réelles (ou complexes) à support borné (i.e., si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, alors les x_n sont presque tous nuls.) On munit E de la norme du sup

$$x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit la suite

$$u^{(p)} = (u^{(p)}_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{p-1}, \frac{1}{p}, 0, 0, \dots, 0, \dots \right).$$

Montrer que la suite $(u^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E. Étudier sa convergence.

Conclure.

En déduire également que l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée sur \mathbb{K} n'est pas complet.

◇ [Divers/cauchyexo.tex/evn:21bis]

Équivalent à l'exercice CAU.3.

◆ CAU.9 (Un espace complet) (***)

On note E l'espace vectoriel des suites réelles ou complexes tendant vers 0, que l'on munit de la norme

$$N_\infty : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|. \end{cases}$$

Montrer que l'espace (E, N_∞) est complet.

INDICATION : On pourra, si u est un élément de l'e.v. E, donc une suite d'éléments de \mathbb{K} noter ses composantes avec un indice inférieur : $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Une suite d'éléments de E pourra alors être notée avec des indices supérieurs : $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} = ((u_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Divers/cauchyexo.tex/evn:1]

Cela se fait en trois étapes :

● **Sélectionner le candidat.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n^{(p)})_p$ est de Cauchy dans \mathbb{C} , donc elle converge. On pose $u_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} u_n^{(p)}$.

● **Vérifier que le candidat est dans E.** Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang P tel que pour tout $p, q \geq P$, on a $\|u^{(p)} - u^{(q)}\| \leq \varepsilon/2$. Comme la suite $(u_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n^{(P)}| \leq \varepsilon/2$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $u_n = \lim_{q \rightarrow \infty} u_n^{(q)}$. Soit $n \geq N$. On sait que

$$\left| u_n^{(P)} - u_n^{(q)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall q \geq P,$$

donc à la limite $q \rightarrow \infty$,

$$\left| u_n^{(P)} - u_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui montre que

$$|u_n| \leq \left| u_n - u_n^{(P)} \right| + \left| u_n^{(P)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci montre bien que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

● **Montrer qu'on a bien convergence de $(u^{(p)})$ vers u.**

□ Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang P tel que pour tout $p, q \geq P$, on a $\|u^{(p)} - u^{(q)}\| \leq \varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $p, q \geq P$, l'inégalité $\left| u_n^{(p)} - u_n^{(q)} \right| \leq \varepsilon$, et on peut prendre $[q \rightarrow \infty]$ ce qui montre que $\left| u_n^{(p)} - u_n \right| \leq \varepsilon$. ◀ Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien montré $\|u^{(p)} - u\| \leq \varepsilon$.

◆ CAU.10 (Un espace non complet) (**)

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes et stationnaires, que l'on munit de la norme

$$N_\infty : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|. \end{cases}$$

L'espace (E, N_∞) est-il complet ?

◇ [Divers/cauchyexo.tex/evn:46bis]

Non, on prend le même contre-exemple que dans **NOR.3**.

◆ **CAU.11 (Un espace complet)** (■)

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes et *convergentes*, que l'on munit de la norme

$$N_\infty : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|. \end{cases}$$

L'espace (E, N_∞) est-il complet ?

◇ [Divers/cauchyexo.tex/evn:50]

Oui.

◆ **CAU.12 (Un espace non complet)** (★★)

On pose $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, que l'on munit de la norme $f \mapsto \|f\| \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^1 |f(t)| dt$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : x \longmapsto \inf \left(n, \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E .
L'espace $(E, \|\cdot\|)$ est-il complet ?

◇ [Divers/cauchyexo.tex/evn:58]

ce qui prouve qu'elle est de Cauchy.

On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Alors sa limite f est nécessairement bornée, $|f| \leq M$, et alors $\|f_n - f\| \geq \int_0^{1/M^2} f_n(x) - M dx$ (faire un dessin) qui admet une limite finie (genre $1/M$) quand $n \rightarrow \infty$.

On a, si $p > q$:

$$\begin{aligned} \|f_p - f_q\| &= \int_0^{1/p} (p-q) dx + \int_{1/p}^{1/q} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - q \right) dx \\ &= 1 - \frac{q}{p} - 1 + \frac{q}{p} + \frac{1}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{2\sqrt{p}}. \end{aligned}$$

◆ **CAU.13 (Convergence uniforme)** (★★)

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} . Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel non nul. On munit \mathbb{R}^n d'une norme, notée $x \mapsto \|x\|$. (Le choix de cette norme n'est pas important, car toutes les normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes.)

On note $E = \mathcal{B}(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications bornées définies sur I et à valeurs dans \mathbb{R}^n . Si $f \in E$, on définit $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} \|f(x)\|$.

- 1) Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.
- 2) On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si et seulement si $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, n \geq N \implies \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

On suppose désormais que $f_n \xrightarrow{c.v.u.} f$. Montrer que, si chaque f_n admet une limite ℓ_n en $a \in \bar{A}$, et si $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \ell$, alors f admet la limite ℓ en a .

- 3) Montrer que si chaque f_n est continue, alors f est continue.
- 4) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .
- 5) Montrer que f est bornée.
- 6) On suppose désormais que I est compact.
 - a) Montrer que $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est un fermé de E .
 - b) Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet
 - c) Montrer que $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est complet.

◇ [Divers/cauchyexo.tex/evn:67]

◆ **CAU.14** (★)

On note $E = \{f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}) ; t \mapsto t f(t) \text{ est bornée sur }]0; 1[\}$. On pose

$$N(f) = \sup_{0 < t < 1} |t f(t)|.$$

- 1) Montrer que (E, N) est un espace de Banach (un espace vectoriel normé complet).
- 2) Notons ϕ l'application qui à un élément f de E associe l'application g définie par

$$\forall t \in]0; 1[\quad g(t) = \frac{1}{6} \left[f\left(\frac{t}{2}\right) + f\left(\frac{t}{3}\right) \right].$$

Montrer que ϕ est un endomorphisme contractant de E . Conclusion ?

◇ [Divers/cauchyexo.tex/evn:81]

◆ **CAU.15**

Pour chacun des espaces suivants, déterminer s'il est ou non complet :

- 1) Ensemble des suites convergentes muni de $\|\cdot\|_\infty$.
- 2) Ensemble des suites stationnaires muni de $\|\cdot\|_\infty$.
- 3) Ensemble des suites bornées muni de $\|\cdot\|_\infty$.

◇ [Divers/cauchyexo.tex/div:118]

◆ **CAU.16** (★★)

TPE MP – 2001

On pose $E = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ; (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée} \right\}$. On pose $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ et $N(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{u_n}{4^n} \right|$.

- 1) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?
- 2) Complétude de (E, N) ?
- 3) Compacité de (E, N) et de $(E, \|\cdot\|_\infty)$?
- 4) Les boules unité sont-elles compactes ?

◇ [Rec01/cauchy-r1.tex/evn-r:13]

- 1) On pose $v^n = (0, \dots, 0, 2^n, 0, \dots)$, alors $\|v^n\| = 2^n \rightarrow +\infty$ mais $N(v^n) = 1/2^n \rightarrow 0$: ces normes ne sont pas équivalentes.
- 2) On pose $w^n = (1, 2, \dots, 2^n, 0, \dots)$, alors $(v^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy mais ne converge pas dans E : (E, N) n'est pas complet.

3) La suite $z^n = (2^n, 0, \dots, 0, \dots)$ est une suite d'éléments de E mais elle est non bornée pour N comme pour $\|\cdot\|_\infty$, donc les espaces ne sont pas bornés, donc ils ne sont pas compacts.

4) Pas compacts (prendre $(v^n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour N et $x^n = (0, \dots, 1, \dots)$ pour $\|\cdot\|_\infty$).

◆ **CAU.17 (($\mathcal{L}_c(E), \|\cdot\|$) est complet)** (★★★)

ICNA PC – 2001

$(E, \|\cdot\|)$ est un e.v.n. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{L}_c(E)$ celui des endomorphismes continus de E .

- 1) Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ est continu si et seulement si il existe $M \geq 0$ tel que

$$M = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

- 2) Montrer que $\|\cdot\| : \mathcal{L}_c(E) \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme.

$$u \mapsto \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

- 3) On suppose que $(E, \|\cdot\|)$ est complet. Montrer que $(\mathcal{L}_c(E), \|\cdot\|)$ est complet.

◇ [Rec01/cauchy-r1.tex/evn-r:1]

- 1) Cours
- 2) On vérifie rapidement que $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$, et que $\|f\| = 0 \iff f = 0$.
□ Soient $f, g \in \mathcal{L}_c(E)$. Alors, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|f(x) + g(x)\| &\leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \\ &\leq \|f\| + \sup_{\|y\|=1} \|g(y)\| \end{aligned}$$

donc, en passant au sup sur $\|x\| = 1$ on obtient

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

3) ► On commence par sélectionner le candidat.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(E)$. Alors montrer que pour tout $x \in E$ la suite $(u_n(x))_n$ est de Cauchy dans E donc converge. Poser

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x).$$

► Vérifions que $u \in \mathcal{L}_c(E)$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, $\|u_p - u_q\| \leq 1$.

□ Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. On sait que pour tout $p, q \geq N$, on a $\|u_p(x) - u_q(x)\| \leq 1$. En faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient donc $\|u_p(x) - u(x)\| \leq 1$ pour tout $p \geq N$. Ainsi,

$$\|u(x)\| \leq \|u(x) - u_N(x)\| + \|u_N(x)\| \leq 1 + \|u_N\|. \quad \square$$

Ceci montre que $\sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| \leq 1 + \|u_N\|$ est fini. Donc u est continue.

► Montrons que $u_n \rightarrow u$ au sens de la norme $\|\cdot\|$.

□ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, on a $\|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$. Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Alors,

$$\forall p, q \geq N, \quad \|u_p(x) - u_q(x)\| \leq \varepsilon,$$

donc en faisant tendre q vers $+\infty$ on obtient (la norme sur E est une opération continue)

$$\forall p \geq N, \quad \|u_p(x) - u(x)\| \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, on a donc montré

$$\forall p \geq N, \quad \|u_p - u\| \leq \varepsilon. \quad \square$$

Ce qui montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u dans $\mathcal{L}(E)$.

◆ CAU.18

X MP – 2003

On munit \mathbb{R} de $d(x, y) = \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right|$ et de $d_0(x, y) = |x - y|$.

- 1) Montrer que d est une distance.
- 2) d et d_0 sont-elles équivalentes?
- 3) (\mathbb{R}, d) est-il complet?
- 4) Conclusion.

◇ [Rec03/cauchy-r3.tex/r3:65]

◆ CAU.19

(★)

Mines PC – 2003

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $|u_{n+1} - u_n| < \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle de Cauchy?

◇ [Rec03/cauchy-r3.tex/r3:404]

tant elle vérifie la condition demandée.

On prend $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$, elle diverge donc elle n'est pas de Cauchy et pour-

Suites définies par une relation de récurrence

◆ SREC.1 (Théorème du point fixe) (**)

Soit E un e.v.n. de dimension finie et $f : E \rightarrow E$ une application k -lipschitzienne, avec $k \in [0; 1[$. On choisit $u_0 \in E$ de manière quelconque, et on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence, valable pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. En déduire qu'elle converge. En notant ℓ sa limite, montrer que ℓ est l'unique point fixe de f .

◇ [Divers/suitesreexo.tex/evn:46]

On choisit $u_0 \in E$ de manière quelconque. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors

$$\|u_p - u_q\| \leq \|u_1 - u_0\| \cdot (k^p + \dots + k^q) \leq \frac{k^p}{1-k} \xrightarrow{p, q \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. L'espace E étant complet, elle converge vers une limite que nous noterons a . Alors, par continuité, $u_{n+1} = f(u_n)$ entraîne $a = f(a)$. Donc a est un point fixe. Si b est un autre point fixe, alors $\|a - b\| \leq k \|a - b\|$ montre que $\|a - b\| = 0$ et donc $a = b$, ce qui prouve l'unicité.

◆ SREC.2 (f^r est contractante) (***)

Soit E un espace vectoriel normé complet. Soit f une application continue de E dans E . On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ tel que f^r est contractante de rapport k . Montrer que f possède un unique point fixe.

◇ [Divers/suitesreexo.tex/evn:66]

D'après le théorème du point fixe, f^r possède un unique point fixe $a \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f^{rn}(u)$, où $u \in E$ est choisi n'importe comment. Puisque f est continue, on a

$$f(a) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{rn}(u)\right),$$

mais $\|f^{rn}(f(u)) - f^{rn}(u)\| \leq k^n \|f(u) - u\|$, ce qui montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{rn+1}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{rn}(u) = a,$$

et donc $f(a) = a : a$ est un point fixe. Enfin, si b est un autre point fixe, alors $f^r(b) = b$ et donc $b = a$ par unicité du point fixe de f^r .

◆ SREC.3 (f faible, contractante ds compact) (***)

Soit E un e.v.n., K une partie compacte de E et $f : K \rightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K \times K, \quad (x \neq y) \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

- 1) Montrer que f admet au plus un point fixe.
- 2) En utilisant la fonction $D : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$z \mapsto \|z - f(z)\|,$$
- 3) Soit $u_0 \in K$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a .

◇ [Divers/suitesreexo.tex/evn:57]

- 1) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente $x_{\phi(n)}$, notons ℓ sa limite. Malheureusement, on ne peut pas dire que $f(\ell) = \ell$, ce qui eût été bien sympa. Supposons que f n'admette aucun point fixe dans K . Notons

$$D : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ z \mapsto \|z - f(z)\|.$$

Alors D est continue sur \mathbb{K} compact, à valeurs dans \mathbb{R}^+ et elle atteint son minimum, qu'on note r , et qui est > 0 , en un point z_0 . Alors $D(f(z_0)) < D(f(z))$, ce qui est une contradiction. Donc f admet bien un point fixe.

- 2) Soit $u_0 \in K$, et définissons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme indiqué. La suite $(\|u_n - a\|)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît, elle converge donc vers une limite r . La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers une limite ℓ , et $\|\ell - a\| = r$. Mais, en translatant, on voit que la sous-suite $(u_{\phi(n)} + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$, et $\|f(\ell) - a\| = r$. Comme $a = f(a)$, on en déduit, en utilisant

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\| \implies x = y,$$

que $\ell = a$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente vers a . En utilisant $\|u_{n+1} - a\| \leq \|u_n - a\|$, on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

◆ SREC.4

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Notons $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}(0; 1)$ la boule unité fermée de E . Soit $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ une application vérifiant

$$\forall x, y \in \mathcal{B}, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|.$$

- 1) Montrer que, pour tout $\theta \in]0, 1[$, l'application $f_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \theta f$ a un unique point fixe dans \mathcal{B} . On note $x(\theta)$ ce point fixe.
- 2) Montrer que f admet un unique point fixe.

◇ [Divers/suitesreexo.tex/evn:57bis]

$(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une sous-suite convergente $y_{\phi(n)}$, donc on a

$$\left(1 - \frac{1}{\phi(n)}\right)$$

Pour tout $\theta < 1$, l'application f_θ est contractante, donc, par le théorème du point fixe, elle admet un point fixe x_θ . On pose $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $y_n = x_{u_n}$, alors

À FINIR !!!

◆ SREC.5

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots + \sqrt{1}}}}$$

(avec n racines). Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, et trouver sa limite.

◇ [Divers/suitesreexo.tex/evn:25]

Faire un dessin, ça converge vers $\rho = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

◆ SREC.6

On considère la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 2 - e^{-u_n}.$$

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de u_0 . Pour cela, on pourra s'aider de MAPLE pour les éventuelles études de fonction.

◇ [Divers/suitesreexo.tex/evn:47]

Il y a un point fixe instable et deux points fixes stables.

◆ SREC.7

On considère la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \cos u_n.$$

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de u_0 .

◇ [Divers/suitesreexo.tex/evn:48]

◆ SREC.8

On considère la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sin u_n.$$

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de u_0 .

◇ [Divers/suitesreexo.tex/evn:49]

◆ SREC.9

(Avec Maple)

On considère la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = e^{-3u_n}$. Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de u_0 . On pourra s'aider de MAPLE.

◇ [Divers/suitesreexo.tex/evn:49bis]

La fonction $f : x \mapsto e^{-3x}$ admet un seul point fixe c , mais il est répulsif (on calcule, la dérivée de f en c vaut $\approx -1,05\dots$). Cependant, $f \circ f$ admet deux points fixes attractifs, donc f admet un cycle limite d'ordre 2.

◆ SREC.10

Étudier la suite réelle définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = \frac{1}{4} + a_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note maintenant v la suite complexe définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = A + v_n^2$ où $A \in \mathbb{C}$ et $|A| \leq \frac{1}{4}$.

- 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leq |a_n|.$
- 2) Établir que $|v_{n+1} - v_n| \leq |a_{n+1} - a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
- 3) En déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.

◇ [Divers/suitesreexo.tex/evn:60]

2) Par récurrence :

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (faire graphique), sa limite est $3/4$, elle est croissante, bla bla bla. Ensuite :

$$\begin{aligned} |v_{n+1} - v_n| &= |v_n^2 - v_{n-1}^2| = |v_n - v_{n-1}| \cdot |v_n + v_{n-1}| \\ &\leq |a_n - a_{n-1}| \cdot |a_n + a_{n-1}| = |a_n^2 - a_{n-1}^2| \\ &= |a_{n+1} - a_n|. \end{aligned}$$

1) Récurrence immédiate.

3) On utilise ensuite la croissance de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

◆ SREC.11 (Suite double) (***)

Soient $0 < x_0 < y_0$. On définit les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les relations de récurrence

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + y_n} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n + y_n}.$$

Étudier la convergence des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◊ [Divers/suitesreexo.tex/sui:29]
 On remarque que la suite $(x_n - y_n)$ est constante.

Notons $t_n = x_n/y_n$; alors $0 < t_0 < 1$ et $t_{n+1} = t_n^2$ donc la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, donc x_n tend vers 0; et par conséquent y_n tend vers $y_0 - x_0$.

◆ **SREC.12** (*)
 Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn}$ est convergente.
 INDICATION : On montrera que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et bornée.

◊ [Divers/suitesreexo.tex/sui:16]
 On écrit que

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{m=kn+1}^{k(n+1)} \frac{1}{m} - \frac{1}{n+1}$$

et dans cette somme, chacun des k termes est supérieur ou égal au dernier, ce qui montre la croissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

De plus, dans l'expression $u_n = \sum_{m=n+1}^{kn} \frac{1}{m}$, on majore chaque terme par le

premier $\frac{1}{n+1}$. On a alors

$$u_n \leq \frac{(k-1)n}{n+1} \leq k-1,$$

ce qui montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, donc converge.

Des techniques différentes permettent de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ln k$.

◆ **SREC.13**
 On considère suite réelle définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} \end{cases}$.

- 1) Montrer que cette suite tend vers $+\infty$.
- 2) Montrer que la suite $(e^{u_{n+1}} - e^{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1.
- 3) Montrer que la suite $(e^{u_n} - n - \frac{1}{2} \ln n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers une limite finie L.
 Qu'en déduit-on sur le développement limité de u_n ?

◊ [Divers/suitesreexo.tex/div:27]

1) Il est immédiat que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Elle ne peut converger dans \mathbb{R} car sinon, en appelant l sa limite, on aurait $l = l + e^{-l}$ d'où $e^{2l} = 0$: absurde.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

2) Remarquons tout d'abord que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

En utilisant le théorème des accroissements finis pour la fonction exponentielle sur $[u_n; u_{n+1}]$, nous disposons d'un $c_n \in]u_n; u_{n+1}[$ tel que

$$e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = (u_{n+1} - u_n) e^{c_n} = e^{c_n} (u_{n+1} - u_n)$$

Mais comme $0 < c_n - u_n < u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{u_{n+1}} - e^{u_n}) = 1.$$

3) Nous avons :

$$e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \sim 1$$

1 étant le terme général positif d'une série divergente, nous pouvons appliquer un théorème de comparaison aux sommes partielles (ici cela revient à utiliser le théorème de Césàro), nous obtenons alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (e^{u_{k+1}} - e^{u_k}) \sim n$$

$$e^{u_n} - e^{u_0} \sim n \rightarrow \infty$$

$$e^{u_n} \sim n \rightarrow \infty$$

Ainsi $e^{u_n} - n = o(n)$

Ce n'est donc pas suffisant ! Qu'à cela ne tienne, comme disent les Chi-nois, on continue.

Posons $x_n = e^{u_n} - n$

et étudions $x_{n+1} - x_n$:

$$x_{n+1} - x_n = e^{u_{n+1}} - e^{u_n} - 1$$

$$= e^{u_n} (e^{u_{n+1} - u_n} - 1) - 1$$

On sait que $e^{-u_n} \sim n \rightarrow +\infty \frac{1}{n}$, infiniment petit, d'où (par $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$) :

$$x_{n+1} - x_n = e^{u_n} (e^{-u_n} + \frac{1}{2} (e^{-u_n})^2 + o((e^{-u_n})^2)) - 1$$

$$= 1 + \frac{1}{2} e^{-u_n} + o(e^{-u_n}) - 1$$

$$= \frac{1}{2} e^{-u_n} + o(e^{-u_n})$$

Donc $x_{n+1} - x_n \sim \frac{1}{2n}$, infiniment petit, d'où (par $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$) :

et par le théorème de comparaison (toujours série divergente) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+1)}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$x_n - x_0 \sim \frac{1}{2} \ln n$$

Donc $x_n \sim \frac{1}{2} \ln n$, c'est-à-dire $e^{u_n} - n = \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n)$.

Mais... ce n'est pas toujours suffisant... Bon une dernière fois alors :

Posons $y_n = e^{u_n} - n - \frac{1}{2} \ln n$

et étudions $y_{n+1} - y_n$:

$$y_{n+1} - y_n = e^{u_{n+1}} - e^{u_n} - 1 - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

On reprend les calculs précédents en poussant plus loin le développement limité de l'exponentielle :

$$y_{n+1} - y_n = \left[e^{u_n} \left(e^{-u_n} + \frac{1}{2} (e^{-u_n})^2 + \frac{1}{6} (e^{-u_n})^3 \right) + o((e^{-u_n})^3) \right] - 1 - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{-u_n} + \frac{1}{6} (e^{-u_n})^2 + o((e^{-u_n})^2) \right] - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Maintenant, utilisons que $e^{u_n} - n = \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n)$ qui est plus précis

que $e^{-u_n} \sim \frac{1}{n}$:

$$e^{-u_n} - \frac{1}{n} = \frac{ne^{-u_n} - 1}{n} = \frac{n - e^{u_n}}{ne^{u_n}} \sim -\frac{\ln n}{2n^2}$$

Il nous suffit alors d'utiliser $\frac{1}{2} \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n^2})$ pour obtenir :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2} \left(-\frac{\ln n}{2n^2} + o(\frac{\ln n}{n^2}) \right) + O \frac{1}{n^2}$$

$$= -\frac{\ln n}{4n^2} + o(\frac{\ln n}{n^2})$$

La série de Bertrand $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ étant convergente (et de signe positifs), on en déduit que la série de terme général équivalent $(y_{n+1} - y_n)$ l'est également.

Cela revient à dire que la suite (y_n) converge : $y_n = L + o(1)$.

Conclusion : $e^{u_n} = n + \frac{1}{2} \ln n + L + o(1)$.

En composant par \ln :

$$u_n = \ln \left(n + \frac{1}{2} \ln n + L + o(1) \right)$$

$$= \ln \left[n \left(1 + \frac{\frac{1}{2} \ln n}{n} + \frac{L}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right]$$

$$= \ln n + \ln \left[1 + \frac{\frac{1}{2} \ln n}{n} + \frac{L}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \ln n + \frac{\ln n}{2n} + \frac{L}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

$$= \ln n + \frac{\ln n}{2n} + \frac{L}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

C'est enfin fini :

$$u_n = \ln n + \frac{\ln n}{2n} + \frac{L}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

◆ **SREC.14** CCP PC - 2005
 Soit $(M_0 M_1 M_2)$ un triangle du plan affine. Pour tout $n \geq 2$, on définit $M_{n+1} = \text{isobary}(M_n, M_{n-1}, M_{n-2})$. Déterminer le comportement de la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◊ [Rec00/suitesrec-r0.tex/r0:33]

On a de plus $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ et $z_2 = i$, donc le triplet (A, B, C) vérifie le système

On commence par munir le plan d'un repère intelligent utilisant les trois points du triangle, supposé non plat; puis l'on passe par exemple en complexe, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Puisque $|\lambda| = 1/3$, seul le coefficient A nous intéresse; il faut donc calculer seulement deux coefficients de l'inverse de la matrice. On trouve

$$z_{n+3} = \frac{1}{3}(z_n + z_{n+1} + z_{n+2})$$

$$A = \frac{1}{3} + \frac{i}{2}$$

dont le polynôme caractéristique est $(X - 1)(X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3})$ donc $z_n = A + B\lambda^n + C\bar{\lambda}^n$, où

ce qui prouve que

$$\lambda = -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}$$

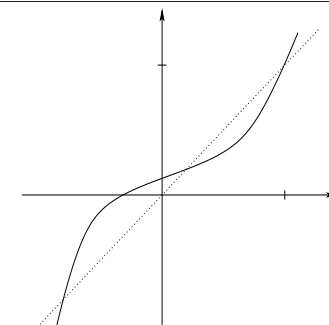
$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \frac{1}{6}(M_0 + 2M_1 + 3M_2)$$

◆ **SREC.15** (***) X PC - 2001
 Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par u_0 et $u_{n+1} = au_n^3 + bu_n + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tels que $a + b + c = 1$ et $3a + b > 1$.

◊ [Rec01/suitesrec-r1.tex/sui:r:8]

On note $f : x \mapsto ax^3 + bx + c$ et on note que $f(1) = 1$ et $f'(1) > 1$ ce qui montre que 1 est un point fixe répulsif. Par ailleurs, cette fonction est clairement croissante, concave sur \mathbb{R}^- et convexe sur \mathbb{R}^+ .

Enfin, on note que $f(0) > 0$ ce qui montre qu'il existe deux autres points fixes de f . Le second point fixe, noté ξ , est de dérivée positive, mais strictement plus petite que 1 (puisque $f - \text{Id}$ change de signe en ce point), il est donc attractif.



Cela dit, un dessin permet de visualiser ce qui va arriver :

Ainsi, on aura répulsion vers $\pm\infty$, ou bien attraction vers ξ .
 On note que si l'on n'impose pas $c \geq 0$, il peut n'y avoir aucun point fixe.

◆ **SREC.16** (f faibl.^{m1} contractante ds compact) Centrale MP – 2001

Soit K un compact inclus dans un espace vectoriel normé. Soit $f : K \rightarrow K$ une application **faiblement contractante**, c'est-à-dire telle que

$$\forall x, y \in K, \quad x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

- 1) Montrer que f admet un unique point fixe a .
- 2) Soit $u_0 \in K$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .
- 3) Montrer que $\sin|_{[0, \pi]}$ est faiblement contractante. Conclusion ?
- 4) Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est faiblement contractante. Est-ce que, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge ? Conclusion ?

◇ [Rec01/suitesrec-r1.tex/evn-r:3]

- 1) Supposons que f n'admette aucun point fixe dans K . Notons $D : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^{*+}, \quad z \mapsto \|z - f(z)\|$. Alors D est continue sur K compact, à valeurs dans \mathbb{R}^{*+} et elle atteint son minimum, qu'on note r , et qui est > 0 , en un point z_0 . Alors $D(f(z_0)) < D(f(z_0))$, ce qui est une contradiction. Donc f admet bien un point fixe.
- 2) Soit $u_0 \in K$, et définissons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme indiqué. La suite $(\|u_n - a\|)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît, elle converge donc vers une limite r . La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers une limite ℓ , et $\|\ell - a\| = r$. Mais, en translatant, on voit que la sous-suite $(u_{\phi(n)} + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$, et $\|f(\ell) - a\| = r$. Comme $a = f(a)$, on en déduit, en utilisant

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\| \Rightarrow x = y,$$

que $\ell = a$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente vers a . En utilisant $\|u_{n+1} - a\| \leq \|u_n - a\|$, on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

- 3) T.
- 4) f n'admet aucun point fixe, et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$. C'est parce que \mathbb{R} n'est pas compact.

◆ **SREC.17** ($u_{n+1} = \sin(u_n)$) (*) ENSEA PC – 2001

On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.

- 1) Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- 2) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right)$.
- 3) Donner un équivalent de $1/u_n^2$ en $+\infty$.

◇ [Rec01/suitesrec-r1.tex/sui-r:4]

On a bien sûr $u_n \rightarrow 0$.
Pour l'équivalent c'est toujours pareil : on cherche r tel que $u_{n+1}^r - u_n^r$ a une limite non nulle. Si l'on écrit

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{15} + o(x^4) \right),$$

on en déduit que

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$$

donc, par sommation de comparaison et parce que la série $\sum 3$ diverge grossièrement (ou par utilisation des moyennes de Cesàro), on a

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

◆ **SREC.18** (**) TPE MP – 2001

Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0; 1]$ et $u_{n+1} = \int_0^1 |t - u_n| dt$.

◇ [Rec01/suitesrec-r1.tex/sui-r:5]

On calcule que $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + \frac{1}{2}$, on trace la parabole (passant en $\frac{1}{2}$ aux points 0 et $\frac{1}{2}$, ayant son minimum en $\frac{1}{2}$ qui vaut $\frac{1}{4}$, alors on voit que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on conjecture $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pour aller plus vite, on note par exemple que $u_1 \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$, et que cet intervalle est stable. De plus, f est contractante sur ce segment car sa dérivée est majorée par $|f'(\frac{1}{4})| = \frac{1}{2}$: elle est donc $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.

◆ **SREC.19** (*) CCP PC – 2001

Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par u_0 et $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{(1 + u_n)^4}$.

◇ [Rec01/suitesrec-r1.tex/sui-r:9]



Il faut naturellement que $u_0 \neq -1$. Si $u_0 = 0$ alors la suite est stationnaire en 0 .

Dès la première itération, on est alors à termes strictement positifs. Alors, en posant $f : x \mapsto \frac{x^2}{(1+x)^4}$, on a $f(x) - x < 0$ sur \mathbb{R}^{*+} donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc converge et sa limite ne saurait être que 0 par continuité de f et recherche de la solution de $f(x) = x$.

◆ **SREC.20** Centrale PC – 2002

Étudier la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = \frac{1}{9} \sin x_n + 2002$.

◇ [Rec02/suitesrec-r2.tex/sui-r:2:5]

Faire un dessin. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{9} \sin x + 2002$ étant $\frac{1}{9}$ -lipschitzienne, elle admet un et un seul point d'intersection avec $x \mapsto x$. De plus $f - \text{Id}$ est strictement décroissante. On a donc convergence de la suite itérée vers un point sans intérêt.

◆ **SREC.21** Centrale MP – 2002

On choisit $x_0 \in \mathbb{R}^{*+}$ et on définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

- 1) Étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2) Donner un équivalent de x_n .
- 3) Si $x_0 = 5$, montrer que $x_{1000} \in [45; 45.1]$.

◇ [Rec02/suitesrec-r2.tex/sui-r:2:12]

Le théorème de sommation des équivalents, ou le théorème de Cesàro, permet de vérifier $\ell = \ell + 1/\ell$.
La suite est croissante, elle n'est pas majorée (sinon elle converge et sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell + 1/\ell$).
Posons $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Alors, pour tout $r \neq 0$, on a

$$f(x)^r - x^r = r x^{r-2} + o(x^{r-2}),$$

et donc $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

ce qui montre que, en prenant $r = 2$, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2.$$

Pour l'encadrement, on fait les mêmes calculs avec des encadrements !

◆ **SREC.22** (**) CCP PC – 2002

On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par la donnée de a_0 et b_0 , avec $(a_0, b_0) \neq (0, 0)$, et les relations de récurrence

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{b_n^2}{a_n^2 + b_n^2}.$$

Étudier ces suites (domaine de définition, et limites).

◇ [Rec02/suitesrec-r2.tex/sui-r:2:1]

Les suites sont définies pour tout n (on se place sur \mathbb{R}) et vérifient

$$0 \leq a_n, b_n \leq 1 \quad \text{et} \quad a_n + b_n = 1.$$

Si $|a_0| = |b_0|$, alors la suite est stationnaire en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Sinon, supposons par exemple que $|a_0| < |b_0|$. On vérifie que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annulent jamais. On pose $t_n = a_n/b_n$, alors $t_{n+1} = t_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$.
De plus, $b_n(1 + t_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs positives (au moins pour $n \geq 1$), donc

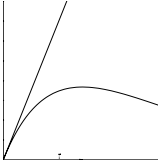
en conclusion :
– si $|a_0| > |b_0|$ alors $(a_n, b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1, 0)$;
– si $|a_0| < |b_0|$ alors $(a_n, b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 1)$;
– et si $|a_0| = |b_0|$ alors $(a_n, b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1/2, 1/2)$.

◆ **SREC.23** (*) CCP PC – 2002

Étudier la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

◇ [Rec02/suitesrec-r2.tex/sui-r:2:3]

On trace la courbe :



et l'on voit qu'il y a convergence vers 0 . Pour l'équivalent c'est toujours pareil : on cherche r tel que $u_{n+1}^r - u_n^r$ a une limite non nulle, on applique Cesàro (ou la sommation des équivalents pour des séries divergentes) pour avoir l'équivalent : $r = -1$ et

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

◆ **SREC.24** (*) CCP PC – 2002

On considère la suite réelle définie par $u_0 > 1, u_1 > 0$ et $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$.

- 1) Exprimer u_n en fonction de u_0, u_1 et n .
- 2) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Rec02/suitesrec-r2.tex/sui-r2:15] On peut écrire $u_n = u_0^{\alpha_n} \cdot u_1^{\beta_n}$, où les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient

$$\alpha_0 = 1 \quad \alpha_1 = 0 \quad \beta_0 = 0 \quad \beta_1 = 1$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}}{2},$$

et

$$\beta_{n+1} = \frac{\beta_n + \beta_{n-1}}{2}.$$

On en déduit une expression de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$a_n = \frac{1}{3} + (-1)^n \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

et

$$b_n = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{-1}{2} \right)^n \right]$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0^{1/3} u_1^{2/3}$.

◆ **SREC.25** ENSAI MP – 2002
 Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n$.

◇ [Rec02/suitesrec-r2.tex/sui-r2:10] On écrit $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto x(x-1)$. La fonction f admet deux points fixes : 0 (faiblement attractif) et 2 (répulsif). Résolution assez longue ce me semble...

◆ **SREC.26** X PC – 2003
 Soit $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}^*)^2$. On définit les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les relations de récurrence

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + y_n} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n + y_n}.$$

Étudier la convergence des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dans le cas de la convergence, trouve leurs limites.

◇ [Rec03/suitesrec-r3.tex/r3:439] On remarque que la suite $(x_n - y_n)$ est constante. De plus, en notant $t_n = x_n/y_n$, on a $t_{n+1} = t_n^2$, donc $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire en 1, ou converge vers 0 ou vers $+\infty$ selon les valeurs initiales de x_0 et y_0 .

• Si $x_0 = y_0$, alors $x_n = 2^{-n}x_0$ et $y_n = 2^{-n}y_0$.
 • On suppose $0 < x_0 < y_0$. On remarque que la suite de terme général $x_n - y_n$ est constante. On peut donc écrire $y_n = x_n + \alpha$, où $\alpha = y_0 - x_0$ est une constante. Puisque $t_n \rightarrow 0$, cela veut dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_n + \alpha} = 0,$$

et donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha = y_0 - x_0.$$

◆ **SREC.27** X PC – 2003
 On note $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}; u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n\}$. Quelle est la dimension de E ?
 Montrer que le sous-ensemble des suites bornées est un espace vectoriel de dimension 2.

◇ [Rec03/suitesrec-r3.tex/r3:341] 3, bien sûr (il suffit de fixer u_0, u_1 et u_2 ...). Pour le montrer, l'application $f : E \rightarrow \mathbb{K}^3$ définie par $f((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_0, u_1, u_2)$ est clairement linéaire, surjective et injective (récurrence), donc c'est un isomorphisme d'espace vectoriel. Les racines de $X^3 - X^2 - X - 1$ ne sont pas évidentes à trouver. Cependant,

on eut montrer en étudiant f' qu'il y en a deux complexes conjuguées, et une réelle x_0 qui est supérieure à 1 puisque en 1, ce polynôme vaut -1 . Les autres racines, α et $\bar{\alpha}$, vérifient $|\alpha|^2 x_0 = 1$ d'après les relations coefficients-racines, donc $|\alpha| < 1$. Cela prouve que le sous-ensemble des suites bornées contient au moins $\text{Vect}((\alpha^n)_n, (\bar{\alpha}^n)_n)$ et comme il ne contient pas $\text{Vect}((x_0^n)_n)$, c'est gagné.

◆ **SREC.28** TPE MP – 2003
 On pose $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, et on définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = n(u_n + u_{n-1}).$$

1) Étudier $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 2) Trouver un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

INDICATION : On pourra utiliser $v_n = \frac{u_n}{n!} - \frac{u_{n-1}}{(n-1)!}$.

3) Étudier le nombre de dérangements de $[1; n]$ (permutations sans point fixe).

◇ [Rec03/suitesrec-r3.tex/r3:385] On choisit $(u_0, u_1) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et on pose $u_n = \sqrt{u_{n-1}u_{n-2}}$. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

et

$$\beta_{n+1} = \frac{\beta_n + \beta_{n-1}}{2}.$$

On en déduit une expression de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$a_n = \frac{1}{3} + (-1)^n \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

◇ [Rec03/suitesrec-r3.tex/r3:411] On peut écrire $u_n = u_0^{\alpha_n} \cdot u_1^{\beta_n}$, où les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient

$$\alpha_0 = 1 \quad \alpha_1 = 0 \quad \beta_0 = 0 \quad \beta_1 = 1$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}}{2},$$

et $b_n = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{-1}{2} \right)^n \right]$ On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0^{1/3} u_1^{2/3}$.

◆ **SREC.30** $(u_{n+1} = \sin(u_n))$ (**) Centrale MP – 2004
 (Avec Maple)
 On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.

- 1) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- 2) On prend dorénavant $u_0 = 1$. On pose $v_n = \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et calculer sa limite.
- 3) En déduire un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 4) Donner le deuxième terme du développement asymptotique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Rec04/suitesrec-r4.tex/r4:261] On a bien sûr $u_n \rightarrow 0$. Pour l'équivalent c'est toujours pareil : on cherche r tel que $u_{n+1}^r - u_n^r$ a une limite non nulle. Si l'on écrit

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{15} + o(x^4) \right),$$

on en déduit que

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$$

donc $\frac{1}{u_n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{3}$.

On en déduit donc que

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

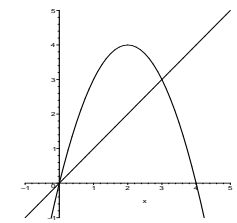
3) Par sommation de comparaison et parce que la série $\sum 3$ diverge grossièrement (ou par utilisation des moyennes de Cesàro), on a

4) On recommence la même technique en cherchant un nouvel r pour $u_n = u_n - \sqrt{\frac{3}{n}}$.

◆ **SREC.31 (Application logistique)** (**) Centrale PC – 2004
 (Avec Maple)
 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = p(u_n - u_n^2) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) On suppose dans un premier temps que $p = 4$. Quelles sont les limites éventuelles de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- 2) Étudier les cas $a < 0$ et $a \in]1; +\infty[$.
- 3) Montrer qu'il existe une infinité de réels a telle que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit constante à partir d'un certain rang.
- 4) Avec Maple, créer un graphique avec différentes valeurs de p en abscisse et, pour chaque valeur de p , les valeurs (u_{70}, \dots, u_{100}) en ordonnée.
- 5) On pose $a = \sin^2(\alpha)$, où $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$.
 - a) Déterminer l'expression de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est p -périodique.

◇ [Rec04/suitesrec-r4.tex/r4:111] On définit $f : x \mapsto px(1-x)$. On trace f et l'identité sur la courbe ci-dessous :



Cette fonction possède deux points fixe : 0 et 3/4, qui sont tous deux répulsifs : $|f'(t)| > 1$.

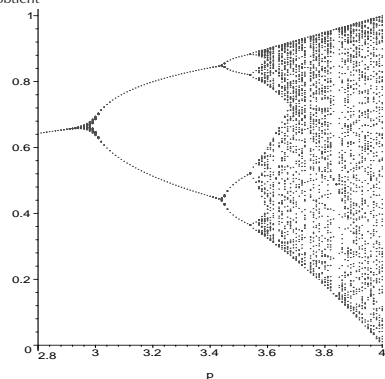
- 2) Clairement, si $a < 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$. De même, si $a > 1$, $u_1 < 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.
- 3) La constante est 0 ou 3/4. Ainsi, si $a = 0$ ou $a = 3/4$, la suite est stationnaire. Mais si $a = 1/2$, $u_1 = 1$ et c'est de nouveau stationnaire. Il est évident que, pour tout $x \in]0; 1[$, $f^{-1}(\{x\})$ est un doublet. Ce qui montre que 1 a 1 antécédent par f , 1/2 antécédents par $f \circ f$, 4 antécédents par $f \circ f \circ f$ et, d'une manière générale, 2^{n-1} par f^n . Ces antécédents sont évidemment distincts.

4) On écrit la procédure suivante :

```
with(plots):
feigenbaum := proc(debut, fin, pas)
local k, x, p, b, s;
s := ;
p := debut;
while p <= fin do
x := 0.1;
for k to 80 do
x := p*(1-x);
od;
for k to 20 do
x := p*(1-x);
s:=s union [p, evalf(x, 4)];
od;
p := p+pas;
od;
plot([op(s)], 'p'=debut .. fin, style=point, symbol=point)
```

end;

On obtient

5) a) On part de $u_0 = \sin^2 \alpha$, ce qui donne

$$\begin{aligned} u_1 &= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) \\ &= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &= \sin^2(2\alpha). \end{aligned}$$

Une récurrence simple montre que

$$u_n = \sin^2(2^n \alpha).$$

b) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est p -périodique si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\sin(2^{n+p} \alpha)| = |\sin(2^n \alpha)|,$$

c'est-à-dire si et seulement si $(2^{n+p} - 2^n)\alpha \in \pi\mathbb{Z}$. En fait, si c'est vrai pour $n = 0$, alors c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc $(2^p - 1)\alpha \in \pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire, en tenant compte du fait que $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$\alpha \in \left\{ \frac{k\pi}{2^p - 1} ; k = 1, \dots, 2^p - 1 \right\}.$$

◆ **SREC.32** (**) Mines PC – 2004

Soit $u_0 \in]0; 1[$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$.

- 1) Nature de $\sum u_n$?
- 2) Équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

◇ [Rec04/suitesrec-r4.tex/r4:20]

1) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]0; 1[$, elle est donc décroissante, donc converge, et elle ne peut le faire que vers un point fixe, donc vers 0. La dérivée de $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x + x^2)$ en 0 est égale à $\frac{1}{2}$, donc disons toujours

plus petite que $2/3$, donc $u_n = O\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)$, donc $\sum u_n$ converge.

2) On peut se douter que u_n est en $1/2^n$.

À FINIR !!!

◆ **SREC.33** (*) CCP PC – 2005

On définit les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les relations

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = -3x_n + 4y_n. \end{cases}$$

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit le point $M_n(x_n, y_n)$ de \mathbb{R}^2 . Montrer que les points M_0, M_1, \dots, M_n sont alignés.
- 2) Calculer, en fonction de M_0 , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$.

◇ [Rec05/suitesrec-r5.tex/r5:67]

◆ **SREC.34** (*) CCP PC – 2005

On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} + v_{n-1} \\ v_n = v_{n-1} \end{cases}$ et $u_0 = v_0 = 1$.

En posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer u_n et v_n en fonction de n

Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ après avoir prouvé que la série convergeait.

◇ [Rec05/suitesrec-r5.tex/r5:517]

◆ **SREC.35** (*) CCP PC – 2005

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par ses deux premiers termes $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ et la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n-1}}$. Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ [Rec05/suitesrec-r5.tex/r5:73]

Passer au logarithme.

Algèbres de Banach

◆ **BAN.1 (INV(E) est ouvert)** (★★)

Soit E une algèbre de Banach. Alors l'ensemble INV(E) des inversibles de E est un ouvert.

◇ [Divers/algbanachexo.tex/evn:86] Si $\|h\| < r$ alors $\|x_0^{-1}h\| < 1$ donc $\mathbf{1} + x_0^{-1}h$ est inversible. Le produit de deux éléments inversibles est inversible. Ainsi, $\mathcal{B}(x_0; r) \subset \text{INV}(E)$.
 Soit $x_0 \in \text{INV}(E)$. Pour tout $h \in E$, on peut écrire $x_0 + h = x_0(\mathbf{1} + x_0^{-1}h)$.
 Or $\|x_0^{-1}h\| \leq \|x_0^{-1}\| \cdot \|h\|$. Prenons $r = \frac{1}{\|x_0^{-1}\|}$.

◆ **BAN.2 (Sp(u) est compact)** (★★)

Soit E une algèbre de Banach de dimension finie (donc normée, c'est-à-dire vérifiant notamment $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$), soit $u \in E$. Le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit **valeur spectrale** de u si et seulement si $x - \lambda \mathbf{1}$ n'est pas *inversible* (et non pas « non injectif » comme en dimension finie). L'ensemble des valeurs spectrales de u est appelé **spectre de u** et noté $\text{Sp}(u)$.

- 1) Si $\lambda \in \text{Sp } u$, montrer que $|\lambda| \leq \|u\|$.
- 2) $\text{Sp}(u)$ est un compact de \mathbb{K} .

◇ [Divers/algbanachexo.tex/mod:94] On suppose $\|u\| \neq 0$, sinon c'est trivial.
 2) On sait déjà que $\text{Sp}(u)$ est borné. Il suffit de montrer qu'il est fermé. Or

- 1) Supposons $|\lambda| > \|u\|$. Alors

$$u - \lambda \mathbf{1} = -\lambda \left(\mathbf{1} - \frac{u}{\lambda} \right).$$

Or dans une algèbre de Banach, si $\|x\| < 1$ alors $(\mathbf{1} - x)$ est inversible et $(\mathbf{1} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

est continue et $\text{Sp}(u) = \Theta^{-1}(E \setminus \text{INV}(E))$. On utilise alors le résultat : INV(E) est ouvert. (Cf. exercice BAN.1.)

$$\Theta: \mathbb{K} \longrightarrow E \quad \left| \begin{array}{l} \lambda \longmapsto x - \lambda \mathbf{1} \end{array} \right.$$

◆ **BAN.3 (Rayon spectral)** (★★)

Soient E un \mathbb{C} -e.v. de dimension finie d et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose

$$\rho(u) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(u)} |\lambda|.$$

- 1) L'application $u \mapsto \rho(u)$ est-elle une norme ?
- 2) Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E, on note également $\|\cdot\|$ la **norme associée** ou **norme subordonnée**

$$\|u\| = \max_{\|x\|=1} \|u(x)\|.$$

(Le max étant atteint car u est continue et $\overline{\mathcal{B}}(0; 1)$ est compact.)

Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E pour laquelle u est contractante (c'est-à-dire $\|u\| < 1$) ;
- (b) $\rho(u) < 1$;
- (c) $u^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

INDICATION : Pour montrer (b) \Rightarrow (c), on utilisera la décomposition de E en sous-espace caractéristiques

$$E = \bigoplus_{j=1}^k \text{Ker}(u - \lambda_j \text{Id})^{m_j}.$$

Pour montrer (c) \Rightarrow (a), on prendra une norme $\|\cdot\|_0$ quelconque et on posera

$$\|x\| = \|x\|_0 + \|u(x)\|_0 + \dots + \|u^p(x)\|_0,$$

où l'entier p sera convenablement choisi.

- 3) Montrer que $\rho(u) = \inf_{\|\cdot\|} \|u\|$, où la somme porte sur les normes sur E. Cette borne inférieure est-elle atteinte? (On appliquera la question 2 à $\frac{1}{\rho(u) + \varepsilon} u$.)
- 4) Montrer que, si $\|\cdot\|$ est une norme sur E, $\rho(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u^n\|^{1/n}$.

◇ [Divers/algbanachexo.tex/evn:97]

On commence par une remarque préliminaire : toutes les normes étant équivalentes, on peut dire « $u^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ » sans ambiguïté.

C'est d'ailleurs équivalent à dire $u^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ pour tout x (il suffit de considérer la matrice de u^n dans une base quelconque pour s'en convaincre).

- 1) Ce n'est pas une norme car, si u est nilpotent, on a $\rho(u) = 0$, mais u peut très bien être non nul...
- 2) **Démontrons a \Rightarrow b**

On a, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et en choisissant x vecteur propre associé à λ : $\|u(x)\| = |\lambda| \|x\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$, ce qui montre $|\lambda| < \|u\| < 1$. En passant au max, $\rho(u) < 1$.

Démontrons b \Rightarrow c
 On écrit, comme suggéré, $E = \bigoplus_{j=1}^m E_j$.

Si $x \in E_j$, on a

$$\begin{aligned} u^n(x) &= (u - \lambda \mathbf{1} + \lambda \mathbf{1})^n \\ &= \sum_{p=0}^{m_j} C_n^p (u - \lambda \mathbf{1})^p \lambda_j^{n-p} x \end{aligned}$$

On décompose $x = x_1 + \dots + x_k$, alors

$$\|u^n(x)\| \leq \sum_{j=1}^k \sum_{p=0}^{m_j} C_n^p \|u - \lambda_j \mathbf{1}\|^p |\lambda_j|^{n-p} \|x_j\|$$

avec $|\lambda_j| \leq \rho(u) < 1$ et C_n^p est une polynôme de degré $p < m_j \leq d = \dim E$ en n , donc

$$\|u(x)\| \leq P(n) \rho(u)^{n-d+1} \max_j \|x_j\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a donc $u^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Démontrons c \Rightarrow a

Pour p suffisamment grand, on a $\|u^{p+1}\|_0 < 1$. On définit la nouvelle norme comme suggéré, et on remarque que $\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|$. Ainsi, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$,

$$\|u(x)\| - \|x\| = \|u^{p+1}(x)\|_0 - \|x\|_0 < 0,$$

ce qui montre que $\|u(x)\| < \|x\|$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, donc u est contractante (on est en dimension finie.)

- 3) On a déjà montré que $\rho(u) \leq \|u\|$ pour tout choix de norme (dans le a \Rightarrow b).

Puisque $\rho(\alpha u) = |\alpha| \rho(u)$, en posant $\alpha = (\rho(u) + \varepsilon)^{-1}$, on a $\rho(\alpha u) < 1$. L'implication $b \Rightarrow a$ montre qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ telle que $\|\alpha u\| < 1$, donc $\|u\| < \rho(u) + \varepsilon$.

Ainsi,
$$\rho(u) = \inf_{\|\cdot\|} \|u\|.$$

Cette borne inférieure n'est pas atteinte puisque, si u est nilpotent, $\rho(u) = 0$!

- 4) On montre que les valeurs propres de u^n sont les λ^n , pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$. Puis des résultats classiques.

Continuité dans un evn

◆ CNT.1 (CNS de continuité) (**)

Soit E un e.v.n. et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- u est continue en 0 ;
- u est continue sur E ;
- $u(\mathcal{B}(0; 1))$ est bornée.

◇ [Divers/continuiteexo.tex/evn:13]

T.

◆ CNT.2 (**)

Soient E, F deux espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application continue et injective. On pose $H = \text{Im } u$. Alors u est une bijection de E sur H et on définit l'application réciproque $v = u^{-1} : H \rightarrow E$.

- Montrer que si E est complet, alors H est complet.
- Soit $A \subset E$ un ouvert et $w : A \rightarrow F$ une application k -lipschitzienne. Montrer que si $k < 1$ alors $f = u + w$ est continue et injective. L'application f^{-1} est-elle lipschitzienne ?

◇ [Divers/continuiteexo.tex/evn:70]

◆ CNT.3 (Continuité uniforme) (**)

Soient E un e.v.n., $A \subset E$ un ouvert et $f : A \rightarrow F$ une application. On dit que f est **uniformément continue** sur A si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (x, y) \in A^2, \quad \|x - y\| \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

- Montrer que l'uniforme continuité implique la continuité.
- Montrer que $f : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue, mais que $g : x \mapsto x^2$ ne l'est pas.

◇ [Divers/continuiteexo.tex/evn:63]

$k = 1/2\sqrt{\varepsilon}$, donc elle est U-continue.

- Théorème général sur l'inversion des quantificateurs. Pour conclure sur \mathbb{R} , si $0 \leq x \leq \varepsilon \leq y$, on coupe en deux et on conclut.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est U-continue : Soit $\varepsilon > 0$.
D'une part, pour tout $0 \leq x \leq y \leq \varepsilon^2$, on a $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x} \leq \varepsilon$.
De plus, sur $[\varepsilon^2; +\infty[$, l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est k -lipschitzienne avec

$x \mapsto x^2$ n'est pas U-continue : Poser $\eta = \varepsilon^2$. Puis prendre $\varepsilon = 1$; alors pour tout $\eta > 0$, en posant $y = 1/\eta$ et $x = y + \eta/2$, on obtient $x^2 - y^2 = 1 + \eta^2/4 \geq 1$.

◆ CNT.4 (Application propre) (***)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- l'image réciproque de tout compact est compact ;
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = +\infty$.

INDICATION : Il suffit d'écrire les propriétés demandées... sans se tromper... et calmement.

◇ [Divers/continuiteexo.tex/evn:10]

propriété (b) et il existe α, β tels que

(a) \implies (b) : soit $M > 0$, il existe B tel que $f^{-1}([-A; A]) \subset [-B; B]$, donc si $|x| > B$, alors $|f(x)| > A$, ce qui montre (b).

$$x > \alpha \implies |f(x)| > A \implies f(x) \notin K \implies x \notin f^{-1}(K),$$

$$x > \beta \implies |f(x)| > A \implies f(x) \notin K \implies x \notin f^{-1}(K)$$

(b) \implies (a) : soit K un compact de \mathbb{R} , comme K est fermé, $f^{-1}(K)$ est fermé. De plus K est borné donc il existe $A > 0$ tel que $K \subset [-A; A]$. On utilise la

donc $f^{-1}(K) \subset [\alpha; \beta]$ donc est borné donc est compact.

◆ CNT.5 (♣)

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, et soit $f : E \rightarrow F$ une application continue et surjective. Soit A un ensemble dense dans E . Montrer que $f(A)$ est dense dans $f(E)$.

◇ [Divers/continuiteexo.tex/evn:62]

T.

◆ CNT.6 (♣)

Montrer que toute fonction lipschitzienne est continue.

◇ [Divers/continuiteexo.tex/evn:14]

T.

◆ CNT.7 (♣)

Soient $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$, où E est un e.v.n. quelconque. Montrer que si f et g sont continues, alors $x \mapsto \min(f(x), g(x))$ est continue.

◇ [Divers/continuiteexo.tex/evn:1b1a]

On peut écrire une démonstration directe et fastidieuse, ou remarquer astucieusement que si $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|),$$

ce qui montre que $(x, y) \mapsto \min(x, y)$ est continue, et donc par composition de fonctions continue, $x \mapsto \min(f(x), g(x))$ est continue.

◆ CNT.8 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On définit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y, \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Montrer que g est continue.

◇ [Divers/continuiteexo.tex/evn:2]

Méthode bourrine : en (x, y) , on a continuité car sur la boule de rayon $|y - x|/\sqrt{2}$ (pour la norme infinie) la fonction g est définie par la même formule, et le dénominateur ne s'annule pas ; un théorème de quotient de fonctions continue suffit.

□ Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. La fonction f' étant continue, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| \leq \eta \implies |f'(x) - f'(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Cela veut dire, que sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, on a $f'(x_0) - \varepsilon \leq f'(x) \leq f'(x_0) + \varepsilon$. On utilise maintenant la formule de Taylor : soient $x, y \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ quelconques, il existe $\theta \in]x; y[\subset [x_0 - \eta; x_0 + \eta]$ tel que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\theta),$$

ce qui montre que

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x_0) \right| \leq \varepsilon,$$

et donc

$$|g(x, y) - g(x_0, x_0)| = \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x_0) \right| \leq \varepsilon.$$

On a donc montré que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{B}(x_0, \eta) \quad |g(x, y) - g(x_0, x_0)| \leq \varepsilon. \quad \square$$

On en déduit que g est continue en (x_0, x_0) .

Méthode subtile : on écrit que

$$g(x, y) = \int_0^1 f'(tx + (1-t)y) dy$$

et on utilise le théorème de continuité sous le signe somme (cas du segment) — le fait que l'argument soit un vecteur de \mathbb{R}^2 n'est pas embêtant, il suffit de considérer une caractérisation séquentielle et de revenir à la démonstration élémentaire par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Ça marche tout seul !

◆ CNT.9 (Prolongement d'un opérateur continu) (**)

Soient E un espace vectoriel normé et V un sous-espace vectoriel de E dense dans E . Si F est un e.v.n. complet, si $\phi : V \rightarrow F$ est une application linéaire continue, alors

- il existe un unique prolongement $\hat{\phi} : E \rightarrow F$ linéaire, continu, de ϕ (c'est-à-dire que $\hat{\phi}$ vérifie $\hat{\phi}(x) = \phi(x)$ pour tout $x \in V$) ;
- de plus, la norme linéaire de $\hat{\phi}$ et celle de ϕ sont égales.

◇ [Divers/continuiteexo.tex/evn:83]

Soit $x \in E$, on cherche à définir l'objet que l'on va appeler $\hat{\phi}(x)$. On utilise le fait que V est dense dans E : il existe donc une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans V qui converge vers x dans E . Pour montrer que la suite $(\phi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on commence par noter que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme ϕ est linéaire et continu, on a, en notant $\|\phi\|$ la norme linéaire de ϕ :

$$\|\phi(x_p) - \phi(x_q)\| \leq \|\phi\| \|x_p - x_q\|$$

pour tous $p, q \in \mathbb{N}$. La suite $(\phi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc elle aussi de Cauchy et, comme elle est à valeurs dans F qui est complet, elle converge. Il ne reste plus qu'à poser

$$\hat{\phi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n).$$

On vérifie aisément que $\hat{\phi}(x)$ ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ utilisée : en effet, si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers x , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n - y_n) = 0$$

par continuité de ϕ .

L'application $\hat{\phi}$ ainsi construite est linéaire et vérifie

$$\|\hat{\phi}(x)\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi(x_n)\| \leq \|\phi\| \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|\phi\| \cdot \|x\|,$$

ce qui montre que $\|\hat{\phi}\| \leq \|\phi\|$.

Pour montrer l'inégalité inverse, on note que, pour tout $y \in V$, on a $\hat{\phi}(y) = \phi(y)$ et que, par conséquent

$$\|\hat{\phi}\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\hat{\phi}(x)\|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{\|\hat{\phi}(x)\|}{\|x\|} = \|\phi\|.$$

On a donc bien l'égalité $\|\hat{\phi}\| = \|\phi\|$.

◆ CNT.10 (Caractérisation de la continuité)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $f : E \rightarrow F$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- f est continue ;
- $\forall A \subset E \quad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;
- $\forall B \subset F \quad f^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}$.

◇ [Divers/continuiteexo.tex/evn:85]

◆ **CNT.11** (■)
 Soit f une application de $]1; +\infty[$ dans \mathbb{R} telle que, pour tout $x > 1$, on a $f(x^n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.
 On note (P) la propriété : $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

- 1) Montrer que, si f est croissante, alors f vérifie (P).
- 2) Montrer que, si f est continue, alors f vérifie (P).
- 3) On définit f par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{N} \text{ et } x \text{ premier;} \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$
 Montrer que f ne vérifie pas (P).

◇ [Divers/continuiteexo.tex/evn:82]

- 1) T.
- 2) Pour simplifier, notons $f_n(x) = f(x^n)$.
 □ Soit $A \geq 0$. Posons, pour tout $p \geq 1$:

$$F_p = \{x \in I; \forall n \geq p, f_n(x) \geq A\}.$$

F_p est fermé pour tout $p \geq 1$ par continuité de chaque f_n . De plus, l'hypothèse sur f montre que $I = \bigcup_{p=1}^{\infty} F_p$.

En posant $U_p = I \setminus F_p$, U_p est un ouvert non vide tel que $\bigcap_{p=1}^{\infty} U_p = \emptyset$.

On peut donc, en vertu du théorème de Baire, affirmer que l'un au moins des U_p n'est pas dense dans I , et donc que l'un au moins des F_p est d'intérieur non vide. Ainsi, on peut trouver un entier $p \geq 1$ et deux réels $1 < u < v$ tels que $[u; v] \subset F_p$.

Notons maintenant

◆ **CNT.12** (**)
 Soient E et F deux espaces de Banach réels. Soit $f : E \rightarrow F$ une application continue. On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall x, y \in E \quad \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq a.$$

Montrer l'existence et l'unicité de $g \in \mathcal{L}_c(E, F)$ telle que $f - g$ soit bornée.

INDICATION : On étudiera la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = 2^{-n} f(2^n x)$.

◇ [Divers/continuiteexo.tex/evn:87]
 On a

$$\|f(2^n x) - 2f(2^{n-1}(x))\| \leq a$$

donc $\left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^{n-1}} f(2^{n-1} x) \right\| \leq \frac{a}{2^n}$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on note g sa limite. On a également $\|f - g\|_{\infty} \leq a$.

Il ne reste plus qu'à montrer l'additivité de g , ce qui est trivial en vertu de

$$\|f_n(x+y) - f_n(x) - f_n(y)\| \leq \frac{a}{2^n},$$

dont on déduit ensuite $g(p/qx) = p/qg(x)$ pour tout $(p, q, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \times E$; enfin, on montre la continuité de g en tant que limite uniforme d'applications continues, et on en conclut par densité à la linéarité de g .

◆ **CNT.13 (Continuité du pol. de Lagrange)**
 Soient (x_1, \dots, x_n) des réels distincts, fixés une fois pour toutes. À tout n -uplet (y_1, \dots, y_n) , on associe le polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- 1) Montrer que l'application $(y_1, \dots, y_n) \mapsto P$ est continue.
- 2) Montrer que l'application réciproque est également continue.

◇ [Divers/continuiteexo.tex/evn:95]

◆ **CNT.14**
 Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée définie par, pour tout $\phi \in \mathcal{L}(E)$:

$$\|\phi\| = \sup \{ \|\phi(x)\|; x \in E \text{ et } \|x\| = 1 \}.$$

Soit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E)$. Démontrer que les trois énoncés suivants sont équivalents :

- (a) la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$;
- (b) pour tout vecteur x élément de E , la suite $(\phi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans E ;
- (c) étant donnée une base (e_1, \dots, e_k) de E , les k suites $(\phi_n(e_i))_{n \in \mathbb{N}}$, pour $1 \leq i \leq k$, sont convergentes dans E .

De manière analogue, trouver deux énoncés équivalents à l'énoncé suivant : la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E)$; établir l'équivalence de ces énoncés.

◇ [Divers/continuiteexo.tex/evn:100]

On démontre trois implications.
 • (a) \Rightarrow (b) : pour tout $x \in E$, $\|(\phi - \phi_n)(x)\| \leq \|\phi - \phi_n\| \cdot \|x\|$.
 • (b) \Rightarrow (c) : immédiat en posant successivement $x = e_1, \dots, x = e_n$.
 • (c) \Rightarrow (a) : Pour tout $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$, posons $u_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(e_i)$.
 Puisque toutes les normes sont équivalentes, on va munir E de la norme qui, à tout vecteur de E se décomposant dans la base (e_1, \dots, e_k) sous la forme $x = \sum_{i=1}^k x_i e_i$, associe $\|x\| = \sup_{1 \leq i \leq k} |x_i|$ (c'est la « norme 1 » associée à la base choisie).

1^{er} étape : construite la limite de la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 Pour tout $x \in E$, on a

$$\left\| \phi_n(x) - \sum_{i=1}^k x_i u_i \right\| \leq \sum_{i=1}^k |x_i| \|\phi_n(e_i) - u_i\| \leq \|x\| \cdot \sum_{i=1}^k \|\phi_n(e_i) - u_i\|.$$

On définit alors l'endomorphisme $\phi \in \mathcal{L}(E)$ en donnant l'image des vecteurs de base :

$$\text{pour tout } i \in \llbracket 1; k \rrbracket, \text{ on pose } \phi(e_i) = u_i.$$

2^{de} étape : on vérifie que ϕ est la limite (au sens de la norme subordonnée) de la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

□ Soit $n \in \mathbb{N}$.
 Pour tout $x \in E$ de norme 1, on a

$$\|(\phi - \phi_n)(x)\| \leq \sum_{i=1}^k |x_i| \|\phi_n(e_i) - u_i\|,$$

ce qui montre, en passant à la borne supérieure sur x (l'entier n étant toujours fixé !), que

$$\|\phi_n - \phi\| \leq \sum_{i=1}^k \|\phi_n(e_i) - u_i\|. \quad \square$$

Le second membre de l'inégalité précédente tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, ce qui montre que la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ϕ au sens de la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{L}(E)$, ce que l'on voulait démontrer.

On a donc montré que :

Les énoncés (a), (b) et (c) sont équivalents.

De la même manière, on conjecture que :

Il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E)$;
- (b) pour tout $x \in E$, la suite $(\phi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans E ;
- (c) étant donnée une base (e_1, \dots, e_k) , les k suites $(\phi_n(e_i))_{n \in \mathbb{N}}$, pour $1 \leq i \leq k$, sont bornées dans E .

- (a) \Rightarrow (b) : car, pour tout $x \in E$, $\|\phi_n(x)\| \leq \|\phi_n\| \cdot \|x\|$.
- (b) \Rightarrow (c) par spécialisation sur x .
- (c) \Rightarrow (a) en choisissant de nouveau la « norme du sup pour la base (e_1, \dots, e_k) », on a pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\phi_n(x)\| \leq \|x\| \cdot \sum_{i=1}^k \|\phi_n(e_i)\|.$$

Il ne reste plus, à n fixé, qu'à prendre la borne supérieure sur l'ensemble des $x \in E$ de norme 1 pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|\phi_n\| \leq \sum_{i=1}^k \|\phi_n(e_i)\| = C^{\mathbb{E}},$$

ce qui montre que $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E)$.

◆ **CNT.15** (**) X PC – 1998
 Soient n un entier et f une fonction continue sur $[-1; 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\|f - P\| = \sup_{[-1; 1]} |f - P|$. Enfin, on pose

$$D_n(f) = \inf_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - P\|.$$

- 1) Montrer que D_n est lipschitzienne.
- 2) Montrer que, pour toute application f , il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $D_n(f) = \|f - P\|$.

◇ [Rec00/continuite-r0.tex/supp-r0-4]

1) □ Soient f, g deux fonctions de $E \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_{\infty}$. Alors, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$D(g) \leq \|g - P\|_{\infty} \leq \|g - f\|_{\infty} + \|f - P\|_{\infty}$$

et donc, en passant à la borne inférieure dans l'inégalité de droite :

$$D(g) \leq \|g - f\|_{\infty} + D_n(f).$$

Le même travail en échangeant les rôles de f et g montre que

$$D(f) \leq \|g - f\|_{\infty} + D_n(g).$$

En combinant ces deux inégalités, on a alors

$$|D_n(f) - D_n(g)| \leq \|g - f\|_{\infty}.$$

Ainsi

D_n est 1-lipschitzienne.

2) **Démonstration courte mais brève, et surtout hors-programme.** $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , donc complet, donc localement compact; ainsi, la distance de f à $\mathbb{R}_n[X]$ est atteinte.

Démonstration plus pertinente dans le cadre du nouveau programme PC...

Il vaut mieux raisonner ainsi : on note $E' = \mathbb{R}_n[X] \oplus (f)$. Alors E' est un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie; de plus, $\mathbb{R}_n[X]$ est un hyperplan de E (à moins que $f \in \mathbb{R}_n[X]$, auquel cas la réponse est triviale), donc c'est le noyau d'une forme linéaire, il est donc fermé (démonstration à peu près immédiate), et donc on peut utiliser le résultat du cours : la distance à un fermé est atteinte en dimension finie.

♦ **CNT.16** (★★) X PC – 1998

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On E l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; 1]$, à valeurs dans \mathbb{R} , et vérifiant $f(0) = a$ et $f(1) = b$. Calculer $\sup_{f \in E} \int_0^1 (f'(t))^2 dt$ et $\inf_{f \in E} \int_0^1 (f'(t))^2 dt$. Ces bornes sont-elles atteintes ?

◊ [Rec00/continuite-r0.tex/supp-r0:14] La borne inférieure est atteinte pour la fonction affine. En effet, on peut écrire, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
 plus vite, par exemple

$$f_n(x) = a + (b - a)x + \sin\left(\frac{n\pi x}{b - a}\right).$$

$$\underbrace{\left| \int_0^1 f'(t) \cdot \mathbf{1}(t) dt \right|^2}_{|b-a|^2} \leq 1 \cdot \int_0^1 f'^2.$$

Elle n'est bien sûr pas atteinte.

♦ **CNT.17** ENS Lyon MP – 2001

U étant un ouvert de \mathbb{R}^n contenant la boule fermée $\overline{B}(0; R)$, et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ étant de classe \mathcal{C}^1 , on pose

$$\alpha : \begin{cases} [0, R] \rightarrow \mathbb{R} \\ r \mapsto \sup_{\|x\| \leq r} f(x). \end{cases}$$

Montrer que α est lipschitzienne, et déterminer la meilleure constante k telle que α soit k -lipschitzienne.

◊ [Rec01/continuite-r1.tex/evn-r:5]

♦ **CNT.18** ENS Lyon MP – 2001

Soit $R > 0$ et U un ouvert de \mathbb{R}^p tel que $\overline{B}(0; R) \subset U$, et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Pour tout $r \in [0, R]$, on pose $\alpha(r) = \sup_{\|x\| \leq r} f(x)$.

- Montrer que α est lipschitzienne sur $[0, R]$.
- Soit $r \in [0; R]$ et soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui tend, en décroissant strictement, vers r . On suppose que $\frac{\alpha(r_n) - \alpha(r)}{r_n - r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$. Montrer que $\ell \geq \inf_{\|x\| \leq r} \|df_x\|$.
- Variante* (C. Lathuilier, M. Pagelot) : si $r_n > r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les valeurs d'adhérence de $\frac{\alpha(r_n) - \alpha(r)}{r_n - r}$ sont toutes supérieures à $\inf_{\|x\| \leq r} \|df_x\|$

◊ [Rec01/continuite-r1.tex/evn-r:8]

♦ **CNT.19** ENS Lyon MP – 2001

Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

- Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $F^{-1}(\{c\})$ soit un singleton. Caractériser c .
- On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F^{-1}(\{c\})$ est compact. Montrer que F admet un extremum.
- Supposons que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $F^{-1}(\{c\})$ est compact. Montrer que F(x) admet une limite quand $\|x\| \rightarrow \infty$.
- Qu'en est-il pour $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

◊ [Rec01/continuite-r1.tex/evn-r:10]

♦ **CNT.20** (★★) Mines MP – 2001

On pose $T : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ où $a \in \mathbb{R}$. Étudier la continuité de T lorsque $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $N_{\alpha, \beta}$ définie par

$$N_{\alpha, \beta}(P) = \sup_{t \in [\alpha; \beta]} |P(t)|.$$

◊ [Rec01/continuite-r1.tex/evn-r:18]

Si $\alpha \in [\alpha; \beta]$, alors T est continue et $\|T\| \leq 1$.

Si $\alpha \notin [\alpha; \beta]$, alors T n'est pas continue comme on peut le voir en prenant, si $a > \beta$, $P_n = \left(\frac{X - \alpha}{\beta}\right)^n : \|P_n\| = 1$ mais $T(P_n) \rightarrow +\infty$.

Posons $\|P\| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^n |\alpha_n|$ en supposant $a \neq 0$ (sinon on fait une translation de 1), on définit, pour tout $n \in \mathbb{N} : P_n = X^n/a^n$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0$ tandis que $P_n(a) = 1$.

Posons $\|P\| = |P(a)| + \int_{-1}^1 |P(t)| dt$. Alors $|P(a)| \leq \|P\|$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, ce qui montre la continuité de T.

♦ **CNT.21 (Fonction additive bornée sur $B(0; 1)$)** (★) TPE MP – 2001

Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $f : E \rightarrow F$ telle que $\forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$. On suppose que f est bornée sur la boule unité. Montrer que f est linéaire et continue.

◊ [Rec01/continuite-r1.tex/evn-r:12]

On note $M = \sup \|x\| \leq 1 f(x)$. Alors pour tout $x \in B(0; \frac{1}{2})$, on a $\|f(x)\| \leq \frac{M}{2}$ (sinon, contradiction) puis, par récurrence,

$$\forall x \in B\left(0; \frac{1}{2^n}\right) \quad \|f(x)\| \leq \frac{M}{2^n}.$$

Ainsi, f est continue en 0.

On en déduit que f est continue (la linéarité n'est pas nécessaire pour la démonstration, seule l'additivité est utilisée !)

Enfin, $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ par une récurrence très simple sur le dénominateur de la fraction irréductible d'un rationnel et, par continuité, f est linéaire.

♦ **CNT.22** (★★) Centrale MP – 2001

On pose $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$. On pose $\phi : E \rightarrow E, f \mapsto \exp \circ f$. L'application ϕ est-elle continue ?

◊ [Rec01/continuite-r1.tex/evn-r:11b]

Soit $f_0 \in E$ et montrons que ϕ est continue en f_0 . On sait que f_0 est bornée, prenons M un majorant de $|f_0|$. Alors pour tout $f \in B(f_0; 1)$, on a

$$|e^{f(t)} - e^{f_0(t)}| \leq e^{M+1} |f(t) - f_0(t)|,$$

ce qui montre que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f et pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que $\|f_n - f_0\|_{\infty} \leq 1$, on a

$$\|\phi(f_n) - \phi(f)\|_{\infty} \leq e^{M+1} \|f_n - f\|_{\infty}.$$

On en déduit la continuité de ϕ en f_0 .

♦ **CNT.23** (★) CCP MP – 2001

Pour tout $A = (A_{ij})_{ij} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \sup_{i,j} |a_{ij}|$.

- Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme.
- Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq k \|A\| \cdot \|B\|$, et trouver le plus petit $k \in \mathbb{N}$ vérifiant cette propriété.

◊ [Rec01/continuite-r1.tex/evn-r:17]

$\|\cdot\|$ est une norme connue sur $\mathbb{R}^{n^2} \simeq \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

De plus, $\|AB\| \leq n \|A\| \cdot \|B\|$. Avec $A = B = U$ la matrice n'ayant que des 1, aucun k plus petit ne convient

Remarque $k = n$ est la norme bilinéaire de la multiplication matricielle.

♦ **CNT.24** ENSAE MP – 2002

Soit E un espace vectoriel normé. Soit f une forme linéaire sur E. Montrer que f est continue si et seulement si $\text{Ker } f$ est fermé.

◊ [Rec02/continuite-r2.tex/evn-r:2:2]

♦ **CNT.25** TPE MP – 2002

On définit la forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$ par $L(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt$, et on pose $L_n = L|_{\mathbb{R}_n[X]}$. On définit ensuite

$$\mathcal{N}(L_n) = \sup_{\substack{P \in \mathbb{R}_n[X] \\ N(P) \leq 1}} |L_n(P)|$$

où N est une des deux normes

$$N(P) = \begin{cases} (\sum a_i^2)^{1/2} \\ \sup_i |a_i| \end{cases}$$

- Montrer l'existence de $\mathcal{N}(L_p)$ et la continuité de L_n pour les deux différentes normes.
- Peut-on déterminer P tel que $N(P) = 1$ et $L_n(P) = \mathcal{N}(L_n)$?
- Peut-on étendre ces résultats sur $\mathbb{R}[X]$?

◊ [Rec02/continuite-r2.tex/evn-r:2:5]

1) C'est un théorème général en dimension finie.

2) On montre dans le premier cas $\mathcal{N}(L_n) = 2$, qui est atteint en prenant

$P = 1$. Dans le deuxième cas, on a $\mathcal{N}(L_n) = 2 \sum_{2p+1 \leq n} \frac{1}{2p+1}$, atteint

en $P = 1$.

3) Dans le premier cas, oui, dans le second, non.

♦ **CNT.26** Centrale PC – 2002

Notons $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. On le munit de la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|.$$

On définit l'application

$$P : \begin{cases} E \rightarrow E \\ f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t) dt\right). \end{cases}$$

- Montrer que, pour tout $f \in E, \|P(f)\| \leq k_0 \|f\|$ avec $k_0 \geq 0$. Trouver k_0 minimal.
- Montrer que $\|P^n(f)\| \leq k_n \|f\|$. Trouver k_n minimal.

◇ [Rec02/continuite-r2.tex/evn-r2:9]

Allonzy :

$$\begin{aligned} P^n(f)(x) &= \int_0^x P^{(n-1)}(u) \, du \\ &= \int_0^x \int_0^u \frac{(u-t)^{n-2}}{(n-2)!} f(t) \, dt \, du \\ &= \int_0^x \int_u^x \frac{(u-t)^{n-2}}{(n-2)!} f(t) \, dt \, du \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \, dt. \end{aligned}$$

On a ensuite $|P^n(f)(x)| \leq \|f\| \frac{x^n}{n!}$ donc

$$\|P_n(f)\| \leq \|f\| \quad \text{et en fait} \quad \|P\| = \frac{1}{n!}.$$

comme on peut le montrer avec une fonction bien choisie (par exemple une fonction constante).

On a bien évidemment $k_0 = 1$ (atteint pour la fonction constante en 1).

Ensuite, on commence par montrer que

$$P^2(f)(x) = \int_0^x \, du \int_0^u f(t) \, dt = \int_0^x (x-t)f(t) \, dt.$$

Ceci amorce une récurrence pour montrer

$$P^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \, dt.$$

◆ **CNT.27** ENSAE MP – 2002

On considère l'espace vectoriel normé $E = (\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Soient $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\|f - Q\|_\infty = \inf_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - P\|.$$

◇ [Rec02/continuite-r2.tex/evn-r2:4]

La distance à un fermé est atteinte dans un espace de Banach (ce qui est le cas pour E), puisque la fonction « distance à $\mathbb{R}_n[X]$ » est continue (car, par exemple,

1-lipschitzienne, comme on le voit par une simple inégalité triangulaire du second type).

◆ **CNT.28** Centrale MP – 2002

On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme du sup. On pose

$$T: \begin{cases} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto T(f) : x \longmapsto \int_0^x f(u) \, du. \end{cases}$$

- 1) Montrer que T est linéaire et continue.
- 2) Exprimer $T^k(f)$ à l'aide d'une seule intégrale. On commencera par le cas $k = 2$.
- 3) Soit g un élément de E . Montrer qu'il existe une seule fonction $f \in E$ telle que $f - T(f) = g$. On exprimera f sous la forme d'une série.
- 4) Montrer que l'application $f \mapsto f$ est un homéomorphisme.

◇ [Rec02/continuite-r2.tex/im-r2:8]

merci l'exponentielle. Alors

On commence par montrer que

$$T^2(f)(x) = \int_0^x \, du \int_0^u f(t) \, dt = \int_0^x (x-t)f(t) \, dt.$$

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t) \, dt + f(x).$$

Ceci amorce une récurrence pour montrer

Attention au 1^{er} terme ! On calcule ensuite que $(1 - T)\Phi(f)(x)$ vaut

$$T^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \, dt.$$

$$\int_0^x e^{x-t} f(t) \, dt + f(x) - \int_0^x \int_0^u e^{u-t} f(t) \, dt \, du$$

(Cf. exercice **CNT.26**). On a ensuite $|T^n(f)(x)| \leq \|f\| \frac{x^n}{n!}$ donc

soit
$$\int_0^x e^{x-t} f(t) \, dt + f(x) - \int_0^x e^{x-t} f(t) \, dt$$

$$\|T^n(f)\| \leq \frac{1}{n!} \|f\| \quad \text{et en fait} \quad \|T\| = \frac{1}{n!}.$$

Ceci assure l'existence de $\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$, qui est même de plus linéaire continue. Il faut montrer la convergence uniforme de $(\Phi_n(f))_n$ vers $\Phi(f)$, ce qui est trivial,

et donc

$$(1 - T)\Phi(f)(x) = f(x).$$

◆ **CNT.29** X PC – 2002

x étant un réel de $[0; 1]$, on définit

$$g: \begin{cases} [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \begin{cases} (1-x)y & \text{si } y < x \\ (1-y)x & \text{si } y > x. \end{cases} \end{cases}$$

Si f est une fonction continue de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} , on définit

$$g_f(x) = \int_0^1 f(y) g(y) \, dy.$$

- 1) Montrer que $x \mapsto g_f(x)$ est définie et continue.
- 2) Montrer que $f \mapsto g_f$ est linéaire et continue.
- 3) Notons $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(x) \, dx}$. Déterminer C et C' pour que $\|g_f\|_\infty \leq C \|f\|_2$ et $\|g_f\|_2 \leq C' \|f\|_2$.
- 4) **Cours** : démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

◇ [Rec02/continuite-r2.tex/bil-r2:17]

◆ **CNT.30** ENS MP – 2003

On note $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$. Soit $A \in GL_2(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 et on définit

$$\phi_A: \begin{cases} S_1 \longrightarrow S_1 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\|A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\|_2}. \end{cases}$$

- 1) Étudier la définition de ϕ_A , sa continuité, calculer ϕ_A^n .
- 2) On note $SL_2(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}); \det A = 1\}$. Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un groupe. Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. Étudier la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $M_0 \in S_1$ et $M_{n+1} = \phi_A(M_n)$.

INDICATION : Il faudra différencier les cas suivant la valeur de $\text{tr}(A)$.

◇ [Rec03/continuite-r3.tex/r3:420]

◆ **CNT.31** ENS Ulm/Lyon MP – 2003

On définit les ensembles suivants :

$$E = \{f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad 2\pi\text{-périodique}\} \quad E^1 = \{f \in E \text{ de classe } \mathcal{C}^1\}$$

$$E_n = \left\{ f \in E; \forall k \in \{-n, \dots, n\} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt = 0 \right\} \quad \text{et} \quad E_n^1 = E^1 \cap E_n.$$

On note D la dérivation $D: f \mapsto f'$.

- 1) Montrer que D est une bijection de E^1 dans E_0 .
- 2) D est-elle continue ?

◇ [Rec03/continuite-r3.tex/r3:283]

◆ **CNT.32** ENS Lyon MP – 2003
 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $k > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$f_k(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{ f(y) + k \|x - y\| \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

- 1) Montrer que $f_k(x) \leq f(x)$.
- 2) Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 - (a) f_k est finie en un point ;
 - (b) f_k est finie en tout point ;
 - (c) il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $(\forall z \in \mathbb{R}^n \quad f(z) \geq -k \|z\| + c.)$
- 3) On suppose f_k finie. Montrer que f_k est lipschitzienne.
- 4) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $k_0 > 0$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, f_k est finie.

◇ [Rec03/continuite-r3.tex/r3:61] 2)
 1) La borne inférieure est inférieure à la valeur pour la réalisation particulière $y = x$. 3)
4)

◆ **CNT.33 (Endo. positifs de $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$)** X MP – 2003
 On note $E = \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est **positif** si et seulement si, pour tout $f \in E$, $(f \geq 0 \Rightarrow u(f) \geq 0)$.

- 1) Montrer que si u est positif, alors u est continue. Trouver la norme de u .
- 2) Montrer que

$$\forall f \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall (x, y) \in [a; b]^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + c|x - y|^2.$$

- 3) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes positifs de E . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_k(x) = x^k$. On suppose que $(u_n(f_k))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f_k pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$. Montrer que :

$$\forall f \in E \quad (u_n(f))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f$$
- 4) On suppose $[a; b] = [0; 1]$. Soit $f \in E$. On pose

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1 - X)^{n-k}.$$

Que dire de $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$?

◇ [Rec03/continuite-r3.tex/r3:51] 2) À FINIR !!!
 1) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 3) À FINIR !!!
4)
À FINIR !!!

◆ **CNT.34** X MP – 2003
 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (a) u est surjective ;
- (b) pour tout ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $u(\Omega)$ est un ouvert de \mathbb{R}^m .

◇ [Rec03/continuite-r3.tex/r3:192]

◆ **CNT.35 (Additive + bornée \Rightarrow linéaire)** (★★) TPE MP – 2003
 Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur \mathbb{R} . On considère une application $f : E \rightarrow F$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$$

et **bornée** sur la boule unité. Montrer que f est linéaire et continue sur E .

◇ [Rec03/continuite-r3.tex/r3:217] On a alors bien sûr $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
Continuité : soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite tendant vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $a_n = 2^{-p_n} x_n$ avec $\|x_n\| \leq 1$ maximal, en ayant posé (selon que $a_n = 0$ ou non) On remarque que la propriété d'additivité permet d'écrire $f(2x) = 2 f(x)$ et donc, par récurrence (double)

$$p_n = \left\lfloor \frac{\ln \|a_n\|}{\ln 2} \right\rfloor \quad \text{ou} \quad p_n = n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad f(2^n x) = 2^n f(x)$$

ce qui montre que

$$|f(a_n)| = |f(2^{-p_n} x_n)| = 2^{-p_n} |f(x_n)| \leq M 2^{-p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

puis

Ainsi, f est continue en 0, donc continue sur E . $\forall p \in \mathbb{Q} \quad f(px) = p f(x)$.

Linéarité : une petite récurrence permet de montrer La continuité permet alors de montrer par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(nx) = n f(x),$$

et, puisque $f(0) = 0$ (prendre $x = y = 0$), $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$,

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(nx) = n f(x),$$

Normes linéaires subordonnées

◆ **CNT.36** (★★)
 On pose $E = \mathcal{C}([0; \pi])$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pose, pour tout $f \in E$:

$$\phi(f) = \int_0^\pi f(t) \cos t \, dt.$$

Montrer que ϕ est continue, et calculer sa norme linéaire $\|\phi\|$.

◇ [Divers/subordonneexo.tex/evn:33] ce qui montre que $\|\phi\| \leq 2$.
 On a pour tout $f \in E$ tel que $\|f\|_\infty = 1$ l'inégalité Par ailleurs, si on prend une fonction continue proche de $f = \pm 1$ (+1 avant $\pi/2$ et -1 après) mais continue, on a $N_\infty(f) = 1$ mais $|\phi(f)| > 2 - \varepsilon$ or $|\phi(f)| \leq \|\phi\| N_\infty(f)$ donc $\|\phi\| \geq 2 - \varepsilon$.

$$\phi(f) \leq \int |\cos t| \, dt = 2,$$

◆ **CNT.37** (♣)
 On pose $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, et on rappelle que

$$\text{tr} : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto \text{tr } M = \sum_{i=1}^n M_{ii}. \end{cases}$$

Montrer que tr est continue, et calculer sa norme linéaire.

◇ [Divers/subordonneexo.tex/evn:24] diag(1, 0, \dots, 0), on a $|\text{tr } M| = \|M\| \leq \|\text{tr}\| \cdot \|M\|$ donc $\|\text{tr}\| \geq 1$.
 C'est continu, $|\text{tr } M| \leq \|M\|_\infty$, donc $\|\text{tr}\| \leq 1$, et pour $M =$

◆ **CNT.38** (★★★)
 On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme

$$\|\cdot\|_\infty : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ P = \sum_{i=1}^p \alpha_p X^p \mapsto \|P\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_i| \end{cases}$$

Étudier la continuité de l'application $D : P \mapsto P'$, et calculer, si elle existe, sa norme. Même question pour $G : P \mapsto XP$.

◇ [Divers/subordonneexo.tex/evn:45bis] D non continue car $D(X^p) = p \cdot X^{p-1}$. Et $\|G(P)\| = \|P\|$ donc $\|G\| = 1$.

◆ **CNT.39 (Calcul de $\|\circ\|$)**
 Soit E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $\|u\|$ sa norme linéaire.

- 1) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.
- 2) Montrer que, si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, on a $\|u \circ v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$. En déduire la norme bilinéaire de l'application

$$\circ : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ (u, v) \mapsto u \circ v. \end{cases}$$

◇ [Divers/subordonneexo.tex/evn:47bis] Ceci montre que $\|\circ\|_B \leq 1$. Il suffit ensuite d'exhiber $\|1 \circ 1\| = \|1\| \|1\|$ pour conclure que $\|\circ\|_B = 1$.
 On commence par établir $\|u \circ v(x)\| \leq \|u\| \|v(x)\| \leq \|u\| \|v\| \|x\|$, ce qui montre que $u \circ v$ est continue (on le savait, merci), et que $\|u \circ v\| \leq \|u\| \|v\|$.

♦ **CNT.40** (★★★)

Soit E un sous-espace de l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ , 2π -périodiques, à valeurs dans \mathbb{C} . On suppose que E est stable par la dérivation D . On suppose que plus que, pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge uniformément vers 0 sur \mathbb{R} , il en est de même pour la suite $(Df_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des dérivées.

- 1) Montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall f \in E \quad \|Df\|_\infty \leq \alpha \|f\|_\infty.$$
- 2) Montrer que E est un espace de dimension finie et possède une base constituée des fonctions de la forme $e_n : t \mapsto e^{int}$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

◇ [Divers/subordonneeexo.tex/evn:98]

1) Par l'absurde. On suppose la propriété fautive et on construit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne vérifiant pas l'hypothèse de l'énoncé : $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 mais pas $(Df_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) On suppose E de dimension infinie. On choisit une famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ libre et normée

À FINIR !!!

♦ **CNT.41**

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ des normes $\|P\|_\infty = \max |\alpha_i|$, $N(P) = \sup_{x \in [0;1]} |P(x)|$ et $N'(P) = \sup_{x \in [0;2]} |P(x)|$. Étudier la continuité de $\phi : P \mapsto P(2)$ pour chacune de ces normes.

◇ [Divers/subordonneeexo.tex/div:112]

♦ **CNT.42** Mines MP – 2001

On munit $\mathbb{R}_3[X]$ de la norme $\|P\| = \sum_{k=0}^3 |P(k)|$. On pose $f : P(X) \mapsto P(X+2)$. Calculer $\|f\|$.

◇ [Rec01/subordonnee-r1.tex/evn-r:14]

$\|f\| = \frac{35}{6}$, atteint en $P = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$ probablement.

♦ **CNT.43** (★★★) Mines MP – 2001

On pose $E \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{C}^2([0;1], \mathbb{R}) ; f(0) = f'(0) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x) + 2f'(x) + f''(x)|$.

- 1) Montrer que N est une norme sur E .
- 2) On pose $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f(1)$. Montrer que ϕ est continue.
- 3) Calculer sa norme linéaire $\|\phi\|$.

◇ [Rec01/subordonnee-r1.tex/evn-r:4]

Que ce soit une norme est évident (grâce au th. de Cauchy-Lipschitz sur l'unicité de la solution à une équation différentielle linéaire à coefficients constants).

différentielle pour exprimer f en fonction de g , ce qui permet de majorer $f(1)$ en fonction de g et donc de $\|g\|_\infty$.

Soit $f \in E$. On pose $g(x) = f(x) + 2f'(x) + f''(x)$. On résout cette équation

La résolution de l'équation homogène est : $y = (ax + b)e^{-x}$.

♦ **CNT.44** (*) Mines MP – 2001

On pose $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme du sup, et u l'endomorphisme de E qui à $f \in E$ associe la fonction

$$g : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

- 1) Montrer que $u \in \mathcal{L}_c(E)$ (c'est-à-dire que u est continue). Calculer $\|u\|$.
- 2) Quelles sont les fonctions propres associées à la valeur propre $\|u\|$ de u ?

◇ [Rec01/subordonnee-r1.tex/evn-r:6]

2) Ce sont les fonctions constantes. Itérer, faire apparaître des sommes de Riemann?

1) On a $\|u(f)\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$ de manière évidente, donc $u \in \mathcal{L}_c(E)$ et $\|u\| \leq 2$. La fonction **1** permet de voir que $\|u\| = 2$.

♦ **CNT.45** X MP – 2003

Soit E un espace vectoriel euclidien sur \mathbb{C} . Soit $f \in E^*$. On note

$$h_0 = \{x \in E ; f(x) = 0\} \quad \text{et} \quad h_1 = \{x \in E ; f(x) = 1\}.$$

Calculer $\sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$ en fonction de $d(h_0 ; h_1)$.

◇ [Rec03/subordonnee-r3.tex/r3:337]

♦ **CNT.46** Mines MP – 2003

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ de la norme $\|P\| = \sum_{k=0}^2 |P(k)|$. On définit $f : P \mapsto P(X+2)$. Déterminer $\|f\|$.

◇ [Rec03/subordonnee-r3.tex/r3:59]

♦ **CNT.47** Mines MP – 2003

On note $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) ; \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)\}$ que l'on munit de

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Soit $f \in E$. Pour tout $g \in E$, on définit $\phi(g) = h$ avec $h(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) dt$.

- 1) Montrer que ϕ est continue.
- 2) Que dire de sa norme?

◇ [Rec03/subordonnee-r3.tex/r3:304]

♦ **CNT.48** (★) Centrale MP – 2003

On considère $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$, muni de la norme du sup $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application $T : E \rightarrow E$ définie par

$$\forall x \in [0;1] \quad Tf(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

- 1) Vérifier que f est linéaire.
- 2) Calculer $\|f\|$. Donner un encadrement des valeurs propres de T .
- 3) On pose $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$. Montrer que $f \notin E$.
- 4) On pose $g(x) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right)^2$. Montrer que $g \notin E$.
- 5) Calculer $f - g$. Montrer que $f - g \in E$.
- 6) Dédurre de ce qui précède que $f = g$.

◇ [Rec03/subordonnee-r3.tex/r3:251]

♦ **CNT.49** Centrale MP – 2003

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\| < 1$, où $\|\cdot\|$ est la norme subordonnée à N .

On pose

$$S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k.$$

- 1) Calculer $S_n \circ (u - \text{Id}_E)$. En déduire que $\text{Ker}(u - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(u - \text{Id}_E) = \{0\}$.
- 2) Montrer que, si E est de dimension finie,

$$\text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}_E) = E. \quad (*)$$
- 3) Montrer que, dans le cas général, on a la relation $(*)$ si et seulement si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement et $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$ est un fermé de E .

◇ [Rec03/subordonnee-r3.tex/r3:258]

♦ **CNT.50** (★★) TPE PC – 2004

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ et on définit l'application $u : P \mapsto P(X+1) + P(X-1)$.

- 1) u est-elle linéaire? La restriction u_n de u à $\mathbb{R}_n[X]$ définit-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
- 2) u est-elle injective? Surjective?
- 3) Déterminer la matrice, les valeurs propres, les sous-espaces propres de u_n .
- 4) On munit E de la norme définie par $\|P\| = \sup_{x \in [0;1]} |P(x)|$. L'application u est-elle continue?
- 5) On pose $\phi_n = u_n^{-1}$. Déterminer ϕ_n .

◇ [Rec04/subordonnee-r4.tex/r4:29]

$u_n - 2 \text{Id}_n$ est 2. Or $u(X^0) = 2X^0$ et $u(X^1) = 2X^1$, donc

$$\text{Ker}(u_n - 2 \text{Id}_n) = \text{Vect}(X^1, X^1).$$

- 1) Oui. Oui.
- 2) Chaque u_n est injective, donc u est injective. Chaque u_n est surjective, donc u est surjective (l'écrire).
- 3) $\text{Sp}(u) = \{2\}$: dans la base canonique, la matrice de u est triangulaire supérieure. En l'écrivant (pénible), on voit que la dimension du noyau de
- 4) Prendre $P_n = X^n/2^n$, alors $\|u(P_n)\| \geq 1$ tandis que $\|P_n\| = 1/2^n$.
Donc u n'est pas continue.
- 5)

Sommabilité des séries

◆ **SRN.1** (*)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de $\sum (-1)^n n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$.

◇ [Divers/seriumexo.tex/srn:96]

◆ **SRN.2** (*)

Étudier la convergence des séries de terme général

$$u_n = 2^{-1/n} \qquad v_n = \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$w_n = \frac{1}{(\ln n)^n} \qquad x_n = e^{-\sqrt{n}}$$

◇ [Divers/seriumexo.tex/srn:54] converge. À partir de $n = 4$, $\ln n \geq 2$ donc $|w_n| \leq 2^{-n}$ donc CV. $n^2 x_n \rightarrow 0$
 $u_n \rightarrow 1$ donc la série diverge. $|v_n| \leq \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^3}$ donc $\sum v_n$ donc $\sum x_n$ CV.

◆ **SRN.3** (♣)

Pour quelles valeurs du couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la série de terme général $u_n = \frac{1+x^n}{1+y^{2n}}$ converge-t-elle ?

◇ [Divers/seriumexo.tex/srn:93]

Il faut bien sûr que $y > 1$ au minimum ! En suite, il faut $y^2 > |x|$.

◆ **SRN.4**
Déterminer la nature de la série de terme général

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| 1) $\frac{n!}{n^n}$; | 4) $\sin n$; |
| 2) $(\ln n)^{-\ln n}$; | 5) $\frac{\sin^2 n}{n}$; |
| 3) $(1 + \sqrt{n})^{-n}$; | |

INDICATION : Pour la série 5, on montrera que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'un des trois entiers n , $n + 1$ et $n + 2$ est tel que $\sin^2 k \geq \frac{1}{2}$.

◇ [Divers/seriumexo.tex/srn:4]

$\sin^2 n \geq \frac{1}{2}$, car

$$\left\{n \in \mathbb{N} ; \sin^2 n \leq \frac{1}{2}\right\} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right],$$

et cet ensemble (dessin) ne contient pas trois entiers consécutifs. Donc

- $0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{2}{n^2}$ dès que $n \geq 2$, donc CV.
- $n^2 (\ln n)^{-\ln n} = e^{\ln n (2 - \ln(\ln n))} \rightarrow 0$: CV
- $0 < (1 + \sqrt{n})^{-n} \leq 2^{-n}$ pour $n \geq 1$, donc CV.
- $\sin n$ ne tend pas vers 0. (voir exercice **SRN.6**).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'un des trois entiers n , $n + 1$ et $n + 2$ est tel que

$$u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2} \geq \frac{1}{2(3n+2)},$$

ce qui montre la divergence.

◆ **SRN.5** (***)

Étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \text{Arc cos} \left(\frac{n^3 + 1}{n^3 + 2}\right)$$

◇ [Divers/seriumexo.tex/srn:7]

On montre que $u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}$ et donc convergence.

◆ **SRN.6** (*)

Étudier la série de terme général $\sin^2(\pi en)$.

◇ [Divers/seriumexo.tex/srn:8]

LEMME 1 Si $a \notin \pi\mathbb{Z}$, la suite $(\sin(na))_n$ ne tend pas vers 0.

Démonstration : Supposons $\lim \sin(na) = 0$. Alors

$$\sin((n+1)a) = \sin na \cos a + \sin a \cos na,$$

et le premier terme tend vers 0, comme $\sin a \neq 0$, alors $\cos na \rightarrow 0$ ce qui est absurde car $\cos^2(na) + \sin^2(na) = 1$.

On applique à $e \notin \mathbb{Z}$.

◆ **SRN.7**

Nature de la série de terme général $u_n = \sin^2(\pi n! e)$.

◇ [Divers/seriumexo.tex/div:152]

Écrire $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ et prouver que la série converge.

◆ **SRN.8** (*)

Soit $a > 0$ et f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[a, 2a]$, et vérifiant $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$. Nature de la série de terme général $u_n = f\left(\frac{n+1}{n} a\right)$?

◇ [Divers/seriumexo.tex/srn:50]

$u_n \sim f'(a)/n$ donc série divergente.

◆ **SRN.9** (*)

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n} \sin(1/\sqrt{n})}{n + (-1)^n}$?

◇ [Divers/seriumexo.tex/srn:51]

$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ converge.

◆ **SRN.10 (Série des restes d'une série alternée)** (***)

Soit $\alpha > 0$. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge. On note R_n le reste d'ordre n de cette série. Nature de la série $\sum R_n$?

◇ [Divers/seriumexo.tex/srn:52]

(Clé également **SRTH.17**)
Montrer que $\sum R_n$ est alternée et satisfait au CSA. Pour la décroissance, il suf-

fit d'écrire $R_{n+1} - R_n$ et de montrer que c'est positif ou négatif, en regroupant les deux premiers termes de chaque, puis les deux suivants, etc. (D'une manière générale, c'est la convexité de la suite $1/n^\alpha$ qui assure ce résultat).

◆ **SRN.11** (**)

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$.

◇ [Divers/seriumexo.tex/srn:19]

$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n} - \frac{1}{(\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)$ et la somme des deux derniers termes est

positive pour n suffisamment grand, donc c'est la somme d'une série convergente (CSA) et divergente (comparaison avec Riemann).

◆ **SRN.12** (**)

On pose $u_n = \text{Arc cos} \left(\frac{2}{\pi} \text{Arc tan } n^2\right)$. Étudier la nature de $\sum u_n$.

◇ [Divers/seriumexo.tex/srn:20]

On a $\cos u_n = 1 - \frac{2}{\pi} \text{Arc tan } \frac{1}{n^2}$ d'où $1 - \cos u_n = \frac{2}{\pi} \text{Arc tan } \frac{1}{n^2}$ d'où

$\frac{u_n^2}{2} \sim \frac{2}{\pi n^2}$ et donc $u_n \sim \frac{2}{n\sqrt{\pi}}$. D'où divergence.

◆ **SRN.13** (**)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^\alpha}$. Étudier la nature de la série $\sum u_n$ en fonction de α .

◇ [Divers/seriumexo.tex/srn:21]

- Si $\alpha < 0$, alors $\lim n^\alpha = 0$, $\lim u_n = 1$: DV.
- Si $\alpha = 1$, pareil : DV.
- Si $\alpha > 1$, $\ln n = o(n^{\alpha-1})$ donc $n^2 u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$: CV

- Si $0 < \alpha < 1$: $\lim u_n = 1$: DV.
- Si $\alpha = 1$: $\lim u_n = \frac{1}{2}$: DV.
- Si $\alpha > 1$: $\ln n = o(n^{\alpha-1})$ donc $n^2 u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$: CV

◆ **SRN.14** (**)

Déterminer la nature de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=2}^n \ln k - (n + \frac{1}{2}) \ln n + n$.

◇ [Divers/seriumexo.tex/srn:38]

On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et on étudie la série $\sum v_n$, en remarquant que

$$v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln n - \ln(n+1)) + 1 = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

◆ SRN.15 (★★)

Déterminer la nature de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} - \text{Arg sh } n.$$

◇ [Divers/seriunumexo.tex/srn:39]

(grâce au th. des accroissement finis) :

On pose $v_n = u_{n+1} - v_n$ et on étudie la série $\sum v_n$, en remarquant que

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} - \text{Arg sh}(n+1) + \text{Arg sh } n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

◆ SRN.16

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

◇ [Divers/seriunumexo.tex/int:53]

série $\sum (S_{n+1} - S_n)$ converge donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.On vérifie que $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \sim \frac{\alpha}{n^{3/2}}$ donc la

◆ SRN.17 (*)

Démontrer la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

◇ [Divers/seriunumexo.tex/srn:58]

On pose $v_n = u_n - u_{n-1} = \frac{-1}{4n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

◆ SRN.18 (*)

Déterminer la nature (CV ou DV) de la série de terme général $\frac{(\ln n)^n}{n!}$.

◇ [Divers/seriunumexo.tex/srn:44]

donc CV.

On utilise d'Alembert, et

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\ln n + 1}{n+1} \left[\frac{\ln n + 1}{\ln n} \right]^n \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} \exp \left\{ n \ln \left(\frac{\ln n + \frac{1}{n} + o(1/n)}{\ln n} \right) \right\} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} \exp \left\{ n \left[1 + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right) \right] \right\} \\ &= \underbrace{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}_{\rightarrow 0} \exp \left\{ \underbrace{\frac{1}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right)}_{\rightarrow 1} \right\} \end{aligned}$$

◆ SRN.19

Nature de la série $\sum \frac{5}{\sqrt{n} + 7 \cdot (-1)^n}$.

◇ [Divers/seriunumexo.tex/srn:45]

Le terme général est $\sim \frac{5}{\sqrt{n}}$ donc DV.

◆ SRN.20 (★)

Étudier la convergence de la série

$$1000 + \frac{1000 \cdot 1002}{1 \cdot 4} + \frac{1000 \cdot 1002 \cdot 1004}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \dots + \frac{1000 \cdot 1002 \cdot 1004 \cdot \dots \cdot (1000 + 2n)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n + 1)} + \dots$$

◇ [Divers/seriunumexo.tex/srn:61]

Convergente par d'Alembert.

◆ SRN.21 (★★)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature (CV ou DV) de la série de terme général $(n^a)^{n^b}$.

◇ [Divers/seriunumexo.tex/srn:40]

CV si et seulement si $(a < 0 \text{ et } b > 0)$ ou $(a < -1 \text{ et } b = 0)$.Si $b < 0$ et $a \geq 0$, u_n ne tend pas vers 0, et si $b < 0$ et $a < 0$, $a \ln n^b$ tend vers 0 donc u_n tend vers 1 $\neq 0$.

◆ SRN.22 (★)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature (CV ou DV) de la série de terme général $\frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$.

◇ [Divers/seriunumexo.tex/srn:42]

Monnier.

◆ SRN.23 (★★)

Déterminer la nature (CV ou DV) de la série de terme général $1/\ln n!$.

◇ [Divers/seriunumexo.tex/srn:43]

son avec l'intégrale

Comme $n! \leq n^n$, on a $\frac{1}{n!} \geq \frac{1}{n \ln n}$, et déjà cette série diverge par comparaison

$$\int_+^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_+^{+\infty} \frac{dy}{y} = +\infty.$$

◆ SRN.24 (★★)

Étudier la nature des séries de terme général

$$u_n = \frac{n^n}{(2n)!} \quad u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3} \quad u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

◇ [Divers/seriunumexo.tex/srn:62]

Donc si $a \neq \frac{9}{2}$, $u_n \sim \alpha \frac{1}{n}$ et la série diverge, tandis que si $a = \frac{9}{2}$ elle converge.1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2(2n+1)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{2(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc la série converge.

2) On effectue un développement limité :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n^2 + an} &= n \left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^{1/3} \\ &= n \left[1 + \frac{1}{2} \frac{a}{n^2} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{a^2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right], \\ \sqrt{n^2 + 3} &= n \left[1 + \frac{1}{2} \frac{3}{n^2} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{9}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$u_n = \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{n} - \left(\frac{a^2}{9} - \frac{9}{8}\right) \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \ln(u_n) &= n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &\sim -\frac{n^2}{n+1} = -n \left[1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right], \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$u_n = e^{-n} e^1 \exp\left[o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{donc } u_n \sim \frac{e}{e^n}$$

et la série converge.

◆ SRN.25 (★)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{(2n)!} \prod_{k=1}^n (a+k)$?

◇ [Divers/seriunumexo.tex/srn:64]

Soit u_n est nulle à partir d'un certain rang (quand $-a \in \mathbb{N}$), soit $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(a+n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$ qui tend vers $1/4$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$, ce qui permet d'appliquer le critère de d'Alembert.

◆ SRN.26 (*)

Étudier, selon les valeurs du réel $\alpha > 0$, la nature de la série $\sum \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n^\alpha}$.

◇ [Divers/seriunumexo.tex/srn:65]

C'est une série alternée par paquets de 2. Le terme général tend vers 0. La

série converge pour tout $\alpha > 0$.

◆ SRN.27 (★★)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes > 0 telle que $\sum 1/u_n$ converge. Montrer que la série $\sum \frac{n}{u_1 + \dots + u_n}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{u_1 + \dots + u_n} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}.$$

◇ [Divers/seriunumexo.tex/srn:66]

Cauchy-Schwarz + majorations.

◆ SRN.28

Déterminer la nature de la série $\sum f(n)$ où $f : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha < 0$.

◇ [Divers/seriuumexo.tex/srn:67] raison $\alpha/2$?
La décroissance est exponentielle. Comparer avec une série géométrique de

◆ **SRN.29** (★★★)

Nature de la série $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$?
Équivalent de la suite des sommes partielles?

◇ [Divers/seriuumexo.tex/srn:68] sommant les équivalents.
 $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ donc cette série diverge. Un équivalent s'obtient donc en

◆ **SRN.30** (★★★)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs et tendant vers 0. On pose $v_n = \frac{u_n}{(1+u_1) \cdot (1+u_2) \cdots (1+u_n)}$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = 1$.

INDICATION : On exprimera la somme partielle $\sum_{k=1}^n v_k$ en fonction d'un produit de $(1+u_k)$; la formule se devine en examinant les premiers termes.

◇ [Divers/seriuumexo.tex/srn:69] (Cf. également l'exercice **SOM.20** page 428).
On vérifie (récurrence immédiate, cf exercice **SOM.20**, que

$$\sum_{k=1}^n v_k = 1 - \prod_{k=1}^n (1+u_k)^{-1}.$$

On a alors équivalence entre

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = 1$;

(b) $\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k) = +\infty$;

(c) $\sum \ln(1+u_k)$ diverge;

(d) $\sum u_k$ diverge.

◆ **SRN.31** (★★)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs, telle que $\sum a_n$ diverge.

1) Montrer que $\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+k}}{S_{n+k}} \geq 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.

2) En déduire que la série $\sum \frac{a_n}{S_n}$ est divergente.

3) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$.

4) En déduire la nature de la série $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$.

◇ [Divers/seriuumexo.tex/srn:70]

- 1) On remarque que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. On fait une bête minoration de S_{n+i} par S_{n+k} .
2) La série $\sum a_n/S_n$ ne vérifie donc pas le critère de Cauchy.

3) La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, donc $\lim 1/S_n = 0$, donc la série $\sum \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right)$ est télescopique et convergente.

4) Par comparaison, la série positive $\sum a_n/S_n^2$ converge.

◆ **SRN.32** (★★)

On suppose que la série $\sum a_n$, à termes > 0 , est convergente. On note $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de ses restes.

1) Montrer que $\frac{a_p}{R_{p-1}} + \cdots + \frac{a_q}{R_{q-1}} \geq 1 - \frac{R_q}{R_{p-1}}$ pour tout $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p < q$.

2) En déduire que la série $\sum \frac{a_n}{R_{n-1}}$ converge.

3) Montrer que $\frac{a_n}{\sqrt{R_{n-1}}} \leq 2(\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) En déduire que $\sum \frac{a_n}{\sqrt{R_{n-1}}}$ est convergente.

◇ [Divers/seriuumexo.tex/srn:71]

- 1) On sait que $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît vers 0. On effectue une bête majoration de R_i par R_{q-1} , ce qui montre l'inégalité.
2) Puisque la limite de $1 - R_n/R_{n-1}$ est égale à 1, la série envisagée ne vérifie pas le critère de Cauchy.
3) On écrit

$$\frac{a_n}{\sqrt{R_{n-1}}} = \frac{R_{n-1} - R_n}{\sqrt{R_{n-1}}} = \frac{(\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}) \cdot (\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n})}{\sqrt{R_{n-1}}},$$

et $\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n} \leq 2\sqrt{R_{n-1}}$, ce qui nous donne l'inégalité.

- 4) Comme $(\sqrt{R_n})_n$ tend vers 0, la série télescopique $\sum (\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n})$ est convergente donc, par comparaison des séries, la série demandée l'est aussi.

◆ **SRN.33** (★)

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos n}$.

1) La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?

2) La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

◇ [Divers/seriuumexo.tex/srn:85] On note que $|u_n| \sim \frac{1}{n^{3/4}}$ donc $\sum |u_n|$ diverge par comparaison de séries positives.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

En revanche, on peut écrire

ce qui prouve que $\sum u_n$ converge.

◆ **SRN.34 (Produit de CY divergeant)**

On note $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$ et $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$. Montrer que la série $\sum w_n$ diverge.

INDICATION : On montrera que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

◇ [Divers/seriuumexo.tex/srn:103]

mais dans cette somme, on peut minorer chaque terme puisque

On calcule

$$\forall t \in [0; n+1] \quad (t+1)(n-t+1) \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2,$$

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)(n-k+1)}},$$

ce qui montre que $|c_n| \geq \frac{n+1}{(n/2+1)^{2/3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

◆ **SRN.35**

On note p_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n . Nature des séries $\sum n^{-p_n}$ et $\sum 2^{-p_n}$.

◇ [Divers/seriuumexo.tex/srn:105]

Faire des paquets pour la 2^e.

◆ **SRN.36** (★)

Nature de la série $\sum \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n^2 \sqrt{n}}$.

◇ [Divers/seriuumexo.tex/srn:106]

◆ **SRN.37**

Nature de la série $\sum n^{-(\sqrt{2}) \sin(\pi/4+1/n)}$?

◇ [Divers/seriuumexo.tex/srn:107]

Équivalent à $1/n^{1-1/n\sqrt{2}}$.

◆ **SRN.38**

Nature de la série $\sum \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$.

◇ [Divers/seriuumexo.tex/srn:108]

◆ **SRN.39 (Exercices de D.L.)** (★)

Nature des séries :

1) $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+2n+2})$;

2) $\sum \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$;

3) $\sum (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$;

4) $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.

◇ [Divers/seriuumexo.tex/srn:109]

◆ **SRN.40**

Nature de $\sum \text{Arc cos}\left(\frac{2}{\pi} \text{Arc tan}(n^2)\right)$.

◇ [Divers/serinunexo.tex/div:144]

En $1/n$; ça diverge.

◆ **SRN.41** (★) ENSI PC – 1993
 Étudier la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$ où

$$u_n = \text{Arc cos} \left(\frac{1}{n} \right) - \text{Arc cos} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

◇ [Rec00/serinum-r0.tex/srn:11]

donc $u_n \sim -\frac{1}{n}$, donc $\sum u_n$ diverge. Oui, mais

On note que $\text{Arc cos } x \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}$ et donc

$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + v_n \quad \text{avec } v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right),$$

donc $\sum (-1)^n u_n$ est CV.

◆ **SRN.42** (★★) Centrale PC – 1999
 On considère la suite de terme général $u_n = (n^4 + n^2)^{1/4} - P(n)^{1/3}$, où P est un polynôme réel. À quelle condition sur P la série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

◇ [Rec00/serinum-r0.tex/srn:76]

On effectue un DL et il faut que $P = X^3 + \frac{3}{4}X + C^{\text{te}}$.

◆ **SRN.43** (★★★) Centrale MP – 2000
 Nature de la série $u_n = \ln \tan \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right)$.

◇ [Rec00/serinum-r0.tex/srn-r:24]

(Cf. exercice DSE.26 page 526.)

On montre que $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ (par des techniques de Fourier, voir exercice SF.3 utilisant la fonction créneau impaire) et on montre ensuite que $\sum u_n$ est une série alternée. Pour cela, on note R_n le reste

culé pour cela $R_n + R_{n+1}$ et on montre que cela a le bon signe en prenant deux termes du premier plus deux termes du second et en utilisant une inégalité de convexité, puis en réitérant ainsi par paquets de quatre termes). On en déduit que $\sum R_n$ vérifie le critère des séries alternées. On prend ensuite un développement

$$\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \alpha x + O(x^2),$$

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

ou $R_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ce qui nous donne *in fine* la somme de deux séries : l'une converge par le CSA et la seconde par Riemann.

et on montre que $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée, tend vers 0 et est décroissante (on cal-

◆ **SRN.44** (♣) CCP PC – 1999
 Nature de la série de terme général $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right)$.

◇ [Rec00/serinum-r0.tex/srn:79]

Un petit DL et ça converge.

◆ **SRN.45** (♣) Mines MP – 2000
 Soit $\alpha > 0$. Étudier la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

◇ [Rec00/serinum-r0.tex/srn:80]

si et seulement si $\alpha > 2/3$.

Un DL donne $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)$ donc on a convergence

◆ **SRN.46** CCP PC – 2000
 Étudier la série de terme général $u_n = \left(\frac{n^2 - 5n + 1}{n^2 - 4n + 2} \right)^{n^2}$.

◇ [Rec00/serinum-r0.tex/srn:14]

On effectue un DL...

◆ **SRN.47** (♣) CCP PC – 2000
 Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la série de terme général $u_n = x^{n!}/n!$.

◇ [Rec00/serinum-r0.tex/srn:15]

Convergence triviale.

◆ **SRN.48** (★★★) CCP PC – 2000
 Nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{\cos \ln n}{\sqrt{n}}$?

◇ [Rec00/serinum-r0.tex/srn-r:2]

On effectue une sommation par paquet :

le k -ième paquet est $\sigma_k = \sum_{n=a_k+1}^{b_k-1} \frac{\cos \ln n}{\sqrt{n}}$ donc

$$\cos \ln n \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \left(\exists k \in \mathbb{N}^*, e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi} \leq n \leq e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi} \right).$$

$$\sigma_k \geq (b_k - a_k - 2) \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{b_k - 1}}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note alors $a_k = E[e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}]$ et $b_k = E[e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}]$. Alors

dont on vérifie aisément qu'il tend vers $+\infty$ en $e^{k\pi}$. Notamment, le critère de Cauchy n'est pas respecté, donc la série diverge.

◆ **SRN.49 (Bertrand généralisé)** (★★★) Mines PC – 1998
 On note $q_1(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture de n en base 10. On note $q_{k+1}(n) = q_1(q_k(n))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Étudier la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n q_1(n) q_2(n) \cdots q_n(n)}.$$

◇ [Rec00/serinum-r0.tex/supp-r0:10]

À FINIR !!!

On minore $q_n(n)$ par $\log(n)$, $q_2(n)$ par $\log(\log(n))$, etc.

◆ **SRN.50** (★★★) X PC
 Nature de la série $\sum q_n^{-1}$, où $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite (strictement croissante) des entiers ne s'écrivant pas, en base 10, avec le chiffre 9.

◇ [Rec00/serinum-r0.tex/srn:104]

◆ **SRN.51** (★★) Mines MP – 2001
 Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$. Étudier la convergence de $\sum \frac{\ln(1 + \alpha^n n^2)}{n^\beta}$.

◇ [Rec01/serinum-r1.tex/srn-r:16]

Si $\alpha > 1$, $u_n \sim \frac{\ln \alpha}{n^{\beta-1}}$ donc $\sum u_n$ converge pour $\beta > 2$.

Si $\alpha < 1$, $u_n \sim \frac{\alpha^n}{n^{\beta-2}}$ donc $\sum u_n$ converge et ce pour toutes valeurs de β .

Si $\alpha = 1$, $u_n \sim \frac{2 \ln n}{n^\beta}$ donc on a convergence si et seulement si $\beta > 1$.

◆ **SRN.52** (★★★) Centrale MP – 2001
 Convergence de la série $\sum \frac{|\sin n|}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
 Convergence de la série $\sum \frac{|\sin n^\beta|}{n^\alpha}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

◇ [Rec01/serinum-r1.tex/srn-r:17]

Si $\alpha > 1$, on a convergence par simple comparaison avec une série de Riemann.

intervalle de taille ℓ (avec ℓ suffisamment grand, typiquement 3 ou 4), le sinus est plus grand que $1/2$. Cela assure, par comparaison avec la série lacunaire correspondante, la divergence de la série.

Si $\alpha \leq 1$, on a divergence : il suffit pour cela de vérifier que dans chaque

Cela se complique un peu avec la présence du β ...

◆ **SRN.53** (★★) Centrale MP – 2001
 Nature des séries de terme général

$$u_n = \sin \left[2\pi n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) \right] \quad \text{et} \quad v_n = \cos \left[\pi n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) \right]$$

◇ [Rec01/serinum-r1.tex/srn-r:18]

On effectue un développement limité à l'ordre 3 :

trouve

$$\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \left(\frac{1}{2n^3} \right) + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$v_n = \cos \left(\pi n - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi \alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{(-1)^n \pi \alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $u_n = -\sin\left(\frac{\pi \alpha}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ diverge.

On effectue de même un développement limité de la seconde expression, on trouve donc $\sum v_n$ converge.

◆ **SRN.54** Centrale MP – 2001
 Nature de la série de termes général $u_n = \frac{x}{n} \prod_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right)$ en fonction de x ?
 Même question pour $v_n = \text{Arc cos} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n} \right) - \frac{\pi}{6}$.

◊ [Rec01/serinum-r1.tex/srn-r:19]

donc la série converge.

D'Alembert :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n+1}{n} \ln \left(1 + \frac{x}{n+1} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{n}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

◆ **SRN.55** (*) Mines PC – 2001

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$?

◊ [Rec01/serinum-r1.tex/srn-r:21]

série ACV (par Riemann + comparaison), donc ça converge.

On effectue un DL, et on a une somme d'une série CV (par le CSA) et d'une

◆ **SRN.56** (**) Centrale PC – 2001

Étudier la nature de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\ln n)}{n}$ (convergence et convergence absolue).

◊ [Rec01/serinum-r1.tex/srn-r:6]

Faire des paquets pour lesquels le sinus est plus grand que $1/\sqrt{2}$:

$$\sigma_k \geq (b_k - a_k - 2) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{b_k - 1}$$

$$\sin \ln n \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \iff (\exists k \in \mathbb{N}^*, e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi} \leq n \leq e^{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}).$$

soit

$$\sigma_k \geq \frac{1}{\sqrt{2}} [1 - e^{-\pi/4} + \varepsilon_k]$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note alors $a_k = E[e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}]$ et $b_k = E[e^{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}]$. Alors

le k -ième paquet est $\sigma_k = \sum_{n=a_k+1}^{b_k-1} \frac{\sin \ln n}{n}$ donc

dont on vérifie aisément qu'il ne tend pas vers 0 : ce qui met en défaut le critère de Cauchy. Il y a donc divergence et, *a fortiori*, divergence absolue !

◆ **SRN.57 (Un gros DL !)** (***) Centrale MP – 2001

On pose $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \right)^n - 1$. Étudier les séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

◊ [Rec01/serinum-r1.tex/srn-r:23]

On effectue un petit développement limité et on obtient, sous toute réserve :

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \right)^n =$$

$$\exp \left(\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{2n \ln n} - \frac{1}{n \ln^2 n} + \frac{1}{3n^2 \ln n} + o \left(\frac{1}{n^2 \ln n} \right) \right)$$

$$u_n = \frac{1}{\ln n} + o \left(\frac{1}{\ln n} \right)$$

donc $\sum u_n$ diverge.

Ensuite il faut pousser le développement un peu plus loin pour voir si on obtient une série convergente. On prend donc

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right)$$

où $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une somme de termes de la forme $\frac{\beta}{n^{\gamma} \ln^{\delta} n}$, de signes constants, donc $\sum (-1)^n \alpha_n$ converge grâce au CSA. Donc $\sum (-1)^n u_n$ converge.

◆ **SRN.58** (*) CCP PC – 2001

On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2} (\ln n)^2$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Quelle est la nature de la série $\sum v_n$? La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

◊ [Rec01/serinum-r1.tex/srn-r:5]

On effectue un DL en $1/n$ et $\ln n$:

donc $\sum v_n$ converge absolument par comparaison avec une série de Riemann, et donc converge.

$$v_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2} (\ln n)^2 - \frac{1}{2} (\ln(n+1))^2 = \frac{\ln n}{n^2} + o \left(\frac{\ln n}{n^2} \right),$$

◆ **SRN.59** (*) ENSAI MP – 2001

Convergence et somme de la série $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$.

◊ [Rec01/serinum-r1.tex/srn-r:12]

« l'examinateur attache beaucoup d'importance à la forme. »

On remarque que deux termes consécutifs s'annulent, et que les termes tendent vers 0 (important), donc la somme est nulle.

◆ **SRN.60** (***) CCP PC – 2001

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \right)^n$. En posant $\ell \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, étudier la convergence de la série $\sum (u_n - \ell)$.

◊ [Rec01/serinum-r1.tex/srn-r:13]

On vérifie rapidement que

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{1}{n \ln n} + o \left(\frac{1}{n \ln n} \right)$$

$$u_n = e^{\frac{1}{n} + o(1/\ln n)}$$

donc $\ell = 1$. De plus, $u_n - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}$ donc la série $\sum (u_n - \ell)$ diverge.

et donc

Voir **SRN.57** pour une étude plus fine.

◆ **SRN.61** (*) CCP MP – 2001

Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $u_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \ln n}$.

◊ [Rec01/serinum-r1.tex/srn-r:22]

Pour n suffisamment grand, on reconnaît une série alternée, donc convergence.

◆ **SRN.62** (***) Mines PC – 2002

Nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/5} - (\text{Arc tan } n)^{3/5}$?

◊ [Rec02/serinum-r2.tex/srn-r:2:10]

On sait que $\text{Arc tan } n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right)$, c'est-à-dire

$$\text{donc } (\text{Arc tan } n)^{3/5} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/5} \left[1 - \frac{6}{5\pi n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right]$$

et

$$u_n \sim \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/5} \frac{6}{5\pi n}$$

donc $\sum u_n$ diverge.

$$\text{Arc tan } n = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{2}{\pi n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right]$$

◆ **SRN.63** Centrale PC – 2002

Étudier selon la valeur de α la convergence de la série de terme général u_n avec $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{(1+n)^\alpha} \int_0^{u_n} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt.$$

◊ [Rec02/serinum-r2.tex/srn-r:2:9]

◆ **SRN.64** (*) Centrale PC – 2002

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^n \frac{\text{Arc tan } t}{t^b} dt$?

◊ [Rec02/serinum-r2.tex/srn-r:2:17]

Pour que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit définie, il faut $b < 1$. Ensuite, on a, puisque l'intégrale diverge :

$$\int_0^n \frac{\text{Arc tan } t}{t^b} dt \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n^{1-b}}{b-1}.$$

Il faut donc, pour qu'il y ait convergence, que $\alpha + b > 2$.

◆ **SRN.65 (Nombres de Pisot)** (***) Centrale MP – 2002

Nature de la série $\sum \sin \left(\pi(2 + \sqrt{3})^n \right)$?

INDICATION : Considérer $(2 - \sqrt{3})^n$; notamment, on montrera que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est entier.

◊ [Rec02/serinum-r2.tex/srn-r:2:18]

Cf également l'exercice **SRTH.37**.

On vérifie que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier en développant simplement le binôme de Newton.

$$|u_n| = \left| \sin \left(\pi(2 + \sqrt{3})^n \right) \right| \leq \pi(2 + \sqrt{3})^n$$

Ainsi

$$\text{et } |2 - \sqrt{3}| < 1 \text{ donc la série converge.}$$

◆ **SRN.66** (*) Centrale MP – 2002

(Sans préparation.) Étude de la série de terme général $u_n = \cos \left[n^2 \pi \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]$.

◊ [Rec02/serinum-r2.tex/srn-r:2:27]

On développe

Donc $\sum u_n$ converge comme somme d'une série alternée (CSA) et d'une série absolument convergente.

$$u_n = \cos \left[n^2 \pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + o \left(\frac{1}{n^4} \right) \right) \right]$$

$$= (-1)^{n+1} \left[\sin \left(\frac{\pi}{n} \right) + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right].$$

◆ **SRN.67** (***) CCP MP – 2002

Nature de la série de terme général $u_n = \ln \left(\tan \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) \right)$.

◊ [Rec02/serinum-r2.tex/srn-r2:18]

(Également récolte 2000 : SRN.43 page 413).

On vérifie que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ (par exemple en utilisant la série de Fourier de la fonction créneau, impaire, ou mieux un développement en série entière de la fonction Arc tan). Alors $\sum u_n$ satisfait au critère des séries alternées grâce à quelques inégalités bien senties.

On montre ensuite que $\sum u_n$ est une série alternée. Pour cela, on note R_n le reste

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

et on montre que $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée, tend vers 0 et est décroissante (on calcule pour cela $R_n + R_{n+1}$ et on montre que cela a le bon signe en prenant deux termes du premier plus deux termes du second et en utilisant une inégalité de convexité, puis en réitérant ainsi par paquets de quatre termes). On en déduit que $\sum R_n$ vérifie le critère des séries alternées. On prend ensuite un développement

$$\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \alpha x + O(x^2),$$

or $R_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ce qui nous donne *in fine* la somme de deux séries : l'une converge par le CSA et la seconde par Riemann.

◆ **SRN.68** CCP MP – 2002
 Nature des séries de termes généraux $u_n = \frac{1}{n^{1+1/n}}$ et $v_n = \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n}$?

◊ [Rec02/serinum-r2.tex/srn-r2:20] On vérifie simplement que $nu_n = e^{-(\ln n)/n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ donc $\sum u_n$ diverge.

◆ **SRN.69** CCP PC – 2002
 Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \cos(1/n)}{\sqrt{n}}$. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?

◊ [Rec02/serinum-r2.tex/srn-r2:1] La série $\sum u_n$ est convergente.

Effectuer un développement à l'ordre 2 en $1/n$ du cosinus, on obtient la somme d'une série convergente par le CSA et d'une série ACV par Riemann. En revanche

La série $\sum |u_n|$ est divergente.

◆ **SRN.70** CCP MP – 2002
 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver la nature des séries numériques de terme général

$$u_n = \left(n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{n^\alpha} \quad \text{et} \quad v_n = \left(n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{n^2} - e^{-1/6}.$$

◊ [Rec02/serinum-r2.tex/srn-r2:6] Ce n'est qu'un exercice de DL.

◆ **SRN.71** CCP MP – 2002
 Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{(\ln x)^n}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\left[1 - \frac{1}{n}; 1\right]$.
 Étudier la série de terme général

$$u_n = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \frac{(\ln x)^n}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

◊ [Rec02/serinum-r2.tex/srn-r2:15] ??? Quel drôle d'exercice.

◆ **SRN.72** CCP PC – 2002
 Étude de la série de terme général $u_n = \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right)^{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

◊ [Rec02/serinum-r2.tex/srn-r2:21]

◆ **SRN.73** ENSAE MP – 2002
 1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $u_n = e^{in\theta}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?
 2) Soit $\alpha > 0$. On pose $v_n = e^{i\alpha \ln n}$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?
 3) Soit $\alpha > 0$. On pose $f(t) = \frac{1}{t} e^{i\alpha \ln t}$ pour tout $t > 0$. Quelle est la nature des séries

$$\sum \int_k^{k+1} f(t) dt \quad \text{et} \quad \sum f(k) ?$$

◊ [Rec02/serinum-r2.tex/srn-r2:16]

◆ **SRN.74** Télécom INT PC – 2002
 Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution sur $\left] \frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi \right[$, que l'on notera x_n .
 Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi - x_n ?$$

◊ [Rec02/serinum-r2.tex/srn-r2:14] $\left((2n+1)\frac{\pi}{2} - z_n \right) \left(z_n - \frac{z_n^3}{6} + o(z_n^3) \right) = 1 - \frac{z_n^2}{6} + o(z_n^2)$
 $z_n = x_n - (n+1)\pi - \frac{\pi}{2}$. On doit avoir $\left((2n+1)\frac{\pi}{2} - z_n \right) \sin z_n = \cos z_n$,
 or $\cos z_n$ reste bornée donc $\sin z_n$ tend vers 0 donc $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. donc $z_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$.

On écrit ensuite un développement limité : Conclusion : $\sum u_n$ diverge.

◆ **SRN.75** S' Cyr PC – 2002
 Étudier la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}$. Puis étudier la série entière $\sum u_n x^n$.

◊ [Rec02/serinum-r2.tex/sui-r2:7] Le rayon de convergence est 1 ; c'est une série produit $f(x) = \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^n \right)^2 = \ln(1-x)^2$.
 On décompose la fraction :
 $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sim 2 \frac{\ln n}{n}$.

◆ **SRN.76** (**) Mines PC – 2003
 On pose $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$ avec $\alpha > 0$. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

◊ [Rec03/serinum-r3.tex/r3:330] et diverge sinon.
 $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.
 Ainsi, si $\alpha \in]0; \frac{1}{2}]$: divergence.
 Si $\alpha \in]\frac{1}{2}; 1]$: semi-convergence.
 Le premier terme converge par le CSA. Le second terme converge pour $\alpha > \frac{1}{2}$, Si $\alpha > 1$: convergence absolue.

◆ **SRN.77** (*) Mines PC – 2003
 Nature de la série de terme général $u_n = \left(1 + (-1)^n \frac{\ln n}{n^{1/4}} \right)^{-1/4} - 1$.

◊ [Rec03/serinum-r3.tex/r3:447] Divergente (après DL à l'ordre 2).

◆ **SRN.78** (*) Mines PC – 2003
 On note $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$.
 La série $\sum u_n$ converge-t-elle ou diverge-t-elle ? Si elle diverge, est-ce vers l'infini, ou oscille-t-elle ?

◊ [Rec03/serinum-r3.tex/r3:394] Un DL : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc on a divergence vers $-\infty$.

◆ **SRN.79** (*) Mines PC – 2003
 Étude de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sin n}$.

◊ [Rec03/serinum-r3.tex/r3:228] Ou bien on effectue un petit DL et ça marche aussi, du coup c'est (semi-)convergent.
 Comme $|\sin n - \sin(n-1)| < 1$, c'est une suite satisfaisant au théorème de Leibniz sur les séries alternées...

◆ **SRN.80** Centrale MP – 2003
 Soient $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_n = a \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \right)$.
 1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ait une limite finie. On notera ℓ cette limite, quand elle existe.
 On définit alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $v_n = u_n - \ell$.
 2) Déterminer la nature de $\sum v_n$.
 3) On définit alors $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $w_n = (-1)^n v_n$. Quelle est la nature de $\sum w_n$?

◊ [Rec03/serinum-r3.tex/r3:296]

◆ **SRN.81** (*) TPE PC – 2003
 Discuter, selon la valeur de $p \in \mathbb{N}$, la nature de la série $\sum u_n$ avec

$$u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}.$$

◊ [Rec03/serinum-r3.tex/r3:365] Pour $p \geq 2$ on peut simplement majorer $k!$ par $n!$ et montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0; on doit pouvoir montrer que $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ puisque le numérateur est $\sim n!$ (au pire, on regarde pour $p \geq 3$, ne majoration grossière suffit, et on regarde le dernier terme à part)

Pour $p = 1$, on sépare la somme en deux : les $n - 1$ premiers termes (et ça tend vers 0 d'après le résultat précédent) et le dernier qui est $n!/(n+1)!$, donc $\frac{1}{n} = O(u_n)$ ce qui montre la divergence.

Pour $p = 0$, pareil, mais le dernier terme est égal à 1, et la suite tend vers 1 donc la série diverge grossièrement.

◆ **SRN.82** (♣) CCP MP – 2003
 Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que la série $\sum u_n$ avec $u_n = (n^4 + n^2)^{1/4} - P(n)^{1/3}$ soit convergente.

◊ [Rec03/serinum-r3.tex/r3:370]

◆ **SRN.83** (***) CCP PC – 2003
 On pose $b_n = \sum_{k=1}^n (\ln k)^2$. Quelle est la nature de la série de terme général $1/b_n$?

◊ [Rec03/serinum-r3.tex/r3:99] Le but est évidemment d'avoir un équivalent de cette série positive.
1^{re} méthode : on compare à des intégrales. De

$$\int_{k-1}^k \ln^2 t \, dt \leq \ln^2 k \leq \int_k^{k+1} \ln^2 t \, dt$$

on tire l'encadrement

$$\int_1^n \ln^2 t \, dt \leq b_n \leq \int_2^{n+1} \ln^2 t \, dt$$

Or, en effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\int_1^n \ln^2 t \, dt = n \ln^2 n - 2n \ln n + 2n - 2$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln^2 n,$$

ce qui montre par encadrement par deux termes équivalents (ce qui se démontre aisément), que

$$b_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln^2 n.$$

2^e méthode : faire apparaître des sommes de Riemann. Puisque $\ln k = \ln\left(\frac{k}{n}\right) + \ln n$, on a

$$\ln^2 k = \ln^2\left(\frac{k}{n}\right) + \ln^2 n + 2 \ln(n) \ln\left(\frac{k}{n}\right),$$

ce qui montre

$$b_n = n\alpha_n + 2\beta_n \ln n + n \ln^2 n,$$

avec

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln^2\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha = 2$$

et

$$\beta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta = -1$$

et donc

$$b_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln^2 n.$$

Conclusion : la série $\sum 1/b_n$ converge grâce à la règle (H-P) de Bertrand.

◆ **SRN.84** (♣) CCP PC – 2003
 Nature de la série de terme général $u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos(1/n)}$.

◊ [Rec03/serinum-r3.tex/r3:105]

$u_n \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série converge.

◆ **SRN.85** CCP MP – 2003
 Étudier les séries de terme général :

$$u_n = \frac{e^{-\sqrt{\ln n}}}{n} \quad v_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \quad w_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

◊ [Rec03/serinum-r3.tex/r3:248]

◆ **SRN.86** (*) Petites Mines PC – 2003
 Nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\frac{n^3+1}{n^2+1}\pi\right)$?

◊ [Rec03/serinum-r3.tex/r3:237]

Un simple DL montre que

$$u_n = \sin\left(n\pi\left[1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\right)$$

et donc $|u_n| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$: la série converge.

◆ **SRN.87** (***) Centrale MP – 2004
 1) Montrer qu'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^n \sin(i) \leq B$.
 2) Que dire de la série de terme général $\frac{\sin(n)}{n}$?
 3) Que dire de la série de terme général $\int_n^{n+1} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\sin(n)}{n}$?

◊ [Rec04/serinum-r4.tex/r4:139]

- 1) On peut prendre $B = 1/\sin(1/2)$.
- 2) Convergence par transformation d'Abel.

3) L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge et la série $\sum (\sin n)/n$ aussi, donc la série proposée est convergente.

◆ **SRN.88** (♣) Centrale MP – 2004
 Étudier la nature de la série de terme général $a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$.

◊ [Rec04/serinum-r4.tex/r4:222]

◆ **SRN.89** (*) Mines PC – 2004
 Étude de $\sum u_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + (-1)^n \sqrt{\ln n}}$.

◊ [Rec04/serinum-r4.tex/r4:40]

L'examinateur demande ensuite la convergence absolue et n'a jamais voulu

accepter qu'une série divergente ne pouvait pas converger absolument!

◆ **SRN.90 (Série des restes d'une série alternée)** (***) Mines PC – 2004
 On note $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

◊ [Rec04/serinum-r4.tex/r4:107]

Cf. **SRN.10** et **SRTH.17**

$\sum u_n$ est alternée, le terme principal tend vers 0. On montre qu'elle est décroissante en valeur absolue en calculant, par exemple pour n pair :

$$|u_{2n}| - |u_{2n-1}| = u_{2n} + u_{2n-1} = \sum_{k=2n}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)}_{w_n}$$

$$|u_{2n}| - |u_{2n-1}| \geq 0.$$

Conclusion : $\sum u_n$ converge.

◆ **SRN.91** (♣) Mines PC – 2004
 Nature de $\sum u_n$, où $u_n = 1 - (n + 1/2) + \ln(n + 1/n)$.

◊ [Rec04/serinum-r4.tex/r4:87]

Simple DL : $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ converge.

◆ **SRN.92** (*) CCP PC – 2004
 Étudier la nature des séries de terme général

$$u_n = \frac{\ln n}{n} \quad v_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n} \quad \text{et} \quad w_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n + (-1)^{n+1}}.$$

◊ [Rec04/serinum-r4.tex/r4:45]

$\sum u_n$ diverge car $u_n \geq \frac{1}{n}$.
 $\sum v_n$ converge grâce à un critère de Leibniz.

$\sum w_n$ diverge grâce à un développement limité et l'utilisation de la série $\sum u_n$.

◆ **SRN.93** (♣) CCP PC – 2004
 Étudier la série de terme $\left(\ln(\cos(1/n))\right)^{1/n}$.

◇ [Rec04/serinum-r4.tex/r4:428]

◆ **SRN.94** (♣) CCP PC – 2004

Pour quelles valeurs de α la série de terme général $\left[\ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2} \right) \right]^\alpha$ est-elle convergente ?

◇ [Rec04/serinum-r4.tex/r4:430]

$$u_n \sim 1/n^\alpha.$$

◆ **SRN.95** (★★) ENSTIM MP – 2004

On note $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

- 1) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.
- 2) On note $u_n = a_n - 1$. Déterminer la nature des séries $\sum u_n$, $\sum u_n^2$ et $\sum (-1)^n u_n$.

◇ [Rec04/serinum-r4.tex/r4:249]

◆ **SRN.96** (♣) Petites Mines PC – 2004

Nature de la série de terme général $u_n = 1 - n \ln \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)$.

◇ [Rec04/serinum-r4.tex/r4:121]

◆ **SRN.97** (★★★) Centrale PC – 2005
(Avec Maple)

- 1) Étudier les variations de la suite de terme général $(\ln n)/n$ pour $n \geq 1$.
- 2) Illustrer ce résultat avec Maple.
- 3) Montrer que, pour tout $x \in [0; 1[: 0 \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x}$.
- 4) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \sqrt[p]{p} = 1$.
- 5) Étudier l'existence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \text{Arc cos} \left(2 - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \sqrt[p]{p} \right)$. Afficher les 300 premiers termes avec Maple.
- 6) Étudier la série $\sum u_n$.
- 7) Trouver un équivalent des sommes partielles de $\sum u_n$.
- 8) *ad lib.*

◇ [Rec05/serinum-r5.tex/r5:69]

◆ **SRN.98** (★★★) Centrale PC – 2005

On pose, pour tout $n \geq 1 : u_n = \text{Arc cos} \left(2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[k]{k} \right)$. On admet le lemme suivant : si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite tendant vers 0, alors la suite de ses moyennes de Cesàro $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ converge également vers 0.

- 1) a) Montrer que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ , alors la suite de ses moyennes de Cesàro converge également vers ℓ .
b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
- 2) Trouver un équivalent de Arc cos en 1.
INDICATION : Poser $\alpha = \arccos x$. Utiliser l'égalité $\cos^2 + \sin^2 = 1$.
- 3) Montrer que qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq v_n/2$, où

$$v_n = \sqrt{\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}}.$$
- 4) Plus deux autres questions.

◇ [Rec05/serinum-r5.tex/r5:102]

◆ **SRN.99** (♣) Mines PC – 2005

On pose $u_n = a \ln(n) + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que $\sum u_n$ converge.

◇ [Rec05/serinum-r5.tex/r5:39]

 $a + b + c = 0$ pour faire bonne mesure, puis une autre condition.

◆ **SRN.100** (★) Mines PC – 2005

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{\ln n \cdot \ln(\text{ch } n)}$.

◇ [Rec05/serinum-r5.tex/r5:111]

◆ **SRN.101** (★) Petites Mines PC – 2005

Étudier les séries de terme général $u_n = \frac{1}{(1+2/n)^{n^2}}$ et $v_n = \sin(\pi \sqrt{n^2 + \ln n})$.

◇ [Rec05/serinum-r5.tex/r5:8]

◆ **SRN.102** (★) CCP PC – 2005

Résoudre $y'' + 2y + 2 = 0$ et $y'' + 4y + 4 = e^{-x} \sin x$.
On note f leur solution commune. Calculer $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) dx$. Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

◇ [Rec05/serinum-r5.tex/r5:30]

◆ **SRN.103** (★) CCP PC – 2005

On pose $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \right)^{\sqrt{n}} - 1$. Nature de $\sum u_n$?

◇ [Rec05/serinum-r5.tex/r5:15]

$$\text{On vérifie } u_n = \left(1 + \frac{1/n + o(1/n)}{\ln n} \right)^{\sqrt{n}} - 1 \geq \frac{1}{n \ln n} : \text{ça diverge.}$$

◆ **SRN.104** (★★) Mines PC – 2005

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation $x_{n+1} = \sin(x_n)$. Étudier la série $\sum x_n^3$.

◇ [Rec05/serinum-r5.tex/r5:15]

$$x_{n+1} - x_n = \sin(x_n) - x_n \sim \frac{x_n^3}{3}.$$

On sait que, à partir du rang 1, la suite est (à un changement de signe près et sauf si elle est stationnaire en 0), positive et décroissante vers 0. De plus, la série $\sum x_{n+1} - x_n$ est convergente (vu que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge) donc, par comparaison de séries positives, la série $\sum x_n^3$ converge aussi.

Séries doubles, familles sommables

◆ **SRN.105** (♣)

On considère $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites positives, telles que $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent. Prouver que $\sum_n \sum_p \frac{a_n b_p}{n+p}$ converge.

INDICATION : On montrera le lemme suivant : $\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{m}}{(m+k)\sqrt{k}} \leq \pi$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$.

◇ [Divers/fsommebleexo.tex/sern:74]

On montre le lemme. On pose $f(x) = \frac{\sqrt{m}}{(m+x)\sqrt{x}}$ qui est une fonction décroissante. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{m}}{(m+k)\sqrt{k}} &\leq \int_0^n \frac{\sqrt{m}}{(m+x)\sqrt{x}} dx \\ &\leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{m}}{m+u^2} du \leq \pi. \end{aligned}$$

On commence par récrire

$$\frac{a_n b_p}{n+p} = \left(\frac{a_n^2 \sqrt{n}}{(n+p)\sqrt{p}} \right)^{1/2} \left(\frac{b_p^2 \sqrt{p}}{(n+p)\sqrt{n}} \right)^{1/2}.$$

Ensuite, on utilise du Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{n,p} \alpha_{n,p} \beta_{n,p} \leq \sqrt{\sum_{n,p} \alpha_{n,p}^2} \cdot \sqrt{\sum_{n,p} \beta_{n,p}^2}.$$

Cela nous mène à

$$\begin{aligned} \sum_{n,p} \frac{a_n b_p}{n+p} &\leq \sqrt{\sum_{n,p} \frac{a_n^2 \sqrt{n}}{(n+p)\sqrt{p}}} \cdot \sqrt{\sum_{n,p} \frac{b_p^2 \sqrt{p}}{(n+p)\sqrt{n}}} \\ &\leq \sqrt{\sum_n a_n^2} \cdot \sqrt{\sum_p b_p^2}. \end{aligned}$$

◆ **SRN.106** (■)
 Pour quelles valeurs des réels α et β la famille $((mn)^{-\alpha}(m+n)^{-\beta})_{m,n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle sommable, c'est-à-dire pour lesquelles est finie ?

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{m,n > 0} \frac{1}{(mn)^\alpha (m+n)^\beta}$$

◇ [Divers/fsommebleexo.tex/div:14]
 On présente deux solutions.

1^{re} solution

Posons $u_{mn} = \frac{1}{(mn)^\alpha (m+n)^\beta}$,
 et $M_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(mn)^\alpha (m+n)^\beta}$ et $\forall k \geq 2$ $T_k = \frac{1}{k^\beta} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^\alpha (k-n)^\alpha}$.

Nous allons forcer l'apparition d'une somme de Riemann :

$$T_k = \frac{1}{k^{\beta+2\alpha-1}} \cdot \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{n}{k}\right)^{-\alpha} \left(1 + \frac{n}{k}\right)^{-\alpha} = \frac{1}{k^{\beta+2\alpha-1}} R_k.$$

Le terme R_k ressemblerait bien à une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha}$, mais cette fonction n'est pas forcément continue sur $]0; 1[$ et, si elle ne l'est pas, elle n'est pas forcément intégrable.

Il nous faut donc envisager différents cas selon les valeurs de α .

1^{er} cas : $\alpha \leq 0$ Alors la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha}$ est continue sur $]0; 1[$, la suite $(R_k)_k$ admet une limite finie $\ell = \int_0^1 t^{-\alpha}(1+t)^{-\alpha} dt$. On en déduit que

$$T_k \sim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ell}{k^{\beta+2\alpha-1}}$$

et ainsi : $S(\alpha, \beta)$ est finie si et seulement si $\alpha + \frac{\beta}{2} > 1$.

2^e cas : $\alpha \in]0; 1[$ La fonction $\phi : x \mapsto x^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha}$ n'est pas continue en 0, mais elle est décroissante sur $\left]0; \frac{1}{2}\right]$; on peut alors envisager une comparaison somme-intégrale. Pour cela, coupons d'abord la somme de Riemann en deux parties symétrique, puisque la fonction $x \mapsto x(1-x)$ est symétrique par rapport à $x = \frac{1}{2}$:

$$R_k = \frac{2}{k} \sum_{n=1}^{E(k/2)} \phi\left(\frac{n}{k}\right) + \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{k} \phi\left(\frac{n}{k}\right) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n/2$, on a

$$\int_{n/k}^{(n+1)/k} x^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha} dx \leq \frac{1}{k} \left(\frac{n}{k}\right)^{-\alpha} \left(1 + \frac{n}{k}\right)^{-\alpha} \leq \int_{(n-1)/k}^{n/k} x^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha} dx$$

et donc, en sommant de $k = 1$ à n , et en considérant le terme $k = 1$ séparément dans la seconde inégalité, on obtient

$$\int_{1/k}^{1/2} x^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha} dx \leq R_k \leq \int_{1/k}^{1/2-1/k} x^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha} dx + \frac{k^{\alpha-1}}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha} + \frac{4^\alpha}{k}.$$

La fonction $\phi : x \mapsto x^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha}$ étant intégrable sur $]0; 1[$, et le dernier terme de l'équation précédente tendant vers 0 lorsque k tend vers l'infini, on a donc prouvé que la suite $(R_k)_k$ admet une limite finie ℓ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \int_0^1 x^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha} dx = \ell$$

On en déduit que $T_k \sim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ell}{k^{\beta+2\alpha-1}}$

et ainsi : $S(\alpha, \beta)$ est finie si et seulement si $\alpha + \frac{\beta}{2} > 1$.

3^e cas : $\alpha \geq 1$ Cette fois-ci, la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha}$ n'est pas intégrable sur $]0; 1[$. En revanche, on a l'équivalent de fonctions positives

$$x^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha} \sim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\alpha}.$$

Par comparaison d'intégrales divergentes :

$$\int_{1/k}^{1/2} x^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha} dx \sim_{k \rightarrow \infty} \int_{1/k}^{1/2} x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{2^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1 \\ \ln k & \text{si } \alpha = 1, \end{cases}$$

De même, on a bien sûr,

$$\int_{1/k}^{1/2-1/k} x^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha} dx \sim_{k \rightarrow \infty} \int_{1/k}^{1/2} x^{-\alpha} dx$$

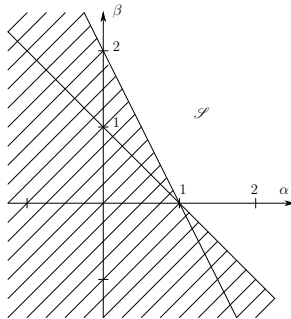
On en déduit, en utilisant l'inégalité (4), toujours valable, que :

si $\alpha > 1$: $T_k \sim \frac{C_k}{k^{\alpha+\beta}}$ et donc $\sum T_k$ converge si et seulement si $\alpha + \beta > 1$;

si $\alpha = 1$: alors $T_k \sim \frac{\ln k}{k^{\beta+1}}$ et donc $\sum T_k$ converge si et seulement si $\beta > 0$, c'est-à-dire $\beta + \alpha > 1$.

Ainsi : $S(\alpha, \beta)$ est finie si et seulement si $\alpha + \beta > 1$.

On peut maintenant tracer sur le plan complexe l'ensemble \mathcal{S} des couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $S(\alpha, \beta)$ est finie.



On voit que, de manière synthétique :

$$\text{Une C.N.S. pour que } S(\alpha, \beta) \text{ soit finie est } \begin{cases} \alpha + \frac{\beta}{2} > 1 \\ \alpha + \beta > 1. \end{cases}$$

2^e solution

Pour que les quantités M_n soient définies, c'est-à-dire pour que, à n fixé, la série $\sum (mn)^{-\alpha}(m+n)^{-\beta}$ converge, il est nécessaire que

$$\alpha + \beta > 1, \tag{5}$$

puisque $u_{mn} \sim_{m \rightarrow \infty} n^{-\alpha} m^{-\alpha-\beta}$. Cette condition n'est bien sûr pas suffisante dans le cas général. Nous allons, pour aller plus loin, séparer quatre cas, selon les signes de α et β .

1^{er} cas : $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$. De l'inégalité $(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 \geq 0$, on tire $m + n \geq 2\sqrt{mn}$

ce qui donne, pour tout $m, n \geq 1$:

$$0 \leq u_{mn} \leq 2^{-\beta} (mn)^{-(\alpha+\beta/2)},$$

une condition suffisante de convergence est : $\alpha + \frac{\beta}{2} > 1$. n° 6

Par ailleurs, dans l'expression de la somme T_k , on a $n < k$ et $k - n < k$, donc on peut minorer T_k par son plus petit terme, fois le nombre de termes :

$$T_k \geq (k-2) \frac{1}{k^\beta \cdot k^{2\alpha}} \sim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^{2\alpha+\beta-1}}.$$

La série $\sum T_k$ diverge donc notamment si $2\alpha + \beta - 1 \leq 1$, ou encore si $\alpha + \beta/2 \leq 1$. Ainsi,

une condition nécessaire de convergence est : $\alpha + \frac{\beta}{2} > 1$.

Ainsi : $S(\alpha, \beta)$ est finie si et seulement si $\alpha + \frac{\beta}{2} > 1$.

2^e cas : $\alpha < 0$ et $\beta \geq 0$. Le raisonnement conduisant à la condition suffisante n° 6 est toujours valable :

une condition suffisante de convergence est : $\alpha + \frac{\beta}{2} > 1$.

Montrons que cette condition est encore nécessaire. On remarque que la fonction $x \mapsto x(1-x)$ est supérieure à $\frac{3}{16}$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$. On en déduit que, pour tout $k \geq 2$:

$$n(k-n) \geq \frac{3k^2}{16} \text{ pour tout } n \in \left[\frac{k}{4}; \frac{3k}{4}\right].$$

Notons C_k le cardinal de l'ensemble $\left[\frac{k}{4}; \frac{3k}{4}\right] \cap \mathbb{N}$; alors $C_k \sim \frac{k}{2}$. On peut donc écrire

$$T_k \geq \left(\frac{3}{16}\right)^{-\alpha} \frac{C_k}{k^{\beta+2\alpha}} \sim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{16}\right)^{-\alpha} \frac{1}{k^{\beta+2\alpha-1}}.$$

Notamment, la série $\sum T_k$ diverge si $2\alpha + \beta - 1 \leq 1$. Ainsi,

une condition nécessaire de convergence est : $\alpha + \frac{\beta}{2} > 1$.

Ainsi : $S(\alpha, \beta)$ est finie si et seulement si $\alpha + \frac{\beta}{2} > 1$.

3^e cas : $\alpha \geq 0$ et $\beta < 0$. La condition nécessaire (5) est toujours valable ; nous allons montrer qu'elle est en outre suffisante.

Pour tout $m, n \geq 1$, on remarque que $(m+n) \leq 2mn$: en effet, si l'on prend la différence, elle s'écrit sous la forme

$$m+n-2mn = m-mn+n-mn = \underbrace{m(1-n)}_{\leq 0} + \underbrace{n(1-m)}_{\leq 0} \leq 0.$$

On en déduit que

$$0 \leq u_{mn} = \frac{(m+n)^{|\beta|}}{(mn)^\alpha} = \left(\frac{m+n}{mn}\right)^{|\beta|} \cdot \frac{1}{(mn)^{\alpha+\beta}} \leq \frac{2^{|\beta|}}{(mn)^{\alpha+\beta}}.$$

Or, si $a > 1$, la famille $((mn)^{-a})_{m,n}$ est sommable et de somme

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-a}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}\right)^2$$

ce qui montre par comparaison de familles positives que, si $\alpha + \beta > 1$, alors $S(\alpha + \beta)$ est finie.

Ainsi : $S(\alpha, \beta)$ est finie si et seulement si $\alpha + \beta > 1$.

4^e cas : $\alpha < 0$ et $\beta < 0$. La condition (5) n'est clairement pas vérifiée, donc la famille n'est jamais sommable (en fait, on a une divergence grossière).

La conclusion est évidemment la même :

$$\text{Une C.N.S. pour que } S(\alpha, \beta) \text{ soit finie est } \begin{cases} \alpha + \frac{\beta}{2} > 1 \\ \alpha + \beta > 1. \end{cases}$$

◆ **SRN.107** Mines MP - 1998
 On pose $u_{n,p} = \left(\frac{1}{n^2 + p^2}\right)^\alpha$ pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de α la famille $(u_{n,p})_{n,p}$ est-elle sommable ?

◇ [Rec00/fsommeble-r0.tex/supp-r0:7]

Effectuer des comparaisons avec des intégrales. Je subodore $\alpha > \frac{3}{4}$.

Calculs de sommes de séries

◆ **SOM.1** (**)
 Nature et somme de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(-1)^n}$.

◆ [Divers/sumserinunexo.tex/div:47] termes s'annulent deux à deux : la somme est nulle !
 Faire des paquets de 2 puis appliquer le CSA, ou mieux, remarquer que les

◆ **SOM.2** (**)
 Montrer que la série $\sum_{k=1}^n k^2$ converge et calculer sa somme.

◆ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:97] éléments simples (en restant dans les limites du programme, broumph...)
 On pose $u_n = \sum_{k=1}^n k^2$, alors $u_n \geq n^2$ donc $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{n^2}$ ce qui assure la convergence de la série.
 De plus, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On prend l'inverse, en décompose en Et là ??? ?
À FINIR !!!

◆ **SOM.3 (Série lacunaire)** (*)
 Étudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})}{n}$.

◆ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:84] $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{3}{4}$,
 u_n n'est non nul que si $n+1$ est un carré parfait, donc calcul que l'on mène en décomposant en pôles simples.

◆ **SOM.4 (Calcul de sommes)**
 Calculer, si elles existent, les sommes des séries suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1} \quad S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \quad S_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=0}^p \frac{1}{k+n}$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{\infty} \ln \left(\cos \frac{\theta}{2^k} \right) \quad S_5 = \sum_{k=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \quad S_6 = \sum_{k=0}^{\infty} \text{Arc tan} \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

On utilisera librement et sans démonstration la formule

$$\text{Arc tan} \left(\frac{1}{n+1} \right) - \text{Arc tan} \left(\frac{1}{n} \right) = \text{Arc tan} \frac{-1}{1 + n(n+1)}.$$

Remarque : S_4 donnée en 99 au concours commun polytechnique PC.

◆ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:1] et donc $S_3 = \dots$ (termes à calculer...)
 Pour S_1 , on remarque Pour S_4 , on note

$$\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right], \quad \cos \theta/2^k = \frac{\sin(\theta/2^{k-1})}{\sin(\theta/2^k)},$$

et donc $S_1(n) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4}$.
 Pour S_2 , on remarque et donc $\prod_{n=0}^N \frac{\sin \frac{\theta}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\theta}{2^n}} = \frac{\sin 2\theta}{2^{N+1} \sin \frac{\theta}{2^N}}$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1/2}{k+2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k},$$

et donc $S_2 = \frac{1}{4}$.
 Pour S_3 , on développe en pôles simples, $\prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \prod_{n=2}^N \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{N+1}{2N}$,

$$\prod_{n=0}^p \frac{1}{k+n} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} \cdots \frac{1}{k+p} = \sum \frac{(-1)^{k+1} C_n^k}{p!},$$

ce qui montre que la série S_5 converge vers $-\ln 2$.
 $u_n = \text{Arc tan}(1/n) - \text{Arc tan}(1/(n+1))$ donc $S_6 = \text{Arc tan}(1/1) = \frac{\pi}{4}$.

◆ **SOM.5 (Constante d'Euler)** (*)
 Montrer que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$,

où γ est une constante qu'on ne cherchera pas à calculer (c'est la **constante d'Euler-Mascheroni**, et elle vaut approximativement $\gamma \approx 0,5772156649\dots$; mais la série qui la définit converge *très lentement* et un calcul précis de γ est difficile. De plus, on ne sait toujours pas si γ est rationnel ou non). On posera pour ce faire $\sigma_n = 1 + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$, et on utilisera la série associée de terme général $u_n = \sigma_{n+1} - \sigma_n$.

◆ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:6] ce qui montre que la série $\sum u_n$ converge vers une constante.
 On a $u_n = \sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n}$, et donc $u_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim -\frac{1}{2n^2}$,

◆ **SOM.6 (Changer un peu l'ordre)** (***)
 Convergence et calcul de la somme de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(n + (-1)^{n+1})}$.

INDICATION : On pourra utiliser librement la formule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

◆ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:17] $\ln 2$ en changeant un peu l'ordre (regarder les sommes partielles).

◆ **SOM.7** (★)
 Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$.

◆ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:22] Somme de Riemann : $\rightarrow \pi/4$.

◆ **SOM.8** (*)
 Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{1/n}$.

◆ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:23] Avec une somme de Riemann, on calcule $w_n = \ln u_n$, et on obtient donc $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \int_0^1 \ln(x+1) dx$
 $w_n = \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln \frac{k}{n}$
 $= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$
 $= [(x+1) \ln(x+1) - (x+1)]_0^1$
 $= 2 \ln 2 - 1 = \frac{4}{e}$.

◆ **SOM.9** (*)
 Calculer la somme de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$.

◆ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:24] Décomposer en pôles, puis télescopique.

◆ **SOM.10**
 Calculer la somme de la série $\sum_{k=n}^{\infty} C_k^n x^k$.

◆ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:25] **À FINIR !!!**

◆ **SOM.11**
 Calculer la somme de la série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n}$.

◆ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:27] ce qui donne une somme de $\frac{89}{96}$.
 On décompose en fractions simples $\frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{n-2} + \frac{2}{n} - \frac{5}{n+2} \right)$,

◆ **SOM.12**

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ de deux manières différentes :

- 1) en utilisant des sommes de Riemann, et
- 2) en utilisant le résultat de l'exercice **SOM.5**.

◇ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:28]

Notons $S_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = \ln N + \gamma + o(1)$ On trouve $\ln 2$.

◆ **SOM.13**

Soient $x, \theta \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence et calculer la somme des séries

$$\sum x^n \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \sum x^n \sin(n\theta).$$

◇ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:33]

imaginaire de la somme d'une série géométrique.

On écrit $C_n + iS_n = \sum (xe^{i\theta})^n$, et on calcule la partie réelle et la partie

◆ **SOM.14 (Ruse diabolique)**

(★★)

Convergence et calcul de la série de terme général $(n+1)3^{-n}$.

INDICATION : On introduira $S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$ et $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} n3^{-n}$, et on cherchera le lien entre $\frac{1}{3}S_1$ et S_0 ...

◇ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:34]

$\frac{1}{3}S_1 = S_1 - \frac{1}{3}S_0$ ce qui donne $S_1 = \frac{3}{4}$.

On calcule $S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = \frac{3}{2}$ et on pose $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} n3^{-n}$, alors D'où la série demandée vaut $3S_1 = \frac{9}{4}$.

◆ **SOM.15**

(★)

Convergence et calcul de la série de terme général $\frac{n}{(n^4 + n^2 + 1)}$.

◇ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:35]

d'où

On décompose

$$\begin{aligned} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} &= \frac{1/2}{n^2 - n + 1} - \frac{1/2}{n^2 + n + 1} \\ &= \frac{1/2}{n^2 - n + 1} - \frac{1/2}{(n+1)^2 - (n+1) + 1}, \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N^2 + N + 1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

◆ **SOM.16 (Une série télescopique)**

(★)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Convergence et calcul de la série $\sum \frac{1}{n(n+k)}$.

◇ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:26]

télescopique.

Série convergente, et $\frac{1}{n+k} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$, ce qui donne une série

◆ **SOM.17**

(★★)

La série de terme général u_n est-elle convergente? Si oui, calculer sa somme.

$$1) u_n = \frac{n^2}{n!} \quad 2) u_n = \frac{n^3}{n!} \quad 3) u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)} \quad 4) u_{2n} = u_{2n+1} = \frac{1}{2^n}$$

◇ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:53]

On calcule, après avoir montré que chaque série converge :

- 1) On décompose

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1) + n}{n!} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e. \end{aligned}$$

- 2) De même pour la suivante, $(+6-2)e = 5e$.

- 3) Pour la troisième, il faut écrire

$$\frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{1}{4n} + \frac{3}{8(n-2)} - \frac{5}{8(n+2)}$$

$$\text{donc } S_p = \frac{89}{96} + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

- 4) Pour la quatrième, on la série $\sum 1/2^n$ est absolument convergente, donc la série demandée vaut deux fois sa somme, soit 4.

◆ **SOM.18**

Calculer la partie entière de $\sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

◇ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:72]

Par monotonie, on peut écrire

$$\int_1^{10^4} \frac{1}{\sqrt{t}} dt < S < \int_1^{10^4+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt,$$

soit

$198 < S < 199$

ce qui mène à

$E(S) = 198.$

◆ **SOM.19 (Calcul de $\zeta(2)$)**

(★)

Pour tout $x \in]-2\pi; 2\pi[\setminus \{0\}$, on pose $\phi(x) = \frac{x}{2 \sin(x/2)}$.

- 1) Prolonger ϕ à $]-2\pi; 2\pi[$ pour que ϕ soit de classe \mathcal{C}^1 .
- 2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{n=1}^p \cos nx = \frac{\sin\left[\left(p + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

- 3) Déterminer des réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos nt dt.$$

- 4) En utilisant le lemme de Lebesgue, déterminer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

◇ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:63]

On a donc

- 1) On pose $\phi(0) = 1$.
- 2) Écrire $\sum_{n=1}^p \cos^2 x = \mathcal{R}e \left(\sum_{n=1}^p e^{i2nx} \right) = \dots$ Ou bien multiplier la somme par $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$, utiliser les formules trigo et obtenir une somme télescopique.

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{\sin\left(p + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \\ &= \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right) \cdot \phi(t) \cdot \sin(p+1)t - \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, 2\pi]$, donc

- 3) On calcule $\int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos nt dt = (2\alpha\pi + \beta) \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{\beta}{n^2}$ grâce à une double IPP. Il suffit donc de poser $b = -1$ et $\alpha = 1/2\pi$.

$$u_p = \int_0^\pi \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right) \phi(t) \sin(p+1)t dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt$$

- 4) On pose $S_p = \sum_{n=1}^p 1/n$, alors

$$S_p = \int_0^\pi f_p(t) dt \quad \text{avec} \quad f_p(t) = \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{n=1}^p \cos(nt).$$

et le lemme de Lebesgue montre que la première intégrale tend vers 0, donc $\lim_{p \rightarrow \infty} u_p = \pi^2/6$.

◆ **SOM.20 (Exemple pédagogique)**

(★★)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. Montrer que la série $\sum u_n$ de terme général

$$u_n = \frac{a_n}{(1+a_0)(1+a_1) \cdots (1+a_n)}$$

converge et calculer sa somme en fonction des a_n .

◇ [Divers/sumserinunexo.tex/srn:101]

(Cf. également l'exercice **SRN.30** page 411).

On calcule les deux ou trois premiers termes et on montre par récurrence que

Par ailleurs la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive, elle admet donc une limite

$$\sum_{k=0}^n u_k = 1 - \frac{1}{(1+a_0)(1+a_1) \cdots (1+a_n)} = 1 - \alpha_n.$$

$$\ell = \prod_{k=0}^{\infty} (1+a_k)^{-1}$$

et la série $\sum u_n$ converge et a pour somme $1 - \ell$.

◆ **SOM.21 (Calcul de $\sum R_n$)**

(★★)

On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Justifier l'existence de R_n .

- 2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

- 3) Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{R}^*$ tels que $R_n = A \frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + O\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right)$. En déduire la convergence de $\sum R_n$.

- 4) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$.

◇ [Divers/sumserinunexo.tex/div:25]

- 1) Critère de Leibniz.
- 2) Intégrons sur $[0; 1]$ la relation

$$1 - x + x^2 - \dots + (-x)^{n-1} = \frac{1 - (-x)^n}{1 + x},$$

on obtient

$$-S_n = \ln(2) + (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

Le dernier terme est majoré par $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\ln(2)$, résultat que l'on connaissait depuis longtemps. On en déduit par ailleurs que

$$R_n = S - S_n = -\ln(2) - S_n = (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

- 3) On effectue une intégration par parties, il vient

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx.$$

Cette dernière intégrale est clairement majorée par $\frac{1}{n+2}$, donc

$$\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

◆ **SOM.22**

On pose $u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Vérifier que la série $\sum u_n$ converge et calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

◇ [Divers/sumserinunexo.tex/div:43]

◆ **SOM.23**

(**)

On admet que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

◇ [Divers/sumserinunexo.tex/div:122]

On ne peut pas se contenter d'un simple glissement d'indice, puisque

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

tandis que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

En revanche, (et l'astuce est classique, on l'a déjà vue), on peut dans la somme

$$T = \frac{\pi^2}{8}$$

◆ **SOM.24 (Calcul approché d'une somme)**

Centrale PC – 1996

Montrer que la série $\sum \frac{n^2}{(1+n^2)^4}$ converge. Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près de sa somme.

◇ [Rec00/sumserinun-r0.tex/srn:3]

Convergence car $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^6}$. Puis comparaison avec une intégrale pour

déterminer le nombre de termes à calculer.

◆ **SOM.25 (Formule de Stirling)**

(*)

CCP – 2000

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \frac{n! e^n}{\sqrt{n} n^n} \quad \text{et} \quad u_n = \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

- 1) Montrer que la série de terme général u_n converge.
- 2) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite ℓ .
- 3) En supposant que $\ell = \sqrt{2\pi}$, trouver un équivalent de $n!$

C'est ce que l'on appelle la **formule de Stirling**, encore que celle-ci fût découverte par Abraham de Moivre.

◇ [Rec00/sumserinun-r0.tex/srn:13]

- 1) $u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ce qui montre la convergence.

- 2) Alors la suite $(\ln a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, notons λ sa limite, alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell = e^\lambda > 0$. On admet que $\ell = \sqrt{2\pi}$.
- 3) Alors $n! \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.

◆ **SOM.26**

CCP PT – 2000

Convergence et calcul de la somme de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right).$$

◇ [Rec00/sumserinun-r0.tex/srn:16]

$u_n = \sum \ln\left(\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\right)$, ce qui donne une série télescopique.

◆ **SOM.27**

TPE MP – 2000

Nature et somme de la série de terme général $u_n = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$.

◇ [Rec00/sumserinun-r0.tex/srn:r:25]

$u_n = \text{Arc tan}(1/n) - \text{Arc tan}(1/(n+1))$ donc la série est télescopique et

$$S = \text{Arc tan}(1/1) = \frac{\pi}{4}.$$

◆ **SOM.28**

(**)

X PC – 2000

Déterminer la partie entière de $\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}}$.

◇ [Rec00/sumserinun-r0.tex/r0:20]

Le terme de gauche est plus grand que $3(1000 - \sqrt[3]{2}) \geq 2996$, donc

Technique de monotonie (on commence à 2 car sinon on est dans le domaine où l'intégrale fait vraiment n'importe quoi ; on rajoutera le terme d'ordre 1 — valant 1 — « à la main ») :

$$\int_2^{10^9+1} \frac{dt}{t^{2/3}} < \sum_{n=2}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}} < \int_1^{10^9} \frac{dt}{t^{2/3}}.$$

$$2997 < \sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}} < 2998,$$

On obtient alors

$$3(\sqrt[3]{10^9} + 1 - \sqrt[3]{2}) < \sum_{n=2}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}} < 2997.$$

et

$$E\left(\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}}\right) = 2997$$

◆ **SOM.29**

X MP – 2000

Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2} \ln^2 n$ est convergente.

En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

◇ [Rec00/sumserinun-r0.tex/r0:29]

Francinou Analyse 1, 3.27 page 169.

◆ **SOM.30**

(**)

CCP MP – 2001

Convergence et calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

◇ [Rec01/sumserinun-r1.tex/srn:r:15]

théorèmes de convergence dominée.

On calcule les sommes partielles, on montre la convergence, mais il faut des

◆ **SOM.31**

(**)

CCP PC – 2001

On pose $u_n = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Calculer u_n , en déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

◇ [Rec01/sumserinun-r1.tex/srn:r:11]

◆ **SOM.32**

(*)

TPE PC – 2001

Étudier la suite $s_n = \frac{1}{2 \cdot \ln 2} + \dots + \frac{1}{n \cdot \ln n} - \ln(\ln n)$.

◇ [Rec01/sumserinum-r1.tex/srn-r:7]

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)} - \ln \ln(n+1) + \ln \ln n$$

$$= o\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)$$

On vérifie que

et donc que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

◆ **SOM.33** Centrale MP – 2001

On pose $u_n : x \mapsto x^n - E(x^n)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On note $v_n(x) = \begin{cases} u_n(x) & \text{si } 0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{2} \\ 1 - u_n(x) & \text{sinon.} \end{cases}$

Enfin, on pose

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^+ ; \sum u_n(x) \text{ converge} \right\} \quad \text{et} \quad T \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^+ ; \sum v_n(x) \text{ converge} \right\}.$$

- 1) Montrer que $\mathbb{N} \subset P \subset T$.
- 2) On pose $x = a + \sqrt{b}$, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$ et $|a - \sqrt{b}| < 1$. Discuter l'appartenance de x à P ou T .
- 3) On pose $x = 1 + \sqrt{2}$. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$. Même question avec $x = 2 + \sqrt{2}$.

◇ [Rec01/sumserinum-r1.tex/srn-r:9]

- 1) Si $x \in \mathbb{N}$, on a $u_n = v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, $0 \leq v_n \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui montre que $\mathbb{N} \subset P \subset T$.
- 2) On pose $x = a + \sqrt{b}$ et $y = a - \sqrt{b}$. Alors $x^n + y^n \in \mathbb{Z}$ comme on peut le voir avec le binôme de Newton. On peut donc écrire $x^n = c_n - y^n$ avec $c_n \in \mathbb{Z}$. On a alors deux cas
– Si $y > 0$, on a $u_n = x^n - E(x^n) = 1 - y^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, ce qui montre que $x \notin P$, mais en revanche $v_n = 1 - u_n = y^n$ donc la série $\sum v_n$ converge donc

$$\boxed{x \notin P \text{ et } x \in T.}$$

– Si $y < 0$, on a $x^n = c_n + (-1)^{n+1} |y|^n$ ce qui montre que

$$u_{2n} = 1 - |y|^{2n} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = |y|^{2n}$$

donc

$$\boxed{x \notin P \text{ et } x \in T.}$$

- 3) On somme simplement une série géométrique.

◆ **SOM.34** TPE MP – 2001

Existence et calcul de $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\cos \frac{\pi}{2^n}\right)$.

◇ [Rec01/sumserinum-r1.tex/srn-r:10]

On note que $\cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin(\theta/2^{k-1})}{\sin(\theta/2^k)}$, et donc

donc

$$\prod_{n=0}^N \frac{\sin \frac{\theta}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\theta}{2^n}} = \frac{\sin 2\theta}{2^{N+1} \sin \frac{\theta}{2^N}},$$

$$S = \ln\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right).$$

◆ **SOM.35** CCP PC – 2001

On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 2^2}$ pour $n \geq 3$. La série converge-t-elle? Si oui, en calculer la somme.

◇ [Rec01/sumserinum-r1.tex/srn-r:20]

On note que $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{4} \left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2} \right]$, et on obtient donc une

double série télescopique.

◆ **SOM.36** Centrale MP – 2002

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^* : u_n = t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k - n E\left(\frac{k}{n}\right)}{k(k+1)}$.

- 1) Existence de u_n .
- 2) Calculer u_1, u_2 et u_3 .
- 3) Calculer explicitement u_n .

◇ [Rec02/sumserinum-r2.tex/srn-r:23]

◆ **SOM.37** (★★) TPE PC – 2002

On définit $\phi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ par

$$\phi(3k) = 4k \quad \phi(3k+1) = 2k+1 \quad \phi(3k+2) = 4k+2.$$

- 1) Montrer que ϕ est une bijection de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* .
- 2) On pose $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Convergence et calcul de la somme de la série $\sum u_n$?
- 3) Convergence et calcul de la somme de la série $\sum u_{\phi(n)}$.

◇ [Rec02/sumserinum-r2.tex/srn-r:8]

La convergence vient du CSA. Le calcul se fait avec le théorème de la double limite et le DSE de la fonction \ln , on trouve $\ln 2$.

Une fois les termes permutés, on les regroupe par paquets, on calcule la valeur de chaque paquet et on trouve une autre valeur : $\frac{1}{2} \ln 2$. (On calcule les sommes partielles S'_{3n} et on montre qu'elles valent $\frac{1}{2} S_{2n}$.)

◆ **SOM.38** X MP – 2003

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^{n-1}}}{1 - z^{2^n}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$.

◇ [Rec03/sumserinum-r3.tex/r3:336]

◆ **SOM.39 (Constante d'Euler)** Centrale MP – 2003

Montrer que la suite $\left(\sum_{p=1}^n \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2} (\ln n)^2 \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^p \ln p}{p}$ converge et que sa somme vaut $\gamma \ln 2 - \lambda (\ln 2)^2$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est à déterminer.

◇ [Rec03/sumserinum-r3.tex/r3:335]

$\sum (f(n) - \int_{n-1}^n f(t) dt)$ converge. Ou bien regarder la série associée à la suite.

On peut poser $f(t) = \frac{\ln t}{t}$ et utiliser le théorème qui dit que Cf. Frainou, Analyse I, p. 169. On trouve, selon la méthode classique pour calculer une série alternée, $\lambda = 1/2$.

◆ **SOM.40** (★) Navale MP – 2003

Convergence et calcul de $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n!}$.

◇ [Rec03/sumserinum-r3.tex/r3:118]

on a

1^{re} méthode : on écrit simplement que

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 3e.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2 - n) x^{n-2}}{n!},$$

2^e méthode : On remarque que la dérivée de l'exponentielle étant elle-même, donc en sommant astucieusement, on obtient $S = 3e$.

◆ **SOM.41** (★) CCP MP – 2003

Déterminer des réels a et b tels que la série de terme général

$$u_n = \ln(1+n) + a \ln(2+n) + b \ln(3+n)$$

converge. Calculer alors sa somme.

◇ [Rec03/sumserinum-r3.tex/r3:205]

On pose $v_n = u_{n-1}$, on effectue un petit développement limité et on obtient pour le terme principal $a + b = -1$ et le premier ordre $a + 2b = 0$, donc au total

$b = 1$ et $a = -2$.

On obtient alors une série télescopique, il ne reste que les quelques premiers termes (les écrire), c'est-à-dire au total $S = -\ln 2$.

◆ **SOM.42** (★★) Mines MP – 2004

Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

◇ [Rec04/sumserinum-r4.tex/r4:225]

Il faut bien sûr passer aux séries entières. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, alors f est solution de $y^{(3)} - y = 0$ donc y est combinaison linéaire $e^x, e^{\omega x}$ et $e^{\bar{\omega} x}$; avec les conditions initiales $f(0) = 1, f'(0) = f''(0) = 0$, on trouve chaque coefficient égal à $1/3$ donc

$$f(x) = \frac{1}{3} e^x + \frac{2}{3} e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right).$$

Enfin,

$$S = f(1) = \frac{e}{3} + \frac{2}{3\sqrt{e}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

◆ **SOM.43**

Centrale PC – 2005

Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

◇ [Rec05/sumserinum-r5.tex/r5:40]

◆ **SOM.44**

(★)

Mines PC – 2005

Nature et somme de $\sum (-1)^n \ln(1 + 1/n)$.

◇ [Rec05/sumserinum-r5.tex/r5:95]

$(-1)^n \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$ et théorèmes de comparaison. Pour la somme, cal-

culer les sommes partielles ?
Convergente grâce à un petit développement limité : $u_n =$

Séries : exercices plus théoriques

◆ SRTH.1 (Série de Bertrand)

(**)

Déterminer, selon les valeurs de α et β , la nature de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

On séparera notamment le cas $\alpha = 1$, pour lequel on pourra utiliser une méthode de monotonie (comparaison avec une intégrale).

◇ [Divers/seriuntheoexo.tex/srn:99]
Convergence si et seulement si

 $\alpha > 1 \quad \text{ou} \quad (\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta > 1).$

◆ SRTH.2

(***)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive. On pose

$$v_n = \frac{u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n-1}}{n}.$$

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

◇ [Divers/seriuntheoexo.tex/srn:86]
On peut écrire

Or $\frac{1}{2} \leq \sum_{\frac{n}{2} < p \leq n} \frac{1}{p} \leq 2$ donc

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^{2n+1} \left(u_k \sum_{\frac{k}{2} < p \leq k} \frac{1}{p} \right)$$

$$\frac{1}{2} S_{2n-1}(u) \leq S_n(v) \leq 2 S_{2n-1}(u)$$

ce qui prouve l'équivalence voulue.

◆ SRTH.3

(*)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes, et on suppose que $\sum u_n$ converge.

Que peut-on dire de la série $\sum u_n^2$?

Et si $\sum u_n$ converge absolument ?

◇ [Divers/seriuntheoexo.tex/srn:2bis]

On ne peut rien dire. Par exemple, $u_n = (-1)^n / \sqrt{n}$ et cette série converge, mais pas la série des carrés.

En revanche, si $\sum u_n$ CVA, alors pour $n \geq n_0$, on a $|u_n| < 1$ et donc $|u_n|^2 \leq |u_n|$; comme $\sum |u_n|$ converge, on en déduit par comparaison des séries positives que $\sum |u_n|^2$ converge également, donc $\sum u_n^2$ CVA, donc converge.

◆ SRTH.4 (Empilement de dominos)

(**)

On empile des dominos. Montrer que l'on peut, en empilant suffisamment de dominos, faire une pile qui avance aussi loin (horizontalement) que l'on veut, sans que l'équilibre soit rompu.

◇ [Divers/seriuntheoexo.tex/srn:2]

On utilise la divergence de la série harmonique.

◆ SRTH.5

(*)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que

$$u_n \leq v_n \leq w_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, alors $\sum v_n$ converge aussi.

◇ [Divers/seriuntheoexo.tex/srn:5]

et comparaison de séries positives.

Utiliser le critère de Cauchy, ou bien noter que $0 \leq (v_n - u_n) \leq (w_n - u_n)$

◆ SRTH.6 (Transformation d'Abel)

(**)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum u_n$ CV. Montrer que $\sum \frac{u_n}{n}$ CV.

INDICATION : On introduira la suite des sommes partielles associée $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on remarquera que $u_n = S_n - S_{n-1}$ (c'est un cas de transformation d'Abel).

◇ [Divers/seriuntheoexo.tex/srn:9]

On pose

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)} + \frac{S_n}{n} - S_0. \end{aligned}$$

Or la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant convergente, elle est bornée : $|S_n| \leq M$. Donc

et donc la série de terme général $S_k/k(k+1)$ CVA donc CV. Donc

$$\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{k(k+1)} - S_0 \quad \text{existe.}$$

On en déduit que $\sum u_n/n$ CV.

$$\left| \frac{S_k}{k(k+1)} \right| \leq \frac{M}{k(k+1)},$$

◆ SRTH.7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum u_n$ CV. Montrer que $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

◇ [Divers/seriuntheoexo.tex/srn:10]

On utilise Schwarz :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{u_k}}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k} \sqrt{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2}} \leq \sqrt{S_n} C \leq \sqrt{S_n} C.$$

On peut également utiliser l'inégalité arithmético-géométrique : $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ puis le théorème de comparaison des séries positives.

◆ SRTH.8

(♣)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à termes réels positifs. Montrer que si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la suite de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$$

tend vers 0.

◇ [Divers/seriuntheoexo.tex/srn:18]

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ puis Cesàro.

Plus compliqué : on applique Cauchy-Schwarz, alors

$$\left(\sum u_k \right)^2 \leq n \cdot \sum_{k=1}^n u_k^2,$$

ce qui montre que

$$|v_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n u_k^2.$$

On peut également utiliser l'inégalité arithmético-géométrique : $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ puis le théorème de comparaison des séries positives.

◆ SRTH.9

Soit α un réel tel que $\alpha > \frac{1}{2}$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\sum u_n$ est convergente et à termes positifs. Montrer que la série

$$\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$$

◇ [Divers/seriuntheoexo.tex/srn:37]

Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_n \frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha} \right)^2 \leq \left(\sum u_n \right) \left(\sum k^{-2\alpha} \right).$$

◆ SRTH.10

(♣)

On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ ont même nature.

◇ [Divers/seriuntheoexo.tex/srn:55]

Supposons que $\sum u_n$ converge. Alors $u_n \rightarrow 0$ donc $\frac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$, ce qui

Supposons que $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge, alors $u_n/(1+u_n) \rightarrow 0$ donc $u_n \rightarrow 0$ donc $\frac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$. □

montre la convergence de la série. □

◆ SRTH.11

Soit $\sum u_n$ une série positive convergente. Montrer que la série de terme général $v_n = \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge. La réciproque est-elle vraie ?

◇ [Divers/seriuntheoexo.tex/srn:56]

On montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 2v_n \leq u_n + u_{n+1}$, ce qui montre que

$\sum v_n$ converge.

Contre-exemple à la réciproque : $u_2 = \frac{1}{n}$ et $u_{2n+1} = 0$.

◆ SRTH.12

(**)

Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}^+)$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général $(-1)^n \int_0^1 x^n f(x) dx$ converge, et calculer sa somme.

◇ [Divers/seriuntheoexo.tex/srn:57]

$n \in \mathbb{N}$ on peut écrire

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x)^k f(x) dx + \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} f(x) dx,$$

1^{er} solution : La fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{1+x}$ est continue sur $[0; 1]$, et pour tout

or 1^o la somme est finie donc on peut la sortir de l'intégrale, et 2^o la fonction

$x \mapsto f(x)/(1+x^2)$ étant continue sur $[0; 1]$, elle est bornée par un réel M , et la dernière intégrale vérifie

$$\left| \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} f(x) dx \right| \leq M \left| \int_0^1 x^{n+1} dx \right| = \frac{M}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui montre que la série envisagée converge et que sa somme vaut $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx$.

2° solution : On sépare $f = f + -f^-$ et on écrit

$$u_n = \int_0^1 x^n f(x) dx = u_n^+ - u_n^-.$$

On constate alors que les séries $\sum (-1)^n u_n^-$ et $\sum (-1)^n u_n^+$ vérifient trivialement les conditions d'application du critère des séries alternées.

◆ SRTH.13 (★★★)

Soit φ une bijection de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* .

1) Montrer que la série $\sum \frac{1}{n \varphi(n)}$ converge, et donner la meilleure majoration possible de la somme de cette série (majoration indépendante de φ).

2) Montrer que la série $\sum \frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge et donner la minoration la meilleure possible de la suite des sommes partielles de cette série.

◇ [Divers/seriunthoeexo.tex/srn:59]

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n \varphi(n)} \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{\varphi(n)^2} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^2,$$

avec égalité si et seulement si θ est l'identité.

De même,

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{\varphi(n)}{n^2} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{\varphi(n)} \right) \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{\varphi(n)}{n^2} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right),$$

avec deux égalités si et seulement si φ est l'identité.

◆ SRTH.14 ($(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0 \Rightarrow \sum n^{-\alpha} u_n$ converge) (★★)

Soit $\sum u_n$ une série complexe convergente. Soit $\alpha > 0$. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge.

◇ [Divers/seriunthoeexo.tex/srn:60]

On effectue une transformation d'Abel $u_n = S_n - S_{n-1}$, et on obtient

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{\alpha} S_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) + \frac{S_n}{n^\alpha} - S_0,$$

ou la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, et $\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right)$.

◆ SRTH.15 ($\sum a_n$ CV et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \searrow 0 \Rightarrow \sum n a_n \rightarrow 0$) (★★)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante vers 0 de réels > 0 . Alors, si $\sum a_n$ converge, montrer que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

◇ [Divers/seriunthoeexo.tex/srn:75]

(Cf récolte 2002, exercice SRTH.36 page 444.)

On a $n a_{2n-1} \leq \sum_{k=n}^{2n-1} a_k$ donc comme ce deuxième terme tend vers 0

puisque la série converge (critère de Cauchy), on a $\lim[n a_{2n-1}] = 0$ ce qui prouve que $\lim[(2n-1)a_{2n-1}] = 0$, et de plus $2n \leq 2n a_{2n-1}$ tend vers 0, ce qui prouve au total que $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$, donc que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

◆ SRTH.16 ($\sum \frac{1}{p}$ diverge) (★★)

Dans tout l'exercice la lettre p désigne un nombre premier. Notons $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers, c'est-à-dire que $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$, etc.

On pose, pour tout $j \geq 1$ et tout $N \geq 2$:

$$\mathcal{N}_j(N) = \{n \leq N; \forall p \in \mathbb{P}, p|n \Rightarrow p \leq p_j\} \quad \text{et} \quad N_j(N) = \text{Card } \mathcal{N}_j(N).$$

1) Démontrer que tout entier naturel $n \geq 1$ s'écrit de manière unique sous la forme $n = n_1^2 m$ où m est un entier sans facteur carré. En déduire que

$$\forall j \geq 1 \quad \forall N \geq 2 \quad N_j(N) \leq 2^j \sqrt{N}.$$

2) Soient $j \geq 1$ et $N \geq 2$. Montrer que

$$[1, N] \setminus \mathcal{N}_j(N) \subset \bigcup_{\ell=j+1}^{\infty} \{m \leq N; p_\ell | m\}$$

et en déduire que

$$N - N_j(N) \leq \sum_{\ell=j+1}^{\infty} \frac{N}{p_\ell}.$$

3) On suppose que la série $\sum \frac{1}{p_j}$ converge.

a) Montrer qu'il existe un entier $j_0 \geq 1$ tel que

$$\forall j \geq j_0 \quad N_j(N) \geq \frac{N}{2}.$$

b) Conclure.

◇ [Divers/seriunthoeexo.tex/srn:77]

$\mathcal{N}_j(N)$ est l'ensemble des entiers de $[1, N]$ qui n'a de facteur premier que dans la liste $\{p_1, \dots, p_j\}$. Tout entier de \mathcal{N}_j peut donc s'écrire sous la forme

$n_1^2 m$; par définition, $m \leq p_j$ donc on a au maximum 2^j possibilités pour écrire m puisque celui-ci est de la forme $\prod p_j^{\alpha_j}$ avec $\alpha_j \in \{0, 1\}$. Ensuite, il est clair que $n_1 \in [1, \sqrt{N}]$.

◆ SRTH.17 (Série des restes d'une série alternée) (★★★)

Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît vers 0 et est convexe. On note $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des restes. Déterminer la nature de $\sum R_n$.

◇ [Divers/seriunthoeexo.tex/srn:78]

$(-1)^n |u_n|$, que, pour n impair

$$|R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{2k \geq n+1} (u_{2k} - u_{2k+1}) - (u_{2k+1} - u_{2k+2})$$

(Cf. également SRN.10.)

Vérifier que $\sum R_n$ vérifie le CSA : le signe et la limite nulle sont des conséquences du CSA, et ensuite on écrit, en supposant par exemple $u_n = u_{2k+2} \geq 0$ et en utilisant la convexité de la suite pour montrer $u_{2k} - u_{2k+1} - u_{2k+1} - u_{2k+2} \geq 0$.

◆ SRTH.18 (Suite définie par une relation de récurrence) (★★★)

Soit $x_0 > 0$. On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = x_n + x_n^2$.

1) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

2) Montrer que la suite de terme général $u_n = \left(\frac{\ln x_n}{2^n}\right)$ converge (on étudiera $\sum u_{n+1} - u_n$).

3) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n \sim a^{2^n}$.

◇ [Divers/seriunthoeexo.tex/srn:87]

donc la série converge rapidement.

1) Faire un dessin.

3) On note $\ell = \lim u_n$ et $x_n \sim e^{\ell 2^n}$.

2) On calcule

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1}{x_n} + o\left(\frac{1}{x_n}\right) \right) = o\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

◆ **SRTH.19** (★★)

Soit $u_0 > 0$. On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ avec $0 < a < b$.

- 1) En considérant $w_n = n^{b-a} u_n$, montrer que la suite $(\ln w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, trouver un équivalent de u_n .
- 2) En déduire la nature de $\sum u_n$.
- 3) On suppose que $\sum u_n$ converge. On note $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. Montrer que $\sum v_n$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

En notant que $v_n = bu_{n+1} - au_n$, en déduire $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

◇ [Divers/seriunthoeexo.tex/srn:88]

1) On calcule que $\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\ln w_{n+1} - \ln w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum w_{n+1} - w_n$ converge donc la suite $(\ln w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ , donc $w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L = e^\ell > 0$. Donc $u_n \sim \frac{L}{n^{b-a}}$.

2) $\sum u_n$ converge si et seulement si $b - a > 1$.

3) La convergence est immédiate. On a de plus

$$S = \frac{b-1}{b-a-1} u_0.$$

◆ **SRTH.20** (★★★)

Soit $\alpha > 0$. On pose $u_1 = u_2 = 1$ et on définit, pour tout $n \geq 2$:

$$u_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n u_k.$$

Quelle est la nature de $\sum u_n$?

◇ [Divers/seriunthoeexo.tex/srn:89]

On a $S_2 = 2$ et $S_{n+1} = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) S_n$, ce qui montre que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite à termes strictement positifs. De plus,

$$\ln S_{n+1} = \ln 2 + \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{(-1)^k}{k^\alpha}\right)$$

Or $a_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^k}{k^\alpha}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

On considère donc deux cas :

- Si $\alpha > \frac{1}{2}$, $\sum a_n$ converge donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive.
- Si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ alors $\sum a_n$ diverge vers $-\infty$ et donc $\ln S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$ donc $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ donc $\sum u_n$ converge et est de somme 0.

◆ **SRTH.21** (★★★)

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{n+u_n}$. On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$ et $w_n = \frac{(-1)^n}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.
- 2) Déterminer la nature de $\sum v_n$ et de $\sum w_n$.

◇ [Divers/seriunthoeexo.tex/srn:90]

Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Tout d'abord, puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini, elle ne saurait être décroissante. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \leq u_{N+1}$. On effectue maintenant une récurrence. Soit $n \geq N$ et supposons que $u_n \leq u_{n+1}$. Alors

$$u_{n+2} - u_{n+1} \geq \sqrt{n+u_{n+1}} - \sqrt{n+u_n} + u_n \geq 0.$$

La propriété est donc bien montrée. Or on a la suite d'implication entre les énoncés suivants :

(a) $u_{n+1} \geq u_n$;

(b) $u_n^2 - u_n - n \leq 0$;

(c) $u_n \in \left[\frac{1 - \sqrt{4n+1}}{2} ; \frac{1 + \sqrt{4n+1}}{2} \right]$;

(d) $0 \leq u_n \leq \frac{1 + \sqrt{4n+1}}{2}$;

(e) $v_n = \frac{1}{u_n} \geq \frac{2}{1 + \sqrt{4n+1}}$.

On a donc $v_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $\sum v_n$ diverge. En revanche, $\sum w_n$ converge par le CSA.

◆ **SRTH.22 (DA de $u_{n+1} = \sin u_n$)** (★★)

Établir un développement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin u_n$.

◇ [Divers/seriunthoeexo.tex/srn:91]

On a bien sûr $u_n \rightarrow 0$. Pour l'équivalent c'est toujours pareil : on cherche r tel que $u_{n+1}^r - u_n^r$ a une limite non nulle. Si l'on écrit

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{15} + o(x^4)\right),$$

on en déduit que

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 3$$

donc, par sommation de comparaison (ou en utilisant le théorème des moyennes de Cesàro) et parce que la série $\sum 3$ diverge grossièrement, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{3}$$

donc

$$u_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{n}.$$

On a donc un premier terme :

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n} - \frac{3\sqrt{3} \ln n}{10 n \sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n \sqrt{n}}\right)}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{u_n^2}{15} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{5n}$$

or la série $\sum 1/n$ diverge elle aussi donc, en sommant et en utilisant l'équivalent célèbre de $\sum 1/n$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln n}{5}$$

soit encore

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} - \frac{n-1}{3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln n}{5}$$

donc $\frac{1}{u_n^2} = \frac{n}{3} + \frac{\ln 5}{n} + o(\ln n)$ et donc, en prenant la racine carrée de l'inverse :

◆ **SRTH.23 (Cesàro et sommes doubles)** (★★)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes. On suppose que $\sum u_n$ converge et on note $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} u_{p+q} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} |u_{p+q}|.$$

Étudier la convergence des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Divers/seriunthoeexo.tex/srn:92]

On écrit

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} (S_{p+n-1} - S_{p-1}) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=n-1}^{2n-2} S_k - \sum_{k=0}^{n-2} S_k \right)$$

de la même façon, on écrit que

$$\sum_{q=0}^{n-1} u_{p+q} = u_p + \dots + u_2 + u_1 + u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1-p}$$

$$= S_{n-1-p} + S_p - u_0$$

et on montre, par le théorème de Cesàro ou une variante à peine plus difficile à montrer que chaque terme a pour limite S , donc la différence des deux a pour limite 0 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2S - u_0.$$

◆ **SRTH.24** (★★★)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

- 1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$ on a

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n}.$$

- 2) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

- 3) Soit $\sum u_n$ une série strictement positive et convergente. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^2 u_n}$ diverge.

INDICATION : On pourra poser $a_n = 1/n^2 u_n$, effectuer une transformation d'Abel et conclure avec le théorème de Cesàro.

- 4) Retrouver la divergence de la série harmonique.

◇ [Divers/seriunthoeexo.tex/srn:95]

1) Inégalité de concavité du logarithme.

◆ **SRTH.25 (Application de la série de Gregory)** (*)

On montrera (au moment des séries entières) que l'on a la formule suivante, valable pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\text{Arc tan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(C'est ce que l'on appelle la **série de Gregory**.)
 Montrer que l'on peut, au moyen de cette formule, obtenir une approximation numérique de π . Calculer, en fonction du nombre p de décimales voulues, le nombre de termes qu'il faut ajouter.

◇ [Divers/seriunthoexo.tex/srn:98] Tout vient du fait que la série de Gregory est une série alternée.

◆ **SRTH.26 (Une égalité sur les restes)** (**)

Soit $\sum u_n$ une série numérique convergente. On note $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des restes associée.

- Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ la différence $\sum_{k=0}^n R_k - \sum_{k=1}^n k u_k$.
- On suppose désormais que $u_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 - Montrer que la convergence de la série $\sum R_k$ entraîne la convergence de la série $\sum k u_k$.
 - On suppose que la série $\sum k u_k$ converge. Quelle est la limite de la suite $((n+1)R_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
 - Montrer que les séries $\sum R_k$ et $\sum k u_k$ sont de même nature, et comparer leurs sommes.
- On pose $u_k(x) = \frac{1}{k^x}$ pour tout $x \in \mathbb{I} =]1; +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$. Préciser l'ensemble des $x \in \mathbb{I}$ tels que la série $\sum R_n(x)$ soit convergente, et exprimer $\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x)$ en fonction de $\zeta(x)$.

◇ [Divers/seriunthoexo.tex/srn:100]

- Écrire sous forme d'un tableau, pour trouver finalement

$$\sum_{k=0}^n R_k - \sum_{k=1}^n k u_k = (n+1)R_n.$$
- $(n+1)R_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k u_k$ car $n+1 \leq k$. Cela montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)R_n = 0$.
 - Leurs sommes sont égales.
- $]2; +\infty[$, $\zeta(x-1)$.

◆ **SRTH.27 (Procédé de resommation)** (**)

Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}.$$

Si ces quantités sont définies, on pose également

$$S(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \quad \text{et} \quad S'(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} A(x).$$

- Montrer que, si $\sum a_n$ converge, alors $S'(a)$ existe ; calculer $S'(a)$.
- On suppose $a_n = (-1)^n$. Calculer, si elles existent, les quantités $S(a)$ et $S'(a)$.
- On suppose $a_n = \alpha^n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer, si elles existent, les quantités $S(a)$ et $S'(a)$.

◇ [Divers/seriunthoexo.tex/srn:102]

- On commence par supposer que $A = 0$.
 □ Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que

$$\forall n \geq N \quad |A_n| = \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq \varepsilon.$$
 Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \left| e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} \right| \leq \varepsilon.$$
 De plus, pour x suffisamment grand, on a

$$\left| e^{-x} \sum_{n=0}^{N-1} A_n \frac{x^n}{n!} \right| \leq \varepsilon$$
 ce qui achève la démonstration. □
 Dans le cas général, on pose $R_n = A_n - A$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, on applique le résultat précédent.
- $S(a)$ n'est pas défini mais $A(x) = \text{ch } x$ donc $S'(a) = \frac{1}{2}$.
- Pour tout $\alpha \in]-1; 1[$, $S(a) = \frac{1}{1-\alpha}$. Par ailleurs $A(x) = \frac{1}{1-\alpha} [e^x - \alpha e^{\alpha x}]$ donc

$$\forall \alpha \in]-\infty; 1[\quad S'(a) = \frac{1}{1-\alpha}.$$

◆ **SRTH.28**

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs. Soit $\alpha > 1$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{et} \quad b_n = \frac{a_n}{S_n^\alpha}.$$

- Montrer que $b_n \leq \frac{S_{n-1}^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$.
- Montrer que $\sum b_n$ converge.

◇ [Divers/seriunthoexo.tex/div:26]

- Pour $0 < y < x$, on a

$$\int_y^x t^{-\alpha} dt \geq x^{-\alpha}(x-y)$$
 et d'autre part

$$\int_y^x t^{-\alpha} dt = \frac{x^{1-\alpha} - y^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{y^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$
 On pose $x = S_n$ et $y = S_{n-1}$ (d'où $x - y = a_n$), il vient alors directement :

$$\frac{S_{n-1}^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha}}{\alpha-1} \geq S_n^{-\alpha} a_n = b_n$$
- On a

$$\sum_{k=1}^n b_k \leq \frac{1}{\alpha-1} (S_0^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha}) \leq \frac{S_0^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$
 La série $\sum b_n$ étant à termes positifs et de sommes partielles majorées, elle converge.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \leq \frac{S_{n-1}^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$

◆ **SRTH.29 (Paquets de deux)** (♣)

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Montrer que la série $\sum (u_{2n} + u_{2n+1})$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{k=0}^{\infty} (u_{2k} + e_{2k+1}).$$

Y a-t-il une réciproque, à savoir, si la série $\sum (u_{2n} + u_{2n+1})$, peut-on affirmer que $\sum u_n$ converge ?

◇ [Divers/seriunthoexo.tex/div:191]

◆ **SRTH.30** (♣) ENS PC — 2004

- Montrer que, si x_1, \dots, x_n sont des complexes de module 1, deux à deux distincts, et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des complexes tels que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k = 0,$$
 alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
- Soit $\sum a_n$ une série complexe, qui converge absolument. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k = 0.$$
 Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est identiquement nulle.

◇ [Rec00/seriunthoexo.tex/div:147]

- Récurrence.
 - La propriété est vraie pour $n = 1$.
 - On la suppose vraie pour l'entier n . On écrit alors

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i^k = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i^{k+1} = 0$$
 et on prend la deuxième équation à laquelle on retranche x_{n+1} fois la première. Il reste

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{(x_i - x_{n+1})}_{\neq 0} x_i^k = 0,$$
- Quitte à tout multiplier par M^{-k} , on peut supposer que

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i \in \mathbb{N}} a_i = 1.$$
 On note alors $\mathbb{I} = \{i \in \mathbb{N}; |a_i| = 1\}$, alors

$$\max_{i \notin \mathbb{I}} |a_i| = \eta < 1.$$
 Il ne reste plus qu'à noter que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \notin \mathbb{I}} a_i^k = 0$$
 et à appliquer la propriété de la première question (en notant λ les multiplicités des a_i pour qu'ils soient distincts).

et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence avec les μ_i .

◆ **SRTH.31 (Application des produits infinis)** (♣) X MP – 2000
 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels strictement positifs, de limite nulle. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$ diverge.

◊ [Rec00/serinumtheo-r0.tex/supp-r0:12] Il est clair que le produit infini $\prod_k \frac{a_k}{a_{k+1}}$ tend vers $+\infty$. On passe au log et on utilise l'inégalité

$$\forall x > 0 \quad x - 1 > \ln x$$

avec $x = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ ce qui montre que la série de terme général $\frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}}$ diverge.

- Pour conclure, il faut distinguer deux cas :
- si $a_k \sim a_{k+1}$, la série voulue diverge donc par comparaison de séries positives ;
 - si cette équivalence n'est pas vraie, elle diverge grossièrement, le terme général ne tendant pas vers 0 !

Remarque 1 On pouvait également, en suivant Michel Quercia, comparer avec une intégrale pour montrer que la série $\sum \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}}$ diverge : on se retrouve avec une sommation faisant penser à la méthode des rectangles pour le calcul d'une intégrale. Notamment, un petit dessin permet de montrer que

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}} \geq \int_{a_{n+1}}^{a^0} \frac{dt}{t},$$

et cette intégrale diverge quand $n \rightarrow \infty$.

◆ **SRTH.32** (★★) X PC
 On suppose que la suite positive $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ décroît vers 0 et que $\sum u_n$ converge.

- 1) Montrer que $n u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- 2) Montrer que $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\sum u_n$.
- 3) Montrer que, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît toujours vers 0 et si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum n(u_n - u_{n+1})$ diverge également.
- 4) Soit $0 \leq r < 1$. Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} k r^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k$.

◊ [Rec00/serinumtheo-r0.tex/srn:83] Cf exercice **SRTH.15**.

- 1) On a $n u_{2n-1} \leq \sum_{k=n}^{2n-1} u_k$ donc comme ce deuxième terme tend vers 0 puisque la série converge (critère de Cauchy), on a $\lim[n u_{2n-1}] = 0$ ce qui prouve que $\lim[(2n-1) u_{2n-1}] = 0$, et de plus $2n \leq 2n u_{2n-1}$ tend vers 0, ce qui prouve au total que $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 0$, donc que $u_n = o(\frac{1}{n})$.
- 2) Calculer les sommes partielles : $T_n = S_n - n u_{n+1}$.
- 3) Posons $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ et procédons par l'absurde.
 - **Supposons que $\sum v_n$ converge.** On a $u_n - u_{n+1} = \frac{v_n}{n}$ donc, puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0,

$$u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{v_k}{k}.$$

On en déduit donc que $0 \leq n u_{n+1} \leq n u_n \leq \sum_{k=n}^{\infty} v_k$ (car on ne manipule que des séries convergentes) et donc $n u_n$ tend vers 0. C'est bien sûr en **contradiction** avec le résultat de la question 2, toujours valable. ◀

Ainsi, $\sum v_n$ diverge.

- 4) On note $T = \sum_{k=1}^{\infty} k r^k$ et $S = \sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{1-r}$. Alors d'après la question précédente

$$T(1-r) = \sum_{k=0}^{\infty} k(r^k - r^{k+1}) = S$$

ce qui donne $T = \frac{r}{(1-r)^2}$.

À vérifier quand même...

◆ **SRTH.33 (Application des produits infinis)** (★) d'après X MP – 2000
 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels strictement positifs, de limite nulle.

- 1) Quelle est la limite de $\prod_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k+1}}$ quand $n \rightarrow \infty$?
- 2) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $x - 1 > \ln x$.
- 3) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}}$.
- 4) Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$ diverge :
 - a) dans le cas où $a_k \sim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1}$;
 - b) dans le cas contraire.

◊ [Rec00/serinumtheo-r0.tex/supp-r0:18]

- 1) $\prod_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}}$ tend vers $+\infty$.

- 2) Simple étude de fonction.
- 3) On passe au log et on utilise l'inégalité

$$\forall x > 0 \quad x - 1 > \ln x$$

avec $x = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ ce qui montre que la série de terme général $\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$ diverge.

- 4) Pour conclure, il faut distinguer deux cas :
 - a) si $a_k \sim a_{k+1}$, la série voulue diverge donc par comparaison de séries positives ;
 - b) si cette équivalence n'est pas vraie, elle diverge grossièrement, le terme général ne tendant pas vers 0 !

◆ **SRTH.34** (★★) ENS Cachan MP
 Construire une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum \frac{1}{|z_n|^2}$ diverge et $|z_p - z_q| \geq 1$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ d'entiers distincts.

◊ [Rec00/serinumtheo-r0.tex/supp-r0:19]

On place les z_n sur les cercles \mathcal{C}_k de rayon $k \in \mathbb{N}$ tout en respectant la seconde condition. Si des points du même cercle \mathcal{C}_k sont tels que $|a - b| = 1$, alors leur angle vu de l'origine est $2 \text{Arc sin } \frac{1}{2k}$, il suffit alors de choisir

$$n_k = E \left(\frac{\pi}{\text{Arc sin } \frac{1}{2k}} \right)$$

points distincts sur \mathcal{C}_k .

En sommant par tranches, on voit que la série $\sum \frac{1}{|z_n|^2}$ est de même nature que $\sum \frac{n_k}{k^2}$. Comme $n \sim 2k\pi$, la série $\sum \frac{1}{|z_n|^2}$ est bien divergente.

◆ **SRTH.35** (★) Mines MP – 2001
 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et décroissante. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) \sin x \, dx$?

◊ [Rec01/serinumtheo-r1.tex/srn-r:4]

La fonction f étant décroissante et minorée, elle converge. Quitte à changer f en $f - \ell$, on peut supposer que $\ell = \lim_{+\infty} f = 0$. Alors la sé-

rie $\sum u_n$ vérifie le critère des séries alternées. On en déduit que $\sum u_n$ converge. Si $\ell \neq 0$, il y a divergence grossière.

◆ **SRTH.36** Centrale PC – 2002
 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors $n u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

◊ [Rec02/serinumtheo-r2.tex/srn-r2:25]

On a $n a_{2n-1} \leq \sum_{k=n}^{2n-1} a_k$ donc comme ce deuxième terme tend vers 0

puisque la série converge, on a $\lim[n a_{2n-1}] = 0$ ce qui prouve que $\lim[(2n-1) a_{2n-1}] = 0$, et de plus $2n \leq 2n a_{2n-1}$ tend vers 0, ce qui prouve au total que $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$, donc que $a_n = o(\frac{1}{n})$.

◆ **SRTH.37 (Nombres de Pisot)** (★★★) Centrale MP – 2002
 Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = x^n - E(x^n)$ et $v_n = \begin{cases} u_n & \text{si } 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \\ 1 - u_n & \text{sinon.} \end{cases}$

On pose enfin $P = \{x \in \mathbb{R}^+ ; \sum u_n \text{ converge}\}$ et $T = \{x \in \mathbb{R}^+ ; \sum v_n \text{ converge}\}$.

- 1) Montrer que $\mathbb{N} \subset P \subset T$.
- 2) On pose $x = a + \sqrt{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$ et $|a - \sqrt{b}| < 1$. Discuter l'appartenance à P et T selon les valeurs de a et b.
- 3) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ pour $x = 1 + \sqrt{2}$ et $x = 2 + \sqrt{2}$.

◊ [Rec02/serinumtheo-r2.tex/srn-r2:24]

- 1) Si $x \in \mathbb{N}$, on a $u_n = v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, $0 \leq v_n \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui montre que $\mathbb{N} \subset P \subset T$.
- 2) On pose $x = a + \sqrt{b}$ et $y = a - \sqrt{b}$. Alors $x^n + y^n \in \mathbb{Z}$ comme on peut le voir avec le binôme de Newton. On peut donc écrire $x^n = c_n - y^n$ avec $c_n \in \mathbb{Z}$. On a alors deux cas
 - Si $y > 0$, on a $u_n = x^n - E(x^n) = 1 - y^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, ce qui montre que $x \notin P$, mais en revanche $v_n = 1 - u_n = y^n$ donc la série $\sum v_n$ converge donc

$$\boxed{x \notin P \text{ et } x \in T.}$$

– Si $y < 0$, on a $x^n = c_n + (-1)^{n+1} |y|^n$ ce qui montre que

$$u_{2n} = 1 - |y|^{2n} \text{ et } u_{2n+1} = |y|^{2n}$$

$$\text{donc } \boxed{x \notin P \text{ et } x \in T.}$$

- 3) On somme simplement une série géométrique.

◆ **SRTH.38** CCP MP – 2002
 Soient u_0 et $u_1 \in \mathbb{R}^{*+}$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{1 + u_{n-1} u_{n-2}}.$$

Que dire de la série $\sum u_n$?

◊ [Rec02/serinumtheo-r2.tex/srn-r2:29]

◆ **SRTH.39** (★★) Centrale MP – 2002
 Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\Re e(z_n) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\sum z_n$ et $\sum z_n^2$ convergent.

- 1) Montrer que $\sum |z_n|^2$ converge mais que $\sum |z_n|$ peut diverger.
- 2) Que se passe-t-il pour $\sum |z_n|^2$ si l'on n'a plus l'hypothèse $\Re e(z_n) \geq 0$?

◊ [Rec02/serinumtheo-r2.tex/srn-r2:5]

1) Montrons la convergence de $\sum |z_n|^2$. D'après les hypothèses, on a déjà la convergence de $\sum a_n$, de $\sum b_n$, de $\sum (a_n^2 - b_n^2)$ et de $\sum a_n b_n$. Or $\sum a_n$ est une série positive convergente, donc $0 \leq a_n \leq 1$ au moins à partir d'un certain rang, donc $0 \leq a_n^2 \leq a_n$ à partir d'un certain rang ; donc $\sum a_n^2$ converge. Puisque $\sum (b_n^2 - a_n^2)$ converge, par combinaison linéaire, $\sum a_n^2 + b_n^2 = \sum |z_n|^2$ converge. Montrons que $\sum |z_n|$ peut diverger. On prend comme exemple $z_n =$

$\frac{(-1)^n i}{n}$, ce qui donne $\Re(z_n) = 0$, $\sum z_n = i \sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le CSA et $\sum z_n^2$ converge absolument. En revanche, la série $\sum |z_n|$ est la série harmonique, notoirement divergente.

2) Prenons $z_n = \frac{(i)^n}{\sqrt{n}}$. La série $\sum z_n$ est convergente (somme de deux séries convergentes par le CSA, ou bien un théorème d'Abel). La série $\sum z_n^2$ converge, toujours par le CSA. En revanche, $\sum |z_n|^2$ est la série harmonique.

◆ **SRTH.40** (*) CCP, Centrale PC – 2002
Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $\sum a_n$ converge. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = \sqrt{a_n a_{2n}}$. Quelle est la nature de $\sum b_n$?

◊ [Rec02/serinumtheo-r2.tex/srn-r2:4]

On a bien sûr $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$ donc $b_n \leq \frac{a_n + a_{2n}}{2}$ et

la somme de deux séries convergentes est convergente.

◆ **SRTH.41** CCP MP – 2002
Soit $f \in \mathcal{C}^1([2; +\infty[, \mathbb{R})$ tel que f' soit intégrable sur $[2; +\infty[$.

1) Montrer que la série de terme général

$$W_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$$

est absolument convergente.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $g(t) = \frac{(\ln t)^\alpha}{t}$. Montrer que g vérifie les conditions de la question précédente.

3) Montrer qu'il existe $c(\alpha)$ tel que, quand n tend vers l'infini, si $\alpha \neq -1$, on a

$$\sum_{k=3}^n \frac{(\ln k)^\alpha}{k} = \frac{(\ln n)^\alpha}{\alpha + 1} + c(\alpha) + o(1);$$

et si $\alpha = -1$:

$$\sum_{k=3}^n \frac{(\ln k)^\alpha}{k} = \ln(\ln n) + c(-1) + o(1).$$

4) Pour quelles valeurs de α a-t-on

$$c(\alpha) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln k)^\alpha}{k} ?$$

◊ [Rec02/serinumtheo-r2.tex/srn-r2:2]

◆ **SRTH.42** CCP PC – 2002
Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n$ converge. Quelle est la nature de la série $\sum a_n^{1-1/n}$?
INDICATION : On utilisera la comparaison avec une suite géométrique.

◊ [Rec02/serinumtheo-r2.tex/srn-r2:12]

Cette série converge. Mais pourquoi ?

◆ **SRTH.43** (**) CCP PC – 2002
Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs ou nuls. Soit $u_0 > 0$. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$.

1) Montrer que si la série $\sum a_n$ converge, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

2) Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $\sum a_n$ converge.

◊ [Rec02/serinumtheo-r2.tex/srn-r2:13]

On commence par remarquer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Alors elle est bornée, notons M un majorant. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_n = u_n(u_{n+1} - u_n) \leq M(u_{n+1} - u_n)$$

donc la suite des sommes partielles de $\sum a_n$ est bornée, donc la série positive

$\sum a_n$ est convergente.

Réciproquement, supposons que $\sum a_n$ converge. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 \leq u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \leq \frac{a_n}{u_0}$$

donc, par comparaison de séries positives, $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

◆ **SRTH.44** TPE MP – 2002
Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels tels que $a_1 \geq 1$ et $a_{n+1} \geq a_n(a_n + 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $\frac{1}{u_n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{a_k}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et trouver la partie entière de la limite.

◊ [Rec02/serinumtheo-r2.tex/srn-r2:7]

◆ **SRTH.45 (Procédé de resommation)** (**) INT MP – 2002
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente et de somme S . On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{n!} x^n.$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} f(x) = S$.

◊ [Rec02/serinumtheo-r2.tex/srn-r2:27]

On commence par supposer que $S = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que

$$\forall n \geq N \quad |S_n| = \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \left| e^{-x} \sum_{n=N}^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!} \right| \leq \varepsilon.$$

De plus, pour x suffisamment grand, on a

$$\left| e^{-x} \sum_{n=0}^{N-1} S_n \frac{x^n}{n!} \right| \leq \varepsilon$$

ce qui achève la démonstration. □

Dans le cas général, on pose $S' = S_n - S$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = 0$, on applique le résultat précédent.

◆ **SRTH.46 (Cesàro +++)** (***) ENSAE MP – 2003
Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

(a) pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle convergente de limite ℓ , la suite de terme général

$$w_n = \frac{\sum_{j=0}^n \alpha_j u_j}{\sum_{j=0}^n \alpha_j}$$

converge vers ℓ ;

(b) la série $\sum \alpha_j$ diverge.

◊ [Rec03/serinumtheo-r3.tex/r3:429]

$$w_n = \frac{\alpha_0}{\sum_{j=0}^n \alpha_j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_0}{S} \neq 0.$$

-(b) \Rightarrow -(a) On suppose $\sum \alpha_j$ converge ; on pose $u_n = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, et on vérifie que

(b) \Rightarrow (a) Démonstration du genre « Cesàro ».

◆ **SRTH.47** Mines MP – 2003
Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{an}}{1 - z^{bn+c}} = \sum_{i=1}^n \frac{z^{ci}}{1 - z^{bn+a}}.$$

◊ [Rec03/serinumtheo-r3.tex/r3:449]

◆ **SRTH.48 (Règle de Raabe-Duhamel)** Mines MP – 2003
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe une suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum v_n$ converge absolument et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + v_n.$$

1) Montrer que la série $\sum \left[\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) + \frac{a}{n} \right]$ est convergente.

2) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A}{n^a}$. Conclusion ?

3) Déterminer la nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$.

◇ [Rec03/serinumtheo-r3.tex/r3:282]

◆ **SRTH.49**

Mines PC – 2003

Soit $f : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$ dérivable et strictement croissante. Montrer que la série $\sum \frac{1}{f(n)}$ converge si et seulement si la série $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge.

◇ [Rec03/serinumtheo-r3.tex/r3:403]

À FINIR !!!

◇ Comparer avec une intégrale.

◆ **SRTH.50**

(♣)

CCP MP – 2003

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs. Montrer que, si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

◇ [Rec03/serinumtheo-r3.tex/r3:158]

T. Un vrai scandale !

Recherche d'équivalents de séries

◆ EQS.1 (Somme des relations de comparaison)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un e.v.n. de dimension finie (notamment, $\mathbb{K} \dots$), et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que

1. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs ;
2. la série $\sum v_n$ converge ;
3. $u_n = o(v_n)$ (resp. $u_n = O(v_n)$).

Montrer qu'alors

1. $\sum u_n$ converge ;
2. $\sum_{k=n}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right)$. (resp. $O \dots$)

◇ [Divers/equivserinunexo.tex/srn:29]

□ Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|u_n\| \leq \varepsilon |v_n|$, et

On a d'abord $\sum u_n$ CVA par le théorème de comparaison des séries positives. Dans un Banach, ça converge donc.

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} u_k \right\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \|u_k\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon v_k \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{\infty} v_k.$$

◆ EQS.2 (Somme des relations de comparaison)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes réels. On suppose que

1. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs ;
2. la série $\sum v_n$ converge ;
3. $u_n \sim v_n$.

Montrer qu'alors

1. $\sum u_n$ converge ;
2. $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right)$.

◇ [Divers/equivserinunexo.tex/srn:30]

On a

$$\begin{aligned} u_n \sim v_n &\iff u_n - v_n = o(v_n) \implies \sum_{k=n}^{\infty} (u_k - v_k) = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right) \\ &\implies \sum_{k=n}^{\infty} u_k - \sum_{k=n}^{\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right) \\ &\implies \sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k. \end{aligned}$$

◆ EQS.3 (Somme des relations de comparaison)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un e.v.n. de dimension finie (notamment, $\mathbb{K} \dots$), et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que

1. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs ;
2. la série $\sum v_n$ diverge ;
3. $u_n = o(v_n)$ (resp. $u_n = O(v_n)$, resp. $u_n \sim v_n$).

Montrer qu'alors

$$\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right).$$

◇ [Divers/equivserinunexo.tex/srn:31]

pour tout $n > N$:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^n u_k \right\| &\leq \sum_{k=0}^N \|u_k\| + \sum_{k=N+1}^n \|u_k\| \\ &\leq \sum_{k=0}^N \|u_k\| + \varepsilon \sum_{k=N+1}^n v_k \\ &\leq \sum_{k=0}^N (\|u_k\| - \varepsilon v_k) + \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k, \end{aligned}$$

□ Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|u_n\| \leq \varepsilon |v_n|$, et,

ou le dernier terme tend vers $+\infty$ alors que le premier est fixé, donc il existe un entier $M \geq N$ tel que

$$\forall n \geq M, \sum_{k=0}^n (\|u_k\| - \varepsilon v_k) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k,$$

et alors pour tout $n \geq M$, on a

$$\left\| \sum_{k=0}^n u_k \right\| \leq 2\varepsilon \sum_{k=0}^n v_k,$$

ce qui prouve le résultat demandé.

Idem pour O .

Pour \sim , on écrit que $u_n - v_n = o(v_n)$ donc

$$\sum_{k=0}^n (u_k - v_k) = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right),$$

ce qui montre le résultat demandé.

◆ EQS.4

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n e^{-k/(k+1)}$. Donner un équivalent de S_n quand $[n \rightarrow \infty]$.

◇ [Divers/equivserinunexo.tex/srn:32]

En utilisant le résultat de EQS.3, $u_n \sim \frac{1}{e}$ donc $S_n \sim \frac{n}{e}$.

◆ EQS.5

(**)

Trouver un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n^2} k \ln k$.

◇ [Divers/equivserinunexo.tex/srn:46]

On compare à une intégrale, on trouve comme équivalent $n^4 \ln n$.

◆ EQS.6

(**)

Montrer que $\sum_{k=1}^n k! \sim n!$.

◇ [Divers/equivserinunexo.tex/srn:47]

En effet,

$$\frac{\sum_{k=1}^n k! - n!}{n!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} \leq (n-1) \times \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{n-1}{n}.$$

◆ EQS.7 (Comparaison des sommes partielles)

(*)

X MP – 2001

Montrer que si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes > 0 , si $u_n \sim v_n$ et si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n \sim \sum v_n$.

◇ [Rec01/equivserinum-r1.tex/srn-r:26]

On suppose que

1. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs ;
2. la série $\sum v_n$ diverge ;
3. $u_n = o(v_n)$ (resp. $u_n = O(v_n)$, resp. $u_n \sim v_n$).

On montre qu'alors

$$\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right).$$

□ Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon |v_n|$, et, pour tout $n > N$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| &\leq \sum_{k=0}^N |u_k| + \sum_{k=N+1}^n |u_k| \\ &\leq \sum_{k=0}^N |u_k| + \varepsilon \sum_{k=N+1}^n v_k \\ &\leq \sum_{k=0}^N (|u_k| - \varepsilon v_k) + \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k, \end{aligned}$$

ou le dernier terme tend vers $+\infty$ alors que le premier est fixé, donc il existe un entier $M \geq N$ tel que

$$\forall n \geq M, \sum_{k=0}^n (|u_k| - \varepsilon v_k) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k,$$

et alors pour tout $n \geq M$, on a $\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq 2\varepsilon \sum_{k=0}^n v_k$, ce qui prouve le résultat demandé.

Idem pour O .

Pour \sim , on écrit que $u_n - v_n = o(v_n)$ donc

$$\sum_{k=0}^n (u_k - v_k) = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right),$$

ce qui montre le résultat demandé.

◆ EQS.8

(*)

CCP PC – 2001

Soit $\gamma \geq -1$. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n k^\gamma$ pour $[n \rightarrow \infty]$.

◇ [Rec01/equivserinum-r1.tex/srn-r:8]

Comparaison série-intégrale : si $\gamma = -1$ on connaît l'équivalent $\ln n$, sinon on

trouve $\frac{n^{\gamma+1}}{\gamma+1}$.

◆ **EQS.9** (**) Centrale PC – 2002

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n S_n = 1$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^3 - S_{n-1}^3$.

En déduire un équivalent de a_n .

INDICATION : On pourra utiliser le théorème de Cesàro (selon l'examinateur, et bien que ce théorème soit hors-programme !) ou, mieux, le théorème de comparaison des restes de séries équivalentes !

◊ [Rec02/equiverinim-r2.tex/srn-r2:3] En utilisant Cesàro, on a

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est réelle, croissante. Soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$. Or si elle converge, cela veut dire que la série $\sum a_n^2$ converge, donc $a_n \rightarrow 0$, donc $a_n S_n \rightarrow 0$: contradiction.

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$. Il faut donc de surcroît $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Enfin, $S_n^3 - S_{n-1}^3 = -3S_n a_n^2 + 3S_n^2 a_n^2 - a_n^6$. Le premier terme tend vers 0, ainsi que le dernier, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^3 - S_{n-1}^3) = 3.$$

donc $S_n^3 \sim 3n$ et comme $a_n \sim 1/S_n$, on a

$$a_n \sim \left(\frac{1}{3n}\right)^{1/3}.$$

◆ **EQS.10** INT MP – 2002

On pose $B_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sqrt{k}$. Montrer que

$$B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{n}}{2}.$$

◊ [Rec02/equiverinim-r2.tex/srn-r2:22]

◆ **EQS.11** CCP PC – 2002

Déterminer un équivalent de $\sum_{k=2}^n \frac{k}{\ln k}$ en $+\infty$.

◊ [Rec02/equiverinim-r2.tex/srn-r2:26]

◆ **EQS.12** CCP MP – 2002

Donner un équivalent simple de $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k!}$.

◊ [Rec02/equiverinim-r2.tex/srn-r2:11] On écrit (vérification immédiate) puis on somme ces équivalents (dont la convergence de la série associée permet de dire que les restes sont équivalents) : $u_n \sim \frac{\sqrt{n}}{n!}$.

$$\frac{\sqrt{k}}{k!} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{k}}{k!} - \frac{\sqrt{k+1}}{(k+1)!}$$

◆ **EQS.13** ENSAI MP – 2002

Donner un équivalent en $+\infty$ de $a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \sqrt{k}$. (On étudiera la suite des termes pairs et celle des termes impairs.)

◊ [Rec02/equiverinim-r2.tex/srn-r2:19]

◆ **EQS.14** X MP – 2003

Soit $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R}^{*+})$ croissante et tendant vers $+\infty$ en $+\infty$. On suppose que, pour tout $t > 0$, $\int_1^{+\infty} e^{-th(x)} dx$ existe.

- 1) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-th(n)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \int_1^{+\infty} e^{-th(x)} dx$.
- 2) En déduire que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) t^{-1/\alpha}.$$

◊ [Rec03/equiverinim-r3.tex/r3:339]

◆ **EQS.15** (*) Mines MP – 2003

On pose $u_n = \sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{p+n}\right)^\alpha$. Trouver un équivalent de u_n en fonction de α .

◊ [Rec03/equiverinim-r3.tex/r3:70] On fait apparaître une somme de Riemann :

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n \underbrace{\frac{1}{\left(1 + \frac{p}{n}\right)^\alpha}}_{\rightarrow I_\alpha}$$

où

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^\alpha} dx = \begin{cases} \ln 2 & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{2^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

On a donc $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}} I_\alpha$.

◆ **EQS.16** TPE MP – 2003

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Trouver un équivalent simple de $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$.

◊ [Rec03/equiverinim-r3.tex/r3:245] **Solution PC** : On écrit

$$R_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{a}{n+2} + \frac{a^2}{(n+2)(n+3)} + \dots\right) = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} (1 + \varepsilon_n).$$

Solution MP : On écrit

$$\frac{a^k}{k!} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a^k}{k!} - \frac{a^{k+1}}{(k+1)!}$$

(vérification immédiate) puis on somme ces équivalents (dont la convergence de la série associée permet de dire que les restes sont équivalents) :

$$|\varepsilon_n| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a|^k}{(n+2)^k} = \frac{a}{n+2} \cdot \frac{1}{1-a/n+2} = \underset{n \rightarrow \infty}{o}(1).$$

On peut maintenant majorer :

On en déduit que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$.

Produits infinis

◆ **PRD.1**

Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

◆ [Divers/produitsinfinisexo.tex/srn:47bis] Par le théorème des gendarmes, $\ln P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$, donc la limite cherchée est \sqrt{e} .

◆ **PRD.2 (Produit infini)**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{K} . On dira que le produit $\prod_{n=n_0}^{\infty} u_k$ **converge** si et seulement si la suite $\left(\prod_{k=n_0}^n u_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. (Pour certains auteurs, il faut de plus que la limite de cette suite soit non nulle.)

- 1) On suppose que $u_n \in]0; 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le produit $\prod u_k$ existe.
- 2) Calculer les produits infinis suivants :

$$P_1 = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad P_2 = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$P_3 = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) \qquad P_4 = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right]$$

(avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.)

◆ [Divers/produitsinfinisexo.tex/srn:48] Les produits valent respectivement $P_1 = 0, P_2 = \frac{1}{2}, P_3 = \frac{1}{3}, P_4 = \frac{\theta^2}{\sin^2 \theta}$ en remarquant que

$$1 + \tan^2 \frac{\theta}{2^n} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2^n}} = \frac{4 \sin^2 \frac{\theta}{2^n}}{\sin^2 \frac{\theta}{2^{n-1}}}, \qquad \prod_{k=1}^n u_k = 4^n \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2^n}}{\sin^2 \theta}.$$

◆ **PRD.3 (Produit infini)**

(**)

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de complexe telle que $|u_n| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et telle que la série $\sum u_n$ converge.

- 1) Montrer que le produit $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n)$ converge dans \mathbb{C} (éventuellement vers 0).
- 2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce produit soit non nul.
- 3) Calculer les deux produits suivants :

$$P_1 = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) \qquad P_2 = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right).$$

◆ [Divers/produitsinfinisexo.tex/srn:49]

1) On a

$$\ln P_n - \sum_{k=0}^n u_k = \ln \left[\prod_{k=1}^n (1 + u_k) \right] - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n [\ln(1 + u_k) - u_k],$$

or $\ln(1 + u_k) - u_k \sim -\frac{1}{2}u_k^2 < 0$.

• Si $\sum u_k^2$ converge, par comparaison de séries positives (au bout d'un moment), $\ln P_n$ admet une limite (car la série $\sum u_k$ converge aussi) et donc P_n admet aussi une limite.

• Si $\sum u_k^2$ diverge, alors $\ln P_n \rightarrow -\infty$ ce qui montre que $P_n \rightarrow 0$.

2) La condition nécessaire et suffisante est : $\sum u_n^2$ converge.

3) On calcule ensuite

$$P_n^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \quad \text{donc } P_n^{(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

Pour le dernier produit, la série des u_n est convergente par le CSA, mais la série $\sum u_n^2$ est divergente, donc $P_2 = 0$.

◆ **PRD.4 (Application d'un produit infini)**

(**)

Centrale MP – 2000

On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par la donnée de u_1 et v_1 et la relation de récurrence, valable pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{v_n}{n(n+1)} \qquad v_{n+1} = v_n + \frac{u_n}{n(n+1)}.$$

Montrer que ces deux suites sont bornées.

◆ [Rec00/produitsinfinis-r0.tex/srn:81]

On montre que

$$|u_n| |v_n| \leq (|u_n| + |v_n|) \times \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right),$$

et ce dernier produit infini est convergent en raison de la convergence de la série $\sum 1/k(k+1)$.

◆ **PRD.5**

X MP – 2003

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Existence et calcul de $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1 + z^{2^k})$.

◆ [Rec03/produitsinfinis-r3.tex/r3:194]

série $\sum z^{2^k}$ converge absolument, ce qui est vrai. Mais ici la difficulté est que l'on travaille avec des variables complexes : cf exercice **PRD.6**.

Existence : on démontre que ce produit admet une limite dans \mathbb{C} lorsque la

Calcul :

◆ **PRD.6**

MP – 2003

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $\sum u_n$ converge absolument. Montrer que $\left(\prod_{k=1}^n (1 + u_k)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

◆ [Rec03/produitsinfinis-r3.tex/r3:195]

On suppose sans trop de restriction que $|u_n| < 1$ pour n suffisamment grand.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n = \prod_{k=0}^n (1 + u_k) \qquad \text{et} \qquad Q_n = \prod_{k=0}^n (1 + |u_k|).$$

Le produit infini $\prod (1 + |u_k|)$ converge donc la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Quelques lignes de calcul montrent que

$$|P_n| \leq Q_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et également que

$$|P_{p+n} - P_p| \leq |Q_{p+n} - Q_p|$$

pour tout $p, n \in \mathbb{N}$.

La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{C} , donc converge ; de plus, sa limite est on nulle (?).

Suites de fonctions

◆ SU-F.1 (Application du th. de Weierstrass) (*)

Montrer que, si $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et *paire*, alors il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes *pairs* qui converge uniformément vers f .

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:12] converge uniformément vers $\hat{f} = f$, il suffit alors de poser $P_n = \frac{1}{2}(Q_n + \hat{Q}_n)$.
 On prend $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f , alors $(\hat{Q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

◆ SU-F.2 (*)

Étudier la convergence (simple et uniforme) des suites de fonctions suivantes :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2};$$

$$g_n(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2};$$

$$h_n(x) = \frac{x^n - 1}{x^n + 1} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:6]

◆ SU-F.3 (Lipschitzienne + CVS \Rightarrow Lipschitzienne) (♣)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions k -lipschitziennes, convergeant *simplement* vers f sur \mathbb{R} . Que peut-on dire de f ?

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:6bis] limite puisque ce n'est qu'en deux points. Donc f est k -lipschitzienne.
 Soient $x, y \in \mathbb{R}$, alors $|f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x - y|$, et on peut passer à la

◆ SU-F.4 (*)

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , telles que $f_n \xrightarrow{c.v.u.} f$.

- 1) Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application *quelconque*. Montrer que $f_n \circ \phi \xrightarrow{c.v.u.} f \circ \phi$.
- 2) A-t-on $\phi \circ f_n \xrightarrow{c.v.u.} \phi \circ f$?
- 3) Et si on suppose ϕ continue ? Lipschitzienne ?

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:7] ce qui montre que, par exemple,
 Si ϕ continue, c'est insuffisant ; par exemple, prenons

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2. \quad |(g \circ f_n - g \circ f)(x)| = 2 + \frac{1}{n}$$

On a alors $f_n \xrightarrow{c.v.u.} f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, mais qui ne tend pas vers 0, donc on n'a pas convergence uniforme.

$$|(g \circ f_n - g \circ f)(x)| = \left| \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} \right|, \quad \text{En revanche, si } g \text{ est lipschitzienne (u-continue suffit), alors ça marche.}$$

◆ SU-F.5 (**)

Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ une fonction continue vérifiant : $f(x) < x$ pour tout $x \in]0; 1]$. On pose $f_0 = \text{Id}_{[0; 1]}$ et $f_{n+1} = f \circ f_n$. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:13] □ Soit $\varepsilon > 0$. Sur $[\varepsilon; 1]$, la fonction $x \mapsto f(x)/x$ atteint son maximum $m < 1$. Alors pour tout $x \geq \varepsilon$, $f_n(x)$ finit par être inférieur à ε , car elle décroît, tant que ce n'est pas fait, comme m^n . □
 On note que $f(0) = 0$. Pour tout $x \in]0; 1]$, la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante, donc converge. Il y a donc convergence simple de la suite. Montrons que $f_n \rightarrow 0$.

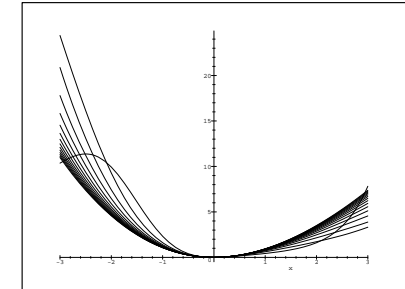
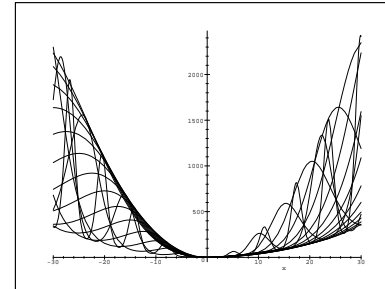
◆ SU-F.6 (**)

Étudier la convergence (simple et uniforme) de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) = x^2 \exp\left(-\sin \frac{x}{n}\right).$$

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:15]

Les courbes caractéristiques sont données ci-dessous (avec deux facteurs de zoom) :



◆ SU-F.7 (**)

Étudier les suites de fonctions suivantes (convergence simple et uniforme) :

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{(1 - e^{-x})^2} \quad g_n(x) = nxe^{-nx} \sin x \quad \forall x \in [0, \pi]$$

$$h_n(x) = \cos \frac{nx}{n+1}$$

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:31] La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 car, en écrivant que
 On prolonge f en 0 en posant $f(0) = n$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $x \mapsto 0$. On calcule

$$f'_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x}} (2 - nx + e^{-x} [(n-2)x - 2]), \quad |g(x)| \leq nx^2 e^{-nx},$$

qui est du signe de la grande parenthèse. C'est malheureusement trop difficile à étudier. Mais comme il y aura de toute façon un problème en zéro, on montre la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ en disant que pour n suffisamment grand, la dérivée est toujours négative sur $[a, +\infty[$.

on trouve que $\|g_n\| \leq \frac{4}{n} e^{-2}$.

La suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $x \mapsto \cos x$ sur tout compact, mais pas sur \mathbb{R} (trouver un x suffisamment grand, à n donné, pour avoir un déphasage proche de π par exemple).

◆ SU-F.8 (**)

On pose $f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n$.

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:32] Convergence simple vers 0, mais

$$I_n = \frac{\ln(1 + n2^n)}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2}{2}.$$

◆ SU-F.9 (*)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f sur un segment $[a; b]$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $[a; b]$ convergeant vers $x \in [a; b]$. Montrer que $f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$.

Ce résultat est-il encore valable si la convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas uniforme ?

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:39] alors $f_n(x_n) = 1$ mais $f(0) = 0$.
 On prend pour $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite canonique des contre-exemple, et $x_n = 1/n$

◆ SU-F.10 (CY + CVS \Rightarrow CVU) (*)

Notons $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy (uniforme) et converge simplement vers f . Montrer que la convergence est uniforme.

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:50] $\|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$. Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.
 Soit ε . Il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$ et tout p ,

◆ SU-F.11 (Lipschitzien + CVS \Rightarrow CVU) (***)

Soit $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que f_n est k -lipschitzienne pour tout $n \in \mathbb{N}$, et converge simplement vers une fonction f sur un intervalle $[a; b]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ approche uniformément f .

INDICATION : (On commencera par traiter le cas où $f = 0$.)

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:26]
 □ Soit $\varepsilon > 0$.
 Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(b-a)/nk \leq \varepsilon$.
 Par ailleurs, en notant $a_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$, il y a CVS en tous les a_i , pour $i \in [0, n]$, qui sont en nombre fini. Donc il existe N' tel que pour tout $n \geq N'$, $|f(a_i)| \leq \varepsilon$ pour $i = 0, \dots, n$.
 Comme f est k -lipschitzienne, on a alors $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$. □

Dans le cas général, on commence par montrer que la limite f est également k -lipschitzienne : en effet, si $x, y \in [a; b]$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x - y|$ donc, à la limite $n \rightarrow \infty$, on a $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.
 Ainsi, les applications $g_n = f_n - f$ sont k -lipschitziennes et la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 : il ne reste qu'à appliquer le résultat précédent.

◆ **SU-F.12 (CVS d'une suite de polynômes)** (★★★)
 Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_m[X]$. Soit $[a; b]$ un segment de \mathbb{R} . On suppose que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a; b]$ vers une application f . Montrer que :

- 1) f est une application polynomiale de degré inférieur ou égal à m ;
- 2) la convergence est en réalité uniforme.

INDICATION : On utilisera une interpolation de Lagrange avec suffisamment de points de $[a; b]$.

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:58]
 (Cf. également exercice **SU-F.23**.)

1) On se choisit une famille $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ de points distincts de $[a; b]$. On note P_0, \dots, P_m les polynômes élémentaires de Lagrange associés à cette famille : $L_j(\lambda_k) = \delta_{jk}$. Ils forment une base de $\mathbb{R}_m[X]$. Notamment, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [a; b]$, on a

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^m P_n(\lambda_k) L_k(x).$$

et ceci est vrai pour tout $x \in [a; b]$.
 Ainsi, $f \in \mathbb{R}_m[X]$.
 2) Chaque polynôme L_k est borné, donc on peut trouver M qui les borne tous. On a donc, pour tout n et pour tout $x \in [a; b]$:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M \sum_{k=0}^m |f(\lambda_k) - P_n(\lambda_k)|.$$

La convergence simple et la somme finie permet de conclure.

◆ **SU-F.13 (U-continue \circ CVU \Rightarrow CVU)** (♣)
 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant uniformément. Soit g une fonction uniformément continue. Montrer que $(g \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.
 En déduire, par exemple, que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{C.V.U.} f$, alors la suite de terme général $g_n = \sin \circ f_n$ converge uniformément et préciser sa limite uniforme.

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:53] Démonstration immédiate en ε .

◆ **SU-F.14** (*)
 Étudier la convergence (simple et uniforme) de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)}{nx + 1} e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:54]
 On a convergence simple vers

$$f : x \mapsto \begin{cases} (x^2 + 1)e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

qui mène à (f étant borné par un certain M sur \mathbb{R})

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{M}{na + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Cette fonction n'étant pas continue, on n'a certainement pas convergence uniforme sur $[0; a]$, quel que soit $a > 0$. En revanche, on a convergence uniforme

◆ **SU-F.15** (*)
 Étudier la convergence simple et uniforme sur \mathbb{R}^+ de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(x) = \frac{n^3 x}{n^4 + x^4}$. Que peut-on dire de la continuité de la limite de cette suite ?

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:55]
 On convergence simple vers la fonction nulle mais $f_n(n) = \frac{1}{2}$ ce qui montre que l'on n'a pas convergence uniforme. On a cependant convergence uniforme sur tout segment du type $[0; a]$, ce qui prouve la continuité de f sur \mathbb{R} .

◆ **SU-F.16** (*)
 Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie sur \mathbb{R}^+ par $f_n(x) = \frac{x}{n(1 + x^n)}$.

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:56]
 On a convergence uniforme vers 0 : $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$, comme on le voit en minorant $1 + x^n$ par 1 ou par x^n selon que l'on est sur $[0; 1]$ ou $[1; +\infty[$.

◆ **SU-F.17** (♣)
 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f : x \mapsto \frac{2x + n^2 x^3}{1 + n^2 x^2}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:47]
 Convergence simple vers $x \mapsto x$. De plus, $\|f_n - \text{Id}\|_\infty = 1/2n$ donc on a convergence uniforme.

◆ **SU-F.18** (★★)
 On pose $f_n : x \mapsto \sin\left(x + \frac{x}{n}\right)$. Étudier la convergence (simple et uniforme) de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:52]
 Convergence simple mais pas convergence uniforme sur \mathbb{R} . En effet, si $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = n\pi/2$, alors $\sin x_n = 0$ ou ± 1 selon la parité de n , tandis que $f_n(x_n) = \pm 1$ ou 0, donc $\|f - f_n\|_\infty \geq 1$ (en fait cela vaut 2). En revanche, convergence uniforme sur tout compact.

◆ **SU-F.19** (Avec Maple)
 Étudier la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_n : x \mapsto \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$. Représenter les graphes caractéristiques des f_n et de la limite simple. Faire un affichage intéressant avec Maple.

◇ [Divers/suifonexo.tex/div:57]

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -1 \\ 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

```
> f:=(n,x)->(1+x^(2*n+1))/(1+x^(2*n));
> f1:=x-> piecewise(x<-1,x,x>1,x,1);
> plot([f(n^2,t)$n=1..6,f1(t)],t=-2..2,
      color=[red$=1..6,black],discont=true,
      thickness=[1$n=1..6,3]);
```

◆ **SU-F.20** (★★)
 Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(1) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n : \begin{cases} [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f_n(x) = x^n f(x). \end{cases}$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

◇ [Divers/suifonexo.tex/sf:44]
 On note $m = \|f\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta \in]0, 1[$ tel que sur $[\eta, 1]$, on a $f(x) < \varepsilon$. Alors $|f_n(x)| < \varepsilon$ la-dessus aussi. De plus, il existe N tel que, pour $n \geq N$, on a $\eta^n \leq \varepsilon/M$. On a alors $|f_n(x)| < \varepsilon$ sur $[0; \eta]$.

◆ **SU-F.21** (★★★) ENS Ulm – 1997
 Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux et intégrables sur I . On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .

- 1) On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n \geq 0$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 - (a) $\int_I |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;
 - (b) $\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_I f$.
- 2) Donner un contre-exemple si on enlève l'hypothèse $f_n \geq 0$.
- 3) Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 - (a) $\int_I |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;
 - (b) $\int_I |f_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_I |f|$.

◆ **SU-F.31** (**) CCP PC – 2002
 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $U_0(x) = x$ et $U_{n+1}(x) = \sin U_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier les différents modes de convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◆ [Rec02/suifon-r2.tex/rf-r2:3] par une simple récurrence, on voit U_n est croissante sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, et que U_n est périodique de période 2π pour $n \geq 1$. On vérifie que $(|U_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, la seule limite possible est 0 car elle vérifie $|\ell| = |\sin \ell|$. Il y a convergence simple vers 0. Il y a en fait convergence uniforme :

◆ **SU-F.32** (**) Centrale MP – 2002
 Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $f_n : x \mapsto x(x+1)^n$ sur $[-1; 0]$. Montrer que tout polynôme P tel que $P(0) \geq 0$ est limite uniforme sur $[-1; 0]$ d'une suite de polynômes à coefficients positifs.

◆ [Rec02/suifon-r2.tex/rf-r2:8] On note $M = \|P\|_1$ la valeur absolue du plus grand coefficient de P. Alors $Mf_n + P$ est un polynôme à coefficients tous positifs puisque le plus petit coefficient de f_n est 1 et que le coefficient constant de f_n est nul. La suite $(Mf_n + P)_n$ convient donc.

◆ **SU-F.33** (*) Mines MP – 2002
 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$x \mapsto \sqrt{f(x)^2 + \frac{1}{n}}$$

◆ [Rec02/suifon-r2.tex/rf-r2:17] Il y a convergence simple vers $|f|$. Uniforme aussi, d'ailleurs car $|f_n(x) - |f(x)|| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ en utilisant l'expression conjuguée.

◆ **SU-F.34** ENSAE MP – 2002
 Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 n^2(t^n - t^{n+1}) f(t) dt.$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

◆ [Rec02/suifon-r2.tex/rf-r2:18] On a $\lim I_n = f(1)$. On commence par remarquer que $\int_0^1 n^2(t^n - t^{n+1}) dt = \frac{n^2}{(n+1)^2}$. coupe alors l'intégrale en $\int_0^{1-\delta} + \int_{1-\delta}^1$, le premier morceau tend vers 0 car inférieur à $n^2(1-\delta)^n M$ et le second est plus petit que $\sup_{x \in [1-\delta; 1]} |f|$ qui tend vers 0 quand $\delta \rightarrow 0$ par continuité. Le résultat vient alors en écrivant la définition de la limite (on majore le second morceau par $\varepsilon/2$ en choisissant δ puis le premier par $\varepsilon/2$ pour n assez grand...)

◆ **SU-F.35** Mines MP – 2003
 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$x \mapsto \sqrt{f(x)^2 + \frac{1}{n}}$$

◆ [Rec03/suifon-r3.tex/r3:356] Il y a convergence simple vers $|f|$. Uniforme aussi, d'ailleurs car $|f_n(x) - |f(x)|| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ en utilisant l'expression conjuguée.

◆ **SU-F.36 (Cv^{cc} de $(1+z/n)^n$ vers e^z)** Centrale MP – 2003

- 1) Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, montrer que $\frac{C_n^k}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$.
- 2) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- 3) Montrer que cette convergence est uniforme par rapport à z sur tout compact inclus dans \mathbb{C} .

◆ [Rec03/suifon-r3.tex/r3:382]

◆ **SU-F.37** (**) CCP PC – 2003
 Convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général défini par $f_n(x) = \sin(n! \pi x)$, où $x \in \mathbb{Q}$.

◆ [Rec03/suifon-r3.tex/r3:380] On a convergence simple vers 0 en écrivant $x = p/q$ et en notant que $f_n(x) = 0$ pour $n \geq q$. On peut montrer qu'il n'y a convergence uniforme sur aucun intervalle $[a; b] \cap \mathbb{Q}$ en prenant un x irrationnel. Cependant, si $n \in \mathbb{N}$, on prend $x_n = 1/2n!$ et $f_n(x_n) = 1$ ce qui montre que $\|f_n\|_\infty = 1$: on n'a donc pas convergence uniforme.

◆ **SU-F.38 (Suite de Dirac)** (**) CCP PC – 2003
 Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On note

$$g_n : t \mapsto n^2 [t^n - t^{n+1}].$$

- 1) Montrer que la suite $(f \cdot g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers 0.
- 2) Posons $J_n = \int_0^1 g_n$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 1$.
- 3) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) g_n(t) dt = f(1).$$

◆ [Rec03/suifon-r3.tex/r3:01]

2) Un calcul explicite donne

$$\int_0^1 g_n(t) dt = n^2 \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

1) f étant continue sur un compact, elle est bornée; notons $m = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)|$. La convergence simple de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0 est immédiate (séparer les cas $t = 1$ et $t \in [0; 1[$). On en déduit la convergence simple de $(f \cdot g_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3) Utiliser le changement de variable $x = t^n$ par exemple, puis le théorème de convergence dominée sur un segment, ou bien les lourdeurs de la méthode générale des diraqueries...

◆ **SU-F.39 ($\chi_n \xrightarrow{c.v.s.} \exp$)** (**) CCP PC – 2003
 Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite de fonctions $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par morceaux en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\chi_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + x - \frac{n}{k}\right) \quad \forall x \in \left[\frac{n}{k}; \frac{k+1}{n}\right]$$

- 1) Montrer que χ_n est continue sur \mathbb{R}^+ et que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx-1} \leq \chi_n(x) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx+1}.$$

- 2) En déduire que $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers la fonction exponentielle.
- 3) Montrer que $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^+ .
- 4) Calculer, $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{nx} - \chi_n(n)$. En déduire que $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}^+ .

◆ [Rec03/suifon-r3.tex/r3:232]

- 1) T.
- 2) T.
- 3) La fonction χ_n est affine par morceaux. De plus, on remarque que, en tout point k/n , on a

$$\chi'_n(x) = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^k \leq \exp\left(\frac{k}{n}\right) \leq \exp x,$$

$$\chi_n\left(\frac{k}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leq \exp\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\|\chi_n - \exp\|_\infty^{[a; b]} = |\chi_n(b) - e^b| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

. De plus, sur $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$, on a

4) On effectue un développement limité et on obtient $+\infty$.

◆ **SU-F.40** (**) Centrale MP – 2004
 On définit la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0; 1] \quad f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}}}.$$

- 1) Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2) Y a-t-il convergence uniforme sur $[0; 1]$?
- 3) Étudier le comportement asymptotique du coefficient devant t^n dans le DSE de f_n .

◇ [Rec04/suifon-r4.tex/r4:213]

vers $f(t) = \sqrt{1-t}$ et $f(1) = 1/\sqrt{n}$.1) $f_n(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1-t^n}}$ si $t \neq 1$ et $f_n(1) = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Il y a convergence simple2) La limite simple n'est pas continue : il n'y a pas convergence uniforme.
3)◆ **SU-F.41 (CVU de $f_n/(1+f_n^2)$)** (**) TPE MP – 2004On suppose que $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} . On pose $g_n = \frac{f_n}{1+f_n^2}$. Montrer que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.

Y a-t-il une réciproque ?

◇ [Rec04/suifon-r4.tex/srf:51]

On considère $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$, elle est continue avec des limites finies, elle est donc uniformément continue. C'est suffisant (exercice **SU-F.13**) pour montrer que $g_n = \psi \circ f_n$ converge uniformément vers $g \circ f = \frac{f}{1+f^2}$. Il n'y a pas de réciproque (trouver un contre-exemple).◆ **SU-F.42** (*) Mines PC – 2004On pose $f_n(x) = e^{-nx} - (1-x)^n$. Étudier la convergence uniforme sur $[0; 1]$.

◇ [Rec04/suifon-r4.tex/r4:19]

◆ **SU-F.43** (**) CCP MP – 2004(12 pt) — On définit $f_n(t) = (1-t)^n \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)$.

- Déterminer le domaine de convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Soit $a \in]0; 1[$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a; 2-a]$.
- Déterminer les intervalles maximaux de convergence uniforme.

◇ [Rec04/suifon-r4.tex/r4:183]

◆ **SU-F.44** (*) CCP MP – 2004On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x.$$

- Donner l'allure de f_n et donner un équivalent des coordonnées (c_n, y_n) du maximum de f_n .
- Calculer la limite simple $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.
- Calculer $\int_0^{\pi/2} f$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\pi/2} f_n\right)$. Conclusion ?

◇ [Rec04/suifon-r4.tex/r4:206]

Séries de fonctions

♦ SRF.1 (Fonction de van der Waerden) (♣)

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $\langle y \rangle = d(t, \mathbb{Z})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : t \mapsto \frac{10^{nt}}{10^n}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} . Que peut-on dire quant à la continuité de sa somme f ?
- Montrer que f n'est dérivable en aucun point de \mathbb{R} .
- Montrer que f n'est monotone sur aucune intervalle (d'intérieur non vide).

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:49]

Cf. exercice SRF.110 page 491.

Dans tout espace vectoriel normé E , l'application $x \mapsto d(x, A)$, où A est une partie non vide de E , est continue. L'application $\langle \cdot \rangle$ et donc les applications u_n sont donc continues, et 1-périodiques.

- Si $t \in \mathbb{R}$, on a $\langle t \rangle \leq \frac{1}{2}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n(t)| \leq \frac{10^{-n}}{2}.$$

La convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est donc normale, et donc uniforme sur \mathbb{R} . La somme f est donc continue, et 1-périodique.

- Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, admettant le **développement décimal propre**

$$t_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k 10^{-k},$$

où $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$ et pour $k \geq 1$, $\alpha_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ et la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang.

On note $a_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k 10^{-k} = \frac{E(10^n t_0)}{10^n}$ et $b_n = a_n + 10^{-n}$, donc $a_n \leq t_0 < b_n$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = t_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a :

$$f(b_n) - f(a_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle 10^k b_n \rangle - \langle 10^k a_n \rangle}{10^k}.$$

Or si $k \geq n$, $10^k b_n$ et $10^k a_n$ diffèrent d'un entier, donc $\langle 10^k b_n \rangle = \langle 10^k a_n \rangle$.

Si $0 \leq k \leq n-1$, $10^k a_n$ et $10^k b_n$ sont respectivement congrus modulo 1 à

$$A_{n,k} = \frac{\alpha_{k+1}}{10} + \sum_{l=k+2}^n \frac{\alpha_l}{10^{l-k}} \leq \frac{\alpha_{k+1}}{10} + \sum_{l=k+2}^n \frac{9}{10^{l-k}}$$

♦ SRF.2 (Recherche d'équivalent) (★★)

On pose $f_n(t) = \frac{t^n}{1-t^n}$ pour tout $t \in]-1; 1[$. Étudier l'existence, la continuité, la dérivabilité de $f = \sum f_n$. (Donner un équivalent de f en 1^- .)

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:1]

Existence : suite géométrique en gros.
Continuité : si $t \geq 0$, $f_n(t) \leq t^n$ et si $t < 0$, $f_n(t) \leq t^n/(1-t)$ donc de toute façon, CVN sur $]a, b[$. Donc f est continue sur $]a, b[$, donc continue sur

$]a, b[$, $b \neq -1, 1$.

Dérivabilité : $|f'_n(t)| \leq \frac{nt^{n-1}}{(1-a)^2}$ sur $] - a, a[$, donc CVN donc CVU, donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - 1, 1[$.

♦ SRF.3 (Continuité sans convergence normale) (★★★)

Étudier l'existence, la continuité, la dérivabilité de $f = \sum f_n$, où $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$.

INDICATION : On pourra, pour étudier la continuité, grouper les termes par deux...

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:3]

Il faut utiliser le CSA pour prouver (grâce à la majoration des restes) la CVU (bien qu'on n'ait pas CVN).

En pratique, on pose $g_n = f_{2n} + f_{2n+1}$ donc

$$g_n(x) = \frac{1}{(x+2n)(x+2n+1)},$$

donc g_n est décroissante et $\|g_n\|_\infty = g_n(0) \sim \frac{1}{4n^2}$ et il y a convergence normale.

♦ SRF.4 (★)

Étudier l'existence, la continuité, la dérivabilité de $f = \sum f_n$, où $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$.

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:4]

Il n'y a convergence absolue que si $x > 1$ (th. de Riemann), mais le critère des séries alternées permet de définir f sur \mathbb{R}^{++} . On montre également la convergence uniforme sur $]0; +\infty[$ grâce à la majoration des restes. Ainsi, la fonction f

est-elle continue sur $]0; +\infty[$?

De même, avec $f'(x) = -\frac{\ln n}{n^x}$, on a convergence uniforme grâce à la majoration des restes, donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

♦ SRF.5 (★★)

Étudier l'existence, la continuité, la dérivabilité de $f = \sum f_n$, où $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$. Calculer, si elles existent, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:5]

Continuité sur \mathbb{R}^+ et dérivabilité sur \mathbb{R}^{++} .

On montre (démonstration en A) que $\lim_{0^+} f' = -\infty$.

□ Soit $\varepsilon > 0$. On choisit A tel que $e^{-A} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{1+n^2} \leq \varepsilon$ (car la série converge) et si $x > A$, on trouve $f(x) \leq \varepsilon$. □

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

♦ SRF.6

Étudier la convergence (simple, normale, absolue, uniforme) de la série $\sum f_n$ avec $f_n : x \mapsto n x^2 e^{-\sqrt{nx}}$.

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:8]

On a CVS vers 0 sur \mathbb{R}^+ .

De plus, $\|f\|_\infty = f_n(2/\sqrt{n}) = 4/e^2$ qui ne tend pas vers 0, donc il n'y a pas

convergence uniforme.

En revanche, il y a convergence normale et uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

♦ SRF.7

Étudier la convergence (simple, normale, absolue, uniforme) de la série $\sum f_n$ sur \mathbb{R}^+ avec

$$f_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n(1+x)} \right).$$

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:9]

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n(1+x)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad [n \rightarrow \infty],$$

ou la première série converge (CSA), la seconde CVA, donc $\sum f_n$ CVS.

Malheureusement, il n'y a pas CVA.

Par contreposée, pas de CNV non plus.

En revanche, par le TSA, on a

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \|f_{n+1}\|_\infty = \frac{1}{n+1}$$

ce qui montre que $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et donc que $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .

♦ SRF.8 (★)

Étudier la convergence (simple, normale, absolue, uniforme) de la série $\sum f_n$ sur \mathbb{R}^+ , avec

$$f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n < x < n+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:10]

On a convergence uniforme mais pas convergence normale.

♦ SRF.9 (★★★)

Étudier la convergence (simple, normale, absolue, uniforme) de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbf{U}$, où on a posé

$$f_n(z) = \frac{2^n}{z^{2n} + 1}.$$

Calculer, pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbf{U}$, la valeur de $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$.

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:11]

On n'a convergence simple que si $|x| > 1$. Sur le complémentaire de tout

disque de rayon $r > 1$, on a même convergence normale, donc uniforme.

◆ **SRF.10** (★★)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$: $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{(n+x)^2}$.

- 1) Étudier la convergence de la série $\sum f_n$ sur \mathbb{R}^+ .
- 2) Étudier la continuité de sa somme S.
- 3) Montrer que S est positive et décroissante sur \mathbb{R}^+ .
- 4) Que vaut $S(0)$? Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} S(x)$.
- 5) Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.
- 6) Montrer qu'elle est convexe.
- 7) S est-elle dérivable en 0?

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:19]

- 1) On a convergence simple sur \mathbb{R}^+ .
- 2) On a convergence normale : $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$. La somme S est donc continue.
- 3) On utilise la positivité et la décroissance de chaque fonction.
- 4) $S(0) = \frac{\pi^2}{6}$. Puisque $S(x) \leq \frac{\pi^2}{6} e^{-x}$ (majoration immédiate), on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$.
- 5) On n'a plus convergence normale de la série des dérivées :

$$f'_n(x) = \frac{-n e^{-x}}{(n+x)^2} - \frac{2x e^{-nx}}{(n+x)^4},$$

ce qui montre que $\|f'_n\|_\infty = |f'_n(0)| = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}$.

En revanche, sur $]a; +\infty[$, on a

$$\|f'_n\|_\infty^{[a; +\infty[} = |f'_n(a)| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-na}}{n}.$$

◆ **SRF.11**

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx)^2}$.

- 1) Quel est le domaine \mathcal{D} de définition de la série $\sum u_n$?
- 2) Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cap \mathbb{R}^+$
- 3) Étudier les variations de la fonction u_n . Que peut-on conclure pour la convergence de $\sum u_n$? La somme S de la série $\sum u_n$ est-elle continue?
- 4) Montrer que la somme S est dérivable pour tout $x \neq 0$ de \mathcal{D} .
- 5) N étant un entier ≥ 1 , on pose $S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x)$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ (dépendant de N) tel que, pour tout $0 < x < \alpha$, on ait

$$\frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

En déduire la limite en 0 de $S(x)/x$. S est-elle dérivable en 0?

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:19bis]

- 1) u_n est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-n\}$, donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots\}$.
- 2) □ Soit $x \in \mathcal{D}$. Alors $|u_n(x)| \sim \frac{1}{n^3|x|}$, or la série $\sum \frac{1}{n^3}$ est sommable (Riemann) donc la série $\sum u_n(x)$ converge absolument par comparaison de séries positives, donc converge. □

En conséquence de quoi

il y a convergence simple sur \mathcal{D} .

- 3) On calcule $u'_n(x) = \frac{1-nx}{n(1+nx)^3}$ s'annule en $x = \frac{1}{n}$, et $u_n(1/n) = 1/4n^2$. De plus $u_n(0) = u_n(+\infty) = 0$, donc on a l'allure suivante de la fonction u_n :

On en déduit la convergence normale sur \mathbb{R}^+ .

De même, si $[a; b]$ est un segment de $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}^-$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > |b|$, $|u_n|$ atteint son maximum en b , qui vaut $b/n(1+nb)^2$. On a donc convergence normale sur tout segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}^- \setminus \{-N\}$.

En conclusion :

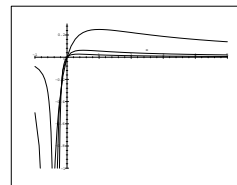
la somme S est continue en tout point de \mathcal{D} .

- 4) Soit $[a; b]$ un segment de $\mathcal{D} \setminus \{0\}$. Alors pour tout $n \geq 1/b$, on a

$$\forall x \in [a; b], \quad |u'_n(x)| \leq \frac{nb-1}{n(1+na)^3} = o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

ce qui montre la convergence normale de $\sum u'_n$ sur $[a; b]$.

S est dérivable en tout point de \mathcal{D} non nul.



Autre solution : on étudie u'_n et on montre qu'elle présente un maximum (en valeur absolue) en $2/n$, valant $-1/27n$, ce qui n'est pas sommable. En revanche, comme $|u'_n|$ est décroissante sur $[2/n; +\infty[$, la norme infinie sur $]a; +\infty[$ vaut, pour $n > 2/a$, $|u'_n(a)| = \frac{1-na}{n(1+na)^3} = O(\frac{1}{n^3})$, et cette fois-ci c'est sommable, ce qui prouve la CVN sur $]a; +\infty[$, et tout

le tralala.

- 5) Il existe $\alpha > 0$ tel que $N\alpha \leq \frac{1}{2}$, alors $\frac{1}{1 \pm n\alpha} \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in [1; N]$ donc, pour tout $x \in [-\alpha; \alpha]$, on a

$$\frac{u_n(x)}{x} = \frac{1}{n(1+nx)} \geq \frac{1}{2n} \quad \text{donc} \quad \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Or la suite $(S_N(x)/x)_N$ est croissante pour tout $x \in]-1; 1[$, ce qui montre que

$$\forall x \in]0; \frac{1}{2N} [\quad \frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Or $S(0) = 0$, donc le résultat précédent étant vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\frac{S(x)-S(0)}{x-0}$ tend vers $+\infty$ en 0^+ .

Conclusion : S n'est pas dérivable en 0.

◆ **SRF.12** (★★★)

On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad \forall x \geq 0, \quad f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x e^{-nx}}{\ln n}.$$

- 1) Montrer qu'il y a convergence simple sur \mathbb{R}^+ .
- 2) Montrer qu'il y a convergence normale sur tout intervalle du type $]a; +\infty[$ avec $a > 0$.
- 3) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur \mathbb{R}^+ .
- 4) Que peut-on dire de la somme $F = \sum_{n=0}^\infty f_n$?
- 5) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{*+} .
- 6) Montre que F n'est pas dérivable à droite.
- 7) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k F(x) = 0.$$

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:26bis]

- 1) On remarque que $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite converge simplement en 0. Si $x > 0$, la série $n \mapsto x e^{-nx}/\ln n$ est manifestement convergente (d'Alembert par exemple). Conclusion : il y a convergence simple de la série $\sum f_n$ sur \mathbb{R}^+ .
- 2) On étudie f_n :

$$f'_n(x) = \frac{(1-nx)e^{-nx}}{\ln n},$$

donc le maximum de f_n a lieu en $x = 1/n$, et vaut $f_n(1/n) = 1/(en \ln n)$. Évidemment la série des $\frac{1}{en \ln n}$ n'est pas sommable. C'est pourquoi il n'y a pas convergence normale sur \mathbb{R}^+ . En revanche, si $a > 0$, pour $n \geq 1/a$, le maximum de f_n est à gauche de a , et alors

$$\|f_n\|_\infty^{[a; +\infty[} = f_n(a) = \frac{a e^{-na}}{\ln n},$$

et cette série est bien convergente, d'après la question 1).

- 3) Puisqu'on n'a pas convergence normale sur \mathbb{R}^+ , il faut donc majorer la série des restes. On pose donc

$$R_N = \sum_{n=N+1}^\infty f_n,$$

et on remarque pour commencer que $R_N(0) = 0$. Enfin, pour tout $x > 0$ et pour tout $n \geq N$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x e^{-nx}}{\ln n},$$

et donc, par sommation,

$$\begin{aligned} 0 \leq R_N(x) &\leq \frac{x}{\ln(N+1)} \sum_{n=N+1}^\infty (e^{-x})^n \\ &= \frac{x e^{-Nx}}{(e^x - 1) \ln(N+1)} \leq \frac{\phi(x)}{\ln(N+1)} \end{aligned}$$

où l'on a posé $\phi(x) = \frac{x}{e^x - 1}$. Or ϕ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\phi(0) = 1$, et tend vers 0 en $+\infty$, donc est borné sur \mathbb{R}^+ . On a donc une majoration valable sur \mathbb{R}^+ tout entier (et pas seulement \mathbb{R}^{*+}), et en posant $M = \sup \phi$, on a

$$\forall x \geq 0, \quad |R_N(x)| \leq \frac{M}{\ln(N+1)},$$

ce qui montre que $\|R_N\|_\infty \leq \frac{M}{\ln(N+1)}$ et donc tend vers 0. Ceci montre la convergence uniforme de la série $\sum f_n$ sur \mathbb{R}^+ .

- 4) On en déduit que F est continue sur \mathbb{R}^+ .
- 5) On montre que la série $\sum f'_n$ est normalement convergente sur $]a; +\infty[$ et ce, pour tout choix de $a > 0$. En effet, pour tout $n \geq 1/a$ et pour tout $x \geq a$, on a

$$|f'_n(x)| = (nx-1) \frac{e^{-nx}}{\ln n} \leq n f_n(x) \leq n f_n(a),$$

et la série des $n f_n(a)$ est convergente.

On en déduit, par théorème de dérivation, que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{*+} (attention : pas en 0, hélas!), et que pour tout $x > 0$, on a

$$F'(x) = \sum_{n=2}^\infty (1-nx) \frac{e^{-nx}}{\ln n}.$$

- 6) Posons $T(x) = S(x)/x$ pour tout $x > 0$ et montrons que T tend vers l'infini en 0. Or,

$$T(x) = \sum_{n=2}^\infty \frac{e^{-nx}}{\ln n}$$

est une somme d'applications décroissantes, donc est elle-même décroissante. Il suffit donc de montrer que T n'est pas majorée en 0.

► **Supposons que T soit majorée par un réel M.** Alors, pour tout entier $N \geq 2$ et pour tout $x > 0$, on aurait

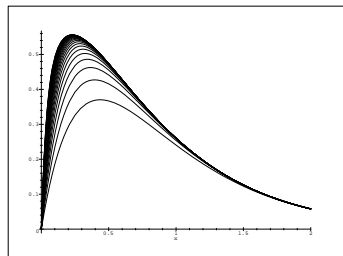
$$0 \leq \sum_{n=2}^N \frac{e^{-nx}}{\ln n} \leq M$$

et il est possible, la somme étant finie, de faire tendre x vers 0, ce qui montre que

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{\ln n} \leq M,$$

et ce pour tout $N \in \mathbb{N}$, **ce qui n'est certainement pas vrai** puisque la série des $1/\ln n$ diverge. ◀

On en déduit donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{T(x)}{x} = +\infty$. Or $F(0) = 0$, donc F n'est pas dérivable à droite. Le graphe de la fonction F présente donc une demi-tangente verticale, comme on le voit d'ailleurs sur la figure ci-dessous, qui présente les sommes partielles de la série.



7) La propriété que l'on demande de montrer s'appelle : **décroissance rapide** de la fonction F .

Pour la montrer, on commence par noter que c'est l'exponentielle qui va tout faire, le $\ln n$ ne sert à rien, on majore alors $f_n(x)$ par $x e^{-nx} / \ln 2$. On en déduit

$$0 \leq F(x) \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x(e^{-x})^n}{\ln 2} = \frac{x e^{-x}}{(\ln 2)(e^x - 1)} = \frac{e^{-x}}{\ln 2} \phi(x),$$

avec $\phi(x) = x/(e^x - 1)$ fonction bornée sur \mathbb{R}^+ . On a donc

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq \frac{M}{\ln 2} e^{-x},$$

ce qui suffit pour montrer la propriété désirée.

◆ **SRF.13** (*)

Étudier la convergence et calculer la somme de la série de fonctions $\sum f_n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f_n(x) = nx^2 e^{-nx}.$$

En posant $F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$, calculer $F(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$. Commentaire?

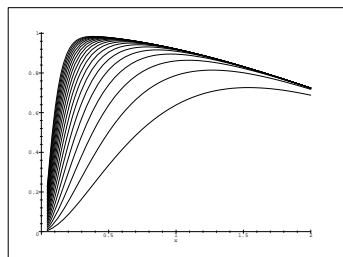
◊ [Divers/serifonexo.tex/srf:27]

On montre d'abord la convergence normale sur $[a, +\infty[$. Puis, on pose $F = \sum f_n$ et on remarque que

$$h(x) = \sum e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad h'(x) = -\sum n e^{-nx} = \frac{-e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$$

donc $F(x) = \frac{-x^2 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 1 \neq F(0) = 0$.



◆ **SRF.14**

Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = -\gamma$, où γ est la constante d'Euler définie par

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

INDICATION : On utilisera la suite de fonctions

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x > n, \end{cases}$$

dont on sait qu'elle converge simplement vers e^{-x} .

On calculera $\frac{n}{n+1} \ln n + n \int_0^1 y^n \ln(1-y) \, dy$ par une intégration par partie, en choisissant $y \mapsto \frac{y^{n+1}-1}{n+1}$ comme primitive de $y \mapsto y^n$ afin de faire apparaître la fraction $\frac{1-y^{n+1}}{1-y}$.

◊ [Divers/serifonexo.tex/srf:29]

On a donc

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, dx &= n \int_0^1 y^n \ln [n(1-y)] \, dy & y = 1 - \frac{x}{n} \\ &= \frac{n}{n+1} \ln n + n \int_0^1 y^n \ln(1-y) \, dy. \end{aligned}$$

qui donne, les termes de bord disparaissant :

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^n \ln(1-y) \, dy &= \left[\frac{y^{n+1}-1}{n+1} \ln(1-y) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{y^{n+1}-1}{n+1} \frac{1}{1-y} \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{y^{n+1}-1}{n+1} \frac{1}{1-y} \, dy = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n y^k \right) \, dy \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, dx = -\frac{n}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

On effectue un IPP, et on choisit $y \mapsto \frac{y^{n+1}-1}{n+1}$ comme primitive de $y \mapsto y^n$, ce

◆ **SRF.15** (**)

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} définie par $f_0 \equiv 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0; 1], \quad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2) \, dt.$$

INDICATION : On pourra étudier la série de fonctions associée, en posant $g_n = f_{n+1} - f_n$, après avoir montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est croissante.

◊ [Divers/serifonexo.tex/srf:34]

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g_n \stackrel{\text{dét}}{=} f_{n+1} - f_n$. Alors $g_0(x) = x$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0; 1], \quad g_{n+1}(x) = \int_0^x g_n(t - t^2) \, dt.$$

pour tout $t \in [0; 1]$, donc

$$0 \leq g_{n+1}(x) = \int_0^x g_n(t - t^2) \, dt \leq \int_0^x g_n \left(\frac{1}{4} \right) \, dt = x g_n \left(\frac{1}{4} \right).$$

On en déduit que $0 \leq g_{n+1}(x) \leq x g_n(1/4) \leq (1/4)^{n+1}$. La série $\sum g_n$ est donc normalement convergente sur $[0; 1]$, donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur $[0; 1]$.

On montre par récurrence que g_n est positive et croissante. Or $0 \leq t - t^2 \leq \frac{1}{4}$

◆ **SRF.16** (♣)

Étudier la convergence (simple et normale) des séries de fonctions de terme général

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x^n e^{-nx}, \quad I =]0; +\infty[& g_n(x) &= \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}, \quad I =]0; +\infty[\\ h_n(x) &= \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}, \quad I =]0; +\infty[& k_n(x) &= \frac{(-1)^n}{x^2 + n}, \quad I = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

INDICATION : Pour la série $\sum h_n$, on pourra avantageusement multiplier par e^{-x} pour simplifier les calculs. Pour $\sum h_n$ et $\sum k_n$, on pourra grouper les termes par deux.

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:35]

On note $\phi_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ puis on regroupe :

$$\psi_n(x) = \frac{e^{-2nx}}{2n} - \frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}$$

ce qui en dérivant donne

$$\psi'_n(x) = e^{-2nx} + e^{-(2n+1)x} > 0$$

et donc

$$\|\psi_n\|_\infty = \psi_n(0) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$$

ce qui prouve la convergence normale.

◆ **SRF.17** (*)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N} : f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}.$$

- 1) Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série de fonction $\sum f_n$ est-elle simplement convergente ?
- 2) Montrer qu'elle est uniformément convergente sur $[0; 1]$.
- 3) Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$, sa somme est égale à $-\ln(x+1)$.
- 4) En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:36]

Pour $x \in]-1, 1[$. On évalue ensuite le reste sur $[0; 1]$ et grâce au CSA, il tend vers 0. Puis la série étant dérivable terme à terme (car la série dérivée est

une série géométrique) sur $[0; 1[$ et sa dérivée étant $1/(1+x)$, on en déduit la valeur de la série. Enfin, on utilise un théorème de continuité sur le bord de l'intervalle de définition.

◆ **SRF.18**

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur l'intervalle I des séries de fonctions

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{n+1} \ln x & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad g_n(x) = \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}, \quad I = \mathbb{R}$$

$$h_n = (-1)^n f_n, \quad I = [0; 1].$$

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:37]

◆ **SRF.19** (*)

Montrer que la série $\sum nxe^{-nx^2}$ converge normalement sur tout compact de \mathbb{R}^{+*} , et que sa somme F est la dérivée d'une fonction connue. En déduire F(x) pour tout $x > 0$.

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:38]

$x \mapsto nxe^{-nx^2}$ est la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-nx^2}$. F est alors la dérivée d'une

série géométrique.

◆ **SRF.20** (**)

Convergence et somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$.

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:40]

On n'a pas convergence normale ou uniforme, donc le théorème du cours ne s'applique pas.

On note $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ (bien définie grâce au CSA) et R_n le reste. Alors S est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et bornée (toujours le CSA); on admet que, en posant $S(0) = 1/2$ de manière arbitraire, on obtient une fonction continue par morceaux — ou alors, si on a déjà vu le cours sur l'intégration, on sait que S étant bornée, elle est intégrable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

$$\int S(x) \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n(x) \, dx + \int R_n(x) \, dx,$$

puis qu'on ne permute que f et une somme finie. Il suffit de montrer que

$\int R_n(x) \, dx$ tend vers 0 (bien que $\|R_n\|_\infty$ ne tende pas vers 0. Or justement

$$\left| \int_0^{\pi/2} \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n \cos^n x \, dx \right| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{N+1} x}{1 + \cos x} \, dx$$

$$\leq \int_0^{\pi/2} \cos^{N+1} x \, dx \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos^n x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos x} \, dx = 1.$$

◆ **SRF.21** (*)

Étudier la série de fonctions $\sum u_n$ avec $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que la somme est périodique.

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 - n^2}$$

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:41]

◆ **SRF.22** (*)

Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. On suppose que la série de terme général $u_n = \int_0^1 x^n f(x) \, dx$ converge. Que vaut $f(1)$?

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:42]

Il faut que $f(1) = 0$. Sinon $u_n \sim f(1)/n$ diverge.

◆ **SRF.23** (Z)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[0; 1]$ qui converge uniformément vers f sur $]0; 1[$. Montrer que la convergence est en réalité uniforme sur $[0; 1]$.

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:43]

◆ **SRF.24** (**)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{R}^* , telle que $\sum a_n^2$ converge. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+x}$. Montrer que f est définie et continue sur $]0; +\infty[$, et déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

◇ [Divers/serifonexo.tex/srf:44]

On note $f_n : x \mapsto \frac{a_n}{n+x}$. Alors toutes les fonctions f_n avec $n \geq 1$ sont définies et continues sur $]0; +\infty[$, seule f_0 n'est continue que sur $]0; +\infty[$. On a de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^* :$

$$\|f_n\|_\infty = \frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right),$$

ce qui montre la convergence normale de la série sur $]0; +\infty[$. Ainsi, f est

définie et continue sur $[0; +\infty[$, et $f - f_0$ est continue en 0, ce qui montre que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{a_0}{x}.$$

Enfin, la convergence normale sur $[1; +\infty[$ montre que l'on peut échanger limite et somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

◆ **SRF.25** (**)

Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de fonctions de terme général $u_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n}}$ (avec $n \geq 0$). On notera S la somme de cette série. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} S(x)$ et en déduire que S est discontinue en 0.

◇ [Divers/serifonexo.tex/div:113]

Pour la limite en 0, des techniques de monotonie montrent que

Il y a convergence simple sur $\mathbb{R}^+.$

On calcule $u'_n(x) = (2x - x^2\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}$ qui s'annule en $x = 2/\sqrt{n}$, et $u_n(2/\sqrt{n}) = 4/n e^2$. Il n'y a donc pas de convergence normale.

On montre convergence normale sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} \, dt = 2.$$

(Poser $y = \sqrt{t}$.) Donc la limite est discontinue en 0.

◆ **SRF.26** (***)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur \mathbb{R}^+ , et telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose de plus que $\sum f_n$ converge simplement (voire uniformément) sur \mathbb{R} , et on note $F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Que peut-on dire de F ?

◇ [Divers/serifonexo.tex/div:120]

et $f(x) = x$ sinon.

On définit $f_n(x) = 0$ si $0 \leq x < n$, $f_n(x) = -(n+2)x$ si $x \in [n; n+1[$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ mais $F(x) \leq -x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

◆ **SRF.27** (***)

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N} : f_n(x) = n e^{-n^2 x}$.

- 1) Étudier l'existence, la continuité et la dérivabilité de $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.
- 2) Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?
- 3) Trouver un équivalent de f en 0.

◇ [Divers/serifonexo.tex/div:121]

$$[f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0; +\infty[.]$$

- 1) On montre qu'il y a convergence simple de $\sum f_n$ sur $]0; +\infty[$, et convergence normale de $\sum f_n$ sur tout segment de $]0; +\infty[$.

$$[f \text{ est définie et continue sur }]0; +\infty[.]$$

- 2) La convergence normale de $\sum f_n$ sur $[1; +\infty[$ permet de conclure que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

On peut également écrire f sous la forme

$$f : x \mapsto e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n^2-1)x} = e^{-x} g(x),$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 . La série $\sum f'_n$ converge normalement sur tout segment $[a; b]$ de $]a; b[$. On en déduit que

grâce au théorème de convergence dominée.
Ou bien on calcule

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x \sqrt{1 - \sin^2 x} \cos x \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^2 x \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x \, dx = I_n - I_{n+2} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n a_n = I_0 - I_1 + (-1)^N I_{N+1} + (-1)^{N+1} I_{N+2}$$

or $\lim I_N = 0$ par le th. de convergence dominée, donc la série a pour limite

$$I_0 - I_1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

SRF.31 (☛) X PC – 1998

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes, $M > 0$ et $\rho > 0$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| \leq M n^\rho$. On définit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi n x / \lambda} \quad \text{et} \quad \phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

- 1) Quels sont les domaines de définition de f et ϕ ?
- 2) Étudier la continuité de f et de ϕ .
- 3) Montrer que, pour tout $s \in]1 + \rho; +\infty[$,

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \phi(s) \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} \, dt = \int_0^{+\infty} t^{s-1} f(t) \, dt.$$

◇ [Rec00/serifon-r0.tex/supp-r0:5]

- 1) f est définie sur $]0; +\infty[$, quant à ϕ , elle est définie sur $]1 + \rho; +\infty[$. Au moins ! (Les intervalles pouvant être fermés)
- 2) Ces fonctions sont manifestement continues sur les intervalles ouverts.
- 3) Intégration terme à terme.

SRF.32 (Équivalent de $\zeta(x)$ en $x = 1^+$) (☛) X PC – 1998

On note $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}} = \zeta(1+x)$, où ζ est la fonction de Riemann.

- 1) Étudier l'existence et la continuité de f .
- 2) Que dire du comportement de f en $+\infty$?

$$\text{3) Montrer que, pour tout } x > 0, \text{ on a } f(x) = \frac{\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} \, dt}{\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \, dt}.$$

- 4) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x)$.

◇ [Rec00/serifon-r0.tex/supp-r0:6]

- 1) On a existence pour $x > 0$, et continuité par domination locale sur $]r; +\infty[$ pour $r > 0$.
- 2) On utilise le théorème de convergence dominée pour montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$ pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite infinie : le premier terme est 1, tous les autres tendent vers 0.
- 3) En développant le dénominateur, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1 - e^{-t}} \, dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} t^x e^{-(n+1)t} \, dt.$$

On utilise le théorème sans nom pour intégrer terme à terme, ce qui donne, après un changement de variable $y = (n+1)t$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1 - e^{-t}} \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{1+x}} \int_0^{+\infty} y^x e^{-y} \, dy,$$

d'où le résultat.

- 4) On écrit

$$x f(x) = \frac{\int_0^{+\infty} \frac{x t^x}{e^t - 1} \, dt}{\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \, dt}.$$

Le dénominateur tend vers 1. Étudions le numérateur : le problème est bien sûr en $t = 0$, puisque pour $x = 0$ on n'a plus d'intégrabilité.

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} \, dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} = C^{\text{te}},$$

et de plus

$$\int_0^1 \frac{t^x}{e^t - 1} \, dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_0^1 t^{x-1} \, dt = \frac{1}{x}$$

puisque la différence des intégrales est intégrable quand $x = 0$, donc est bornée par continuité d'une intégrale à paramètres, et que chaque intégrale diverge vers $+\infty$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} \, dt = 1$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x) = 1.$$

On en déduit évidemment que $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$, c'est-à-dire que

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

SRF.33 (Recherche d'équivalent) (***) Mines PC – 1998

Existence et équivalent de 0 de $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Arc tan } nx}{n^2}$.

◇ [Rec00/serifon-r0.tex/supp-r0:11]

Existence immédiate sur tout \mathbb{R} grâce à la convergence normale, dont on déduit la continuité. On a donc $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 0$.

On utilise le fait que, pour x fixé, la fonction $t \mapsto \frac{\text{Arc tan } tx}{t^2}$ est décroissante.

En effet, la fonction $t \mapsto \frac{\text{Arc tan } t}{t^2}$ l'est :

LEMME La fonction $f : t \mapsto \frac{\text{Arc tan } t}{t^2}$ est décroissante.

Démonstration : On dérive :

$$f'(t) = \frac{t^2 - 2(1+t^2)t \text{Arc tan } t}{t^4(1+t^2)}.$$

Il faut montrer que le numérateur est toujours négatif. Pour cela, on pose

$$g(t) = 2(1+t^2) \text{Arc tan } t - t = h(t) - t.$$

Or $h'(t) = 2 + 2t \text{Arc tan } t \geq 2$ pour tout $t \geq 0$, ce qui montre que la dérivée de g est toujours positive, et on peut conclure,

avec $g(0) = 0$, que g est toujours positive, donc f est décroissante.

On en déduit que

$$\int_n^{n+1} \frac{\text{Arc tan } tx}{t^2} \, dt \leq \frac{\text{Arc tan } nx}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{\text{Arc tan } tx}{t^2} \, dt$$

et donc, après sommation et changement de variable,

$$x \int_{2x}^{+\infty} \frac{\text{Arc tan } y}{y^2} \, dy \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\text{Arc tan } nx}{n^2} \leq x \int_x^{+\infty} \frac{\text{Arc tan } y}{y^2} \, dy.$$

Or on a

$$\int_x^{+\infty} \frac{\text{Arc tan } y}{y^2} \, dy \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x,$$

comme on peut le voir en montrant que la différence de ces deux termes admet une limite finie (écrire $-\ln x = \int_x^1 (1/t) \, dt$), ce qui montre que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Arc tan } nx}{n^2} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -x \ln x.$$

SRF.34 (*) CCP PC – 2005

On pose, lorsque cela a un sens : $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^3(nx)}{n!}$. Donner le domaine de définition de S et la calculer.

◇ [Rec00/serifon-r0.tex/r0:32]

On linéarise le sinus, on passe en notations exponentielles, on obtient la défini-

tion d'une exponentielle.

SRF.35 X PC – 2001

On pose $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^n}{1-t^n}$, pour $t \in \mathbb{C}$. Ensemble de définition? Propriété de f ?

◇ [Rec01/serifon-r1.tex/srf-r:6]

SRF.36 ICNA PC – 2001

Nature de la série $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(n e^{-x} x + x^2)^n} \, dx$?

◇ [Rec01/serifon-r1.tex/srf-r:1]

Charlène Merio : « On doit aboutir à des intégrales de Wallis. L'examinateur

avait un corrigé de trois pages. »

SRF.37 (***) CCP MP – 2001

Nature de la série de terme général $u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$?

◇ [Rec01/serifon-r1.tex/srn-r:3]

Si on connaît le résultat classique sur les intégrales de Wallis, on sait que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$ donc la série diverge.

Sinon, on peut dire que si cette série positive converge, alors en vertu du

théorème du cours sur l'intégration terme à terme d'une série, et puisque la série $\sum \sin^n x$ converge simplement sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ vers la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1 - \sin x}$, on aurait intégrabilité de f , ce qui est loin d'être le cas (en $\pi/2$, ça n'est clairement pas intégrable !)

SRF.38 (*) Centrale PC – 2001

On pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$. Étudier les différents modes de convergence de $\sum f_n$ sur \mathbb{R}^+ .

En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

◇ [Rec01/serifon-r1.tex/srf-r:2]

CSA. La convergence normale n'a lieu que sur $]a; +\infty[$ pour tout $a > 0$. Enfin,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-kx}}{k} \right| \leq \frac{e^{-nx}}{n} \leq \frac{1}{n}$$

On a convergence simple sur \mathbb{R}^{++} grâce à l'exponentielle, et en 0 grâce au

toujours grâce au CSA. Donc on a convergence uniforme sur \mathbb{R}^+ .

On a $f'_n(x) = (-1)^{n+1}e^{-nx}$ et la série $\sum f'_n$ converge uniquement sur $]0; +\infty[$; de plus, elle converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$, ce qui montre que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

On remarque ensuite que F' est une belle série géométrique, que l'on peut donc calculer :

$$S'(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}},$$

◆ **SRF.39** (★) Mines MP – 2001
 Convergence et somme de $\sum f_n$ avec $f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$ sur \mathbb{R}^+ .

On montre d'abord la convergence normale sur $[a, +\infty[$. Puis, on pose $F = \sum f_n$ et on remarque que

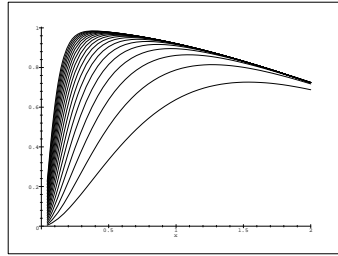
$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

$$h'(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} = \frac{-e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$$

donc $F(x) = \frac{-x^2 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 1 \neq F(0) = 0$.

On remarque que la fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$.



◆ **SRF.40** CCP PC – 2001
 Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de fonctions de terme général $u_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

On calcule $u'_n(x) = (2x - x^2\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}$ qui s'annule en $x = 2/\sqrt{n}$, et $u_n(2/\sqrt{n}) = 4/n e^2$. Il n'y a donc pas de convergence normale. On montre convergence normale sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.

Pour la limite en 0, des techniques de monotonie montrent que

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt = 2.$$

(Poser $y = \sqrt{t}$.) Donc la limite est discontinue en 0.

◆ **SRF.41** CCP MP – 2001
 On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ et $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-x}$. Déterminer leurs ensembles de définition, montrer leur continuité sur ces ensembles. Étudier leur comportement à l'infini.

On remarque que la fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$.

◆ **SRF.42 (Recherche d'équivalent)** Centrale – 2001
 On pose $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p+x)^2}$.

- 1) Domaine de définition de f ?
- 2) Donner un équivalent de f en $+\infty$.
- 3) Donner un deuxième terme dans le développement de f .

On remarque que la fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$.

◆ **SRF.43** Mines MP – 2001
 On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n$.

- 1) Domaine d'existence ? Continuité de f ?
- 2) Dérivabilité de f ?
- 3) En utilisant $\phi : u \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{u^n}{n^2}$, décomposer f en fonctions élémentaires.

On doit trouver $f(x) = -\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

◆ **SRF.44** ENSAI MP – 2001
 On pose $f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ sur \mathbb{R}^+ . Étudier la convergence simple et uniforme.

Convergence simple vers 1.

◆ **SRF.45** Mines MP – 2001
 On pose $u_n(t) = t^{n-1} \cos nt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0, 2\pi[$.

- 1) Étudier la série $t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$.
- 2) Calculer les sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de cette série.
- 3) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(t) dt$.
- 4) En déduire $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nt}{n}$.

On remarque que la fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$.

◆ **SRF.46** CCP MP – 2001
 On considère la série de terme général $x \mapsto \frac{x^2 \cos nx}{n^2 + x^2}$.

- 1) Étudier la convergence absolue.
- 2) Étudier la convergence uniforme sur $[-a, a]$, pour $a > 0$.
- 3) Calculer la somme de la série.

On remarque que la fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$.

◆ **SRF.47** CCP MP – 2001
 On pose $u_n(x) = \cos(nx)/n$ et $v_n(x) = \sin(nx)/n$. Domaine de convergence simple et uniforme de chaque série ? Continuité de $\sum u_n$ sur \mathbb{R}^* ?

On remarque que la fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$.

◆ **SRF.48 (Diarquerie)** (★★★) Mines MP – 2001
 Déterminer, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^t \sin nt}{t} dt$.

Pas de problème d'existence de l'intégrale, de plus on peut écrire $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ avec $f_n(t) = \frac{e^{t/n} \sin t}{t} \chi_{]0; n]}$, et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie : $|f_n(t)| \leq (e \sin t)/t$, qui n'est hélas ! pas intégrable. Il faut donc « couper » l'intégrale, et majorer la partie $[M, +\infty[$, pour trouver in fine $e\pi/2$.

◆ **SRF.49** TPE MP – 2001
 Existence, continuité, dérivabilité et graphe de $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + n^4}$.

On remarque que la fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$.

◆ **SRF.50** Centrale MP – 2001
 Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$.

On remarque que la fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$.

◆ **SRF.51 (Recherche d'équivalent)** INT MP – 2001
 On pose $f_n : x \mapsto e^{-n^2 x}$ et on note f la somme de la série $f = \sum_{n \geq 1} f_n$.

- 1) Quel est le domaine de définition de f ?
- 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, et trouver un équivalent de f en 0.

◇ [Rec01/serifon-r1.tex/srf-r:26]

◆ **SRF.52 (Une astuce ?)** (★★★) Mines MP – 2001

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante à valeurs dans \mathbb{R}^{+*} .

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}.$$

◇ [Rec01/serifon-r1.tex/srf-r:27] En revanche, on peut considérer la suite de sommes partielles et vérifier aisément qu'elle converge et est dominée par le premier terme, qui est intégrable. On peut donc conclure à la permutation des limites.

◆ **SRF.53 (Recherche d'équivalent)** (★★) Mines PC – 2002

Domaine de définition, continuité et équivalent en $+\infty$ de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh}(nx)}$.

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r:5] (Cf. une version plus longue en SRF.77 page 484.)

Définition : la série n'a de sens que sur \mathbb{R}^* et converge sur cet ensemble car $\text{sh } nx \sim e^{nx}/2$ pour $x > 0$ et $\text{sh } nx \sim -e^{-nx}/2$ pour $x < 0$ (les fonctions sont impaires), et les théorèmes sur les équivalents font le reste.

Continuité : on peut se limiter à $x > 0$; il y a alors convergence normale sur $[a; +\infty[$ pour $a > 0$ car sh est croissante, la limite est donc limite uniforme de somme de fonctions continues, elle est continue sur cet intervalle puis, sur \mathbb{R}^{+*} en faisant varier a .

Équivalent en $+\infty$: il y a équivalence avec le premier terme : $f(x) \sim 2/e^{-nx}$, on majore bêtement la série pour $n \geq 2$ par une série géométrique en utilisant $\text{sh } nx \geq e^{2n}/3$ pour $x \geq 1$ par exemple.

◆ **SRF.54 (Recherche d'équivalent)** (★★) Mines MP – 2002

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$. Montrer que f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}^* . Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r:23] Les fonctions sont décroissantes en x , il y a donc convergence normale sur $[a; \infty[$ avec majoration du reste par celui en a .

Pour l'équivalent en ∞ , on va montrer que

$$\frac{\alpha}{x^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \leq f(x) \leq \frac{\alpha}{x^2},$$

ce qui montre que

$$f(x) \sim \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} \right).$$

On commence par encadrer par exemple

$$\frac{1}{n^3 x^2} \geq \frac{1}{n(1+n^2x^2)} = \frac{1}{n^3 x^2 (1 + 1/n^2 x^2)} \geq \frac{1}{x^2 n^3} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \right).$$

On pose $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. On a alors après sommation :

Pour l'équivalent en 0, on compare avec une intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t(1+t^2x^2)} = -\ln(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = -\ln x + o(\ln x),$$

l'équivalent est $-\ln x$.

◆ **SRF.55 (Recherche d'équivalent)** (★★) Centrale PC – 2002

On note $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

- 1) Domaine de définition ?
- 2) Donner un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r:29] Cf. l'exercice SRF.54.

On étudie les fonctions, et on montre que $\|f_n\|_{\infty} = \frac{1}{2n^2}$ ce qui montre la continuité de f sur \mathbb{R} .

Pour l'équivalent en $+\infty$, on va montrer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \right).$$

ce qui montre que

$$\frac{\alpha}{x} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \leq f(x) \leq \frac{\alpha}{x},$$

On commence par encadrer par exemple

$$\frac{1}{n^3 x} \geq \frac{x}{n(1+n^2x^2)} = \frac{x}{n^3 x^2 (1 + 1/n^2 x^2)} \geq \frac{1}{xn^3} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \right).$$

On pose $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. On a alors après sommation :

Pour l'équivalent en 0, on compare avec une intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{x dt}{t(1+t^2x^2)} = -x \ln(x) + \frac{x}{2} \ln(1+x^2),$$

l'équivalent est $-x \ln x$.

◆ **SRF.56** (★★★) Centrale PC – 2002

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + x^2}$ pour tout $x \geq 0$.

- 1) Domaine de définition et calcul de $f(0)$.
- 2) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^{∞} sur \mathbb{R} .

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r:24] Bien définie sur \mathbb{R}^+ grâce au critère de Leibniz.

On a $f(0) = \ln 2$ (résultat sur les séries entières par exemple, en montrant la CVU grâce à une majoration des restes par Leibniz).

On pose ensuite $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On a alors $f_n(x) = \frac{1}{n} g\left(\frac{x}{n}\right)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons que la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur tout compact de \mathbb{R}^+ .

□ Soit $[0; b]$ un intervalle de \mathbb{R}^+ . Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n^{k+1}} g^{(k)}\left(\frac{x}{n}\right),$$

donc, sur $[0; b]$,

$$\|f_n^{(k)}\|_{\infty}^{[0; b]} \leq \frac{1}{n^{k+1}} \|g\|_{\infty}^{[0; b]},$$

ce qui assure la convergence normale de $\sum f_n^{(k)}$ sur $[0; b]$. Ainsi F est de classe \mathcal{C}^k sur $[0; b]$. Ceci étant vrai pour tout b et pour tout k , F est de classe \mathcal{C}^{∞} sur \mathbb{R}^+ .

◆ **SRF.57 (Recherche d'équivalent)** (★★) Centrale MP – 2002

Trouver un équivalent en 0 de

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh } nx} \quad \text{et} \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh}^2 nx}.$$

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r:13] Les fonctions $x \mapsto 1/\text{sh}(nx)$ sont décroissantes, on compare à l'intégrale

$$I(x) = \int_1^{\infty} \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt = \frac{1}{x} \ln \left| \frac{1+e^x}{1-e^x} \right| \sim \frac{\ln x}{x},$$

puis

$$I(x) \leq S_1(x) \leq I(x) + \frac{1}{\text{sh}(x)}$$

donne

$$S_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln x}{x}.$$

Pour la seconde, on encadre $1/\text{sh}(nx)$ en 0 puis on somme : pour $x > 0$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\text{sh}^2 nx} \leq S_2(x) \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

On multiplie par x^2 , et on « passe » aux limites

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \leq \liminf x^2 S_2(x) \leq \limsup x^2 S_2(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

En prenant le sup en N , il vient

$$S_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}.$$

◆ **SRF.58** (*) CCP PC – 2002

Notons $u_n(x) = e^{-nx} - (1-x)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2) Calculer f .
- 3) La convergence est-elle uniforme ?

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r:11] Ce sont des séries géométriques : $f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}$.

- 1) En 0, on a $u_n(0) = 0$ donc $f(0) = 0$. Pour $x < 0$ on a divergence. Pour $x > 0$, la série des exponentielles converge, la série des $(1-x)^n$ ne converge que pour $x \in]0; 2[$.
- 3) S'il y avait convergence uniforme, on pourrait inverser les signes $\lim_{x \rightarrow 0} \sum$, mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2} \neq 0$. Donc il n'y a pas convergence uniforme.

◆ **SRF.59** CCP MP – 2002

On pose $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur tout compact de $] -1; 1[$, mais n'y converge pas uniformément.

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r:14] Les fonctions sont monotones en x sur $[0; 1[$, ce qui justifie la convergence normale. Pour montrer que la convergence n'est pas uniforme, on encadre le reste grâce à $1 \leq 1+x^{2n} \leq 2$.

◆ **SRF.60** (*) CCP MP – 2002

Convergence et somme de $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^n f(x) dx$, où f est une fonction continue sur $[0; 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r2:15] $\sum (-1)^n x^n f(x)$ vers $\frac{f(x)}{1+x}$, puisque f est bornée. Il faut intervertir la somme et l'intégrale; ce qui est simple car on a convergence uniforme de la série $\sum (-1)^n x^n f(x)$ vers $\frac{f(x)}{1+x}$, puisque f est bornée.

◆ **SRF.61** CCP MP – 2002

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \sin x$. Préciser le domaine de définition de f et étudier la convergence normale et uniforme.

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r2:10] Il faut et suffit que $x \sin(x) > 0$. La série est alors juste une composée d'une série géométrique de somme $\frac{1}{1-x}$ et $g(x) = e^{-x \sin x}$. Il y a convergence normale sur tout ensemble A dont l'image par g est un compact de $]0; 1[$! Il n'y a pas convergence uniforme !

◆ **SRF.62 (Recherche d'équivalent)** CCP PC – 2002

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

- 1) Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur \mathbb{R} et justifier l'existence de la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
- 2) On définit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $(x, t) \mapsto \frac{x}{1+tx^2}$. Montrer que la fonction $G : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, t) dt$ est continue et expliciter sa dérivée.
- 3) Donner un équivalent en l'infini de $S(x)$ et de $G(x)$.
- 4) Équivalent en 0 ?

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r2:4] Cf. l'exercice **SRF.55**. donc

$$\frac{\pi^2}{6x} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \right) \leq S(x) \leq \frac{\pi^2}{6x}$$

1) On écrit $f_n(x) = \frac{1}{n^{3/2}} g(\sqrt{n}x)$ où n est bornée, ce qui prouve la convergence normale.

2) ???

3) On écrit $\frac{1}{n^2x(1+\frac{1}{x^2})} \leq \frac{1}{n^2x(1+\frac{1}{nx^2})} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^2x}$

d'où $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$

4) Une comparaison classique avec une intégrale plus des bidouillages classiques eux aussi permettent d'obtenir

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -2x \ln x.$$

◆ **SRF.63** ENSEA PC – 2002

On définit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+n^2x)}$. Étudier la continuité et la dérivabilité de f .

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r2:12] Continue sur \mathbb{R}^+ et dérivable sur \mathbb{R}^{*+} , encore **SRF.54**.

◆ **SRF.64 (Recherche d'équivalent)** TPE PC – 2002

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

- 1) Préciser le domaine de définition de f .
- 2) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^{∞} sur son domaine de définition.
- 3) Étudier la fonction $x \mapsto f(x+1) - x f(x)$.
- 4) En déduire un équivalent de f en 0.

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r2:16]

1) Les fonctions sont définies sur $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$, la série converge simplement sur cet ensemble (théorème de majoration) et normalement sur tout sous-compact.

2) Immédiat par récurrence.

3) On calcule $f(x+1) - x f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} - 1 = -\frac{1}{e}$.

4) Comme f est continue en 1 et $f(1) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$, on en déduit

$$f(x) \sim \frac{1}{x} \text{ (ce qui était évident par ailleurs).}$$

◆ **SRF.65** ENSAE MP – 2002

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{R}^{*+} , croissante et divergente. On pose $f_n(t) = (-1)^n e^{-a_n t}$.

- 1) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^{*+} . On pose alors $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$.
- 2) Montrer que f est intégrable sur \mathbb{R}^{*+} .
- 3) Calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r2:19]

- 1) Si la suite est croissante divergente, la série est alors alternée et converge.
- 2) Par les estimations de reste

$$\left| f(t) - \sum_{n=0}^{k-1} f_n(t) \right| \leq e^{-a_k t},$$

la convergence est uniforme sur $[a; +\infty[$ pour tout $a > 0$ et $|f| \leq 1$. La limite est donc continue sur \mathbb{R}^{*+} , ce qui donne l'intégrabilité en 0. En prenant $k = 0$, $|f|$ est dominée par une fonction intégrable $e^{-a_0 t}$ donc intégrable.

3) Plutôt qu'invoquer un théorème, il vaut mieux intégrer les inégalités précédentes

$$\left| \int_0^{\infty} f - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n}{a_n} \right| \leq \frac{1}{a_k},$$

en passant à la limite :

$$\int_0^{\infty} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$$

(la série dans la limite est alternée).

◆ **SRF.66** TPE MP – 2002

On pose $f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série $\sum f_n$ sur \mathbb{R}^+ , puis sur un intervalle $[a; +\infty[$ où $a > 0$.

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r2:20]

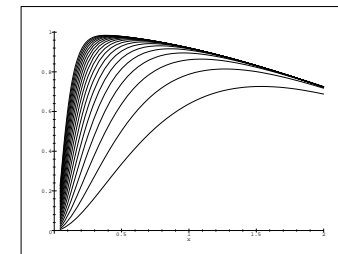
Déjà vu aux Mines MP 2001.

On montre d'abord la convergence normale sur $[a, +\infty[$. Puis, on pose $F = \sum f_n$ et on remarque que

$$h(x) = \sum e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} \quad h'(x) = -\sum n e^{-nx} = \frac{-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$

donc $F(x) = \frac{-x^2 e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 1 \neq F(0) = 0$.



◆ **SRF.67** CCP MP – 2002

On définit $u_n : t \mapsto \frac{t}{1+n^2 t^2}$ et $f = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Définir et étudier la continuité de f ?

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r2:22] $t \neq 0$,

La convergence a lieu sur \mathbb{R} , par équivalent sur \mathbb{R}^* et trivialement en 0. La convergence est normale sur $A \geq |t| \geq a > 0$, la fonction est donc continue sur \mathbb{R}^* .

$$f(t) - t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \int_0^{\infty} \frac{t}{1+t^2 x^2} dx = \frac{\pi t}{2|t|} = \frac{\pi}{2} \cdot \text{sgn}(t),$$

En comparant à une intégrale, par des techniques de monotonie, on a pour $t > 0$ il n'y a donc pas continuité en 0.

◆ **SRF.68** Centrale MP – 2002

Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$. On pose

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f(t) t^k.$$

- 1) Montrer la convergence uniforme de S_n sur $[0; 1]$.
- 2) Si $f(1)$ n'est pas fixé, donner une ou des conditions sur f pour qu'il y ait convergence uniforme sur $[0; 1[$.

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r2:25] On en déduit

1) Les restes se calculent $|R_n(t)| = f(t) \frac{t^{n+1}}{1+t}$. On distingue deux cas : $t \geq 1 - \delta$ et $t \leq 1 - \delta$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq N} \inf_{\delta} \sup_{t \in [1-\delta; 1]} |f(t)| = 0$.

$$\sup_{n \geq N} |R_n(t)| \leq M(1-\delta)^n + \sup_{t \in [1-\delta; 1]} |f(t)|.$$

2) $f(1) = 0$ est nécessaire et suffisant. Pour la nécessité, on reprend les calculs de restes : pour $\epsilon > 0$, il existe n grand tel que

$$\varepsilon \geq |\mathbb{R}_n(t)| \geq (1 - \delta)^{n+1} \sup_{t \in [1-\delta; \delta]} \frac{|f(t)|}{2}; \quad \sup_{t \in [1-\delta; \delta]} |f(t)| \leq 4\varepsilon,$$

donc $\delta > 0$ tel que d'où la continuité en 1 et $f(1) = 0$.

◆ **SRF.69** (A) CCP MP – 2002
 On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$. Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; +\infty[$.

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r2-26] cours!
 Séries alternées (convergence uniforme sur les compacts) et théorèmes du

◆ **SRF.70** (A) CCP PC – 2002
 Étudier la convergence simple et uniforme des séries suivantes, définies sur \mathbb{R}^+ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{2^n - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}.$$

◇ [Rec02/serifon-r2.tex/srf-r2-27] elle converge simplement sur \mathbb{R} vers 1 si $x \neq 0$ et 0 en 0, la limite n'étant pas continue, la convergence n'est pas uniforme.
 La première converge normalement sur \mathbb{R} ! Pour la second tout se calcule,

◆ **SRF.71 (Recherche d'équivalent)** X PC – 2003
 Existence et continuité de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$.
(Très probablement, avec un peu plus de temps, l'examinateur aurait-il demandé un équivalent en 0 et en $+\infty$ de f .)

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3-372] Cf. l'exercice **SRF.54**.
 $\frac{\alpha}{x} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \right) \leq f(x) \leq \frac{\alpha}{x}$,
 On étudie les fonctions, et on montre que $\|f_n\|_{\infty} = \frac{1}{2n^2}$ ce qui montre la

continuité de f sur \mathbb{R} .
 ce qui montre que

Pour l'équivalent en $+\infty$, on va montrer que ce qui montre que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \right).$$

On commence par encadrer par exemple

$$\frac{1}{n^3x} \geq \frac{x}{n(1+n^2x^2)} = \frac{x}{n^3x^2(1+1/n^2x^2)} \geq \frac{1}{xn^3} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \right).$$

On pose $\alpha \stackrel{\text{dét.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. On a alors après sommation :

Pour l'équivalent en 0, on compare avec une intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{x dt}{t(1+t^2x^2)} = -x \ln(x) + \frac{x}{2} \ln(1+x^2),$$

l'équivalent est $-x \ln x$.

◆ **SRF.72** Mines MP – 2003
 On considère $u_k(x) = \frac{x}{1+k^2x^2}$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$.
 1) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur tout compact de $\sum u_k$.
 2) Trouver un encadrement de S_n . En déduire un encadrement de $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, puis la limite de S en 0.
 3) La série $\sum u_k$ converge-t-elle uniformément ?

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3-269] La convergence a lieu sur \mathbb{R} , par équivalent sur \mathbb{R}^* et trivialement en 0. La convergence est normale sur $A \geq |t| \geq a > 0$, la fonction est donc continue sur \mathbb{R}^* .

Ainsi,

$$\text{sgn}(x) \int_x^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} \leq S(x) - x \leq \text{sgn}(x) \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2}.$$

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{2} \cdot \text{sgn}(x),$$

il n'y a donc pas continuité en 0, et donc pas convergence uniforme sur \mathbb{R} .

On utilise les techniques habituelles de monotonie, qui donnent

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+1+x^2t^2} dt \leq S_n(x) - x \leq \int_0^{\infty} \frac{x}{1+1+x^2t^2} dt,$$

c'est-à-dire, après changement de variable :

◆ **SRF.73** Mines MP – 2003
 Soit $f_0 \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$. On pose $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$. Étudier la convergence de $\sum f_n$. On donnera le mode de convergence ainsi que la somme de la série.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3-384] **À FINIR !!!**

◆ **SRF.74** Mines MP – 2003
 On considère $u_k(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$.
 1) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur tout compact de $\sum u_k$.
 2) Trouver un encadrement de S_n .
 INDICATION : Utiliser la comparaison entre série et intégrale.
 En déduire un encadrement de $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, puis la limite de S en $+\infty$.
 3) La série $\sum u_k$ converge-t-elle uniformément sur \mathbb{R} ?

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3-307]

◆ **SRF.75** Mines PC – 2003
 Notons $I = [0; 1]$ et $f_n(x) = n^2x e^{-nx}$.
 1) Étudier la convergence simple, uniforme et en moyenne de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur I .
 2) Convergence de la série $\sum f_n$? Calculer sa somme.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3-436] 2) On intègre deux fois $n(x)/x$.
 1) I.

◆ **SRF.76** (***) Mines PC – 2003
 Existence et continuité de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{x^2+n^2}$.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3-398]

□ Soit $[0; b]$ un intervalle de \mathbb{R}^+ . Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

Bien définie sur \mathbb{R}^+ grâce au critère de Leibniz.

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n^{k+1}} g^{(k)}\left(\frac{x}{n}\right),$$

On a $f(0) = \ln 2$ (résultat sur les séries entières par exemple, en montrant la CVU grâce à une majoration des restes par Leibniz).

donc, sur $[0; b]$,

$$\|f_n^{(k)}\|_{\infty}^{[0; b]} \leq \frac{1}{n^{k+1}} \|g\|_{\infty}^{[0; b]},$$

On pose ensuite $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On a alors $f_n(x) = \frac{1}{n} g\left(\frac{x}{n}\right)$.

ce qui assure la convergence normale de $\sum f_n^{(k)}$ sur $[0; b]$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons que la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur tout compact de \mathbb{R}^+ .

Ainsi F est de classe \mathcal{C}^k sur $[0; b]$.
 Ceci étant vrai pour tout b et pour tout k , F est de classe \mathcal{C}^{∞} sur \mathbb{R}^+ .

◆ **SRF.77 (Recherche d'équivalent)** (***) Mines PC – 2003
 On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh } nx}$.
 1) Trouver le domaine de définition \mathcal{D}_f .
 2) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D}_f .
 3) Donner un équivalent de f en $+\infty$.
 4) Question bonus de W : donner un équivalent en 0.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3-177]

Définition : la série n'a de sens que sur \mathbb{R}^* et converge sur cet ensemble car $\text{sh } nx \sim e^{nx}/2$ pour $x > 0$ et $\text{sh } nx \sim -e^{-nx}/2$ pour $x < 0$ (les fonctions sont impaires), et les théorèmes sur les équivalents font le reste.

en utilisant $\text{sh } nx \geq e^{nx}/3$ pour $x \geq 1$ par exemple.

Équivalent en 0 : les fonctions $x \mapsto 1/\text{sh}(nx)$ sont décroissantes, on compare à l'intégrale

$$I(x) = \int_1^{\infty} \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt = \frac{1}{x} \ln \left| \frac{1+e^x}{1-e^x} \right| \sim \frac{\ln x}{x},$$

Continuité : on peut se limiter à $x > 0$; il y a alors convergence normale sur $[a; +\infty[$ pour $a > 0$ car sh est croissante, la limite est donc limite uniforme de somme de fonctions continues, elle est continue sur cet intervalle puis, sur \mathbb{R}^{*+} en faisant varier a .

puis

$$I(x) \leq S_1(x) \leq I(x) + \frac{1}{\text{sh}(x)}$$

Dérivabilité : la série des dérivées $-\sum \frac{n \text{ch}(nx)}{\text{sh}^2(nx)}$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ pour tout $a > 0$, ce qui montre que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

Équivalent en $+\infty$: il y a équivalence avec le premier terme : $f(x) \sim 2/e^{-nx}$, on majore bêtement la série pour $n \geq 2$ par une série géométrique

donne

$$S_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\ln x}{x}.$$

◆ **SRF.78** Centrale MP – 2003

On pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$. Cette série converge évidemment sur $I =]0; 1[$.

- Déterminer la limite f de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La convergence est-elle uniforme ?
- On note u_n l'unique racine dans I de $f_n(u_n) = 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et qu'elle admet une limite L que l'on déterminera.
- Donner un équivalent de $u_n - L$.

INDICATION : *On pourra utiliser le fait que*

$$f_n(u_n) - f_n(L) = \sum_{p \geq n+1} \frac{L^p}{p}$$

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:169]

1) Il n'y a pas convergence uniforme (sinon on pourrait appliquer le théorème de la double limite en 1) ; en revanche, il y a convergence uniforme sur $]0; 1 - \varepsilon[$.

2) Puisque $f_{n+1}(u_n) > 1$, on en déduit par croissance de f_n que $u_{n+1} < u_n$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Elle est minorée par 0 donc elle converge. Enfin, sa limite étant $L < 1$, elle est sur un domaine de convergence uniforme, donc on obtient $f(L) = L$, donc L est solution de $\ln(1 - L) = -L$.

3) On vérifie que

$$f_n(u_n) - f_n(L) = f(L) - f_n(L) = \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{L^p}{p}$$

◆ **SRF.79** (★★★) Centrale PC – 2003

Étudier la série de terme général $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:111]
(Cf. aussi l'exercice **RAY.25** page 496 qui ajoute un tout petit peu de piment.)
Pour se forger une idée, on commence par calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} = \frac{1}{t^3}$$

et $t \mapsto 1/t^3$ n'est pas intégrable sur $]0; +\infty[$, ce qui laisse subodorer une divergence.

On utilise alors une méthode « en M ».

□ Soit $M \geq 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt \geq M.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on peut écrire

$$\sum_{k=1}^N u_k \geq \sum_{k=1}^N \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^k}$$

et donc notamment,

$$\left(\frac{1}{1+\alpha^3} \right)^{N+1} < \frac{1}{2}$$

et donc notamment,

$$\forall t \in [\alpha; +\infty[\quad \left(\frac{1}{1+t^3} \right)^{N+1} < \frac{1}{2}$$

ce qui montre que

$$\sum_{k=1}^N u_k \geq \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{t^3} \geq \frac{M}{2}.$$

Ceci reste évidemment vrai pour tout $n \geq N$ (série positive) □
Ainsi, on a bien montré

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = +\infty.$$

◆ **SRF.80** TPE MP – 2003

On pose $f_n(x) = x^2 e^{-\sin(x/n)}$.

- Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis la convergence uniforme sur $[a; b] \subset \mathbb{R}$. On notera f sa limite.
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente sur \mathbb{R} ?
- A-t-on $\int_0^1 f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) dt$?
- On pose $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:244]

◆ **SRF.81** CCP MP – 2003

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} et déterminer ses limites en $\pm\infty$.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:47]

On encadre ensuite en utilisant des techniques de monotonie :

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2} dt \leq f(t) \leq \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2} dt$$

La convergence normale de la série de fonctions assure la définition et la continuité de f .

soit, en posant $y = t/x$:

$$\int_{2/x}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy \leq f(x) \leq \int_{1/x}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy,$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

f est de plus impaire donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

◆ **SRF.82 (Fonction ζ)** (★) CCP MP – 2003

On pose

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1; +\infty[$.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:76]

1) Une ch'tite récurrence.

2) f est décroissante. Soit $M > 0$. La série $\sum 1/n$ diverge donc il existe $N \geq 0$ tel que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq 2M$. Il existe $\eta \in]1; 2[$ tel que, pour tout $x \in]1; \eta[$, on a $n^x \leq 2n$, ce qui montre que $\zeta(x) \geq M$.
Pour l'autre limite, on sépare le cas $n = 1$ et on traite par des ε ou par domination...

◆ **SRF.83 (Fonction ζ)** CCP MP – 2003

On définit

$$S : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

- Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_S de S .
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{D}_S .
- Montrer que, au voisinage de 1, on a

$$S(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:188]

2) Une récurrence aisée.

3) **À FINIR !!!**

◆ **SRF.84 (f de classe \mathcal{C}^∞ non développable en série de Taylor)** CCP MP – 2003

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \cos(n^2 x)$.

- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- Montrer que f n'est pas développable en série de Taylor en 0.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:207]

1) Une simple récurrence montre que $f_n^{(p)}(x) = n^{2p} e^{-n} \times \begin{cases} \pm \sin(n^2 x) \\ \pm \cos(n^2 x) \end{cases}$
donc la série $\sum f_n^{(p)}$ converge normalement. Ainsi, f est de classe \mathcal{C}^∞ .

2) Malheureusement, la dérivée de f en 0 (obtenue en dérivant terme à terme) est nulle à tous les ordres ! Donc f ne saurait être dérivable en série de Taylor.

◆ **SRF.85** CCP MP – 2003

On pose $u_n(x) = \frac{nx^n + x^{2n}}{n^2 - 1}$ pour $x \in \mathbb{R}^{*+}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.
- Calculer sa somme.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:272]

converge absolument. On a donc convergence sur $[-1; 1[$.

1) Si $|x| < 1$, on a convergence absolue. Si $x = 1$, $u_n(x) \sim \frac{1}{n}$ donc divergence. Si $x = -1$, on a un terme qui converge par le CSA et un terme qui

2) Établir une EDO sur chaque terme du numérateur.

◆ **SRF.86** CCP MP – 2003
 Soit $\lambda > 0$. On définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$f_n : x \mapsto \frac{x}{1 + \lambda^n x^2}.$$

1) Pour quelles valeurs de λ la série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle sur \mathbb{R} .
 2) Pour quelles valeurs de λ y a-t-il convergence uniforme ?
 3) On définit

$$g_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\ln(1 + 2^n x^2)}{2^{n+1}} \end{cases} \quad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x).$$

Étudier la définition, la continuité et la dérivabilité de G .

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:243]

◆ **SRF.87** CCP MP – 2003
 On pose $u_n(t) = \frac{2t}{n^2 + t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ et on définit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

1) Ensemble de définition, continuité et dérivabilité de f ?
 2) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:353]

◆ **SRF.88 (Recherche d'équivalent)** CCP MP – 2003
 On définit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (x+n)}$ sur \mathbb{R}^+ .

1) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ .
 2) Trouver un équivalent en 0 de f .

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:376]

1) Les fonctions sont définies sur $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$, la série converge simplement sur cet ensemble (théorème de majoration) et normalement sur tout sous-compact. Une récurrence permet de calculer $f_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n+k}}{n! k! (x+n)^k}$, donc la série converge normalement sur \mathbb{R}^+ .

2) **Méthode sophistiquée** : on calcule $f(x+1) - x f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} -$

$1 = \frac{1}{e}$. Comme f est continue en 1 et $f(1) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$, on en

déduit $f(x) \sim \frac{1}{x}$ (ce qui était évident par ailleurs!).

Plus simplement, on devine que le premier terme donnera l'équivalent, et on montre que la somme à partir de 1 est bornée (par 1/e), ce qui suffit pour conclure.

◆ **SRF.89** CCP PC – 2003 (*)
 On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur \mathbb{R}^+ par $u_n(x) = n x^\alpha e^{-n x^2}$, où $\alpha > 0$ est un paramètre réel.

1) Déterminer l'intervalle I sur lequel la série $\sum u_n$ converge. Calculer sa somme.
 2) Déterminer la nature de la convergence selon les valeurs du paramètre α . Indiquer les intervalles maximaux de convergence uniforme.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:377]

◆ **SRF.90** CCP PC – 2003
 Définir, sur \mathbb{R} , les différents types de convergence de la série

$$\sum e^{-n x} \ln(1 + x^{2n}).$$

Lorsque la somme S existe, est-elle dérivable terme à terme et sur quel domaine ?

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:102]

◆ **SRF.91** CCP PC – 2003 (*)
 On pose $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Arc tan}(nx)}{n^2}$. Définition, continuité et dérivabilité de F ? Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:165] dérivable sur \mathbb{R}^* .
 $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, de plus on a convergence normale donc on a continuité. La série des dérivées est

$$\sum \frac{1}{n(1+n^2 x^2)}$$

et ne converge normalement que sur $] -\infty ; a] \cup [a ; +\infty [$, donc la fonction est

Enfin, la convergence normale sur $[1 ; +\infty [$ montre que l'on peut échanger limite en $+\infty$ et somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arc tan}(nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi^3}{12}.$$

◆ **SRF.92** CCP PC – 2003
 Étudier la convergence simple et uniforme sur tout compact de la série de fonctions $\sum (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:362]

◆ **SRF.93** CCP PC – 2003
 Proposer une série convergeant absolument et non uniformément sur un compact de \mathbb{R} .

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:363] absolue, mais pas uniforme sur $[0 ; 1]$ donc encore moins sur $[0 ; 1]$.
 Posons $f_n(x) = x^n$ si $x \in [0 ; 1]$ et $f_n(1) = 0$. Alors la convergence est

◆ **SRF.94** IIE PC – 2003
 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)} \right)$.

1) Domaine de définition de f ?
 2) Étudier sa continuité et sa dérivabilité.
 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:361]

◆ **SRF.95** Navale MP – 2003
 Définition et continuité de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1 - x^n}$.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:117]

◆ **SRF.96** École de l'Air PC – 2003 (*)
 Convergence simple et uniforme, et calcul de la somme de la série $\sum \frac{x^n}{(1-x)^n}$.

◇ [Rec03/serifon-r3.tex/r3:46]

◆ **SRF.97 (Recherche d'équivalent)** Centrale MP – 2004 (*)
 On considère la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x + n}$.

1) Domaine de définition ?
 2) Est-elle continue ? De classe \mathcal{C}^1 ?
 3) Équivalent en 0, en $+\infty$?

◇ [Rec04/serifon-r4.tex/r4:221]

◆ **SRF.98** Centrale PC – 2004 (*)
 On définit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-n x}}{n+1}$.

1) Domaine de définition de f ?
 2) Étudier la convergence absolue, uniforme et normale.
 3) Continuité et dérivabilité ? Valeur de f en 0 ?
 4) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2} - \ln 2$.

◇ [Rec04/serifon-r4.tex/r4:35]

◆ **SRF.99** (★★) Mines MP – 2004

Pour tout $x > 1$ on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(x+n)}$.

- 1) Montrer que f est définie, continue et positive sur $]1; +\infty[$.
- 2) Montrer que f est dérivable et strictement décroissante.
- 3) Calculer $f(x+1) + f(x)$. En déduire que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2 \ln(x)}$.
- 4) Trouver un équivalent en $+\infty$ de $f(x) - \frac{1}{2 \ln(x)}$.

◇ [Rec04/serifon-r4.tex/r4:228]

◆ **SRF.100** (★★) CCP MP – 2004

On considère la série de fonctions $\sum f_n$, où l'on a défini $f_n : x \mapsto \frac{\cos^n(x) \sin(nx)}{n}$.

- 1) Montrer que la série converge simplement sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que la somme S est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
- 3) Calculer $S'(x)$.
- 4) En déduire explicitement $S(x)$.

◇ [Rec04/serifon-r4.tex/r4:162]

1) Si $x \in \pi\mathbb{Z}$, pas de problème et, sinon, transformation d'Abel. 3)

2) Abel donne une majoration uniforme sur tout compact. 4)

◆ **SRF.101 (Recherche d'équivalent)** (★★) CCP MP – 2004

On considère la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

- 1) Montrer que f est définie sur $]0; +\infty[$.
- 2) On considère $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$. Montrer que cette fonction est continue sur $]0; +\infty[$. En déduire un équivalent de f en 0.
- 3) Montrer que $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} \right)$ et en déduire que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

◇ [Rec04/serifon-r4.tex/r4:257]

◆ **SRF.102** (*) CCP PC – 2004

On définit $S : \theta \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n(\theta) \cos(n\theta)}{n}$.

- 1) Déterminer le domaine de définition D_S de S . Que peut-on dire *a priori* de S (notamment en ce qui concerne sa périodicité) ?
- 2) Montrer que S est dérivable sur D_S , et déterminer S' .
- 3) En déduire S .

◇ [Rec04/serifon-r4.tex/r4:55]

À FINIR !!!

1) Il faut que $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ par une transformation d'Abel je pense ? 2)

◆ **SRF.103** (★★★) CCP PC – 2004

On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_n(x) = 2^n \tan\left(\frac{x}{2^n}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).$$

On note \mathcal{D}_n l'ensemble de définition de u_n .

- 1) Déterminer $\mathcal{D} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$.
- 2) Déterminer le domaine de convergence \mathcal{D}' de la série $\sum u_n$.
- 3) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

◇ [Rec04/serifon-r4.tex/r4:74]

1) $\mathcal{D}_n = \mathbb{R} \setminus \{2^{n-1}(2k+1)\pi, 2^n(2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
 On en déduit que

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_n = \mathbb{R} \setminus \{2^n(2k+1); (n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}.$$

Or l'application $(n, k) \mapsto 2^n(2k+1)$ établit une bijection de \mathbb{N}^2 sur \mathbb{Z}^* (il faut faire un chouilla d'arithmétique ici...), donc

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2) $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$. En effet, on remarque que

$$u_n(x) = 2^n \left(\tan\left(\frac{x}{2^n}\right) - 2 \tan\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \right),$$

ce qui montre que $\sum u_n$ est une série télescopique, de somme partielle

$$S_n(x) = \tan x - 2^{n+1} \tan\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc...

3) ... et $u(x) = \tan x - x$.

◆ **SRF.104 (Recherche d'équivalent)** TPE PC – 2004

- 1) On pose $F(\alpha) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$. Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} F(\alpha)$.
- 2) On pose $f(\alpha) = \alpha \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$. Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} F(\alpha)$.

◇ [Rec04/serifon-r4.tex/r4:124]

1) Encadrer $F(\alpha) - \alpha$ par des intégrales, on trouve

$$\frac{1}{2\alpha} \leq F(\alpha) - \alpha \leq 1$$

et donc $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} F(\alpha) = 1$.

2) Encadrer de même $f(\alpha) - \frac{\alpha}{2n+1}$ par des intégrales, on obtient

$$\frac{1}{3\alpha} \leq f(\alpha) - \frac{\alpha}{2n+1} \leq \frac{1}{2\alpha},$$

et donc $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} F(\alpha) = 0$.

◆ **SRF.105** (★★) TPE PC – 2004

On pose $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}$.

- 1) Étudier l'existence, la continuité, la dérivabilité de F .
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
- 3) Calculer $F(x)$.
- 4) Trouver un équivalent de $F(x) - 1$ en $+\infty$.
- 5) Enfin, trouver un équivalent de F en 0.

◇ [Rec04/serifon-r4.tex/r4:09]

1) F est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}^{*+} .

2) On montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ en utilisant la convergence normale sur $]0; +\infty[$.

3) On pose $g(x) = e^{-x} F(x)$, alors $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)x} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$, d'où l'on tire $g(x) = -\ln(1 - e^{-x})$ et finalement $F(x) = -e^x \ln(1 - e^{-x}) + C^{\mathbb{R}}$.

La constante est nulle par limite en $+\infty$.

4) On peut montrer qu'un équivalent de

$$F(x) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} n + 1$$

est le premier terme de la somme, c'est-à-dire $e^{-x}/2$, ou bien prendre un simple développement limité :

$$F(x) - 1 = -e^x [\ln(1 - e^{-x}) + e^{-x}] = -e^x \left[-\frac{e^{-2x}}{2} + o_{x \rightarrow +\infty}(e^{-2x}) \right] \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{2}.$$

5) Par monotonie, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t+1} dt \leq F(x) - 1 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t+1} dt.$$

Or $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t+1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y+x} dx = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$, dont un équivalent en 0 est $-\ln x$, et pareil pour le terme de gauche qui vaut $e^x \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$, et qui admet le même équivalent.

Par suite, $F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

◆ **SRF.106** (*) TPE PC – 2004

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2}$. Domaine de définition de f ? Continuité et dérivabilité de f ? Calculer f' et en déduire f .

◊ [Rec04/serifon-r4.tex/r4:30]

◆ **SRF.107** (★) CCP PC – 2004

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Arc tan}(nx)}{n^2}$.

- 1) Domaine de définition de f ?
- 2) Continuité et dérivabilité de f ?

◊ [Rec04/serifon-r4.tex/r4:10] de \mathbb{R}^* , donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* . On peut même montrer que f n'est pas dérivable en 0 avec les techniques habituelles.

◊ [Rec04/serifon-r4.tex/r4:10] f est définie sur \mathbb{R} et y converge normalement, donc elle est continue sur \mathbb{R} . En revanche, on ne peut montrer que la convergence normale sur tout segment

◆ **SRF.108** X PC – 2005

Soit $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On définit $f_n : x \mapsto \frac{n^2 x^2}{1 + n^4 x^4}$ et $g_n : x \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} f_n(x - a_p)$.

- 1) Étudier l'existence de $g_n(x)$.
- 2) Étudier les convergences simple et normale de $\sum g_n$.

◊ [Rec05/serifon-r5.tex/r5:20]

◆ **SRF.109** (★★) Centrale PC – 2005

- 1) Montrer que, pour tout $a \in [0; 1[$, il existe $K > 0$ tel que :

$$\forall x \in]-a; a[\quad |\ln(1+x)| \leq K|x|.$$
- 2) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1; 1[$:

$$f_n(x) = \prod_{p=1}^n (1+x^p) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \prod_{q=1}^n (1-x^{2q+1}).$$

Montrer que les suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simplement sur $] -1; 1[$; on notera f et g leurs limites.
- 3) Montrer que f et g sont continues.
- 4) Étudier $f_n(x^2) \cdot g_n(x^2)$; en déduire que, pour tout $x \in]-1; 1[$, on a $f(x) \cdot g(x) = 1$.

◊ [Rec05/serifon-r5.tex/r5:81]

◆ **SRF.110 (Fonction de van der Waerden)** (♣) Centrale PC – 2005

On pose $g(x) = \min(x - E(x), E(x) + 1 - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- 1) Montrer que g est continue et 1-périodique sur \mathbb{R} . Représenter g sur $[-1; 2]$. Que représente g pour x , par rapport à \mathbb{Z} ?
- 2) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} g(10^n x)$. Montrer que f est 1-périodique et continue sur \mathbb{R} .
- 3) Soit F définie sur un intervalle I , et soit $x \in I$ tel que F soit dérivable en x . Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante, de limite x , à valeurs dans I . Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante, de limite x , à valeurs dans I , telle que $b_n - a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(a_n) - F(b_n)}{a_n - b_n} = F'(x)$.
- 4) Soit $x \in [0; 1]$. On admet qu'il existe une suite $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[0; 9]$ telle que

$$x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha_p}{10^p}.$$

On pose $a_n = \sum_{p=0}^n \frac{\alpha_p}{10^p}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- 5) Calculer $g(10^k a_n)$ et $g(10^k b_n)$ pour $k \geq n$.
- 6) En déduire que f n'est pas dérivable en x . En déduire que : f est continue en tout point mais dérivable nulle part.
- 7) Montrer que f n'est monotone sur aucune intervalle d'intérieur non vide.

◊ [Rec05/serifon-r5.tex/r5:99]

2) Si $t \in \mathbb{R}$, on a $gt \leq \frac{1}{2}$, donc

Cf. exercice SRF.1 page 465.

1) $g(x) = d(x, \mathbb{Z})$. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n(t)| \leq \frac{10^{-n}}{2}$.

La convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est donc normale, et donc uniforme sur \mathbb{R} . La somme f est donc continue, et 1-périodique.

- 3) Faire un dl.
- 4) T.
- 5) Soit $x \in \mathbb{R}$, admettant le **développement décimal propre**

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k 10^{-k},$$

où $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$ et pour $k \geq 1$, $\alpha_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ et la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang.

On note $a_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k 10^{-k} = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ et $b_n = a_n + 10^{-n}$, donc $a_n \leq x < b_n$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = x$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a :

$$f(b_n) - f(a_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g(10^k b_n) - g(10^k a_n)}{10^k}.$$

Or si $k \geq n$, $10^k b_n$ et $10^k a_n$ diffèrent d'un entier, donc $g(10^k b_n) = g(10^k a_n)$.

Si $0 \leq k \leq n-1$, $10^k a_n$ et $10^k b_n$ sont respectivement congrus modulo 1 à

$$A_{n,k} = \frac{\alpha_{k+1}}{10} + \sum_{l=k+2}^n \frac{\alpha_l}{10^{l-k}} \leq \frac{\alpha_{k+1}}{10} + \sum_{l=k+2}^n \frac{9}{10^{l-k}}$$

et $B_{n,k} = A_{n,k} + \frac{1}{10^{n-k}}$

$$\leq \frac{\alpha_{k+1}}{10} + \sum_{l=k+2}^n \frac{9}{10^{l-k}} + \sum_{l=n+1}^{+\infty} \frac{9}{10^{l-k}}.$$

On a $\frac{\alpha_{k+1}}{10} \leq A_{n,k} < B_{n,k} \leq \frac{1 + \alpha_{k+1}}{10}$,

donc $g(10^k b_n) - g(10^k a_n) = \varepsilon_k 10^{j-n}$,

avec $\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_{k+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ -1 & \text{si } \alpha_{k+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\} \end{cases}$.

6) Donc $\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k$, avec $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$, il n'existe donc pas de limite à ce rapport quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que f n'est pas dérivable en x .

7) Soit I un intervalle d'intérieur non vide de \mathbb{R} . On peut alors trouver $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ décimal, donc à partir d'un certain rang ε_k est constant égal à 1. En utilisant ce qui précède, on en déduit qu'il existe $a_n \in \overset{\circ}{I}$ et $b_n \in \overset{\circ}{I}$ tels que $\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} > 0$.

De même, en utilisant $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ tel que les α_k soient égaux à 5 à partir d'un certain rang, on montre l'existence de $a'_n \in \overset{\circ}{I}$ et $b'_n \in \overset{\circ}{I}$ tels que $\frac{f(b'_n) - f(a'_n)}{b'_n - a'_n} > 0$.

La restriction de f à I n'est donc pas monotone.

◆ **SRF.111** CCP PC – 2005

On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n + e^{nx})}{n^3}$.

- 1) Domaine de définition et continuité de f .
- 2) f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur D_f ?

◊ [Rec05/serifon-r5.tex/r5:20]

◆ **SRF.112** (★★) Centrale PC – 2005

Soit $\alpha > 0$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0; 1] \quad f_n(x) = n^\alpha x^n (1-x).$$

- 1) Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur $[0; 1]$.
- 2) Existe-t-il des segments de $[0; 1]$ sur lesquels la série $\sum f_n$ converge normalement ?

◊ [Rec05/serifon-r5.tex/r5:129]

◆ **SRF.113** (★) CCP PC – 2005

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

- 1) Montrer que f est définie et continue sur $[0; +\infty[$.
- 2) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0; +\infty[$.
- 3) Trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par f .

◊ [Rec05/serifon-r5.tex/r5:84]

dérivées k -ièmes.

- 1) T.
- 2) Convergence normale sur tout intervalle du type $]a; +\infty[$ de la série des
- 3) On vérifie que $f'' + f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$ sur $]0; +\infty[$.

Rayon de convergence d'une série entière

◆ **RAY.1** (★★)
 On note a_n le nombre de diviseurs de n dont l'écriture en base 17 comporte un nombre *pair* de fois le chiffre 4. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

◆ [Divers/rayonexo.tex/sre:1] On a $1 \leq a_n \leq n$, donc $R = 1$.

◆ **RAY.2** (★)
 Trouver les rayons de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque

1) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell \neq 0$	5) $a_{2n} = a^n, a_{2n+1} = b^n, 0 < a < b$	9) $a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{n!}$
2) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ périodique non nulle	6) $a_{n^2} = n!, a_k = 0$ si $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$	10) $a_n = (\sqrt{n})^{-\sqrt{n}}$
3) $a_n = \sum_{d n} d^2$	7) $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$	11) $a_n = \int_0^1 (1+t^2)^n dt$.
4) $a_n = n^n/n!$	8) $a_n = e^{\sqrt{n}}$	

◆ [Divers/rayonexo.tex/sre:52]

1) $R = 1$.	6) $R = 1$.
2) $R = 1$.	7) $R = 1$.
3) $R = 1$.	8) $R = 1$.
4) $R = 1/e$.	9) $R = 1/3$.
5) $R = 1/\sqrt{b}$.	10) $R = 1$.
	11) Puisque $2t \leq 1+t^2 \leq 2$, on a $R = 1/2$.

◆ **RAY.3** ($c_n = a_n b_n$) (★★)
 Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de complexes, et notons R_a (resp. R_b) les rayons de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ (resp. de la série entière $\sum b_n z^n$).
 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = a_n b_n$, et notons R_c le rayon de convergence de la série $\sum c_n z^n$.
 Montrer que $R_c \geq R_a R_b$.

◆ [Divers/rayonexo.tex/sre:3] $\lambda = \sqrt{\frac{|z|}{R_a R_b}} < 1$.

On choisit z tel que $|z| < R_a R_b$, alors on peut écrire $z = xy$ avec $|x| < R_a$ et $|y| < R_b$. Pour cela, il suffit d'écrire $x = \lambda R_a$ et $y = \lambda R_b$, ce qui donne $|z| \leq R_c$.
 Donc $a_n x^n \rightarrow 0$ et $b_n y^n \rightarrow 0$ ce qui montre que $a_n b_n z^n \rightarrow 0$, et donc

◆ **RAY.4**
 Pour chaque affirmation, donner une démonstration si la proposition est vraie, ou trouver un contre-exemple si elle est fausse.

- Si la série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge normalement sur \mathbb{C} .
 Vrai Faux
- Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence. Vrai Faux
- Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence. Vrai Faux
- Si la série entière $\sum a_n x^n$ admet un rayon de convergence fini $R > 0$, alors sa somme admet une limite infinie en $(-R)^+$ et en R^- . Vrai Faux
- Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence infini et si les a_n sont tous strictement positifs, alors pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $\frac{f(x)}{x^p} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Vrai Faux
- Si $\sum a_n R^n$ diverge, alors $S(x)$ n'a pas de limite en R . Vrai Faux

◆ [Divers/rayonexo.tex/sre:16] (prendre $1/(1+x)$ par exemple).
 Faux, Vrai, Faux ($\sum z^n/n = \ln(1-z)$ par exemple), Faux, Vrai et Faux

◆ **RAY.5** (★★★)
 Soit $\sum a_n$ une série *divergente*, telle que, en notant $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série, on ait $\frac{a_n}{S_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
 Quel est le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum S_n z^n$?

◆ [Divers/rayonexo.tex/sre:7] déduit que $R' \leq R$ et que par ailleurs $S_n/S_{n+1} \rightarrow 1$ donc $R' = 1$ donc $R = 1$.
 La série $\sum a_n$ diverge donc $R \leq 1$. Par ailleurs, puisque $a_n/S_n \rightarrow 0$, on en

◆ **RAY.6** (★)
 Soit F une fraction rationnelle, c'est-à-dire que $F = \frac{P}{Q}$, avec $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Calculer le rayon de convergence de $\sum F(n) z^n$.

◆ [Divers/rayonexo.tex/sre:8] On a donc $a_{n+1}/a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, donc d'après d'Alembert, $R = 1$.
 On note λX^α et μX^β les termes de plus haut degré de P et Q , et on note que

$$|a_n| \sim \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| n^{\alpha-\beta}.$$

◆ **RAY.7** (★)
 Rayon de convergence de la série entière $\sum q^{n^2} z^n$, où $q \in \mathbb{R}$.

◆ [Divers/rayonexo.tex/sre:37] Avec d'Alembert, 0 ou l'infini selon que $q < 1$ ou $q > 1$. Si $q = 1$, rayon 1.

◆ **RAY.8 (Transformation des rayons)** (★★)
 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries :

1) $\sum a_n^2 z^n$;	2) $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$;	3) $\sum \frac{n! a_n}{n^n} z^n$.
-----------------------	--------------------------------	------------------------------------

◆ [Divers/rayonexo.tex/sre:57] 2) $R' = \infty$;
 1) $R' = R^2$ (utiliser la définition du rayon) ; 3) $R' = eR$ avec Stirling.

◆ **RAY.9 (Caractérisations du rayon)** (★)
 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R . Montrer que l'on a

$$R = \sup \left\{ \rho \in \mathbb{R}^+ ; (a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$$

$$R = \sup \left\{ \rho \in \mathbb{R}^+ ; \sum a_n \rho^n \text{ converge} \right\}$$

$$R = \sup \left\{ \rho \in \mathbb{R}^+ ; a_n \rho^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}$$

Ces ensembles sont-ils égaux ? Si non, donner des contre-exemples.

◆ [Divers/rayonexo.tex/sre:63] avec des séries entières du style $\sum x^n$ et $\sum (-1)^n x^n$.
 Ces ensembles ne sont bien évidemment pas égaux, comme on peut le voir

◆ **RAY.10**
 Déterminer le rayon de convergence des séries entières de coefficient général :

1) $u_n = \frac{x!}{(n+1)^n}$	3) $w_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$	5) $b_n = \frac{1}{n^{n+1}}$
2) $v_n = \frac{n^{2n}}{(2n)!}$	4) $a_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$	6) $c_n = \frac{1}{\ln(\text{ch } na)}$

◆ [Divers/rayonexo.tex/sre:42] 5) $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}$ donc

1) $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$.
 2) $\frac{v_n}{v_{n+1}} = 4 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{e^2}$.
 3) $\frac{w_n}{w_{n+1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4$.
 4) $|a_n| \leq 1/n$ donc $R \geq 1$. De plus, $\cos(2n\pi/3) \in \{-\frac{1}{2}, 1\}$ donc $R \leq 1$. Au total $R = 1$.
 5) $\ln \frac{b_n}{b_{n+1}} = (n+1) \ln n - (n+2) \ln(n+1)$
 $= -\ln n - (n+2) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$
 donc $R = +\infty$.
 6) $R = 1$.

◆ **RAY.11** (★)
 Soit $\sum a$ une série convergente mais non absolument convergente. Que dire du rayon de la série entière $\sum a_n x^n$.

◇ [Divers/rayonexo.tex/div:7] Cf. également **RAY.13**.
 $R = 1$.

◆ **RAY.12** (★★★)
 Étudier la convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n \ln n}$, en particulier sur le cercle d'incertitude.

◇ [Divers/rayonexo.tex/div:8] (transformation d'Abel).
 Convergence en -1 , divergence en 1 (Bertrand), convergence partout ailleurs

◆ **RAY.13 (Une astuce)** (*)
 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels, tendant vers 0 , et telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de la série entière $\sum a_n x^n$?

◇ [Divers/rayonexo.tex/div:12] le critère de Leibniz, donc $R \geq 1$. En conclusion, $R = 1$.
 La série diverge donc $R \leq 1$. Mais de plus la série $\sum (-1)^n a_n$ converge par Cf. également **RAY.11**.

◆ **RAY.14**
 On note $\phi(n)$ le nombre de diviseurs de n . Déterminer les rayons des séries entières $\sum \phi(n) z^n$ et $\sum \phi(n)^{\phi(n)} z^n$.

◇ [Divers/rayonexo.tex/div:13] À FINIR !!!
 De l'inégalité $2 \leq \phi(n) \leq n$, on tire immédiatement $R_1 = 1$.

◆ **RAY.15** (★★)
 On suppose que les séries $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$ ont pour rayons de convergence R et R' . Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

◇ [Divers/rayonexo.tex/sre:58] sitives divergentes est divergente...
 $\min(\sqrt{R}, \sqrt{R'})$ grâce à la convergence absolue (la somme de deux séries po-

◆ **RAY.16** (★★) X PC – 2004
 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R . Déterminer le rayon de $\sum \alpha^n a_n z^n$, où α est un réel donné.

◇ [Rec00/rayon-r0.tex/div:105] Technique habituelle pour montrer l'invariance du rayon.

◆ **RAY.17 (Inv^{se} du rayon par multip.^{on} polynomiale)** (★★) X PC – 2001
 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P \neq 0$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n P(n) z^n$?

◇ [Rec01/rayon-r1.tex/sre:r:7] et le terme tendant vers 0 est donc borné, ce qui montre par comparaison avec la série $\sum a_n r^n$, qui est absolument convergente, que $\sum P(n) a_n r^n$ converge, et donc $R' \geq \rho$. □
 Si P n'est pas de degré 0 (qui est un cas trivial), on a, pour tout n suffisamment grand, $|P(n)| \geq 1$ ce qui montre que $R' \leq R$.
 □ Soit $0 \leq \rho < R$. On peut trouver $\rho < r < R$ donc la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée. De plus,

$$|P(n) a_n r^n| \leq P(n) \underbrace{\frac{\rho^n}{r^n}}_{\rightarrow 0} a_n r^n,$$

Conclusion : $R' = R$.

◆ **RAY.18** CCP MP – 2001
 Rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n(x) = \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } \frac{n-1}{n}\right) x^n$.

◇ [Rec01/rayon-r1.tex/sre:r:5]

◆ **RAY.19** CCP MP – 2001
 Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum (-1)^n \frac{C_{2n}^{2n}}{2n-1} x^n$. Que se passe-t-il en $-1/4$ et $1/4$?

◇ [Rec01/rayon-r1.tex/sre:r:9] Utiliser la formule de Stirling et d'Alembert.

◆ **RAY.20** CCP MP – 2001
 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell_1$ et $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell_2$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$?

◇ [Rec01/rayon-r1.tex/sre:r:13] (★) CCP PC – 2001

◆ **RAY.21** (*)
 Calculer le rayon de convergence de $\sum \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} x^{2n+1}$.

◇ [Rec01/rayon-r1.tex/sre:r:15] S'affranchir des lacunes puis utiliser d'Alembert : rayon infini.

◆ **RAY.22** (★★) CCP PC – 2001
 Donner le rayon de convergence de la série de terme général $\frac{a_n x^n}{n^2}$, où a_n représente la n -ième décimale de π .

◇ [Rec01/rayon-r1.tex/sre:r:22] Par ailleurs π n'est pas rationnel donc il existe une infinité de décimales non nulles et la série diverge donc grossièrement en 1 . Par conséquent $R = 1$.
 On note $b_n = a_n/n^2$. Alors $0 \leq b_n \leq 1/n^2$ ce qui montre que le rayon est au moins égal à 1 .

◆ **RAY.23** CCP PC – 2002
 Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Donner le rayon de convergence de la série $\sum E(a^n) x^n$.

◇ [Rec02/rayon-r2.tex/sre-r:2:13] $\frac{a^n}{a^{n+1} + 1} \leq \frac{E(a^n)}{E(a^{n+1})} \leq \frac{a^n + 1}{a^{n+1}}$
 Si $0 \leq a < 1$ alors la série entière la série nulle. Elle a donc un rayon infini.
 Si $a = 1$ alors le rayon vaut 1 .
 Supposons $a > 1$. Alors de la relation on tire, par d'Alembert, $R = 1/a$.

◆ **RAY.24** Centrale MP – 2002
 Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ où a_n représente la n -ième décimale de e .

◇ [Rec02/rayon-r2.tex/sre-r:2:21] il existe une infinité de décimales non nulles et la série diverge donc en 1 . Par conséquent $R = 1$.
 Puisque $0 \leq a_n \leq 9$ on a $1 \leq R \leq \infty$. Par ailleurs, e n'est pas rationnel donc

◆ **RAY.25** (★★★) Centrale MP – 2003
 On note $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^4)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 Donner la nature de $\sum I_n x^n$ selon la valeur de $x \in \mathbb{R}$.

◇ [Rec03/rayon-r3.tex/r3:410] que l'on domine par $\phi : t \mapsto \frac{1}{t^4}$ sur $[\alpha; +\infty[$, permet d'écrire que
 (Cf. aussi l'exercice **SRF.79** page 485.)
 Tout d'abord les I_n existent, et la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et tend vers 0 par théorème de convergence dominée.
 En $x = -1$, on a convergence de la série grâce au théorème des séries alternées. En revanche, on va montrer que $\sum I_n$ diverge grâce à une méthode en M .
 Pour se forger une idée, on commence par calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+t^4)^n} = \frac{1}{t^4},$$

et $t \mapsto 1/t^4$ n'est pas intégrable sur $]0; +\infty[$, ce qui laisse subodorer une divergence.

Notons $S = \sum_{n=0}^{\infty} I_n$, avec $S \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on peut écrire

$$S \geq \sum_{k=1}^N I_k \geq \sum_{k=1}^N \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^k} \geq \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t^4} \left[1 - \left(\frac{1}{1+t^4}\right)^{N+1}\right] dt.$$

Le théorème de convergence dominée appliqué à

$$f_n : t \mapsto \frac{1}{t^4} \left[1 - \left(\frac{1}{1+t^4}\right)^{N+1}\right],$$

◆ **RAY.26** (*) Mines PC – 2003
 On considère la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n$ avec $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Quel est le rayon de convergence de cette série ?

◇ [Rec03/rayon-r3.tex/r3:182]

On a $s_n \sim \ln n$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$ et le rayon vaut 1.

◆ **RAY.27** (*) Centrale MP – 2003
 Quelle est la relation entre les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum a_{kn} z^n$, où $k \geq 2$.

◇ [Rec03/rayon-r3.tex/r3:290]

à R. Enfin, le rayon R' de la seconde somme est $\sqrt[k]{R}$.Notons R le rayon initial. Tout d'abord, le rayon r de $\sum a_{nk} z^{nk}$ est supérieur Donc $R' \geq \sqrt[k]{R}$.

◆ **RAY.28 (Petit piège)** (***) CCP MP – 2003
 1) Montrer que si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.
 INDICATION : Ne pas utiliser la règle de d'Alembert.
 2) Trouver le rayon de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n n^2}{n^2 + 1} z^n$.

◇ [Rec03/rayon-r3.tex/r3:360]

Si $r > R$, alors la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc $(b_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ non plus.1) On revient à la définition du rayon. Si $r < R_a$ alors $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc $(b_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi en revenant à la définition de l'équivalence de deux suites.

2) Rayon 1.

◆ **RAY.29** (*) CCP MP – 2003
 Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes :
 1) $\sum n^\alpha z^n$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$) ;
 2) $\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$.

◇ [Rec03/rayon-r3.tex/r3:293]

2) $|\cos \theta| \leq 1$ donc $R \geq 1$. Puis, si $|x| > 1$, la suite $\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Donc $R = 1$.1) $R = 1$ par d'Alembert.

◆ **RAY.30** (*) CCP MP – 2003
 Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, où a_n est la n -ième décimale de π .

◇ [Rec03/rayon-r3.tex/r3:256]

 π étant irrationnel, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire en 0 donc $\sum a_n$ diverge et donc $R \leq 1$.De l'inégalité $a_n \leq 9$ on tire cependant $R \geq 1$.Donc $R = 1$.

◆ **RAY.31** (*) Centrale MP – 2004
 Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Comparer les rayons des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum a_{kn} z^n$.

◇ [Rec04/rayon-r4.tex/r4:165]

◆ **RAY.32** (♣) CCP PC – 2004
 Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2 + 3n + 2}$.

◇ [Rec04/rayon-r4.tex/r4:93]

On utilise l'invariance par multiplication polynomiale, ou la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

◆ **RAY.33 (Exercice débile)** (♣) CCP MP – 2004
 On considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ et telle que $(a_{n+1}/a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 1) Montrer que $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence.
 2) Montrer que la somme S de la série est dérivable sur $] -R; R[$.
 3) Que se passe-t-il si l'on omet l'hypothèse sur la suite $(a_{n+1}/a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

◇ [Rec04/rayon-r4.tex/r4:172]

C'est du cours ! Quel scandale ! Appliquer d'Alembert (eh oui !).

◆ **RAY.34** (***) Mines PC – 2005
 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.
 1) Que peut-on dire des rayons des séries entières $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?
 2) On définit $h(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t/x} dt$. Montrer que h est définie sur $]0; 1[$. Montrer que, pour tout $x \in]0; 1[$, on a $h(x) = x g(x)$.

◇ [Rec05/rayon-r5.tex/r5:124]

2) Intégrer terme à terme.

1) f est de rayon infini, et g de rayon au moins égal à 1.

Fonctions définies par une série entières

◆ SRE.1 (Un très grand classique)

(*)

Déterminer le rayon de convergence et la somme S de la série entière $\sum n^3 x^n$.

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:14] Par d'Alembert, le rayon de convergence est 1. On se souvient ensuite que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} &= \frac{2}{(1-x)^3} \\ \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-3} &= \frac{6}{(1-x)^4}, \end{aligned}$$

ce qui nous pousse à décomposer X^3 sur la base 1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), et on trouve

$$X = X + 3X(X-1) + X(X-1)(X-2).$$

On en déduit

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{6x^2}{(1-x)^3} + \frac{6x^3}{(1-x)^4} = \frac{x(x^2 + 4x + 1)}{(1-x)^4}.$$

◆ SRE.2

Déterminer le rayon de convergence et la somme S de la série entière $\sum \frac{n^3}{n!} x^n$.

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:15]

On utilise encore $X = X + 3X(X-1) + X(X-1)(X-2)$. Alors

$$S(x) = (x + 3x^2 + x^3) e^x.$$

◆ SRE.3 (Bon entraînement)

(*)

Calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:62]

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \cos \sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

◆ SRE.4

Calculer, pour les valeurs de x pour lesquelles cette somme est définie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + n + 1)x^n.$$

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:4]

d'où, en écrivant que

On pose $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, alors

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

et $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 1)x^n$

$$n^2 + n - 1 = (n^2 + 3n + 1) - 2(n+1) :$$

$$S(x) = -\frac{2}{(1-x)^3} - \frac{2}{(1-x)^2}.$$

◆ SRE.5

Calculer $\sum (n^2 - 3n + 1) \frac{x^n}{n!}$.

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:5]

$$(x^2 - 2x + 1) e^x.$$

◆ SRE.6

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexe dont la série converge. On pose

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \text{et} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

On pose également

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \quad \text{et} \quad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n.$$

- 1) Calculer le rayon de convergence de f et g.
- 2) Donner une relation entre f', g et g'.

3) Calculer $F(t) = \int_0^t e^{-u} f(u) du$.

4) En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-u} f(u) du$.

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:6]

- 1) Rayons infinis.
- 2) $f'(t) = g'(t) - g(t)$.

3) $F(t) = \int_0^t e^{-u} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} u^n du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^t e^{-u} u^n du$.

- 4) = a.
- 5) ...

◆ SRE.7

(*)

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ avec

$$a_n = (3 + (-1)^n)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:61]

On note que si $n = 2p$ alors $a_n = 4^{2p}$ et si $n = 2p + 1$ alors $a_n = 3^{2p+1}$. Dans le disque de convergence, la série entière est donc somme des deux séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4x)^{2n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^{2n+1}.$$

La première converge si $|4x| < 1$ et sa somme est $\frac{1}{1-16x^2}$. La seconde

converge si $|x| < 1/2$ et sa somme est $\frac{2x}{1-4x^2}$.

Le rayon de convergence de la somme totale est donc 1/4.

◆ SRE.8

(*)

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ avec

$$a_n = (2 + (-1)^n)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:11]

On note que si $n = 2p$ alors $a_n = 3^{2p}$ et si $n = 2p + 1$ alors $a_n = 1$. Dans le disque de convergence, la série entière est donc somme des deux séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^{2n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}.$$

La première converge si $|3x| < 1$ et sa somme est $\frac{1}{1-9x^2}$. La seconde converge

si $|x| < 1$ et sa somme est $\frac{x}{1-x^2}$.

Le rayon de convergence de la somme totale est donc 1/3.

◆ SRE.9

(***)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} x^n.$$

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:12]

On considère d'abord $\sum e^{in\theta} x^n / n$, qui est manifestement de rayon 1, et dont

la dérivée vaut $\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}$. On prend ensuite la partie réelle, ce qui donne

$$f(x) = -\ln(1 - 2x \cos \theta + x^2).$$

$$\frac{\cos \theta - x}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$$

On remarque qu'on a un DSE en fonction de x et un DSF en fonction de θ !

◆ SRE.10

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n^2 - 1}.$$

La somme de cette série est-elle continue en 0 ?

Calculer $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$. Proposer deux méthodes distinctes.

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:13]

et on en déduit que, pour tout $x \in]-1; 1[$ et $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{x}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{2x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= -\frac{x}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2x} \left(\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - x \right) \ln(1-x) + \frac{1}{2} + \frac{x}{4}. \end{aligned}$$

Contrairement aux apparences, il n'y a pas de singularité en $x = 0$, d'ailleurs la série est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'ouvert de convergence $] -1; 1[$.

Rayon de convergence 1. On décompose en pôles simples

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

◆ SRE.11

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries suivantes, et étudier, si le cas se présente, l'existence de la somme aux bords de l'intervalle de définition :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} \\ h(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n\alpha}{n} x^n. \end{aligned}$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n$$

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:18]

On remarque que $f(x^2) = \cos x$ et $f(-x^2) = \operatorname{ch} x$ donc

$$f(x) = \begin{cases} \cos \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \operatorname{ch} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Pour $g(x)$, on remarque que c'est un produit de Cauchy, correspondant à $-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$, avec un rayon 1.

Pour h , on sépare en deux sommes de séries géométriques.

◆ SRE.12

(*)

Déterminer le rayon R et la somme sur $] -R; R[$, de la série réelle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n-1)}{n} x^n$.

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:21]

$$\text{On a } S(x) = \mathcal{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(n-1)} x^n}{n} = \mathcal{R} \left[e^{-i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n} \right] = \dots$$

◆ SRE.13

(**)

Calculer le rayon et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)!}$.

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:28]

On trouve au total :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{x}}{2} - \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\cos \sqrt{-x}}{2} - \frac{\sin \sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

◆ SRE.14

(*)

On considère la série entière centrée sur $a \in \mathbb{C}$: $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Notons R son rayon de convergence, avec $R > 0$. Montrer que, pour $0 < r < R$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + r e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

(On pourra traiter le cas $a = 0$ pour plus de simplicité.)

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:30]

On développe (produit de Cauchy) et les termes rectangles sont nuls.

◆ SRE.15 (Théorème de Liouville)

(**)

Soit f la somme de la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R .

Calculer, si $0 < r < R$:

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que si $R = +\infty$ et si f est bornée sur \mathbb{C} , alors f est constante. En déduire une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre (tout polynôme non constant admet une racine sur \mathbb{C}).

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:31]

La série $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur le cercle de centre 0 et de rayon r , donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r e^{i\theta}) d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_n r^n e^{in\theta} d\theta = a_0.$$

De même, $I_n = a_n r^n$.

Si f est bornée sur \mathbb{C} , alors $I_n \leq \|f\|_{\infty}$ ce qui, en faisant tendre r vers $+\infty$, montre $a_n = 0$ pour $n \geq 1$.

◆ SRE.16

(/)

Bouquin de 1920

Pour quelles valeurs de x la série

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots$$

est-elle convergente ? Évaluer le produit par $(1-x)^2$ de la somme des n premiers termes, et en déduire que la série, lorsqu'elle converge, a pour somme $x/(1-x)^2$.

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:38]

Rayon 1 (d'Alembert).

◆ SRE.17

(/)

Déterminer le rayon et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:43]

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} - x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \\ &= x \left(\frac{1}{1-x} \right)'' - x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

$R = 1$ par d'Alembert. Par ailleurs $n^2 = n(n+1) - n$, donc

◆ SRE.18

(**)

Déterminer le rayon et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:44]

$R = 1$. Pour $x > 0$, on pose $x = t^2$ et

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}$$

$$\text{soit } tS = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \operatorname{Arg} \operatorname{th} t \quad \text{et} \quad S(x) = \frac{\operatorname{Arg} \operatorname{th} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

Pour $x < 0$ on pose $x = -t^2$, et par le même raisonnement

donc

$$(tS)' = \sum_{n=0}^{\infty} t^2 = \frac{1}{1-t^2}$$

$$S(x) = \frac{\operatorname{Arc} \tan \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}.$$

◆ SRE.19

Rayon et somme de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

◇ [Divers/serieentexo.tex/sre:45]

Rayon 1. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ alors

$$(xS)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

$$\text{et} \quad S(x) = \frac{x - (1-x) \ln(1-x)}{x}.$$

On prolonge par continuité en posant

donc

$$xS = x - (1-x) \ln(1-x)$$

$$S(0) = 0, S(1) = 1 \text{ et } S(-1) = 1 + 2 \ln 2.$$

◆ **SRE.20 (Une application du produit de séries)** (★★)
 On rappelle que, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\zeta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n .
 Montrer que
$$\forall x > 1, \quad \zeta(x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^x}.$$

◇ [Divers/serieintexo.tex/sre:50] On utilise ici non pas le produit de Cauchy mais le produit de Dirichlet :
$$\zeta(x)^2 = \sum_{p,q} \frac{1}{p^x q^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{pq=n} \frac{1}{(pq)^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \left(\sum_{pq=n} 1 \right).$$

◆ **SRE.21** (★★)
 Étude et somme de la série entière de terme général $u_n = \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

◇ [Divers/serieintexo.tex/sre:51] C'est une série entière fractionnaire de rayon infini (l'écrire sous la forme $F(x^3)$...). Par ailleurs, $f''' = f$ donc
$$f(x) = \lambda e^x + \mu e^{ix} + \nu e^{\bar{i}x}.$$
 Avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = f''(0) = 0$, on obtient
$$\lambda + \mu + \nu = 1$$
 et
$$\lambda + j\mu + \bar{j}\nu = 0$$
 et
$$\lambda + \bar{j}\mu + j\nu = 0$$
 ce qui mène donc à $\lambda = \mu = \nu = 1/3$. Ainsi
$$f : x \mapsto \frac{1}{3} \left[e^x + 2e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} \right].$$

◆ **SRE.22** (★)
 Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

◇ [Divers/serieintexo.tex/sre:53] On étudie la série entière $\sum n^2 x^n$ en $x = 1/2$, et on trouve 6.

◆ **SRE.23** (★★★)
 Calculer les rayons et sommes des séries entières suivantes :

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$ 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4n-1}$, $x \geq 0$.

◇ [Divers/serieintexo.tex/sre:56] 1) $-1 + \sqrt{x} \operatorname{Arg th} \sqrt{x}$ pour $0 \leq x < 1$ et $-1 - \sqrt{-x} \operatorname{Arc tan} \sqrt{-x}$ pour $-1 \leq x \leq 0$.
 2) $\frac{2(1-x^2) \ln(1-x) + x^2 + 2x}{4x^3}$ (décomposer en éléments simples).
 3) $-1 + \frac{u}{4} \operatorname{Arg th} u - \frac{u}{2} \operatorname{Arc tan} u$, $u = \sqrt[3]{x}$.

◆ **SRE.24** (★★)
 Étudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

◇ [Divers/serieintexo.tex/sre:59] On vérifie que la série entière de la fonction Arc tan converge uniformément sur $[0; 1]$, en majorant le reste grâce au critère de Leibniz. On obtient alors
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \operatorname{Arc tan}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

◆ **SRE.25 (Théorème de Liouville)** d'après Centrale PC – 2003
 On note $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

1) Montrer la **formule de Cauchy** : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in]0; R[$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

2) Montrer la **formule de Gutzmer** : si $r \in]0; R[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

3) Montrer que si $R = +\infty$ (on dit alors que la fonction f est **entière**) et si f est bornée, alors f est constante (c'est le **théorème de Liouville**, dû à Cauchy).
 4) La fonction sin ne constitue-t-elle pas un contre-exemple à ce théorème ?

◇ [Divers/serieintexo.tex/r3:110b] 2) C'est la formule de Parseval :
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |z|^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

1) On écrit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n) e^{in\theta}$, donc en posant
$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n) e^{in\theta},$$
 ses coefficients de Fourier sont $c_n(g) = a_n r^n$ grâce à la convergence uniforme de la série entière sur un boulev de rayon $r < r' < R$. L'inégalité vient immédiatement. On a d'ailleurs de manière générale
$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$
 On peut bien sûr la redémontrer facilement par intégration terme à terme : elle s'appelle alors **formule de Gutzmer, 1888**.
 3) Si f est bornée sur \mathbb{C} , alors $a_n r^n = I_n \leq \|f\|_{\infty}$ ce qui, en faisant tendre r vers $+\infty$, montre $a_n = 0$ pour $n \geq 1$.
 4) La fonction sin n'est pas bornée sur \mathbb{C} , notamment
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |\sin(ix)| = +\infty.$$
 Il n'y a donc pas d'arnaque.

◆ **SRE.26** (★★)
 Soit f une fonction définie par une série entière de rayon $R > 0$. On suppose que f admet une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros distincts, convergent vers 0. Montrer que f est identiquement nulle.

◇ [Divers/serieintexo.tex/sre:81] $f(0) = 0$ par continuité, on peut donc factoriser ; si on suppose que $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n \in \mathbb{N} ; a_n = 0\}$ est fini, alors $f(x) = x^k g(x)$ avec $g(0) \neq 0$ et g continue, mais $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de zéros de g tendant vers 0, d'où contradiction.

◆ **SRE.27 (Classique)** (★★★) X PC – 2005
 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes de limite a non nulle. On note $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1) Rayon de convergence ?
 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)S(x) = a$.

◇ [Rec00/serieint-r0.tex/div:162] 1) $\sum a_n$ diverge donc $R \leq 1$. Mais $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc $R \geq 1$. Ainsi, $R = 1$.
 2) On développe, on effectue un glissement d'indice, on utilise le théorème au bord de l'intervalle de convergence.

◆ **SRE.28 (Principe du maximum)** (★★★) X PC – 2005
 Notons $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière non constante et convergente sur le disque fermé $D = \overline{D(0; \rho)}$ où $\rho > 0$. Montrer que
$$\max_{z \in D} |f(z)| > |f(0)|.$$

Remarque Ce résultat est un cas particulier du *principe du maximum* qui dit qu'une fonction non constante, développable en série entière sur un ouvert connexe du plan complexe, ne peut admettre de maximum (en module) en aucun point de cet ouvert. Autrement dit, sur un compact, puisqu'il doit y avoir un maximum (Weierstraß...), ce maximum est nécessairement sur le bord.

◇ [Rec00/serieint-r0.tex/div:156] On a la majoration par simple inégalité triangulaire :
 • 1^{er} étape : montrer que $|f|$ n'est pas constante.
$$|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{it})| dt,$$

 À FINIR !!!
 • 2^e étape : on choisit un z_0 tel que $|f(z_0)| < |f(0)|$.
 On utilise alors la formule de Cauchy (cf. exercice SRE.25 page précédente par exemple) sur le cercle de rayon $|z| = r$, pour $n = 0$, ce qui est la **formule de la moyenne** :
$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r e^{it}) dt.$$

 Or, si l'on suppose que $|f(0)|$ est le maximum, on obtient
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [|f(r e^{it})| - |f(0)|] dt < 0$$
 (intégrale d'une fonction négative, continue, non nulle) ce qui est en contradiction avec le résultat précédent.

◆ **SRE.29 (Lemme d'Abel)** (♣) X PC – 2005

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives. On suppose que

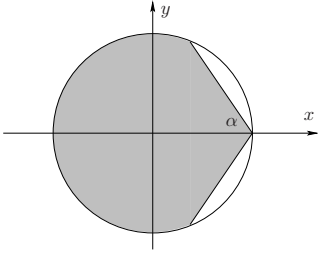
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{C}^*.$$

On suppose de plus que $\sum b_n$ diverge et que $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

- 1) Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ existent pour $0 < x < 1$ et que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

- 2) Même question pour $f(z)$, $g(z)$ et z appartenant au domaine

$$D_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} ; |z| < 1, \left| \text{Arg}(1 - z) \right| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \right\}.$$


◇ [Rec00/serieent-r0.tex/div:177]

1) Puisque $c \neq 0$, on sait que $a_n \sim c b_n$ donc $R = 1$.
 Quitte à poser $a'_n = a_n - c b_n$ et $f^* = f - x g$, on peut supposer $a_n/b_n \rightarrow 0$ et montrer $f/g \rightarrow 0$, c'est-à-dire : on suppose $a_n = o(b_n)$ et on montre que $f = o(g)$.
 □ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N à partir duquel

$$|a_n| \leq \varepsilon |b_n| = \varepsilon b_n.$$

On découpe alors, pour $x \in [0; 1[$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k x^k$$

$$|f(x)| \leq |f_N(x)| + \varepsilon \sum_{k=N}^{\infty} b_k x^k$$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \left| \frac{f_N(x)}{g(x)} \right| + \varepsilon.$$

Or, f_N est une fonction polynomiale et $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$ (lemme ultra-classique), donc il existe un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout $1 - \eta \leq x \leq 1$, on a

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq 2\varepsilon. \square$$

CQFD.

2)

◆ **SRE.30** (★★★) X PC – 2005

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On suppose qu'il existe une suite $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de complexes non nuls, tendant vers 0, telle que $f(z_i) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que f est identiquement nulle.

◇ [Rec00/serieent-r0.tex/div:179]

Par continuité, $f(0) = 0$ donc $a_0 = 0$. On peut alors poser $f(z) = z g_1(z)$, et par continuité, $g_1(0) = 0$ donc $a_1 = 0$. On poursuit par récurrence, tous les coefficients sont nuls, donc $f = 0$.

◆ **SRE.31** (♣) Mines PC – 2005

Une série entière de rayon infini peut-elle converger normalement ?

◇ [Rec00/serieent-r0.tex/r0:37]

Non, bien sûr !

◆ **SRE.32** Écrit ENSAM PC – 1997

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ quand la série converge.

- 1) Déterminer l'ensemble E de définition de la fonction f .
- 2) Donner, pour la dérivée de f , une *expression simple* valable sur $] -1; +1[$.
- 3) On donne $f(1) = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $f(-1)$.
- 4) Pour la courbe d'équation $y = f(x)$, justifier les tangentes en $x = -1$ et $x = +1$.
- 5) Trouver l'ensemble D de définition de la fonction Φ telle que

$$\Phi(x) = f(x) + f\left(-\frac{x}{1-x}\right).$$

Calculer Φ' . En déduire la valeur de $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

◇ [Rec00/serieent-r0.tex/sre:19]

◆ **SRE.33** CCP PC – 2000

Calculer les sommes des séries $\sum \frac{n^2 + 3n}{2^n}$ et $\sum \frac{n^2 + (-1)^n}{3^n}$.

◇ [Rec00/serieent-r0.tex/sre:33]

$$f(x) = \frac{2}{(1 - \frac{x}{2})^3} - \frac{2}{1 - \frac{x}{2}}.$$

On trouve alors $S = 12$.
 Idem pour l'autre, avec $g(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{3}}$ et $h(x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{3}}$.

On écrit $f(x) = \frac{1}{1-x/2} = \sum x^n/2^n$, puis on prend des combinaisons de f , et f'' pour avoir la série en $x = 1$:

◆ **SRE.34** (★★) CCP PC – 2000

Rayon de convergence et calcul de la série entière de terme général $\frac{r(n)}{n!} x^n$, où $r(n)$ est le reste de la division euclidienne de n par 3.

◇ [Rec00/serieent-r0.tex/sre:34]

Chaque fonction f_k vérifie alors : $f''' = f$ donc la somme aussi,

$$f(x) = \lambda e^x + \mu e^{ix} + \nu e^{ix}.$$

Séparer en trois sommes, toutes de rayon infini. Ensuite, écrire $f = 0 \cdot f_0 + f_1 + 2 \cdot f_2$ où f_1 n'a que les termes en $3n + 1$.
 De plus chaque fonction est réelle et $f(0) = 0$, ce qui donne tous les coefficients.

◆ **SRE.35** ENS Cachan MP – 2001

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions, convergeant uniformément vers une fonction u sur $[0; 1]$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application u_n s'écrit sous la forme d'une série entière $u_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} x^k$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(a_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite a_k lorsque $[n \rightarrow \infty]$. Montrer de plus que $u : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

◇ [Rec01/serieent-r1.tex/sre-r:10]

◆ **SRE.36** CCP MP – 2001

Étudier la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$, avec $a_n = \sin(1/\sqrt{n})$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$.

◇ [Rec01/serieent-r1.tex/sre-r:2]

On calcule que

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)}_{b_n} x^n - \sin(1)x,$$

et on applique le théorème de continuité au bord de l'intervalle pour la série entière, puisque $b_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ donc $\sum b_n$ converge. La valeur en 1 est donné par une série télescopique valant 0.

◆ **SRE.37** CCP MP – 2001

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N} : a_n = \text{Card} \{ (u, v) \in \mathbb{N}^2 ; 2u + 3v = n \}$.

- 1) Montrer que la série $\sum a_n z^n$ s'obtient en effectuant le produit de deux séries simples.
- 2) En déduire a_n .

◊ [Rec01/serieent-r1.tex/sre-r:3]

On réduit ensuite en fractions simples.

À FINIR !!!

$$\sum a_n z^n = \sum a_n z^{2u+3v} = \sum_{u=0}^{\infty} z^{2u} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} z^{3v} = \frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{1-z^3}$$

◆ **SRE.38** Centrale MP – 2001

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in [0, n]$, on note \mathcal{N}_n^p le nombre de permutations de $[0, n]$ laissant p éléments fixes.

- 1) Donner une relation entre \mathcal{N}_n^p et \mathcal{N}_{n-p}^0 .
- 2) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_n^0}{n!} x^n$. Montrer que f est définie sur $] -1; 1[$. Calculer $f(x)$.
- 3) En déduire \mathcal{N}_n^p .
- 4) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer les limites de $\left(\frac{\mathcal{N}_n^p}{n!}\right)_{n \geq p}$ (on séparera les cas $p \neq 0$ et $p = 0$). Comment interpréter le fait que $\frac{\mathcal{N}_n^0}{n!} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{e} \approx 0,36$?
- 5) Déterminer les rayons respectifs R et R_α des séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_n^p}{n!} x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathcal{N}_n^p}{n!}\right)^\alpha x^n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

◊ [Rec01/serieent-r1.tex/sre-r:14]

C'est le problème des joueurs de cartes du Mississippi !

◆ **SRE.39** TPE MP – 2001

Étude de la série entière $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

◊ [Rec01/serieent-r1.tex/sre-r:11]

Le rayon est égal à 1 (divergence en 1).

◆ **SRE.40** S' Cyr MP – 2001

Étude de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \frac{x^n + \text{sh } n}{3^n} y^n$, pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

◊ [Rec01/serieent-r1.tex/sre-r:4]

En résumé, on a convergence si et seulement si

On pose $a_n = x^n + \text{sh } n$. On écrit $\text{sh}(n) = \frac{1}{2}(e^n + e^{-n})$, ce qui montre que

$$a_{n+1}/a_n = \begin{cases} e & \text{si } x \leq e, \\ x & \text{si } x \geq e. \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq e \\ -\frac{3}{e} \leq y < \frac{3}{e} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -e \leq x \leq 0 \\ -\frac{3}{e} < y \leq \frac{3}{e} \end{cases}$$

La série est une série entière en y , qui converge donc si $|y/3| < 1/e$ ou $|y/3| < 1/x$ selon les cas. Si $y = 3/e$ ou $y = 3/x$, alors il y a manifestement divergence. Si $y = -3/e$ ou $y = -3/x$, il y a convergence par le CSA. Si $x \leq 0$, pareil en faisant attention au signe.

$$\text{ou} \quad \begin{cases} e \leq x \\ -\frac{3}{x} \leq y < \frac{3}{x} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \leq -e \\ -\frac{3}{x} < y \leq \frac{3}{x} \end{cases}$$

◆ **SRE.41** CCP MP – 2001

Domaine de convergence de $\sum x^{n^2}$? Trouver un équivalent en $[x \rightarrow 1^-]$.

◊ [Rec01/serieent-r1.tex/sre-r:16]

Le rayon vaut clairement 1, il y a divergence au bord.

◆ **SRE.42** CCP MP – 2001

On pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in \mathbb{R}$.

- 1) Trouver le rayon de convergence de la série $\sum u_n$ et le domaine de convergence.
- 2) Montrer que la somme de cette série est continue sur $[0; 1]$.
- 3) Calculer cette somme, et en déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$.

◊ [Rec01/serieent-r1.tex/sre-r:12]

reste par le théorème de Leibniz. Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

On décompose en éléments simples pour obtenir, avec un rayon $R = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = -\frac{1}{2}(-x + (x^2 + 1) \text{Arctan } x).$$

$$\|R_n\|_\infty = \sum_{x \in [0; 1]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{4n^2 - 1}$$

On a bien sûr continuité sur $[0; 1[$ d'après les théorèmes généraux sur les séries entières. La continuité sur $[0; 1]$ se montre en remarquant que l'on a affaire à une série alternée et que, par conséquent, on a une majoration très efficace du

donc $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; 1]$ vers 0. Puisque la série entière converge simplement sur $[0; 1]$, elle converge donc de plus uniformément sur $[0; 1]$ et on a donc continuité (et même le théorème de la double limite)...

ce qui nous donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

◆ **SRE.43** INT MP – 2001

On pose $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k a_k a_{n-k}$. On pose ensuite $S(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$. Calculer S et donner son rayon de convergence.

INDICATION : On pourra montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n/n! \leq 1/2^n$.

◊ [Rec01/serieent-r1.tex/sre-r:17]

◆ **SRE.44** CCP MP – 2001

- 1) Calcul $a_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?
- 3) Calculer la somme de cette série entière.

◊ [Rec01/serieent-r1.tex/sre-r:18]

◆ **SRE.45** ENSAE MP – 2001

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ [$n \rightarrow \infty$]. On pose $f(x) = \sum a_n x^n$ et on suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ell. \text{ Montrer que } \sum a_n \text{ converge et que } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \ell.$$

◊ [Rec01/serieent-r1.tex/sre-r:19]

◆ **SRE.46** Centrale MP – 2002

Soit $\alpha > 0$, on pose $S(\alpha)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\alpha n + 1}$.

- 1) Rayon de convergence de $S(\alpha)$?
- 2) Calculer $S(1)(x)$, $S(2)(x)$ et $S(3)(x)$.
- 3) Déterminer $S(\alpha)(x)$ pour tout $\alpha > 0$.
- 4) Calculer $S(2)(1)$.

◊ [Rec02/serieent-r2.tex/sre-r2:15]

◆ **SRE.47** Centrale MP – 2002

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

- 1) Calculer le rayon de convergence de cette série.
- 2) Calculer sa somme.
- 3) Que vaut $f(-1)$?

◊ [Rec02/serieent-r2.tex/sre-r2:23]

$R = 1$. Pour $x > 0$, on pose $x = t^2$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}$ donc

$$(t f)' = \sum t^{2n} = \frac{1}{1-t^2} \text{ donc}$$

$$t f(t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \text{Arg th } t \quad \text{donc} \quad f(x) = \frac{\text{Arg th } \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Pour $x < 0$ on pose $x = -t^2$, et par le même raisonnement

$$f(x) = \frac{\text{Arctan } \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$$

Il est nécessaire, pour pouvoir passer à la limite $x \rightarrow 1^-$, de montrer la convergence uniforme sur $[-1; 0]$, ce qui n'est pas trivial car la théorie des séries en-

tières ne la donne que sur $] -1; 0[$. Mais ici, le critère des séries alternées permet d'effectuer une majoration du reste :

$$\forall x \in [-1; 1], \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1} \right| \leq \frac{1}{2n+3}$$

c'est-à-dire $\|R_n\|^{[-1; 0]} \leq \frac{1}{2n+3} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$,

ce qui montre bien la convergence uniforme de la série et donc la continuité au voisinage de -1 .

Notamment $f(-1) = \frac{\pi}{4}$.

◆ **SRE.48** Centrale PC – 2002
 Résoudre l'équation $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^3 x^n = 0$.

◇ [Rec02/serieent-r2.tex/sre-r2:2:5]

◆ **SRE.49** CCP PC – 2002
 Rayon et somme de $\sum \operatorname{ch}(na) x^n$.

◇ [Rec02/serieent-r2.tex/sre-r2:9] D'après la règle de d'Alembert, le rayon est $R = e^{-a}$. C'est la somme de deux séries géométriques : $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{ch}(na) x^n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - e^a x} + \frac{1}{1 - e^{-a} x} \right]$.

◆ **SRE.50** CCP PC – 2002
 On pose $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{n+b}{n+2}$ où $b \in \mathbb{R}, b \neq 1$.
 1) Rayon de convergence de la série ?
 2) Montrer que f vérifie une équation différentielle du premier ordre. La résoudre. En déduire f .

◇ [Rec02/serieent-r2.tex/sre-r2:10]

◆ **SRE.51** CCP MP – 2002 (*)
 On pose $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$.
 1) Montrer l'existence, la continuité et la dérivabilité de y .
 2) Montrer que y satisfait à une équation différentielle du premier ordre.
 3) En déduire une expression de y en fonction de $x \mapsto F(x) = \int_0^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$ (appelée **fonction d'erreur**, et que l'on ne cherchera pas à calculer).

◇ [Rec02/serieent-r2.tex/sre-r2:14] Le rayon est infini, la continuité et la dérivabilité s'ensuivent. On vérifie que $xy = -y'$, donc $y = F$.

◆ **SRE.52** ICNA MP – 2002 (***)
 On pose $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) x^n$.
 1) Domaine de définition de g ?
 2) Donner un équivalent de g en 1^- .
 INDICATION : On donnera un équivalent de $(1-x)g(x)$.

◇ [Rec02/serieent-r2.tex/sre-r2:16] On calcule aisément $\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n-1}$ ce qui, injecté dans l'expression précédente, donne $(1-x)g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} [\ln(n) - \ln(n-1)] x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n = 2^{\infty} a_n x^n$. $-\ln(1-x) - 1 \leq (1-x)g(x) \leq -x \ln(1-x)$ puis, après manipulation d'équivalents, montre que $g(x) \sim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{x-1}$.
 Puisque $a_n \sim 1/n$, on sait que cette série va être de rayon 1 et diverger en 1. Une comparaison série intégrale, ou une égalité des accroissements finis, montre que

◆ **SRE.53** Centrale PC – 2002
 Rayon de convergence et étude aux bornes de $x \mapsto \sum_{n \geq 3} \frac{x^n}{n+3 \sin n}$.

◇ [Rec02/serieent-r2.tex/sre-r2:19] Le rayon vaut 1 car $\frac{1}{n+3} \leq a_n \leq \frac{1}{n-3}$.

◆ **SRE.54** CCP MP – 2002
 On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $a_{3n} = 2, a_{3n+1} = 0$ et $a_{3n+2} = 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Rayon de convergence et somme de la série $\sum a_n z^n$?

◇ [Rec02/serieent-r2.tex/sre-r2:17]

◆ **SRE.55** Mines PC – 2002 (***)
 On pose $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$.
 1) Montrer que $a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{nk+1}$.
 2) Trouver un équivalent de a_n en $+\infty$.

◇ [Rec02/serieent-r2.tex/sre-r2:28]

1) On peut écrire

$$a_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{(k+1)n} dt.$$

On cherche maintenant à intervertir la somme et l'intégrale. Il y a convergence simple, mais pas uniforme sur $[0; 1]$. Pas de bol. En revanche, la suite des sommes partielles est évidemment dominée par 1 (d'après le critère de Leibniz ou une variante pour les sommes partielles), donc c'est suffisant pour conclure sur $[0; 1]$. Une autre façon de voir les choses serait la suivante : pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \int_0^1 (-1)^k t^{n(k+1)} dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^N (-1)^k t^{n(k+1)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} (1-t^{Nn}) dt \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt \end{aligned}$$

en vertu du théorème de convergence dominée.

2) **1^{re} méthode** : Un simple changement de variable $y = t^n$ montre que

$$n a_n = \int_0^1 \frac{y^{1/n} dy}{1+y} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 2$$

en vertu du théorème de convergence dominée sur un segment.

Ainsi $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{n}$.

2^e méthode : On peut aussi subodorer $\ln 2/n$, faire la différence avec la série donnant $\ln 2$, puis majorer par le CSA.

◆ **SRE.56** Centrale MP – 2002
 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $\alpha > 0$. Montrer que, en notant $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} e^{-t}}{1-|z| e^{-t}} dt$.

◇ [Rec02/serieent-r2.tex/sre-r2:12]

L'étape de calcul est simple : on écrit $\frac{1}{1-|z| e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n e^{-nt}$,

que l'on insère dans l'équation, puis on effectue un changement de variable. Il faut maintenant justifier l'interversion de la somme et de l'intégrale.

◆ **SRE.57** Centrale MP – 2002
 On pose, pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}$.
 1) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(x^2 + 1)y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0$.
 2) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

◇ [Rec02/serieent-r2.tex/sre-r2:20]

◆ **SRE.58** Centrale MP – 2002
 Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon $R = 1$. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1; 1[$. On suppose de plus que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ell$.
 1) Que peut-on dire de $\sum a_n$?
 2) On suppose de plus que $a_n = o(1/n)$. Que peut-on dire de $\sum a_n$?
 3) On suppose simplement que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire de $\sum a_n$?

◊ [Rec02/serieent-r2.tex/sre-r2:26]

◆ **SRE.59** CCP PC – 2002
 Trouver les solutions développables en série entière de l'équation $x^2 y'' + xy' + 4(x^2 - 1)y = 0$.

◊ [Rec02/serieent-r2.tex/sre-r2:11]

◆ **SRE.60** Navale MP – 2002
 Comparer $\int_0^1 \frac{1}{1+t^p} dt$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{np+1}$.

◊ [Rec02/serieent-r2.tex/sre-r2:22] Cf. SRE.55.

◆ **SRE.61 (Théorème de Liouville)** Centrale PC – 2003
 On note $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Pour tout $r \in [0; R[$, on note

$$M(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

1) On note $z = r e^{i\theta}$ avec $r \in [0; R[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Interpréter $|a_n z^n|$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n z^n| \leq M(r).$$

2) Exprimer $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |z|^{2n}$ en fonction de f .

3) Montrer que si $R = +\infty$ (on dit alors que la fonction f est **entière**) et si f est bornée, alors f est constante (c'est le **théorème de Liouville**, dû à Cauchy).

4) La fonction sin ne constitue-t-elle pas un contre-exemple à ce théorème ?

◊ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:110]

1) On écrit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n) e^{in\theta}$, donc en posant

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n) e^{in\theta},$$

ses coefficients de Fourier sont $c_n(g) = a_n r^n$ grâce à la convergence uniforme de la série entière sur un boulev de rayon $r < r' < R$. L'inégalité vient immédiatement. On a d'ailleurs de manière générale

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

2) C'est la formule de Parseval :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |z|^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

On peut bien sûr la redémontrer facilement par intégration terme à terme : elle s'appelle alors **formule de Gutzmer, 1888**.

3) Si f est bornée sur \mathbb{C} , alors $a_n r^n = I_n \leq \|f\|_{\infty}$ ce qui, en faisant tendre r vers $+\infty$, montre $a_n = 0$ pour $n \geq 1$.

4) La fonction sin n'est pas bornée sur \mathbb{C} , notamment

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |\sin(ix)| = +\infty.$$

Il n'y a donc pas d'arnaque.

◆ **SRE.62** Centrale PC – 2003
 Calculer $A = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2 - 1}{(n-1)^2 n^2 (n+1)^2}$. Calculer A .

◊ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:443]

◆ **SRE.63** Centrale PC – 2003
 Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

◊ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:389]

On cherche un équivalent simple de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

À FINIR !!!

◆ **SRE.64** Centrale MP – 2003
 (Avec Maple)
 On définit la suite de nombres complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2 \\ u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) Calculer u_n pour $n \leq 10$ pour $(u_0, u_1) = (-1, -1)$ puis pour $(u_0, u_1) = (2, 1)$. Commentaires ?

2) On définit la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ en supposant son rayon de convergence $R > 0$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f et conclure.

3) On définit la série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} z^n$. Minorer le rayon de convergence de cette série entière. Trouver une équation différentielle vérifiée par g et conclure.

◊ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:83]

◆ **SRE.65** (★★★) Mines MP – 2003
 On pose $a_n = 1/C_{2n}^n$.

1) Vérifier que $4n a_n - 2a_n - (n-1)a_{n-1} - a_{n-1} = 0$.

2) En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

◊ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:414]

1) T.

2) On vérifie que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}$.

Ainsi, $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est égal à la valeur en 1 de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

de rayon 4. On pose $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On obtient

$$x(4-x)F'(x) - (x+2)F(x) = -2.$$

On se place sur l'intervalle]0; 4[, où $x(4-x)$ ne s'annule pas, et on résout l'équation différentielle, en notant que

$$\frac{x+2}{x(4-x)} = \frac{1/2}{x} + \frac{3/2}{4-x},$$

de primitive $\frac{1}{2} \ln x - \frac{3}{2} \ln(4-x)$.

Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$F(x) = A \frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}}.$$

Faisons varier maintenant la constante en posant $\Lambda(x)$, on injecte et on trouve $\Lambda'(x) = -2 \frac{(4-x)^{1/2}}{x^{3/2}}$. On en déduit

$$\Lambda(x) = -2 \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{4-x}{x}} dx.$$

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{\frac{4-x}{x}}$, cela donne

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= 4 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt = 4t - 4 \text{Arc tan } t + C^{\text{te}} \\ &= 4\sqrt{\frac{4-x}{x}} - 4 \text{Arc tan } \sqrt{\frac{4-x}{x}} + C^{\text{te}}. \end{aligned}$$

On en déduit la solution générale, on détermine la constante avec les conditions initiales...

À FINIR !!!

◆ **SRE.66** Mines PC – 2003
 L'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} dx$ existe-t-elle ? Si oui, la calculer.
 INDICATION : On développera le logarithme en série entière.

◊ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:114]

◆ **SRE.67** (★) Mines MP – 2003
 On considère $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ où l'on suppose $|a_0| \leq 1$ et $|a_n|^{1/n} = o(\frac{1}{n})$.
 Montrer que le rayon de cette série entière est $R = +\infty$ et qu'il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall z \in \mathcal{B}(0; R) \quad |f(z)| \leq e^{K|z|}.$$

◊ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:170]

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq \frac{K}{n!}$$

On a $a_n = o(\frac{1}{n^n}) = o(\frac{1}{n!})$ ce qui montre que le rayon est infini. On sait que $\lim_{n \rightarrow \infty} n! a_n = 0$, on pose donc

$$K = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} n! a_n.$$

donc

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n \leq K e^{|z|}.$$

◆ **SRE.68** Mines MP – 2003
 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe bornée. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Montrer que, si $x > 1$

$$\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt.$$

◇ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:215] somme et intégrale grâce au théorème « $\sum \int |f_n|$ » :

Le rayon de la série définissant f est au moins égal à 1. Celle définissant g est de rayon infini (cf. **RAY.8**).

Pour tout $x \in]1; +\infty[$, on développe l'exponentielle et l'on intervertit

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^n dt = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

◆ **SRE.69** TPE MP – 2003
 On considère l'équation différentielle $xy'' + 3y' - 4x^3 y = 0$. Trouver les solutions développables en série entière et résoudre entièrement cette équation.

◇ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:93]

◆ **SRE.70** (***) TPE MP – 2003
 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de limite 1. On pose

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

1) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
 2) Que dire de $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$?

◇ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:148] Alors, pour tout entier N , on a

Un joli exercice ! Le rayon vaut 1 par le critère de d'Alembert.

On peut se douter que f doit diverger car $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ (mais on n'a a priori aucun théorème du cours qui nous dit cela !).

Il existe un entier n_0 à partir duquel tous les a_n sont positifs. On pose alors $g(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$, et $f = g + P$ où P est un polynôme, donc parfaitement régulier.

De plus, la fonction g est définie et croissante sur $[0; 1[$.

Notons $\ell = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \in \overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

$\forall x \in [0; 1[$ $\sum_{n=n_0}^N a_n x^n \leq \ell$, et donc, par continuité du polynôme de gauche, on peut passer à la limite quand $x \rightarrow 1$, ce qui donne $\sum_{n=n_0}^N a_n \leq \ell$.

Ceci étant vrai pour toute valeur de N , et par divergence de la série $\sum a_n$, on a donc montré que $\ell = +\infty$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

◆ **SRE.71** (♣) TPE MP – 2003
 On pose $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$. Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:149] Par conséquent :

On écrit le développement en série entière en séparant en deux termes le numérateur. On obtient

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}.$$

- Si $n \equiv 1 [3]$, $f^{(n)}(0) = 0$;
 - Si $n = 3p + 2$ ou $n = 3p$, $f^{(n)}(0) = (-1)^p n!$.

◆ **SRE.72** (♣) Navale PC – 2003
 On pose $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$. Rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$? Étude en -1 et en 1 .

◇ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:100] donc

(On trouve un corrigé dans la RMS 9-10/1999-2000).

On vérifie $|a_n| \sim \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n}$ grâce à l'équivalent connu de la série harmonique,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, donc le rayon vaut 1 par le théorème de d'Alembert.

Si $x \in [0; 1[$, la série est une série alternée de Leibniz, ce que l'on montre

avec un calcul explicite de $|a_n| - |a_{n+1}|$ et l'équivalent de la série harmonique : et donc par intégration terme à terme :

$$|a_n| - |a_{n+1}| \sim \frac{\ln n}{2n^2} > 0$$

donc la suite $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang. Il y a donc convergence uniforme sur $[0; 1]$ et donc continuité. On peut même calculer la limite : on reconnaît dans $\sum a_n x^n$ un produit de Cauchy mais le $1/(n+1)$ est en trop ! On sait que

$$\forall x \in]0; 1[\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \int_0^x \frac{\text{Arc tan } \sqrt{t}}{\sqrt{t(1+t)}} dt = (\text{Arc tan } \sqrt{x})^2.$$

La convergence uniforme sur $[0; 1]$ montre donc que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

ce qui montre que

$$\forall x \in]0; 1[\quad \frac{\text{Arc tan } \sqrt{x}}{\sqrt{x(1+x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n,$$

Il y a en revanche divergence ponctuelle en -1 , il ne saurait donc y avoir convergence uniforme sur $]-1; 0]$. On doit même pouvoir montrer par les techniques usuelles que la fonction diverge vers $+\infty$ en -1 .

◆ **SRE.73** (♣) Petites Mines MP – 2003

- Calculer $I_n = \int_0^1 t^n dt$.
- Montrer que $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.
- Calculer $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

◇ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:119] (obtenue par le CSA).
 $I_n = 1/(n+1)$ et $S = \ln 2$ grâce à la convergence uniforme de la série du ln

◆ **SRE.74** (ℓ_1) CCP MP – 2003
 On note $\ell_1 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ; \sum |a_n| \text{ converge}\}$.

- Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R . A-t-on $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1$?
- On pose $f(x) = \frac{1}{(2-x)(3-x)}$. La suite $\left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient-elle à ℓ_1 ?
- On note $\ell_2 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ; \sum |a_n|^2 \text{ converge}\}$. A-t-on $\ell_1 \subset \ell_2$?

◇ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:211] rayon 2 par une suite de rayon 3), donc la suite appartient bien à ℓ_1 .

- Si $R > 1$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1$. Si $R < 1$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin \ell_1$. Si $r = 1$, on ne peut pas conclure (par exemple, $(1/n)_n \notin \ell_1$ mais $(1/n^2)_n \in \ell_1$).
- La suite demandée est celle des coefficients du développement en série entière de f , et celui-ci est de rayon 2 (produit de Cauchy d'une suite de
- Si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à ℓ_1 , alors elle tend vers 0, donc à partir d'un certain rang, on a $|a_n|^2 \leq |a_n|$ ce qui montre que la suite appartient à ℓ_2 .

◆ **SRE.75** (***) CCP MP – 2003
 Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n x^n$.

◇ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:127] On écrit $S = S_1 + S_2$ en séparant les termes pairs et impairs.

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n x^{2n} = 2f(x^2)$$

et cette série converge pour $x \in]-1; 1[$.

Au total, on a donc, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$S(x) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \text{Arg th } x.$$

◆ **SRE.76** CCP MP – 2003
 Rayon et somme de la série entière $\sum a_n x^n$ avec

$$a_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right).$$

◇ [Rec03/serieent-r3.tex/r3:203]

◆ **SRE.77** (Somme d'une série numérique) (*) CCP MP – 2003
 Calculer $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

◇ [Rec03/serieint-r3.tex/r3:412]

On a

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1}$$

$$= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 1 = 2 \ln 2 - 1,$$

après avoir montré bien sûr que la série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ converge uniformément sur $[0; 1]$ grâce au critère des séries alternées.

◆ SRE.78

(★★)

ENS Cachan MP – 2004

Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon infini, vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $f : z \mapsto az + b$ (avec une condition sur a).INDICATION : (Donnée en cours de résolution.) Étudier $h = \mathcal{I}m(f)$. Déterminer l'intervalle de $[0; 2\pi]$ sur lequel $|\sin(n\theta)| \leq n \sin \theta$.

◇ [Rec04/serieint-r4.tex/r4:240]

◆ SRE.79

(★★)

Centrale MP – 2004

Soit $a \in]0; 1[$. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^{ax} f(t) dt.$$

Montrer que $f = 0$.INDICATION : Montrer que f est développable en série entière.

◇ [Rec04/serieint-r4.tex/r4:164]

et que le reste de Taylor tend vers 0.

Utiliser une formule de Taylor pour montrer que les dérivées en 0 sont nulles

◆ SRE.80

(★★)

Centrale MP – 2004

On pose $a_0 = 1$ et $a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t(t-1) \cdots (t-n) dt$.

- 1) Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?
- 2) Calculer de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in [0; \mathbb{R}[$.
- 3) Équivalent de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

◇ [Rec04/serieint-r4.tex/r4:204]

◆ SRE.81

(★)

Centrale MP – 2004

(Énoncé exact, en particulier pour la question 2.)

- 1) Décomposer $\frac{1}{1-x^6}$.
- 2) Calculer $\int \frac{1}{1-x^6}$ sur $] -1; 1[$.
- 3) En déduire $\sum \frac{x^n}{6n+1}$ sur $] -1; 0[$.
- 4) Calculer $\sum \frac{(-1)^n}{6n+1}$.

◇ [Rec04/serieint-r4.tex/r4:239]

◆ SRE.82

Centrale PC – 2004

On définit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) x^n$.

- 1) Déterminer le domaine de définition D de f .
- 2) Étudier f sur $D \cap [0; +\infty[$. Que se passe-t-il aux bords de l'intervalle ?
- 3) On pose $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$. Déterminer le rayon de convergence de g . Donner une expression simple de g .
- 4) Donner un équivalent de f en 1.

INDICATION : On pourra utiliser après démonstration l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

◇ [Rec04/serieint-r4.tex/r4:44]

$$c_n - 1 \leq \ln n \leq c_{n-1}$$

- 1) $D =] -1; 1[$.
- 2) On peut par exemple minorer $f(x)$ pour tout $x \in]0; 1[$:

d'où l'on déduit que, pour tout $x \in [0; 1[$:

$$f(x) \geq \sum_{n=3}^{\infty} x^n = \frac{x^3}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$$

$$g(x) - \frac{1}{1-x} \leq f(x) \leq g(x)$$

ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

- 3) On reconnaît un produit de Cauchy : $g(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$ pour $x \in] -1; 1[$.

et, puisque $\frac{1}{1-x} = \underset{x \rightarrow 1^-}{o}(g(x))$, on a donc

- 4) Notons $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, alors l'inégalité présentée permet d'obtenir l'encadrement

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} g(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

◆ SRE.83

(★★)

Centrale PC – 2004

On définit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$ et, pour tout entier n non nul : $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k!}$.

- 1) Montrer que $|a_n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2) Soit r un réel vérifiant $\frac{1}{\ln 3} \leq r < 1$. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $|a_k| \leq r^k$. En déduire que la série $\sum a_n x^n$ a un rayon $R \geq 1$.
- 3) Montrer que, pour tout $x \in] -1; 1[$, $(e^x - 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2$ et que $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

◇ [Rec04/serieint-r4.tex/r4:85]

◆ SRE.84

(★★)

Mines MP – 2004

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2} u_n$. On définit de plus $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

- 1) Montre que, pour tout entier n , $1 \leq u_n \leq n^2$.
- 2) Déterminer le rayon de convergence de la série entière.
- 3) Exprimer S à l'aide de fonctions usuelles.

◇ [Rec04/serieint-r4.tex/r4:153]

◆ SRE.85 (Divergence au bord)

(★★)

Centrale MP – 2004

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série entière $\sum a_n x^n$ soit de rayon R . On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et on suppose que la série $\sum a_n R^n$ diverge.

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = +\infty$.
- 2) Montrer que Arc sin est développable en série entière sur $[-1; 1]$ et expliciter son développement.
- 3) De même avec $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

◊ [Rec04/serieent-r4.tex/r4:156]

On garde N fixé, on peut donc prendre la limite quand $x \rightarrow \mathbb{R}^-$, ce qui donne

1) f est croissante sur $[0; \mathbb{R}[$ donc admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en \mathbb{R} . Pour tout $x \in [0; \mathbb{R}[$ et tout $N \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\ell \geq \sum_{n=0}^N a_n \mathbb{R}^n.$$

Ceci étant vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\ell = +\infty$.

$$\ell \geq f(x) \geq \sum_{n=0}^N a_n x^n.$$

2)

◆ **SRE.86** (★) Mines PC – 2004
 On définit $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} x^n$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f . En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

◊ [Rec04/serieent-r4.tex/r4:53]

Dérivons terme à terme sur $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

On sépare $(2n+1) = (2n) + 1$ et on trouve

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(n-1)!} \cdot 2 \cdot x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} x^n \\ &= f(x) + 2x f'(x), \end{aligned}$$

ce que l'on résout en $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ avec la condition initiale $f(0) = 1$.

◆ **SRE.87** (★★★) TPE MP – 2004
 On pose $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$. Étudier la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, expliciter f et calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

◊ [Rec04/serieent-r4.tex/r4:169]

◆ **SRE.88** (★★) TPE PC – 2004
 Soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$.
 1) Montrer que la série $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon infini.
 2) On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$:

$$\int_0^{+\infty} f(zt) e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

3) On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} f(xt) e^{-t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda.$$

◊ [Rec04/serieent-r4.tex/r4:94]

2) Intégration terme à terme.

3) TCD car f est bornée.

◆ **SRE.89** (★★★) Navale PC – 2004
 Calculer le rayon et la somme de la série entière $\sum a_n z^n$, où $a_n = 2^n \int_0^1 t^n (1-t)^n dt$.

◊ [Rec04/serieent-r4.tex/r4:06]

On écrit que $\frac{t}{2} \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $t \in [0; \frac{1}{2}]$, ce qui donne après calcul simple que

$$\frac{1}{(n+1)2^n} \leq a_n \leq \frac{1}{2^n}$$

et donc $R = 2$. (On peut aussi calculer par intégration par parties $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \dots$)

On calcule la somme en intégrant terme à terme, sauf erreur, si $x > 0$, on a

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x(1-x/2)}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2x}{2-x/2}} \right).$$

et si $x < 0$, c'est

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{-2x(1-x/2)}} \operatorname{Arg th} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{-2x}{2-x/2}} \right).$$

◆ **SRE.90** (★) S^t Cyr PC – 2004
 Rayon et somme de la série entière $\sum 2^{E(n/2)} x^n$. En déduire la somme $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{-E((n-1)/2)}$.

◊ [Rec04/serieent-r4.tex/r4:135]

◆ **SRE.91** (★★★) X PC – 2005
 Soit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, non constante. Soit $\rho \in]0; \mathbb{R}[$. Montrer que

$$\max_{z \in B(O; \rho)} |F(z)| > |a_0|.$$

INDICATION : On commencera par le cas $F(z) = a_0 + a_p z^p$.

◊ [Rec05/serieent-r5.tex/r5:18]

◆ **SRE.92** (★★) Centrale PC – 2005
 (Avec Maple)
 On définit $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{(2n+1)!}$.
 1) Rayon de convergence.
 2) Donner une expression simple de S .
 3) Donner un majorant, sur $[-2; 0]$, de $x \mapsto R_3(x)$, où $R_3(x) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n x^n}{(2n+1)!}$.
 En déduire une valeur approchée de S et, grâce à Maple, tracer le graphe de S sur $[-2; 0]$.
 4) Montrer que S est bornée sur \mathbb{R}^- . Montrer que l'équation $S(x) = 0$ a une infinité de solutions sur \mathbb{R} .

◊ [Rec05/serieent-r5.tex/r5:13]

On vérifie que le rayon est infini. Le reste peut se majorer sur $[-2; 0]$ grâce au théorème de Leibniz sur les séries alternées :

$$\forall x \in [-2; 0] \quad |R_3(x)| \leq \frac{4x^4}{9!} \leq \frac{4 \cdot 2^4}{9!}.$$

Or Maple nous permet d'évaluer numériquement cette dernière expression :

> evalf(4*2^4/9!);

0.0001763668430

On a donc, à $2 \cdot 10^{-4}$ près, une approximation valable de S en ne considérant que les trois premiers termes de la somme.

Par suite, si l'on veut tracer S sur $[-2; 0]$, on demande ceci à Maple :

> f:=(n,x)-> n*x^n/(2*n+1)! ;

> plot(sum(f(n,x),n=1..3),x=-2..0);

Le résultat (particulièrement peu folichon) est :



On peut alors vérifier, par exemple, que les graphes avec 3 termes et avec 20 termes ne diffèrent pas de manière sensible à l'écran.

L'intérêt de cette manip est évidemment de pouvoir afficher une fonction définie par une série infinie, que Maple ne sait pas calculer...

◆ **SRE.93** Centrale PC – 2005
 Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum a_n x^n$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{1}{n \binom{2n}{n}}.$$

◊ [Rec05/serieent-r5.tex/r5:41]

◆ **SRE.94** (★★) Centrale PC – 2005
 On note $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\sum n a_n$ converge absolument.
 1) Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est ≥ 1 . On définit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathcal{D}$.
 2) On suppose que $|a_1| \neq 0$ et $|a_1| \geq \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n|$.
 a) Montrer que f est injective sur \mathcal{D} .
 b) Étudier l'exemple $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^3$.
 3) Trouver une série entière d'expression simple qui vérifie les trois assertions suivantes :
 i) $\sum n a_n$ converge absolument ;
 ii) l'hypothèse de la question 2 n'est pas vérifiée.
 iii) f est injective sur \mathcal{D} .

◇ [Rec05/serieent-r5.tex/r5:121]

◆ **SRE.95** (★★★) Mines PC – 2005

Rayon de convergence et calcul de la série entière définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}.$$

◇ [Rec05/serieent-r5.tex/r5:512]

R = 1 par d'Alembert.

pour $x \in]-1; 1[$, on dérive :

$$x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} x^{2n} \xrightarrow{d/dx} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} x^{2n}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} x^{2n+3} \xrightarrow{d/dx} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+2}$$

$$= - \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^{n+1} = \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} x^{2n+3} = x - \arctan x$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} x^{2n} = \frac{1}{x^3} [x - \arctan x]$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} x^{2n} = \frac{1}{x} \left[\int_0^x \left(\frac{1}{t^3} [t - \arctan t] dt \right) \right]$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{(\arctan x)(1+x^2) - x}{2x^3}$$

d'où $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{(\arctan \sqrt{x})(1+x) - \sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$

pour $x \in]0; 1[$.Idem pour $x \in]-1; 0[$, on doit trouver à peu près la même chose avec un Arg th.

◆ **SRE.96** (★★) CCP PC – 2005

On note f la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

- 1) Déterminer le domaine \mathcal{D}_f de définition de f . Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
- 2) Donner l'expression de f à l'aide de fonctions usuelles.
- 3) *Suite douteuse.*

◇ [Rec05/serieent-r5.tex/r5:142]

Développement en série entière

◆ DSE.1

Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$ n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

◊ [Divers/dseexo.tex/sre:9] restes ne saurait converger simplement sur un voisinage de 0.
En effet, tous les coefficients de Taylor sont nuls, ce qui prouve que la suite des

◆ DSE.2

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$.

◊ [Divers/dseexo.tex/sre:10] et donc

Au voisinage de 0, on a

$$f(x) = \ln 2 + \ln 3 + \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right) \\ = \ln 2 + \ln 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \frac{x^n}{n},$$

$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6) = \ln((x-3)(x-2)) = \ln(2-x) + \ln(3-x)$ et ce développement est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 2$.

◆ DSE.3

Développer en série entières les fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(1+x-x^2) \quad g(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad h(x) = \left(\frac{(1-x)(1-\cos x)}{x^2}\right)^2 \\ i(x) = \text{Arc tan } x \quad j(x) = \text{Arc tan}(x-1) \quad k(x) = \Gamma(1+x)$$

◊ [Divers/dseexo.tex/sre:17] (Peut-être plus simple en intégrant ?)
 f : On écrit $1+x-x^2$ sous la forme $(x-\alpha)(x-\beta)$. h : $(1-\cos x)^2 = \frac{3}{2} - 2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$, à multiplier par $(1-2x+x^2)/x^2$.
 g : On écrit $g(x) = (1+x)/\sqrt{1-x^2}$ et on utilise le DSE de $(1+x)^\alpha$. i et j par intégration.

◆ DSE.4

Trouver le développement en série entière de $f(x) = e^{-x} \sin x$, et le rayon de convergence d'icelle.

◊ [Divers/dseexo.tex/sre:2] C'est la partie imaginaire de $e^{x(i-1)}$.

◆ DSE.5

Développer en série entière en 0 la fonction définie par $f(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{t^4 + 2t^2 + 5}$.

◊ [Divers/dseexo.tex/sre:20] On peut également injecter une forme générale de série entière dans la relation
On écrit que $\frac{1}{t^4 + 2t^2 + 5} = \frac{1}{t^4(1 + 2/t^2 + 5/t^4)}$ $(t^4 + 2t^2 + 6)f(t) = 1$
or $X^2 + 2X + 5 = (X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$ avec $\alpha = -1 + 2i$. On réduit en éléments simples, on DSE la dernière expression, et on intègre. ce qui nous donne une relation de récurrence entre les coefficients.

◆ DSE.6

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+t^x)}{t^x} dt$.

1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

2) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(1+x(n-1))}$.

◊ [Divers/dseexo.tex/sre:22]

◆ DSE.7 (Fonction de Bessel)

Calculer le DSE en 0 de $f(x) = \int_0^\pi \cos(x \cos t) dt$.

◊ [Divers/dseexo.tex/sre:23]

On utilise

$$\cos y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}$$

avec $y = x \cos t$ et

$$f(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} \cos^{2n} t}{(2n)!} dt$$

Par IPP on a

$$I_n = \int_0^\pi \cos t (\cos t)^{2n-1} dt \\ = - \int_0^\pi (2n-1) \sin t (\cos t)^{2n-2} (-\sin t) dt \\ = \int_0^\pi (2n-1) (\sin t)^2 (\cos t)^{2n-2} dt \\ = \int_0^\pi (2n-1) (1 - (\cos t)^2) (\cos t)^{2n-2} dt \\ = (2n-1)I_{n-1} - (2n-1)I_n,$$

donc $2nI_n = (2n-1)I_{n-1}$ et comme $I_0 = \pi$ on obtient

$$I_n = I_0 \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \pi.$$

et il suffit maintenant de calculer $\int_0^\pi \cos^{2n} t dt$, qui est un calcul classique (intégrale de Wallis, voir exercice DSE.19). Cela donne

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi x^{2n}}{(2^n n!)^2}.$$

◆ DSE.8

(Z)

Calculer le DSE en 0 de $f(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$.

◊ [Divers/dseexo.tex/sre:24]

On calcule la dérivée :

$$f'(x) = \cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}$$

donc $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(4n+1) \cdot (2n)!}$, rayon infini.

◆ DSE.9

(***)

Calculer le DSE en 0 de $f(x) = \frac{\text{Arc sin } x}{\sqrt{1-x^2}}$. Pour cela, on cherchera une équation différentielle vérifiée par f .

◊ [Divers/dseexo.tex/sre:25]

On montre que $(1-x^2)f' - xf - 1 = 0$, on en déduit les coefficients

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

◆ DSE.10

(***)

Développement en série entière de $f(x) = (\text{Arc sin } x)^2$. (On cherchera une équation différentielle du deuxième ordre, vérifiée par f .)

◊ [Divers/dseexo.tex/sre:35]

f est DSE comme produit de fonctions DSE. On calcule

$$f'(x) = \frac{2 \text{Arc sin } x}{\sqrt{1-x^2}} \\ f''(x) = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x \text{Arc sin } x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

donc $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2$ et $f(0) = f'(0) = 0$. Si f admet un DSE $\sum a_n x^n$, on obtient $a_2 = 1$ et $k^2 a_k = (k+1)(k+2)a_{k+2}$ donc

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \text{Arc sin }^2 x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

◆ DSE.11

(**)

Calculer le DSE de $f(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}$.

◊ [Divers/dseexo.tex/sre:26]

On a $f'(x) = \frac{1}{1+x^2+x^4} = \frac{1-x^2}{1-x^6}$ si $x \in]-1; 1[$ donc

$$f'(x) = (1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} x^{6n}$$

ce qui donne

$$f(x) = \pi\sqrt{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{6n+1}}{6n+1} - \frac{x^{6n+3}}{6n+3} \right),$$

série entière de rayon 1.

◆ DSE.12

(**)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Pour cela, on écrira

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{\frac{\sin x - x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}}.$$

◇ [Divers/dseexo.tex/sre:27]

qui est donc \mathcal{C}^∞ (rayon ∞) et

On peut écrire

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n},$$

$$\frac{\sin x - x}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n-1},$$

qui est donc \mathcal{C}^∞ (rayon $+\infty$), le tout via un prolongement en 0. On a donc un quotient de deux fonctions \mathcal{C}^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas.

◆ DSE.13

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}. \quad (*)$$

◇ [Divers/dseexo.tex/sre:32]

et cela permet de conclure.

En posant $f_n(t) = t^n (\ln t)^2$, la série $\sum f_n$ converge car

$$\int_0^1 t^n (\ln t)^2 dt = \frac{2}{(n+1)^3},$$

◆ DSE.14

DSE de $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}$.

◇ [Divers/dseexo.tex/sre:36]

Si $\alpha \neq 0, [\pi]$, alors f est définie sur \mathbb{R} . Sinon, elle n'est pas définie en -1 ou en 1 . De toute façon, f est une fraction rationnelle dont les pôles sont $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$ donc admet un DSE de rayon de convergence 1.

soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha} x^n$.

Si $\alpha \equiv 0 \pmod{2\pi}$ alors

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Si $\alpha \equiv \pi \pmod{2\pi}$ alors

$$f(x) = \frac{1}{2i \sin \alpha} \left[\frac{1}{x - e^{i\alpha}} - \frac{1}{x - e^{-i\alpha}} \right] = \frac{1}{2i \sin \alpha} \left[\frac{e^{i\alpha}}{1 - x e^{i\alpha}} - \frac{e^{-i\alpha}}{1 - x e^{-i\alpha}} \right],$$

donc $f(x) = \frac{1}{2i \sin \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (x^n e^{i(n+1)\alpha} - x^n e^{-i(n+1)\alpha}),$

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n.$$

◆ DSE.15

Développer en série entière $f(x) = \cos^4 x$.

◇ [Divers/dseexo.tex/sre:39]

de rayon infini.

On écrit

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3) = \frac{1}{8} \left(3 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4 \cdot 2^{2n} + 4^{2n}) \frac{x^{2n}}{n!} \right),$$

◆ DSE.16

Développer en série entière $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$.

◇ [Divers/dseexo.tex/sre:40]

et $\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$,

On développe $f(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}$, et on se souvient que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

donc $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [n(n+1) - n]x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$.

◆ DSE.17

Déterminer les solutions développables en séries entières de l'équation différentielle $4xy'' + 2y' - y = 0$.

◇ [Divers/dseexo.tex/sre:41]

soit, après deux lignes de calcul :

On écrit $y = \sum a_n x^n$, on obtient alors

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [4n(n+1) + 2(n+1)]a_{n+1} - a_n \right\} x^n = 0$$

$$a_n = \frac{a_0}{(2n)!}$$

de rayon infini et de somme

$$S(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} a_0 \operatorname{ch} \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ a_0 \cos \sqrt{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

et donc $a_n = \frac{a_0}{2^n n! \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$

N.B. : on sait d'après les théorèmes généraux sur les équadiff qu'il y a une autre famille de solutions... mais celles-ci ne sauraient donc être DSE. On vérifiera que ce sont celles en $\sin \sqrt{x}$ et $\operatorname{sh} \sqrt{-x}$.

◆ DSE.18

Développer en série entière $f(x) = \ln \left(\frac{1+x}{2-x} \right)$.

◇ [Divers/dseexo.tex/sre:46]

Rayon de convergence $R = 1$.

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln 2 - \ln \left(1 - \frac{x}{2} \right) = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + (-1)^n \right] \frac{x^n}{n}.$$

◆ DSE.19 (Intégrales de Wallis)

On cherche à calculer les intégrales (dites de Wallis) $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt$.

- Effectuer un DSE de $x \mapsto \frac{1}{1+x \cos^2 t}$, et en déduire le DSE sur $] -1; 1[$ de $f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+x \cos^2 t}$.
- En remarquant que $f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\cos^2 t [1 + \tan^2 t + x]}$, donner un expression simple de $f(x)$.
- Effectuer un DSE de cette dernière expression.
- En déduire que $W_n = \frac{\pi (2n)!}{2 (2^n n!)^2}$.

◇ [Divers/dseexo.tex/sre:47]

3) On calcule

- On écrit $\frac{1}{1+x \cos^2 t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \cos^{2n} t$. On veut intégrer terme à terme (ce qui est possible car, pour $|x| < 1$ on a convergence normale), donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt.$$

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^n.$$

- On a

$$f(x) \stackrel{u=\tan t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2+x} = \left[\frac{1}{\sqrt{1+x}} \operatorname{Arc tan} \left(\frac{u}{\sqrt{1+x}} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+x}}.$$

- Unicité du DSE.

Remarque : en écrivant $\cos x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et en développant par le binôme de Newton, on retrouve très facilement la valeur de l'intégrale de Wallis. Pourquoi diable se fatiguer tant ?

◆ DSE.20

Développer en série entière $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$.

◇ [Divers/dseexo.tex/sre:48]

De la même façon, $B = \frac{1}{x+1-i}$

On écrit

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{(x+1+i)(x+1-i)} = \frac{i}{2} \left[\frac{1}{x+1+i} - \frac{1}{x+1-i} \right].$$

$$= \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-i)^{-n} x^n.$$

On pose

$$A = \frac{1}{x+1+i} = \frac{1}{1+i} \frac{1}{1+y} = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n$$

Donc, pour tout x tel que $|x| \leq \sqrt{2}$,

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [(1+i)^{-n-1} - (1+i)^{-n-1}] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin \left[(n+1) \frac{\pi}{4} \right] \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n+1} x^n.$$

pour

$$|y| = \left| \frac{x}{1+i} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{2}} \leq 1.$$

Une autre, et certainement plus rapide, façon d'arriver au résultat, est de noter que $(x^2 + 2x + 2) f(x) = 1$ et d'injecter !

Alors

$$A = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1+i)^{-n} x^n.$$

◆ **DSE.21 (DSE)** (*)

Développer en séries entières les fonctions qui à x associent :

1) $\ln(1+x+x^2)$; 5) $\frac{1-x}{(1+2x-x^2)^2}$; 8) $\text{Arc tan}(x+\sqrt{3})$;
 2) $(x-1)\ln(x^2-5x+6)$; 6) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;
 3) $\frac{x-2}{x^3-x^2-x+1}$; 7) $\text{Arc tan}(x+1)$;
 4) $\frac{1}{1+x-2x^3}$;

◇ [Divers/dseexo.tex/sre:54]

1) $= \ln(1-x^3) - \ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \frac{x^{3n+2}}{3n+2} - 2\frac{x^{3n+3}}{3n+3} \right)$.
 2) Factoriser : $-\ln 6 + \left(\frac{5}{6} + \ln 6\right)x - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2^n} + \frac{2n+1}{3^n} \right) \frac{x^n}{n(n-1)}$.
 3) $\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2n+5+3(-1)^n}{4} x^n$.
 4) $\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + 2\sqrt{2}^n (2\cos(3n\pi/4) - \sin(3n\pi/4)) \right) x^n$.

5) Intégrer : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4\sqrt{2}} \left((-\sqrt{2}-1)^{n+2} - (\sqrt{2}-1)^{n+2} \right) x^n$.
 6) $= \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n (x^{2n} - x^{2n+1})$.
 7) Dériver : $\frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/4)}{n\sqrt{2}^n} (-1)^n x^n$.
 8) Dériver : $\frac{\pi}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(n\pi/6)}{n2^n} x^n$.
 9) Dériver, factoriser : $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2^n+2^{-n}}{n^2} x^n$.

◆ **DSE.22 (Pédagogique)** (**)

Trouver un développement le série entière de $x \mapsto \text{Arc tan}(x+1)$.

◇ [Divers/dseexo.tex/div:18]

La dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+2}$.
 On écrit $\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{(x+1+i)(x+1-i)}$
 $= \frac{i}{2} \left[\frac{1}{x+1+i} - \frac{1}{x+1-i} \right]$.

On pose $A = \frac{1}{x+1+i} = \frac{1}{1+i} \frac{1}{x+1+y}$
 $= \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n$

pour $|y| = \left| \frac{x}{1+i} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{2}} \leq 1$.

Alors $A = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n$
 $= \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1+i)^{-n} x^n$.

De la même façon, $B = \frac{1}{x+1-i} = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-i)^{-n} x^n$.

Donc, pour tout x tel que $|x| \leq \sqrt{2}$,
 $\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [(1+i)^{-n-1} - (1+i)^{-n-1}] x^n$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin \left[(n+1) \frac{\pi}{4} \right] \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n+1} x^n$.

Il ne reste qu'à intégrer et on trouve :
 $\frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/4)}{n\sqrt{2}^n} (-1)^n x^n$.

◆ **DSE.23 (DSE)** (*)

Développer en série entière $x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$ et $x \mapsto e^{-2x^2} \int_0^x e^{2t^2} dt$.

◇ [Divers/dseexo.tex/sre:55]

Si l'on dérive la première expression, on peut développer l'exponentielle, puis intégrer. On trouve $\int_x^{2x} e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2^{2n+1} - 1)}{n! (2n+1)} x^{2n+1}$.

En dérivant la seconde expression, on s'aperçoit qu'elle vérifie l'équation différentielle $y' = -4xy + 1$. En l'appliquant aux coefficients d'une série entière, on trouve $e^{-2x^2} \int_0^x e^{2t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{8^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

◆ **DSE.24**

Trouver le DSE de $\frac{1}{(1-x)^p}$.

◇ [Divers/dseexo.tex/sre:64]

On remarque que $D^{p-1} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{(p-1)!}{(1-x)^p}$

donc $\frac{1}{(1-x)^p} = \frac{1}{(p-1)!} D^{p-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)$
 $= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p-1)!}{n!} x^n$.

◆ **DSE.25** (■)

X PC – 2005

1) Calculer $\int_0^{\pi/2} \theta \sin(2q+1)\theta d\theta$.
 2) Montrer que $\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\sin \theta} d\theta = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.
 3) Établir que $\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\sin \theta} d\theta = 2 \int_0^1 \frac{\text{Arc tan } u}{u} du$.

◇ [Rec00/dse-r0.tex/div:167]

1) Intégration par parties :
 $\int_0^{\pi/2} \underbrace{\theta}_{u'} \underbrace{\sin(2q+1)\theta}_{v'} d\theta = \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}$.

2) Chaque terme du membre de droite est en fait une intégrale, mais la somme des sinus n'est pas bien définie. On revient aux sommes partielles :
 $\sum_{p=0}^N \sin(2p+1)\theta = \text{Im} \left(\sum_{p=0}^N e^{i(2p+1)\theta} \right)$
 $= \text{Im} \frac{\sin(N+1)\theta}{\sin \theta} \cdot e^{i(N+1)\theta}$
 $= \frac{\sin^2(N+1)\theta}{\sin \theta}$.

Ensuite, on établit un lemme classique :
LEMME Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi/2]$. Alors $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \sin^2[(N+1)\theta] \cdot f(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f(\theta) d\theta$.

(Il suffit de linéariser le sinus puis intégrer par parties.) On en déduit que $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(N+1)\theta}{\sin \theta} \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\sin \theta} d\theta$.

Or $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(N+1)\theta}{\sin \theta} \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sum_{p=0}^N \theta \sin(2p+1)\theta d\theta$
 $= \sum_{p=0}^N \int_0^{\pi/2} \theta \sin(2p+1)\theta d\theta$
 $= \sum_{p=0}^N \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}$.

On passe à la limite et le tour est joué.
 3) On développe l'arctangente en série entière :
 $\int_0^1 \frac{\text{Arc tan } u}{u} du = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{2n+1} du$

on utilise le théorème de convergence dominée conjointement avec le critère des séries alternées pour faire converger les sommes partielles.

◆ **DSE.26** (***)

Centrale MP – 2000

1) Montrer que $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
 2) Nature de la série de terme général $u_n = \ln \tan \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right)$?

◇ [Rec00/dse-r0.tex/sre-r:21]

Le premier calcul est fait dans l'exercice **SF.3**. Ou bien on utilise le DSE de la fonction Arc tan en 1, après avoir montré la convergence uniforme sur $[0; 1]$ grâce au critère des séries alternées (exercice **SRE.24**).
 On va montrer que la série $\sum u_n$ vérifie le critère des séries alternées. Pour cela, on note R_n le reste $\text{convexité, puis en réitérant ainsi par paquets de quatre termes). On en déduit que } \sum R_n \text{ vérifie le critère des séries alternées. On prend ensuite un développement}$
 $\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = 2x + O(x^2)$,
 or $R_n = O \left(\frac{1}{n} \right)$ donc $u_n = 2R_n + O(R_n^2) = 2R_n + O \left(\frac{1}{n^2} \right)$
 ce qui nous donne *in fine* la somme de deux séries : l'une converge par le CSA et la seconde par Riemann.

◆ **DSE.27**

Trouver le DSE de $f(x) = \int_0^x e^{t^2-x^2} dt$.

◇ [Rec01/dse-r1.tex/sre-r:1]

On a $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$, et on vérifie que $f(0) = 0$ et $f'(x) + 2xf(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
 On cherche une solution $y = \sum a_n x^n$ de cette équ. diff., ce qui nous mène à $a = 1 = 1, a_2 = 0, a_n = -\frac{2}{n} a_{n-2}$, et par récurrence, les termes pairs sont nuls, et $a_{2n+1} = (-1)^n \frac{2}{n+1} \frac{2}{n-1} \dots \frac{2}{3} = \frac{(-4)^n n!}{(2n+1)!}$.
 Le rayon de convergence est infini. D'autre part, par unicité de la solution, $f = y$.

◆ **DSE.28**

DSE de $f(x) = \sqrt{1-2x \cos \theta + x^2}$. Discuter suivant les valeurs de θ .

◇ [Rec01/dse-r1.tex/sre-r1:8] Il faut absolument remarquer que

◆ DSE.29 CCP MP – 2001

Donner un DSE de $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\text{Arc tan } t}{t} \ln \left(\frac{x}{t} \right) dt$ pour $0 < |x| < 1$ et $f(0) = 0$.

◇ [Rec01/dse-r1.tex/sre-r:20] Il est plus simple de calculer d'abord $f'(x)$.

◆ DSE.30 (*) CCP PC – 2001

Trouver le DSE de $f(x) = \int_0^x e^{t^2-x^2} dt$. (On cherchera une équation différentielle vérifiée par f).

◇ [Rec01/dse-r1.tex/srg:29] On a $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x \exp\{t^2\} dt$, et on vérifie que

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(x) + 2xf(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On cherche une solution $y = \sum a_n x^n$ de cette équ. diff., vérifiant également $y(0) = 0$, ce qui nous mène à

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_n = -\frac{2}{n} a_{n-2},$$

et par récurrence, les termes pairs sont nuls, et

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{2}{n+1} \frac{2}{n-1} \cdots \frac{2}{3} = \frac{(-4)^n n!}{(2n+1)!}$$

Le rayon de convergence est infini. D'autre part, par unicité de la solution, $f = y$.

◆ DSE.31 (T.F. de la gaussienne) (***) TPE PC – 2001

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \cos tx \, dt$.

1) Montrer que F est définie sur \mathbb{R} .

2) Montrer que F est DSE sur \mathbb{R} et calculer les coefficients, sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3) En déduire une nouvelle expression de F .

4) Donner une autre méthode pour obtenir F .

◇ [Rec01/dse-r1.tex/sre:49] On développe le cosinus. Il faut ensuite intervertir la somme et l'intégrale. Le mieux est d'utiliser le théorème : si $\sum |f|$ converge, alors on peut intervertir.

Ici, à x fixé, on pose $f_n(t) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} t^{2n} e^{-t^2/2}$, alors

$$\int |f_n| = \frac{x^{2n}}{2^n n!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(calcul détaillé ci-dessous) donc la série est convergente.

On intervertit donc la somme et l'intégrale :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{2k} e^{-t^2/2} dt}_{I_n}$$

On calcule ensuite I_n par récurrence : $I_n = (2n-1) I_{n-1}$ donc

$$I_n = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

On en déduit

$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2/2}.$$

(On rapproche cela de la transformée de Fourier de la gaussienne.)

On pouvait aussi calculer F'' et montrer par IPP que satisfait une certaine équation différentielle (voir exercice 1P.51) :

Par convergence dominée, F est définie sur \mathbb{R} et $\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| \leq te^{-t^2}$ qui est intégrable, donc F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . De plus,

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} te^{-t^2/2} \sin(tx) \, dt.$$

On intègre par parties avec $u = \sin(tx)$ et $v = e^{-t^2/2}$, donc

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} te^{-t^2/2} \sin(tx) \, dt = \left[e^{-t^2} \sin(tx) \right]_0^{+\infty} - x \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t^2} \, dt =$$

On en déduit que F est solution de $y' + xy = 0$ soit

$$F(x) = \alpha \exp \left\{ - \int x \, dx \right\} = \alpha e^{-x^2/2}.$$

De la valeur de $F(0) = \sqrt{\pi/2}$ on tire

$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right).$$

◆ DSE.32 CCP MP – 2002

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - \int_0^x (t+x) f(x-t) \, dt.$$

1) Prouver que f est de classe \mathcal{C}^∞ .

2) Prouver que f est développable en série entière et trouver son développement. (On pourra montrer que f vérifie une certaine équation différentielle.)

$$1 - 2x \cos \theta + x^2 = (1 - x e^{i\theta})(1 - x e^{-i\theta})$$

◇ [Rec02/dse-r2.tex/sre-r2:1]

◆ DSE.33 CCP MP – 2002

Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $x \mapsto e^x \cos x$.

◇ [Rec02/dse-r2.tex/sre-r2:4]

◆ DSE.34 TPE MP – 2002

Donner le développement en série entière et le rayon de convergence de la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^x e^{t^2-x^2} dt.$$

◇ [Rec02/dse-r2.tex/sre-r2:3]

Déjà donné en 2001 au même concours.

On a $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x \exp t^2 \, dt$, et on vérifie que $f(0) = 0$ et

$$f'(x) + 2xf(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution $y = \sum a_n x^n$ de cette équ. diff., ce qui nous mène à

$$a = 1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_n = -\frac{2}{n} a_{n-2},$$

et par récurrence, les termes pairs sont nuls, et

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{2}{n+1} \frac{2}{n-1} \cdots \frac{2}{3} = \frac{(-4)^n n!}{(2n+1)!}$$

Le rayon de convergence est infini. D'autre part, par unicité de la solution, $f = y$.

◆ DSE.35 (***) CCP PC – 2002

Développer en série entière $f(x) = \text{Arc sin}(\sin(x))$.

◇ [Rec02/dse-r2.tex/sre-r2:5]

On montre que $(1-x^2)f' - xf - 1 = 0$, on en déduit les coefficients

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

◆ DSE.36 CCP PC – 2002

Développement en série entière de $(\text{Arc sin } x)^2$.

$$f(0) = f'(0) = 0,$$

◇ [Rec02/dse-r2.tex/sre-r2:6]

(Cf. également DSE.37.)

On dérive, $f' = 2 \frac{\text{Arc sin } x}{\sqrt{1-x^2}}$ et on trouve

$$(1-x^2)f'' - xf' - 2 = 0$$

assortie des conditions initiales

donc si f admet un DSE $\sum a_n x^n$, on obtient $a_2 = 1$ et $k^2 a_k = (k+1)(k+2)a_{k+2}$ donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

◆ DSE.37 CCP PC – 2002

DSE de $x \mapsto \frac{\text{Arc sin } x}{\sqrt{1-x^2}}$.

◇ [Rec02/dse-r2.tex/sre-r2:2]

(Cf. également DSE.36.)

◆ DSE.38 CCP PC – 2002

Étude et représentation graphique de la fonction f définie par $x \mapsto \text{ch } x \cos x$. Développer f en série entière.

◇ [Rec02/dse-r2.tex/sre-r2:2:4]

Écrire sous forme exponentielle, puis sous forme $\frac{1}{2}(\text{ch}(i+1)x + \text{ch}(11-i)x)$, développer en série entière puis regrouper les termes pour faire apparaître des

coefficients réels ; on trouve, sous toute réserve :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cos(n\pi/4)}{n!} x^{2n}.$$

◆ DSE.39 S¹ Cyr MP – 2002

Développer en série entière $f(x) = (x + \sqrt{1+x^2})^{1/2}$.

◇ [Rec02/dse-r2.tex/sre-r2:7]

◆ **DSE.40** Centrale MP – 2002

1) Prouver que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2t \cos \theta} d\theta$.

2) Soit $\varepsilon > 0$. Prouver qu'il existe $\delta \in]0; \pi[$ tel que

$$\forall \theta \in]0; \delta[\quad 1 - \frac{\theta^2}{2} \leq \cos \theta \leq 1 - \frac{\theta^2}{2}(1 - \varepsilon)^2.$$

On pose $I(t) = \int_0^{2\pi} e^{2t \cos \theta} d\theta$. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Il existe alors t_1 tel que, pour tout $t \geq t_1$, on a

$$\int_0^{\sqrt{2t}\delta} e^{-u^2} du \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 - \varepsilon).$$

Déterminer alors un équivalent, en $[t \rightarrow +\infty]$, de $I(t)$.

3) Donner un équivalent de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ lorsque $[x \rightarrow +\infty]$.

◆ [Rec02/dse-r2.tex/sre-r2:8] (Cf. également l'exercice **IP.63** page 636.)

◆ **DSE.41** ENS ULC MP – 2003

Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^\alpha} \sin(nt)$ est-elle développable en série entière autour de 0 ?

◆ [Rec03/dse-r3.tex/r3:284] À FINIR !!!

◆ **DSE.42 (T.F. de f à support compact)** (♣) ENS Lyon MP – 2002

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction à support compact. On note $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt$.

- Montrer que \hat{f} est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- Montrer que \hat{f} est développable en série entière sur \mathbb{R} .
- Si $f \neq 0$, montrer que \hat{f} n'est pas à support compact.

INDICATION : On commencera par montrer le résultat suivant :

LEMME 1 Si h est une fonction développable en série entière sur \mathbb{R} , et si h s'annule sur un voisinage ouvert de 0, alors $h = 0$.

Puis l'on montrera le lemme technique :

LEMME 2 Soit f une fonction intégrable. On note \hat{f} sa transformée de Fourier. Alors, si $x_0 \in \mathbb{R}$, la transformée de Fourier de $t \mapsto f(t) e^{itx_0}$ est $x \mapsto \hat{f}(x - x_0)$.

◆ [Rec03/dse-r3.tex/sre:81] (Reproduit en **IP.77**)

Notons $[a; b]$ le support de f ou un segment contenant ce support.

- On remarque que la fonction $h : (x, t) \mapsto f(t) e^{-itx}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [a; b]$ et que ses dérivées partielles par rapport à x , de tout ordre, sont continues également sur $\mathbb{R} \times [a; b]$. Cela suffit à montrer que \hat{f} est de classe \mathcal{C}^∞ .
- On développe l'exponentielle en série entière, la continuité de f sur $[a; b]$ montre qu'elle est bornée et donc la série de l'intégrande converge uniformément, on peut intégrer terme à terme, et l'on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_a^b f(t) \frac{(-it)^n}{n!} dt.$$

(La série a bien évidemment un rayon infini.)

3) Supposons \hat{f} à support compact. Il existe donc un point x_0 tel que \hat{f} est nulle sur un voisinage de x_0 . On considère la fonction $g : x \mapsto f(t) e^{ix_0 t}$, alors $\hat{g}(x) = \hat{f}(x - x_0)$ est donc développable en série entière sur \mathbb{R} , ou elle est nulle sur tout un voisinage de 0, donc elle est identiquement nulle. On en déduit que \hat{f} est identiquement nulle. Notamment, toutes ses dérivées en 0 sont nulles, donc tous les moments de f sont nuls (grâce au théorème de dérivation sous le signe somme) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_a^b t^n f(t) dt = 0.$$

Cette propriété permet de montrer que $f = 0$ (on utilise le théorème de Stone-Weierstrass : il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes qui converge uniformément vers $\mathbb{R} f$ sur $[a; b]$, et on montre que $\int P_n f = 0$ d'où, à la limite, $\int (\mathbb{R} f)^2 = 0$. Pareil pour la partie imaginaire.)

◆ **DSE.43** (★★★) Mines MP – 2003

Soit $q \in]-1; 1[$. Montrer qu'il existe une fonction f continue non nulle telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 - qx) f(qx).$$

Montrer que de telles fonctions sont développables en série entière sur \mathbb{R} .

◆ [Rec03/dse-r3.tex/r3:84] Le problème n'est pas terminé : il faut montrer que toute fonction vérifiant l'équation fonctionnelle donnée est développable en série entière. Cela se fait pas analyse : si f vérifie la relation donnée, alors

Si $q = 0$, on a $f = f(0) = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Sinon, cherchons une fonction développable en série entière. On injecte, on trouve a_0 quelconque et

$$a_n(1 - q_n) + a_{n-1}q^n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = \prod_{k=1}^n (1 - q^k x) f(q^n x),$$

donc

$$a_n = (-1)^n a_0 \frac{\prod_{i=1}^n q^i}{\prod_{i=1}^n (1 - q^i)}.$$

On remarque de plus que, si $x \geq 0$, on a $\frac{x}{1-x} < 1$ si et seulement si $x < \frac{1}{2}$, donc

$$\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = \frac{q^n}{1 - q^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Le rayon de la série entière étant infini, la fonction existe et on en a bien trouvé une; notons-la g .

ce qui montre que f appartient à une certaine droite vectorielle, donc est multiple de g .

◆ **DSE.44** Mines MP – 2003

On définit $f :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

- Donner le développement limité à l'ordre 2 de f .
- En supposant f développable en série entière sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$, trouver une relation de récurrence vérifiée par les a_n .
- Existe-t-il $\rho > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq \rho^n$?

◆ [Rec03/dse-r3.tex/r3:302]

◆ **DSE.45** (★★) TPE PC – 2003

Développer en série entière $(\text{Arc sin } x)^2$.

◆ [Rec03/dse-r3.tex/r3:405] f est DSE comme produit de fonctions DSE. On calcule

$$f'(x) = \frac{2 \text{Arc sin } x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x \text{Arc sin } x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

donc $(1-x^2)f''(x) - x f'(x) = 2$ et $f(0) = f'(0) = 0$. Si f admet un DSE $\sum a_n x^n$, on obtient $a_2 = 1$ et $k^2 a_k = (k+1)(k+2)a_{k+2}$ donc

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \text{Arc sin}^2 x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

◆ **DSE.46** (♣) CCP PC – 2003

Considérons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ .

◆ [Rec03/dse-r3.tex/r3:55] Il suffit de donner le développement en série entière !

◆ **DSE.47** (♣) Petites Mines PC – 2003

Développer en série entière la fonction $x \mapsto \text{ch } x \cos x$.

INDICATION : On pourra utiliser les formules d'Euler.

◆ [Rec03/dse-r3.tex/r3:236] On écrit $\text{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$.

◆ **DSE.48** Navale PC – 2003

Développer en série entière $f : x \mapsto \text{Arc tan} \left(\frac{1}{1+x} \right)$.

◆ [Rec03/dse-r3.tex/r3:441]

◆ **DSE.49** (★) Mines MP – 2004

Développer en série entière $x \mapsto e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

◇ [Rec04/dse-r4.tex/r4:223] différentielle d'ordre 1.
En dérivant la seconde expression, on s'aperçoit qu'elle vérifie une équation

◆ **DSE.50** (★★) TPE PC – 2004
On définit $f : x \mapsto \sqrt{1+x+x^2}$.
1) Tracer le graphe de f .
2) f est-elle développable en série entière? Préciser son rayon.

◇ [Rec04/dse-r4.tex/r4:52]

◆ **DSE.51** (*) TPE PC – 2004
Développement en série entière de $x \mapsto \sin^2(x) \operatorname{sh}^2(x)$.

◇ [Rec04/dse-r4.tex/r4:145]

◆ **DSE.52** (★★★) CCP MP – 2004
Soit $q \in]-1; 1[$. On considère l'équation fonctionnelle
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (1-qx)f(qx). \quad (E)$$

1) Soient f et g deux fonctions continues vérifiant (E) et telles que $f(0) = g(0)$. Montrer que $f = g$.
2) Soit f une fonction continue vérifiant (E). Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon infini.

◇ [Rec04/dse-r4.tex/r4:229] 2) On injecte la forme générale d'une série entière, on trouve a_0 quelconque et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n(1-q^n) + a_{n-1}q^n = 0,$$

$$\text{donc} \quad a_n = (-1)^n a_0 \frac{\prod_{i=1}^n q^i}{\prod_{i=1}^n (1-q^i)}.$$

On remarque de plus que, si $x \geq 0$, on a $\frac{x}{1-x} < 1$ si et seulement si $x < \frac{1}{2}$, donc

$$\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = \frac{q^n}{1-q^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

La rayon de la série entière étant infini, la fonction existe bien et vérifie l'équation fonctionnelle.

1) Supposons que f et g vérifient l'équation E.
Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = \prod_{k=1}^n (1-q^k x) f(q^n x),$$

et en prenant la limite $n \rightarrow \infty$ (le produit infini converge clairement),

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k x) f(0).$$

De même, on trouvera

$$g(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k x) g(0),$$

d'où le résultat voulu.

◆ **DSE.53** (♣) CCP PC – 2004
Développer $x \mapsto e^x \cos x$ en série entière.

◇ [Rec04/dse-r4.tex/r4:146] Écrire $2f(x) = e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}$ et faire la somme des deux DSE. On trouve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) x^n.$$

◆ **DSE.54** (*) Mines PC – 2005
Trouver une solution (non uniformément nulle) développable en série entière de $g'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x^{k-1}}{k}\right) \cdot g(x)$.
En déduire que $x \mapsto \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k^2}\right)$ est DSE de rayon de convergence ≥ 1

◇ [Rec05/dse-r5.tex/r5:508] $g(x) = K \exp\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x^k}{k^2}\right)\right]$ pour $x \in]-1; 1[$.

$f : x \mapsto \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k^2}\right)$ est solution de l'équation différentielle sur $] -1; 1 [$ et elle vérifie $f(0) = 1$.

Si $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$ alors on trouve $\sum_{k=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n =$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{a_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{2} + \dots + \frac{a_0}{n+1} \right] x^n \text{ donc } a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left[\frac{a_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{2} + \dots + \frac{a_0}{n+1} \right]$$

avec $a_0 = 1 (= a_1)$.
On a facilement, $\forall n, a_n \leq 1$ donc $R \geq 1$ et par unicité (...) c'est le DSE de f

◆ **DSE.55** (★★) Centrale PC – 2005
On définit, pour tout $x \in]-1; 1[$:
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \text{et} \quad h = g^2.$$

1) Calculer $g^{(n)}$ et $h^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) En déduire une simplification de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{(2k)! (2n-2k)!}{[k! (n_k)!]^2}$.

◇ [Rec05/dse-r5.tex/r5:130]

◆ **DSE.56** (*) CCP PC – 2005
On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.
1) Montrer que $f'(x) + 2x f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est impaire.
2) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0? En déduire un équivalent simple de f en 0.
3) En utilisant la croissance de $t \mapsto e^{t^2}$, calculer
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt.$$

4) *Suivaient deux autres questions, mais le candidat fut pris d'une crise d'amnésie bien compréhensible au moment de m'envoyer ses exercices.*

◇ [Rec05/dse-r5.tex/r5:89]

◆ **DSE.57** (♣) CCP PC – 2005
Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

◇ [Rec05/dse-r5.tex/r5:94]

Application directe du cours.

◆ **DSE.58** (★★★) CCP PC – 2005
On note, pour tout $n \in \mathbb{N} : I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$.
1) Sachant que $I_0 = \sqrt{\pi}/4$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} :$
$$I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} I_0.$$

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} :$
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \exp\left(\frac{-x}{4}\right).$$

◇ [Rec05/dse-r5.tex/r5:140]

Séries de Fourier

Calcul de sommes de séries

SF.1

En considérant la fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont la restriction à $[-\pi; \pi]$ est $x \mapsto x^2$, calculer $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4}$.

[Divers/fourierexo.tex/sf:1]

qui converge normalement sur \mathbb{R} . La formule de Parseval donne

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^5}{5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^4} - \frac{2\pi^3}{3},$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx,$$

SF.2

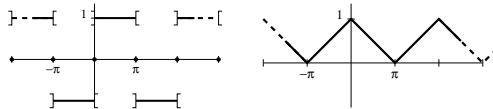
Trouver le polynôme trigonométrique, de degré inférieur ou égal à 6, qui donne la meilleure approximation quadratique de la fonction f définie par sa restriction $f|_{]-\pi; \pi[} : x \mapsto |x|$.

[Divers/fourierexo.tex/sf:1bis]

C'est la somme partielle de Fourier $S_6(f)$.

SF.3

Calculer les coefficients de Fourier des fonctions « créneau » et « dents-de-scie » présentées ci-dessous :



En déduire les sommes des séries suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

puis, par manipulations des séries convergentes, les sommes

$$S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad S_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad S_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

[Divers/fourierexo.tex/sf:11]

□ Pour le créneau on trouve que f est impaire, on ne cherche donc que les coefficients b_n et

$$b_{2n} = 0 \quad b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)}.$$

On en déduit (en $t = \frac{\pi}{2}$) que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Avec Parseval, on a la somme des coefficients au carré qui vaut $\frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} 1 dt = 1$ donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

□ Pour la dent de scie, qui est une fonction paire, on calcule

$$a_0 = 1 \quad a_{2n+1} = \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2},$$

ce qui, en 0 donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

et Parseval nous donne

(déjà vu)

et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

De même

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Enfin,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{24} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{90}$$

SF.4

En utilisant la fonction 2π -périodique f et paire, définie à partir de sa restriction

$$f|_{[0; \pi[} : \begin{cases} [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2(\pi-x)^2, \end{cases}$$

déterminer les sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}.$$

On commencera par montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et \mathcal{C}^3 par morceaux.

[Divers/fourierexo.tex/sf:5]

On calcule $a_0 = \frac{\pi^4}{15}$ et, à partir de quatre IPP successives, on obtient (calcul fastidieux !)

$$a_{2n+1} = 0 \quad a_{2n} = -\frac{3}{n^4}.$$

Par exemple par Maple :

$$a := n \rightarrow 2 * \text{int}(f(t) * \cos(n*t), t = 0..Pi) / Pi ;$$

on obtient

$$a_n = \frac{24(1 + (-1)^n)}{n^4}.$$

Ainsi, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{30} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^4}.$$

En $x = 0$ on trouve donc

$$\frac{\pi}{30} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 0 \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

en $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}$$

et avec Parseval, $\frac{\pi^8}{450} + 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(t) dt = \frac{\pi^8}{315}$,

et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

SF.5

Soit $\alpha > 0$. À l'aide de la fonction $x \mapsto \text{ch } \alpha x$, calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \alpha^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \alpha^2)^2}.$$

Qu'obtient-on dans ces formules en prenant la limite $\alpha \rightarrow 0$?

[Divers/fourierexo.tex/sf:9]

Exercice semblable à SF.7. On définit la fonction $f :]-\pi; \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \text{ch } \alpha x$, puis on la 2π -périodise. On calcule ses coefficients de Fourier cosinusoidaux :

$$a_n = \frac{2\alpha (-1)^n \text{sh } \alpha \pi}{\pi (n^2 + \alpha^2)},$$

ce qui mène au développement en série de Fourier suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\text{sh } \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha \text{sh } \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \alpha^2} \cos nt,$$

car la fonction est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et on peut appliquer par conséquent le théorème de Dirichlet. On applique cette formule à $t = \pi$ pour éliminer la $(-1)^n$, et on obtient

$$\text{ch } \alpha \pi = \frac{\text{sh } \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha \text{sh } \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2}.$$

Ce qui donne in fine

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha} \left(\frac{1}{\text{th } \alpha \pi} - \frac{1}{\alpha \pi} \right) = \frac{\pi^2}{6} + o(\alpha) \quad [\alpha \rightarrow 0].$$

De même,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha} \left(\frac{1}{\text{sh } \alpha \pi} - \frac{1}{\alpha \pi} \right) = -\frac{\pi^2}{12} + o(\alpha) \quad [\alpha \rightarrow 0].$$

Remarque 1 On peut en fait prendre la limite $\alpha \rightarrow 0$ en remarquant que la série, vue comme fonction de α , converge normalement, donc uniformément, au voisinage de 0, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\text{Enfin,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \alpha^2)^2} = \frac{\pi^2}{4\alpha^2 \text{sh}^2 \alpha \pi} + \frac{\pi}{4\alpha^3 \text{th } \alpha \pi} - \frac{1}{2\alpha^2}.$$

SF.6

On pose $f(t) = |\cos t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f . Étudier la convergence de la série de Fourier de f et en déduire les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

[Divers/fourierexo.tex/sf:12]

On trouve

$$a_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2n} = \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{\pi(4n^2 - 1)}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

◆ **SF.7**
Soit $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et posons

$$f(t) = \begin{cases} \cos \omega t & \text{si } t \in [-\pi; \pi] \\ 2\pi\text{-périodique.} & \end{cases}$$

Étudier la convergence de la série de Fourier de f . En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \cotan x \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2x}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}.$$

◇ [Divers/fourierexo.tex/sf:6]
Exercice semblable à **SF.5**.
 f est 2π -périodique et continue, paire de surcroît.

Dirichlet assure la convergence simple.
On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\sin \omega \pi}{\omega \pi} - \frac{2\omega \sin \omega \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \omega^2} \cos nt.$$

On calcule

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \omega t \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(n+\omega)t + \cos(n-\omega)t) \, dt = \frac{(-1)^n \sin \omega \pi}{\pi} \left(\frac{1}{n+\omega} - \frac{1}{n-\omega} \right) = \frac{2\omega(-1)^{n+1} \sin \omega \pi}{\pi(n^2 - \omega^2)}.$$

On applique à $t = \pi$ pour éliminer le $(-1)^n$, et on obtient

$$\cos \omega \pi = \frac{\sin \omega \pi}{\omega \pi} - \frac{2\omega \sin \omega \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \omega^2}.$$

Et bien sûr $b_n \equiv 0$.
De plus, $|a_n| \sim \frac{c}{n^2}$ donc la série converge normalement, et donc uniformément et simplement sur \mathbb{R} (d'ailleurs f est \mathscr{C}^1 par morceaux et continue, donc

En posant $x = \omega \pi$, on obtient la formule demandée.

◆ **SF.8** (★★★)

Soit $\alpha \in]0; 1[$.

- 1) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{t^{-\alpha}}{1+t} dt$.
- 2) Pour $\beta \in]0; 1[$, montrer que $\int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\beta}$.
- 3) En utilisant le résultat de l'exercice **SF.7**, en déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

◇ [Divers/fourierexo.tex/sf:23]
1) On vérifie que les intégrales proposées convergent. Ensuite, on effectue le changement de variable $x = 1/t$ qui est un \mathscr{C}^1 -difféomorphisme.

est continu sur cet intervalle. Comme f et g coïncident sur $] -1; 1[$, on a donc $f(1) = g(1)$.

2) On écrit que $\frac{t^{\beta-1}}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{n+\beta-1}$. Si $x \in] -1; 1[$, la série est NCV sur $]0; x[$ et on peut donc intégrer terme à terme :

3) En utilisant les deux questions précédentes, on obtient

$$\int_0^x \frac{t^{\beta-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{n+\beta-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\beta} x^{n+\beta} = f(x).$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-\alpha} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-\alpha},$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n+\alpha} - \frac{(-1)^n}{n-\alpha} \right] = \pi \frac{1}{\alpha \pi} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\alpha \pi + n \pi} + \frac{1}{\alpha \pi - n \pi} \right] = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \quad \text{d'après SF.7.}$$

Cette série entière est continue sur $] -1; 1[$ et admet une limite quand $[x \rightarrow 1]$ (en effet, grâce au CSA, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+\beta}$ converge) donc

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\beta}.$$

Enfin, $g : x \mapsto \int_0^x \frac{t^{\beta-1}}{1+t} dt$ est continue sur $] -1; 1[$ car l'intégrande

◆ **SF.9**
On définit f , fonction impaire et périodique, par sa restriction

$$f(x) = x(\pi - x) \quad \text{si } x \in [0; \pi].$$

Étudier le développement en série de Fourier de f , et en déduire les sommes des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

◇ [Divers/fourierexo.tex/sf:17]
La série de Fourier de f est

$$\sum_{n \geq 0} \frac{8}{\pi(2n+1)^3} \sin(2n+1)x.$$

Elle converge normalement sur \mathbb{R} . En $x = \pi/2$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32},$$

et, par Parseval,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

Or $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{S}{64} + \frac{\pi^6}{960},$

d'où $S = \frac{\pi^6}{945}.$

◆ **SF.10** (★★)

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{4n^2 - 1}.$

INDICATION : On commencera par écrire avec confiance le développement en série de Fourier de $f \dots$ puis on avisera.

◇ [Divers/fourierexo.tex/sf:19]
La fonction $x \mapsto |\sin x|$ étant paire et 2π -périodique, on calcule ses coefficients de Fourier (seuls les coefficients cosinusoidaux sont non nuls) pour obtenir, après quelques lignes de calcul :

En développant $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$, et en remarquant que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) = -1$, on obtient

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) \cos 2nx.$$

$$|\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{4n^2 - 1}.$$

◆ **SF.11** (★★)

On considère la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}(\pi - x)$.

- 1) Calculer (en justifiant) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.
- 2) Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction impaire, 2π -périodique, définie par $g(x) = xf(1)$ pour tout $x \in [0; 1]$ et $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in [1; \pi]$. En utilisant cette fonction, montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

- 3) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4}$.

◇ [Divers/fourierexo.tex/sf:20]

1) On cherche une fonction f impaire, 2π -périodique, de classe \mathscr{C}^1 par morceaux, dont les coefficients sinusoidaux sont $b_n(f) = 1/n$.
Bon, en fait, l'énoncé nous suggère ceci : on pose donc $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ sur $]0; \pi[$, on la rend impaire et on la 2π -périodise ; et ça marche grâce au théorème de Dirichlet.

3) On applique ensuite Parseval à g pour obtenir

2) Ensuite, la fonction g est continue et affine par morceaux, et $b_n(g) = (\sin n)/n^2$. Avec le théorème de Dirichlet, on en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(g)^2 = \frac{(\pi - 1)^2}{6}$$

$$g(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = f(1) = \frac{\pi - 1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

et donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{(\pi - 1)^2}{6}.$

◆ **SF.12** (★)

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On définit la fonction f , 2π -périodique, par $f(x) = e^{itx}$ pour tout $x \in]0; 2\pi[$.

1) Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f .

2) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi t)}.$

◇ [Divers/fourierexo.tex/sf:22]

1) On calcule les coefficients

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} e^{i(t-n)x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{2i\pi t} - 1}{i(t-n)} = \frac{e^{i\pi t} \sin \pi t}{\pi(t-n)}.$$

2) La formule de Parseval conduit à

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{\sin^2 \pi t}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(t-n)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = 1.$$

◆ **SF.13** (★★)
 Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique, égale à $x \mapsto e^{\alpha x}$ sur $] -\pi; \pi[$. En déduire les relations suivantes :

$$\left(\frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2\pi}\right) \left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha - in} + \frac{1}{\alpha + in} \right) \right] = 1$$

$$\left(\frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2\pi}\right) \left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha - in} + \frac{1}{\alpha + in} \right) \right] = \frac{1}{2}(e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi})$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{t - n\pi} + \frac{1}{t + n\pi} \right)$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \cotan t = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{\operatorname{sh} t} = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t^2 + n^2\pi^2}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{coth} t = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + n^2\pi^2}$$

En déduire également, en intégrant la fonction $t \mapsto \cotan t - \frac{1}{t}$ entre 0 et x , le développement eulérien du sinus :

$$\forall x \in] -1; 1[\quad \sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$$

◇ [Divers/fourierexo.tex/sf:24]

On calcule que

$$c_n = \frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2\pi} \frac{(-1)^n}{\alpha - in}$$

f est continue par morceaux, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, la série de Fourier converge simplement vers la régularisée :

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha - in} e^{inx}$$

Les différentes formules viennent :

- 1) pour $x = 0$; $\cos t = i \sin t \times (\dots)$ et donc
- 2) pour $x = \pi$; $\cotan t = \dots$;
- 3) en posant $\alpha\pi = it$ dans ①; 5) on pose $\alpha\pi = t$ dans ②;
- 4) pareil dans ② : on obtient 6) idem dans ②.

Enfin, la série donnant $\cotan t$, on a convergence normale sur tout intervalle du type $]0; x[$ avec $x < \pi$. En effet, si on pose

◆ **SF.14**
 Calculer le développement en série de Fourier de $f : x \mapsto \max(0, \sin x)$.

◇ [Divers/fourierexo.tex/sf:26]

Un calcul simple montre que $a_0 = \frac{2}{\pi}$, $a_{2p+1} = 0$, $a_{2p} = \frac{-2}{\pi(4p^2 - 1)}$, $b_1 = \frac{1}{2}$ et $b_n = 0$ pour $n \geq 2$.

◆ **SF.15** (★)
 Pour tout $x \in [0; \pi]$, on pose $f(x) = x(\pi - x)$. Montrer que, pour tout $x \in [0; \pi]$, on a

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$$

◇ [Divers/fourierexo.tex/sf:41]

On considère la fonction f_1 paire et 2π -périodique qui coïncide sur $]0; \pi[$ avec f et la fonction f_2 impaire et 2π -périodique qui coïncide sur $]0; \pi[$ avec f . On les développe. et on trouve, pour f_1 :

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}, \quad a_{2p} = -\frac{1}{p^2} \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = 0$$

et pour f_2 :

$$b_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad b_{2p+1} = \frac{8}{(2p+1)^3}$$

Le théorème de Dirichlet permet de conclure.

◆ **SF.16** (★)
 On définit f comme la fonction impaire, 2π -périodique dont la restriction à $]0; 2\pi[$ est donnée par $f(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ et telle que $f(\pi) = 0$.

- 1) f est-elle la somme de sa série de Fourier ?
- 2) Cette série converge-t-elle normalement vers f ?
- 3) Calculer cette série.
- 4) Quelle identité obtient-on en $t = \frac{\pi}{2}$? Retrouver cette identité par calcul direct.
- 5) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}$.

◇ [Divers/fourierexo.tex/sf:45]

◆ **SF.17 (Développement en série trigonométrique)** (★★)
 Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2 \cos x - 1}{5 - 4 \cos x} = \mathcal{R}e \left(\frac{e^{ix}}{2 - e^{ix}} \right)$. En déduire un développement en série trigonométrique de f puis la valeur de $\int_0^{\pi} \frac{2 \cos x - 1}{5 - 4 \cos x} \cos(nx) dx$.

◇ [Divers/fourierexo.tex/sf:46]

◆ **SF.18 (DSF de $\sqrt{|x|}$)** (★★)
 On considère la fonction f , continue, 2π -périodique et paire définie par $f(t) = \sqrt{t}$ pour tout $t \in [0; \pi]$.

- 1) Calculer les coefficients de Fourier de f ; on exprimera le résultat à l'aide de la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \sin(u^2) du$.
- 2) Que dire de la convergence de la série ?

◇ [Divers/fourierexo.tex/div:101]

(Cf. **SF.41** page 544.)

- 1) $b_n = 0$, $a_0 = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \dots = -\frac{2\Gamma(\sqrt{n\pi})}{\pi n^{3/2}}$$

2) Le théorème de Dirichlet ne s'applique pas car f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 . En revanche, F admet une limite en $+\infty$ donc est bornée, ce qui montre la convergence normale de la série de Fourier. Si l'on note g la somme de cette série de Fourier, on peut calculer les coefficients de Fourier de g en intégrant terme à terme, donc f et g ont les mêmes coefficients de Fourier. Or, ils sont tous deux pairs, continus, 2π -périodiques ; par injectivité de $f \mapsto \hat{f}$, on en déduit que $f = g$, c'est-à-dire que la série de Fourier de f converge vers f .

◆ **SF.19** (★★) CCP PC – 1996

Soit $\alpha \in]0; \pi[$.

- 1) Développer en série de Fourier $f : t \mapsto \frac{1}{1 - \cos \alpha \cos t}$.

INDICATION : On pourra établir une relation de récurrence entre les coefficients à partir de la relation $(1 - \cos \alpha \cos t) f(t) = 1$.

- 2) Si $|r| < 1$, calculer $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt$. Retrouver le résultat précédent à l'aide de ce calcul.

◇ [Rec00/fourier-r0.tex/sf:27]

On a, en injectant la forme

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

les relations

$$\begin{cases} 2a_k = (a_{k-1} + a_{k+1}) \cos \alpha & k \geq 2 \\ 2a_1 = a_0 \cos \alpha + a_2 \cos \alpha \\ a_0 = a_1 \cos \alpha + 2. \end{cases}$$

(On obtient une relation à part pour $k = 1$ mais elle est compatible avec la relation générale, donc on peut garder cette dernière pour tout $k \in \mathbb{N}^*$).

On obtient le résultat connu pour les suites récurrentes d'ordre 2. Le discriminant vaut $\frac{4}{\cos^2 \alpha} - 4 > 0$ et plus précisément

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = 2\sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 2 \tan \alpha$$

grâce à la condition $0 < \alpha < \pi$.

Les solutions sont donc de la forme

$$a_n = A \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^n + B \left(\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a deux degrés de liberté ; l'un est éliminé en considérant que les coefficients doivent tendre vers 0, ce qui ne saurait être le cas si $A \neq 0$. En conséquence de quoi $A = 0$ et $B = a_0$. On a de plus une relation entre a_0 et a_1 , qui donne

$$a_0 = \frac{2}{\sin \alpha}, \text{ donc}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sin \alpha} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^k \cos(kt) \right).$$

À titre de vérification, on peut calculer

$$f(0) = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{2}{1 + \frac{\sin \alpha - 1}{\cos \alpha}} - 1 \right) = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha - 1}$$

et donc

$$(1 - \cos \alpha) f(0) = 1$$

après un simple développement du numérateur et du dénominateur.

♦ SF.20 (Calcul de coefficients)

(*)

e3a (écrit) PC - 1999

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{5 + 4 \cos \theta} d\theta$.

1) Calculer K_0, K_1 puis $K_{n+1} + K_{n-1}$ en fonction de K_n . En déduire une expression de K_n en fonction de n .

2) En déduire la série de Fourier de $f : \theta \mapsto \frac{1}{5 + 4 \cos \theta}$.

3) Comment calculer directement la série de Fourier de f ?

◊ [Rec00/fourier-r0.tex/sf.33]

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Alors

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4 \cos x - 5} dx$$

Pour calculer cette intégrale, on va (en suivant les règles de Bioche) effectuer le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$. Ceci est possible car la fonction $x \mapsto \tan x/2$ établit une bijection de $]-\pi; \pi[$ sur $]-\infty; +\infty[$. Alors

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \text{ et } dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$$

ce qui mène à

$$a_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1 - t^2} \frac{1 + t^2}{1 + t^2 - \frac{5}{4}} dt = -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 9t^2} dt$$

En effectuant le changement de variable $u = 3t$, on obtient

$$a_0 = -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{3} = -\frac{2}{3\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du$$

soit

$$\boxed{a_0 = -\frac{2}{3}}$$

Avec le même changement de variable, on a

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{4 \cos x + 5} dx = -\frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - t^2}{(1 + 9t^2)(1 + t^2)} dt$$

On réduit alors en éléments simples, en remarquant que seul t^2 apparaît dans l'intégrand. On calcule, selon les techniques habituelles, que

$$\frac{1 - X}{(1 + 9X)(1 + X)} = \frac{5/4}{1 + 9X} - \frac{1/4}{1 + X}$$

et donc

$$\frac{1 - t^2}{(1 + 9t^2)(1 + t^2)} = \frac{5/4}{1 + 9t^2} - \frac{1/4}{1 + t^2}$$

ce qui mène à

$$a_1 = -\frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{5/4}{1 + 9t^2} - \frac{1/4}{1 + t^2} \right) dt = -\frac{4}{\pi} \left(\frac{5\pi}{4 \cdot 6} - \frac{1\pi}{4 \cdot 2} \right)$$

soit

$$\boxed{a_1 = -\frac{1}{3}}$$

et injecter.

Enfin, la meilleure solution est sans doute d'écrire que

$$\frac{1}{5 + 4 \cos \theta} = \frac{1}{5} \frac{1}{1 - \frac{4}{5} \cos \theta}$$

et d'utiliser le résultat de l'exercice SF.19, deuxième question : poser $r = \frac{4}{5}$ et

calculer $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta \dots$

♦ SF.21

(**)

Centrale MP - 2000

Soit a est un réel non nul.

1) Donner le développement en série de Fourier de la fonction 2π -périodique définie sur $]0; 2\pi[$ par $f(x) = e^{ax}$.

2) Calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2}$. En déduire $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

3) Que vaut $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2}$?

◊ [Rec00/fourier-r0.tex/sf.29]

(Voir également SF.5.)

On commence par montrer que le développement en série de Fourier de f est

$$S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi a} - 1}{2\pi(a - in)} e^{inx}.$$

$$a \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2}$$

Avec Parseval on obtient alors

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{2\pi a} - 1)^2}{4\pi^2(a^2 + n^2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{e^{4\pi a} - 1}{4\pi a}$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a^2 + n^2} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{2\pi a} - 1}{e^{2\pi a} + 1} - \frac{1}{2a} = \frac{\pi}{2} \coth a\pi - \frac{1}{2a}$.

converge uniformément au voisinage de 0, on a donc continuité...) que

Enfin, notre formule donne en $[a \rightarrow +\infty]$ une limite $\frac{\pi}{2}$, ce que l'on pouvait voir également en faisant une comparaison série intégrale triviale et un changement de variable qui donne $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

♦ SF.22

Mines - 2000

Développer de deux façons $\mathcal{S}m(\cotan(x - iy))$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{*+}$. En déduire le développement en série de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{a^2 + \sin^2 x}.$$

◊ [Rec00/fourier-r0.tex/sf.25]

♦ SF.23

(*)

Mines - 2000

Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. On définit la fonction f_x continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} , paire et affine par morceaux par $f_x(0) = 1$ et $f_x(t) = 0$ pour tout $t \in [2x; \pi]$. Développer f_x en série de Fourier. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les valeurs de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{k^2} \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^4 kx}{k^4}.$$

◊ [Rec00/fourier-r0.tex/sf.18]

f_x vaut

$$f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2x}(2x - t) & \text{si } t \in [0; 2x], \\ 0 & \text{si } t \in [2x; \pi], \end{cases}$$

$$1 = \frac{x}{\pi} + \frac{2}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{k^2} \text{ donc } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{k^2} = \frac{x(\pi - x)}{2}.$$

les autres valeurs étant obtenues par partie. f est donc continue et \mathcal{C}^1 par morceaux. La série de Fourier de f_x converge donc ponctuellement et sa somme est f_x . Seuls les coefficients cosinusoidaux sont à calculer, et on trouve

$$a_k(f_x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi} & \text{si } k = 0 \\ \frac{1 - \cos 2kx}{k^2 \pi x} = \frac{2 \sin^2 kx}{k^2 \pi x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'égalité de Parseval donne quant à elle

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^4 kx}{k^4} = \frac{x^3(2\pi - 3x)}{6} \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Par des arguments de symétrie, ces expressions peuvent être étendues à $[0; \pi]$ (symétrie par rapport à $\pi/2$) puis on peut les rendre paires et les 2π -périodiser.

♦ SF.24

CCP MP - 2000

Soit a un réel strictement positif. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} e^{-ax} dx$.

1) Que vaut $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$?

2) Exprimer $(\sin(2n+1)x)/\sin x$ sous forme d'exponentielle complexe.

3) Donner le développement en série de Fourier de la fonction définie par $x \mapsto e^{-ax}$ sur $]0; 2\pi[$ et de période 2π .

◊ [Rec00/fourier-r0.tex/sf-r:5]

sur \mathbb{R} .

- 1) La fonction $f_n : t \mapsto \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} e^{-at}$ est prolongeable par continuité
 2) Le résultat est classique : $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n e^{2ikt}$.

◆ **SF.25** IIE MP – 2000

Développer en série de Fourier $f(x) = \text{Arc sin}(\sin x)$.

◊ [Rec00/fourier-r0.tex/sf:16]

Tracer le graphe de f qui est affine par morceaux.

◆ **SF.26** CCP MP – 2001

Soit f la fonction 2π -périodiques définie sur $[0; 2\pi[$ par $f(x) = x^2$. Développer f en série de Fourier. En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nx)/n$.

◊ [Rec01/fourier-r1.tex/sf-r:1]

Indication : Pour la deuxième somme, utiliser la partie impaire de f .

◆ **SF.27** TPE MP – 2001

On pose $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$. On note f la fonction $2M$ -périodique définie par : $\forall t \in [-M; M], f(t) = t^2$.

- Déterminer la série de Fourier de f .
- Quel est le mode de convergence de cette série. Quelle est sa limite ?
- Calculer A . En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
- Calculer B à 10^{-3} près.

◊ [Rec01/fourier-r1.tex/sf-r:2]

◆ **SF.28** TPE MP – 2001

On définit une fonction f impaire, 2π -périodique, égale à 1 sur $]0; \pi[$, avec $f(0) = f(\pi) = 0$.

- Développer f en série de Fourier.
- Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
- Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

◊ [Rec01/fourier-r1.tex/sf-r:3]

◆ **SF.29** (♣) CCP PC – 2001

On considère la fonction f , 2π -périodique, définie par $f(x) = \frac{ix}{e^{ix}-1}$ pour $0 < |x| < \pi$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $f(0)$ et $f(\pi)$ pour que f soit développable en série de Fourier sur \mathbb{R} .

◊ [Rec01/fourier-r1.tex/sf-r:4]

donc $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ et $f(\pi) = \frac{1}{2}[f(\pi^-) + f(\pi^+)] = 0$.

Si l'on veut la convergence simple, il faut que f soit égale à sa régularisée,

◆ **SF.30** Mines PC – 2002

Montrer que, pour tout $x \in [0; \pi]$:

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}.$$

◊ [Rec02/fourier-r2.tex/fou-r2:2]

On calcule les coefficients de Fourier de la fonction rendue impaire et 2π -

périodique, et l'on trouve justement le résultat voulu, avec convergence ponctuelle puisque la fonction est continue et dérivable.

◆ **SF.31** CCP PC – 2002

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, paire, 2π -périodique, telle que $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0; \pi]$. Développer f en série de Fourier. En déduire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

◊ [Rec02/fourier-r2.tex/fou-r2:1]

On calcule, on a $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$. Par le théorème de Dirichlet, puisque f est continue en 0,

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n^2},$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Puis par Parseval, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx - \frac{\pi^4}{9} = \frac{\pi^4}{90}.$$

◆ **SF.32** CCP MP – 2002

On note $f : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on prolonge pour qu'elle soit impaire et 2π -périodique.

$$x \mapsto x(\pi - x).$$

- Calculer le développement en série de Fourier de f, f', f'' et f''' en étudiant à chaque fois le mode de convergence.
- Calculer les sommes $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2p+1}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

◊ [Rec02/fourier-r2.tex/fou-r2:3]

Voir **SF.30**.

- f et f' sont continues et \mathcal{C}^1 par morceaux, il y a convergence uniforme des séries de Fourier vers les fonctions. Les autres sont \mathcal{C}^1 par morceaux, il y a convergence uniforme sur les intervalles $[-\pi + \varepsilon; 0] \cup [0; \pi - \varepsilon]$ pour $0 < \varepsilon < \pi$ vers la fonction et convergence simple vers sa régularisée.
- Pour la première somme, on utilise f'' en $\pi/2$:

Pour la seconde, Parseval pour f' ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

◆ **SF.33** CCP MP – 2002

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On pose, pour tout $t \in]-\pi; \pi]$: $f(t) = \cos \alpha t$ et on définit f sur \mathbb{R} en lui imposant d'être 2π -périodique.

- Déterminer la série de Fourier de f .
- Étudier la convergence de la série de Fourier de f .
- Donner la valeur de cette série en π .
- En déduire que

$$\cotan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

◊ [Rec02/fourier-r2.tex/fou-r2:5]

f est 2π -périodique et continue, paire de surcroît.

On calcule

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha t \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(n+\alpha)t + \cos(n-\alpha)t) dt$$

$$= \frac{(-1)^n \sin \alpha \pi}{\pi} \left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha} \right) = \frac{2\alpha(-1)^{n+1} \sin \alpha \pi}{\pi(n^2 - \alpha^2)}.$$

Et bien sûr $b_n = 0$.

De plus, $|a_n| \sim \frac{c}{n^2}$ donc la série converge normalement, et donc uniformément et simplement sur \mathbb{R} (d'ailleurs f est \mathcal{C}^1 par morceaux et continue, donc

Dirichlet assure la convergence simple.)

On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} - \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2} \cos \alpha t.$$

On applique à $t = \pi$ pour éliminer le $(-1)^n$, et on obtient

$$\cos \alpha \pi = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} - \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}.$$

En posant $\alpha = x/\pi$ on a $\alpha \pi = x$, et on obtient la formule demandée.

◆ **SF.34 (Une ruse grossière)** (**) Mines MP – 2002

On pose $f(\theta) = \frac{1}{2 - e^{2i\pi\theta}}$ et $g(\theta) = \frac{1}{2e^{2i\pi\theta} - 1}$.

Développer f et g en série trigonométrique. En déduire la valeur de

$$I_n = \int_0^1 \frac{\cos 2\pi nt}{2e^{2i\pi t} - 1} dt.$$

◊ [Rec02/fourier-r2.tex/fou-r2:6]

Le calcul de la série de Fourier se fait en développant en série entière les fractions (ce qui est une ruse !), on obtient la série trigonométrique

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} e^{2in\pi\theta} \quad \text{et} \quad g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} e^{-2i(n+1)\pi\theta}.$$

La convergence est normale, cette série trigonométrique est par conséquent la série de Fourier de f (resp. g), et on obtient donc (puisque l'on peut intégrer terme à terme) :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{pour } n > 0 \quad \text{et} \quad I_0 = 0.$$

◆ **SF.35** ENTPE MP – 2002

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{5 + 4 \cos \theta} d\theta$.

- Calculer K_0, K_1 puis $K_{n+1} + K_{n-1}$ en fonction de K_n . En déduire une expression de K_n en fonction de n .
- En déduire la série de Fourier de $f : \theta \mapsto \frac{1}{5 + 4 \cos \theta}$.
- Comment calculer directement la série de Fourier de f ?

◊ [Rec02/fourier-r2.tex/fou-r2:7]

K_n est une suite linéaire récurrente d'ordre 2 :

- On pose $t = \tan \theta/2$, et on obtient $K_0 = 2\pi/3$, puis on utilise

$$5K_0 + 4K_1 = 2\pi$$

pour obtenir $K_1 = -\pi/3$. Seule la partie réelle compte (la fonction est paire) ; comme

$$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2 \cos nx \cos x,$$

on a

$$5K_n + 2(K_{n+1} + K_{n-1}) = \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos(nt) dt.$$

$$K_n = \frac{2\pi}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

- $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cos(nx)$.
- Par défaut ! On fait comme dans l'exo précédent ; on décompose en série, il faut alors calculer les coefficients de Fourier de $\cos^k(x)$, ce qui se fait via les polynômes de Tchebychev, puis sommer une série assez compliquée (plus dure que l'exo). Autrement, on peut écrire le développement de la fonction f et utiliser les relations $(5 + 4 \cos(x))f(x) = 1$, mais on retombe sur les relations du 1.

◆ **SF.36** CCP PC – 2002

Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction π -périodique définie par

$$\forall x \in [0; \pi] \quad f(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x.$$

◊ [Rec02/fourier-r2.tex/fou-r2:9]

On commence par remarquer que f est impaire :

$$f(x) = -\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2} \sin(2nt).$$

◆ **SF.37** CCP PC – 2002

Soient f et g les fonctions 2π -périodiques définies sur $]-\pi; \pi[$ par $f(x) = e^x, g(x) = x e^x$ et $f(-\pi) = g(-\pi) = 0$.

- Donner le développement en série de Fourier de f et g .
- Vers quoi tendent les sommes partielles de Fourier $S_n(f)$ et $S_n(g)$ quand n tend vers $+\infty$?
- Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2}$.

◊ [Rec02/fourier-r2.tex/sf-42]

◆ **SF.38** CCP PC – 2003

On pose $f : x \mapsto \frac{1}{1 + \cos^2 x}$.

- Exprimer les coefficients de Fourier c_{-n} en fonction de c_n . En déduire c_{2n+1} .
- On pose $I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2nx}{1 + \cos^2 x} dx$.
Calculer $I_{n+1} + 6I_n + I_{n-1}$. En déduire a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Convergence uniforme de la série de Fourier ?

◊ [Rec03/fourier-r3.tex/r3:374]

2) La somme vaut 0.

1)

3)

◆ **SF.39** INT PC – 2003

Calculer $I_n = \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{5 + 2 \cos \theta} d\theta$.

◊ [Rec03/fourier-r3.tex/r3:368]

Le mieux est d'écrire

$$\frac{1}{5 + 2 \cos \theta} = \frac{1}{5} \frac{1}{1 + \frac{2}{5} \cos \theta},$$

développer en série entière cette fraction puis, grâce à la convergence uniforme sur le bon compact, intégrer terme à terme ce qui est aisé.

◆ **SF.40** Éc. de l'Air PC – 2003

Développer en série de Fourier la fonction 2π -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ -\cos x & \text{si } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

En déduire des sommes...

◊ [Rec03/fourier-r3.tex/r3:48]

◆ **SF.41 (DSF de \sqrt{t})** Centrale MP – 2004

On définit f , fonction 2π -périodique, impaire, par $f(t) = \sqrt{t}$ pour tout $t \in [0; \pi]$.

- Montrer que les coefficients de Fourier de f vérifient $a_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
- f est-elle somme de sa série de Fourier ?

◊ [Rec04/fourier-r4.tex/r4:252]

- f est continue par morceaux, non dérivable en 0. On trouve après simple

$$\text{calcul } b_n = 0, a_0 = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \text{ et, pour tout } n \geq 1,$$

$$a_n = \overset{\text{ipp}}{\dots} = -\frac{2F(\sqrt{n\pi})}{\pi n^{3/2}},$$

$$\text{où } F : x \mapsto \int_0^x \sin(u^2) du.$$

- Le théorème de Dirichlet ne s'applique pas, mais la série de Fourier converge normalement d'après la question précédente, puisque F admet une limite en $+\infty$ donc est bornée, ce qui montre la convergence normale de la série de Fourier.

Si l'on note g la somme de cette série de Fourier, on peut calculer les coefficients de Fourier de g en intégrant terme à terme, donc f et g ont les mêmes coefficients de Fourier. Or, ils sont tous deux pairs, continus, 2π -périodiques ; par injectivité de $f \mapsto f$, on en déduit que $f = g$, c'est-à-dire que la série de Fourier de f converge vers f .

◆ **SF.42** Centrale MP – 2004

Déterminer les coefficients de Fourier de $f : x \mapsto \frac{1}{\text{ch } \alpha + \cos x}$.

◊ [Rec04/fourier-r4.tex/r4:253]

On peut écrire $(\text{ch } \alpha + \cos x) f(x) = 1$, injecter le DSF et trouver une relation

de récurrence.

◆ **SF.43** Mines MP – 2004

On définit $f : x \mapsto \frac{x}{2\pi} - E\left(\frac{x}{2\pi}\right) - \frac{1}{2}$.

- Calculer les coefficients de Fourier de f .
- Calculer $I_{r,s} = \int_0^{2\pi} f(rt) f(st) dt$ pour $(r, s) \in \mathbb{N}^2$.

INDICATION : On rappelle que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $ab = \text{ppcm}(a, b) \cdot \text{pgcd}(a, b)$.
On utilisera de plus l'identité $2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$ et le théorème de Parseval.

◊ [Rec04/fourier-r4.tex/r4:258]

◆ **SF.44** Mines MP – 2004

Notons f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = (x - \pi)^2$ pour tout $x \in [0; 2\pi]$.

- Calculer le développement en série de Fourier de f .
- Résoudre l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = f(x)$, où $\omega > 0$.

◊ [Rec04/fourier-r4.tex/r4:246]

- $a_0 = 2\pi^2/3$ et $q_n = 4/n^2$.

2) Planplan.

◆ **SF.45** TPE PC – 2004

Donner le développement en série de Fourier de la fonction f impaire, 2π -périodique, définie par $f(x) = x(\pi - x)$ pour tout $x \in [0; \pi]$. En déduire les sommes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

◇ [Rec04/fourier-r4.tex/r4:56]

◆ **SF.46** (*) IIE PC – 2005

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π -périodique. On considère l'équation différentielle

$$y' + y = f(x). \quad (*)$$

- 1) Montrer que (*) admet une unique solution 2π -périodique ϕ .
- 2) ϕ est-elle somme de sa série de Fourier ?
- 3) Trouver une relation entre les coefficients de Fourier exponentiels $c_n(f)$ et $c_n(\phi)$.
- 4) On suppose que f est k -lipschitzienne. Montrer que $c_n(\phi) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

◇ [Rec05/fourier-r5.tex/r5:53]

Exercices plus théoriques

◆ **SF.47 (Inégalité isopérimétrique)** (♣)

Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , périodique de période L . Montrer que

$$\int_0^L |u(x)|^2 dx \leq \frac{L^2}{4\pi^2} \int_0^L |u'(x)|^2 dx + \frac{1}{L} \left| \int_0^L u(x) dx \right|^2$$

Étudier les cas d'égalité.

◇ [Divers/fourier2exo.tex/sf:2]

On notera c_n les coefficients de Fourier de la fonction u .
D'après la formule de Parseval, on a

$$\frac{1}{L} \int_0^L |u(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{L} \int_0^L u(x) e^{-2i\pi n x/L} dx \right|^2$$

et donc

$$\int_0^L |u(x)|^2 dx = \frac{1}{L} \left| \int_0^L u(x) dx \right|^2 + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{L} \left| \int_0^L u(x) e^{-2i\pi n x/L} dx \right|^2$$

$$= \frac{1}{L} \left| \int_0^L u(x) dx \right|^2 + \frac{L^2}{4\pi^2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2 L} \left| \int_0^L u'(x) e^{-2i\pi n x/L} dx \right|^2$$

par intégration par parties. Or on a clairement, puisque dans la dernière somme $n \geq 1$, l'inégalité

$$S = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2 L} \left| \int_0^L u'(x) e^{-2i\pi n x/L} dx \right|^2 \leq \sum_{n \neq 0} \frac{1}{L} \left| \int_0^L u'(x) e^{-2i\pi n x/L} dx \right|^2 \leq \int_0^L |u'(x)|^2 dx.$$

Ceci nous prouve bien la formule demandée.
Tous les termes de la dernière somme étant positifs, il ne saurait y avoir égalité que si tous les termes autres que $n = 1$ ou $n = -1$ sont nuls, donc si $u'(x)$ est combinaison linéaire de $e^{2i\pi x/L}$ et de $e^{-2i\pi x/L}$.

◆ **SF.48 (Inégalité isopérimétrique)** (★★★)

Soient f, g deux applications réelles, 2π -périodiques et de classe \mathcal{C}^1 .

- 1) Montrer que

$$\left| 2 \int_{[2\pi]} f g' \right| \leq \int_{[2\pi]} f'^2 + \int_{[2\pi]} g'^2.$$

Étudier les cas d'égalité.

- 2) Soit Γ un arc de classe \mathcal{C}^1 , fermé, simple, de longueur 2π . Montrer que l'aire du domaine limité par Γ est inférieure ou égale à π .

INDICATION : On rappelle que l'aire d'un domaine délimité par un arc $t \mapsto (f'(t), g'(t))$ paramétré par une abscisse curviligne ($f'^2 + g'^2 = 1$) est $\mathcal{A} = \int_{[2\pi]} f g'$.

◇ [Divers/fourier2exo.tex/sf:28]

- 1) Le plus simple est d'utiliser une inégalité arithmético-géométrique pour écrire que

$$\left| 2 \int_{[2\pi]} f g' \right| \leq \int_{[2\pi]} f^2 + \int_{[2\pi]} g'^2.$$

Puis, on est tenté d'utiliser une inégalité de Wirtinger, mais ça n'est pas valable car f n'est pas d'intégrale nulle. On pose donc $F = f - \langle f \rangle$, alors $\int_{[2\pi]} F = 0$ et $\int_{[2\pi]} f g' = \int_{[2\pi]} F g'$, et donc

$$\mathcal{A} = \int_{[2\pi]} f g' \leq \frac{1}{2} \int_{[2\pi]} f'^2 + g'^2 \pi,$$

et on conclut ensuite par Wirtinger : $\int_{[2\pi]} F^2 \leq \int_{[2\pi]} F'^2$.

- 2) On paramètre par une abscisse curviligne $x = f(t)$ et $y = g(t)$. Alors l'aire de la courbe est

puisque par définition d'une abscisse curviligne
 $f'^2 + g'^2 = 1$ pour tout $t \in [0; 2\pi]$.

◆ **SF.49**

Exprimer le développement en série de Fourier de la fonction $x \mapsto \cos x \cdot f(x)$ en fonction de celui de la fonction f , que l'on supposera continue, (2π) -périodique, et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} .

◇ [Divers/fourier2exo.tex/sf:3]

On trouve (convolution !!!) directement pas la définition :

$$a_0(g) = a_1 \qquad b_1(g) = \frac{1}{2} b_2$$

$$a_n(g) = \frac{1}{2} (a_{n-1} + a_{n+1}) \qquad b_n(g) = \frac{1}{2} (b_{n-1} + b_{n+1}).$$

◆ **SF.50**

Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $-1 < r < 1$. On pose

$$f_r(t) = \frac{1-r \cos t}{1-2r \cos t + r^2} \quad \text{et} \quad g_r(t) = \frac{r \sin t}{1-2r \cos t + r^2}.$$

- 1) En évitant les calculs au maximum, montrer que f et g se développent en série trigonométrique :

$$f_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nt \qquad g_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin nt.$$

INDICATION : On ne confondra pas « développement en série trigonométrique » et « développement en série de Fourier »...

- 2) En déduire les coefficients de Fourier de f_r et g_r .
- 3) On pose $F_r(t) = \frac{1}{2} \ln(1 - 2r \cos t + r^2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_0^{2\pi} F_r(t) \cos nt dt$.

◇ [Divers/fourier2exo.tex/sf:8]

On a

$$f_r(t) + i g_r(t) = \frac{1}{1 - r e^{it}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{int}.$$

De plus, les séries $\sum(t \mapsto r^n \cos nt)$ et $\sum(t \mapsto r^n \sin nt)$ convergent normalement, donc uniformément, donc leurs sommes sont continues, et leurs coefficients de Fourier, obtenus par permutation de la somme et de l'intégrale, sont les coefficients des séries, soit $a_0(f_r) = 2$, $a_0(g_r) = 0$, $a_n(f_r) = r^n$ et $b_n(g_r) = r^n$.

On a alors $F_r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{r^n \cos nt}{n}$

d'après le théorème d'intégration des séries de fonctions (il y a convergence uniforme.) D'où l'intégrale vaut $-\frac{\pi r^n}{n}$.

◆ **SF.51 (Formule sommatoire de Poisson)** (♣)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , et telle que $\lim_{\pm\infty} x^2 f(x) = \lim_{\pm\infty} x^2 f'(x) = 0$.

Montrer qu'alors on a la **formule sommatoire de Poisson** :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi n x} f(x) dx.$$

INDICATION : On pourra poser $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ et montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 . On calculera les coefficients de Fourier de F que l'on comparera aux nombres demandés.

◇ [Divers/fourier2exo.tex/sf:10]

On pose

$$u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2i\pi p x} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2i\pi p x} dx$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) e^{-2i\pi p(x+n)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) e^{-2i\pi p x} dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2i\pi p x} dx = \int_0^1 F(x) e^{-2i\pi p x} dx = c_p(F),$$

où l'on a posé $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$, qui est bien défini grâce à la condition $f(x) = o(1/x^2)$ [$x \rightarrow \pm\infty$], et où l'on a interverti les signes somme et intégrale grâce à la convergence normale de la série de définition de F sur tout compact.

On note d'ailleurs que F est de classe \mathcal{C}^1 et que l'on peut dériver terme à terme grâce à la condition $f'(x) = o(1/x^2)$ qui assure la convergence normale de la série des dérivées.

F étant de classe \mathcal{C}^1 et bien évidemment 1 -périodique, on a convergence normale de sa série de Fourier. Notamment,

$$F(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(F) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} u_p = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2i\pi p x} dx.$$

♦ **SF.52 (Produit de convolution)** (★★)
 Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues et 2π -périodiques. On note h le **produit de convolution** de f par g :

$$h(x) = [f * g](x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t) dt.$$

1) Montrer que h est continue et 2π -périodique. Calculer les coefficients de Fourier de h en fonction de ceux de f et g .
 2) On suppose que g est un polynôme trigonométrique. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de $\Phi : f \mapsto f * g$.

◊ [Divers/fourier2exo.tex/sf.13] grâce à Guido Fubini.
 On calcule Les coefficients $c_n(f)$ doivent donc vérifier $c_n(f)c_n(g) = \lambda c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si les $c_n(g)$ sont tous différents, cela veut dire que f n'a qu'un seul coefficient de Fourier non nul ; sinon, il peut y en avoir plusieurs.

$$c_n(h) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{[2\pi]} \left(\int_{[2\pi]} f(x-t)g(t) dt \right) e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{[2\pi]} \left(\int_{[2\pi]} f(x-t)e^{-in(x-t)} dx \right) g(t)e^{-int} dt$$

$$= c_n(f)c_n(g)$$

♦ **SF.53** (★)
 Soit f de classe \mathcal{C}^2 et 2π -périodique. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement sur \mathbb{R}

◊ [Divers/fourier2exo.tex/sf.14] Par deux IPP, on a $|c_n(f)| \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{[2\pi]} |f''(x)| dx$.

♦ **SF.54 (Inégalité de Wirtinger)** (★★)
 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et 2π -périodique. On suppose que $\int_{[2\pi]} f = 0$. Montrer que

$$\int_{[2\pi]} f(t)^2 dt \leq \int_{[2\pi]} f'(t)^2 dt.$$

Étudier les cas d'égalité.

◊ [Divers/fourier2exo.tex/sf.15] Il y a égalité si et seulement si
 Avec $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$, et Parseval, on obtient

$$\int_{[2\pi]} f(t)^2 dt = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{[2\pi]} |f'(t)|^2 dt.$$

♦ **SF.55** (★★)
 Trouver la solution de l'équation différentielle $y'' + y = |\sin x|$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

INDICATION : On pourra considérer le développement en série de Fourier de $x \mapsto |\sin x|$, et chercher une solution particulière développable en série trigonométrique de l'équation différentielle.

◊ [Divers/fourier2exo.tex/sf.21] Une simple étude montre que $\|u_n\|_{\infty} \sim \frac{1}{16n^4}$, $\|u'_n\|_{\infty} \sim \frac{1}{8n^3}$ et $\|u''_n\|_{\infty} \sim \frac{1}{4n^2}$ ce qui prouve la convergence normale (et donc uniforme) de ces séries : en conséquence de quoi y est-elle de classe \mathcal{C}^2 .
 On cherche une solution particulière. Pour cela, considérons le développement en série de Fourier de $f : x \mapsto |\sin x|$. La fonction f est paire et

$$a_{2n} = \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 0,$$

et d'après le théorème de Dirichlet il y a convergence simple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1-4n^2}.$$

On résout d'abord chaque équation

$$y'' + y = \cos(2nx)$$

ce qui donne comme solution $y_n = \frac{\cos(2nx)}{1-4n^2}$.

On pose donc

$$g(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(1-4n^2)^2} = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Cherchons maintenant une solution $y = \lambda \cos x + \mu \sin x + g(x)$ vérifiant les conditions initiales demandées. Alors $\lambda = -g(0)$ et $\mu = -g'(0)$.
 Or $g'(0) = 0$ (g est de classe \mathcal{C}^2 et paire!) et pour avoir λ , on considère la formule de Parseval pour $x \mapsto |x|$, qui conduit à

$$\frac{8}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(1-4n^2)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2x) dx = 1. \quad (\text{E}_n)$$

Ainsi, $\lambda = -\pi/4$.
 La solution cherchée est donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = -\frac{\pi}{4} \cos x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(1-4n^2)^2}.$$

♦ **SF.56** (★)
 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique et continue par morceaux. Que peut-on dire des coefficients de Fourier de f si l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1) $f(x + \pi) = f(x)$?
 2) $f(x + \pi) = -f(x)$?

◊ [Divers/fourier2exo.tex/sf.30] Dans le premier cas, f est π -périodique donc $a_{2p+1} = b_{2p+1} = c_{2p+1} = 0$. Dans le second cas, ce sont les termes pairs $a_{2p} = b_{2p} = c_{2p} = 0$.

♦ **SF.57** (★★)
 Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Développer en série de Fourier la fonction $x \mapsto |\sin x|$.
 2) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) |\sin nt| dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt$.

◊ [Divers/fourier2exo.tex/sf.31] La convergence uniforme de la série par rapport à k permet d'échanger la somme et l'intégrale. Il faut maintenant justifier le passage à la limite. On utilise le lemme de Lebesgue :

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) \cos 2nx$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}.$$

Notons

$$\Delta_n = \int_a^b f(t) |\sin nt| dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt.$$

En utilisant le développement précédent en $x = nt$, on obtient

$$\Delta_n = \frac{4}{\pi} \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2knt}{k^2 - 1} f(t) dt.$$

La convergence uniforme de la série par rapport à k permet d'échanger la somme et l'intégrale. Il faut maintenant justifier le passage à la limite. On utilise le lemme de Lebesgue :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \cos(nx) f(x) dx = 0,$$

qui est un résultat élémentaire de la théorie des séries de Fourier dès que f est continue.

□ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $\left| \int_a^b \cos(nx) f(x) dx \right| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Si on note $S = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$, on obtient, pour $n \geq N$ (et donc $kn \geq N$ pour tout $k \geq 1$), que $|\Delta_n| \leq S\varepsilon$. □

On pouvait également démontrer ce résultat en utilisant une égalité de la moyenne (H-P) sur des petits intervalles et en obtenant une somme de Riemann, voir exercice **INT.51** page 562. Enfin, une démonstration dans le cas où f est croissant se trouve en **INT.70** page 567.

♦ **SF.58** (★★)
 La fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ est-elle continue par morceaux ?
 On montrera successivement, avant de conclure :

1) Pour toute suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante vers 0 et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, la série de fonctions $\sum b_n \sin nx \sin px$ converge uniformément. (Utiliser une transformation d'Abel).
 2) Si la somme f de la série $\sum b_n \sin nx$ est continue par morceaux, alors la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des coefficients de Fourier de f .

◊ [Divers/fourier2exo.tex/sf.32] On va montrer que la suite est uniformément de Cauchy sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, et en 0 il y a bien sûr convergence.

1) Une majoration classique est $\left| \sum_{k=n}^m \sin kx \right| \leq \frac{1}{\sin x/2}$. Une étude de \sin montre que de plus sur $]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$0 \leq \sin \frac{x}{2} \geq \frac{x}{\pi} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sin x/2} \leq \frac{\pi}{x}.$$

En posant $A_k = \sum_{q=n}^k \sin qx$, on a

$$\sum_{k=n}^m b_k \sin kx = \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m.$$

On a donc la majoration

$$\left| \sum_{k=n}^m b_k \sin kx \right| \leq b_n \max_{n \leq k \leq m} |A_k| \leq \frac{b_n}{\sin x/2} \leq \frac{\pi b_n}{x}.$$

De la majoration grossière $|\sin px| \leq px$ on tire

$$\left| \left(\sum_{k=n}^m b_k \sin kx \right) \sin px \right| \leq \pi b_n.$$

Ce qui montre la convergence uniforme.

2) Si f est continue par morceaux, on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin pt dt = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \sin pt \right) dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} b_n \sin nt \sin pt dt \right) = \pi b_p,$$

ce qui montre que b_p est la p -ième coefficient de Fourier de f .

3) La fonction en question, par transformation d'Abel, est définie sur \mathbb{R} et continue sur $]0; 2\pi[$. Elle vaut 0 en 0 mais si elle était continue par morceaux (donc si $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et les autres limites du même type existaient),

alors sa série de Fourier serait $\sum \frac{\sin nx}{\ln n}$. Le théorème de Parseval (valable pour les fonctions continues par morceaux également) assurerait la convergence quadratique de la série de Fourier et (inégalité de Bessel), la convergence de $\sum \frac{1}{(\ln n)^2}$, ce qui est faux.

◆ **SF.59 (Inégalité isopérimétrique)** (★★)

1) Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 et 2π périodique. Montrer que

$$2 \int_0^{2\pi} fg' \leq \int_0^{2\pi} f'^2 + \int_0^{2\pi} g'^2.$$

2) Soit Γ un arc de classe \mathcal{C}^1 , fermé, simple, de longueur 2π . Montrer que l'aire délimitée par Γ est inférieure ou égale à π . Étudier les cas d'égalité.

INDICATION : On rappelle que l'aire d'un domaine délimité par un arc $t \mapsto (f(t), g(t))$ paramétré par une abscisse curviligne ($f'^2 + g'^2 = 1$) est $\mathcal{A} = \int_{[2\pi]} fg'$.

◇ [Divers/fourier2exo.tex/sf:34]

$$\mathcal{A} = \int x dy = \int_0^{2\pi} fg' \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \underbrace{(f'^2 + g'^2)}_{=1} = \pi.$$

1) On a $|2nc_n\gamma_n| \leq n|c_n|^2 + n|\gamma_n|^2 \leq n^2|c_n|^2 + n^2|\gamma_n|^2$, ce qui nous donne l'inégalité voulue avec c_n et γ_n les coefficients de Fourier de f et g . Il n'y a égalité que si f et g sont des fonctions de la forme $C^{\text{le}} + \cos(t + \phi)$ et $C^{\text{le}} + \sin(t + \phi)$

2) On paramètre Γ par un paramétrage normal $x = f(t)$ et $y = g(t)$, alors puisqu'il faut des coefficients uniquement pour $n = -1, 0, 1$ et de plus $2ab \leq a^2 + b^2$ avec égalité seulement si $a = b...$

◆ **SF.60** (★★★)

Soit f une fonction continue par morceaux et 2π -périodique. On note $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier exponentiels. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

(a) f est π -périodique ;
 (b) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_{2n+1} = 0$.

(On notera que la série de Fourier peut fort bien ne pas converger vers f !)

◇ [Divers/fourier2exo.tex/sf:43]

◆ **SF.61** (*)

Soit f une fonction continue, 2π -périodique, dont tous les coefficients de Fourier sont nuls. Est-on sûr que f soit nul ?

◇ [Divers/fourier2exo.tex/sf:44] Il est à noter que si f n'est que continue par morceaux, on obtient que f est nulle presque partout. Bien sûr, en vertu par exemple de l'égalité de Parseval et par continuité de f .

◆ **SF.62 (Convolution)** (★★★)

Soient f et g continues sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , paires, 2π -périodiques. On pose

$$h(x) = \frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)a_n(g) \cos(nx).$$

1) Montrer que h est définie et continue sur \mathbb{R} .
 2) Donner le développement en série de Fourier de h .
 3) Montrer que $\|h\|_{\infty} \leq 2\|f\|_{\infty} \cdot \|g\|_{\infty}$.
 4) Montrer que $h : x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t) dt$.
 5) Pour f fixée, on note T l'application $T : g \mapsto h$. On note λ une valeur propre non nulle de T .
 a) Montrer que l'ensemble des n tels que $a_n(f) = \lambda$ est fini.
 b) En déduire que, si g est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre λ , la suite $(a_n(g))_{n \in \mathbb{N}}$ est à support fini.

◇ [Divers/fourier2exo.tex/sf:35]

2) Convergence normale de la série trigonométrique.

1) On utilise le fait que \hat{f} et \hat{g} sont dans ℓ^2 , puis l'inégalité arithmético-géométrique.
 3) Calcul...

◆ **SF.63** (★★★)

La série trigonométrique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est-elle la somme de Fourier d'une fonction continue par morceaux et 2π -périodique ?

◇ [Divers/fourier2exo.tex/sf:47] ce qui n'est pas le cas. S'il y avait continuité, les coefficients de Fourier seraient de carré sommable,

◆ **SF.64 ($y' - y = f$)**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π -périodique.

1) Montrer que l'équation $y' - y = f$ admet une unique solution bornée ϕ . Cette fonction est-elle périodique ?
 2) La fonction ϕ est-elle développable en série de Fourier ? Déterminer les coefficients de Fourier de ϕ en fonction de ceux de f .
 3) Montrer que si f est lipschitzienne, la famille $(n^2 c_n(\phi))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée.

◇ [Divers/fourier2exo.tex/sf:48]

◆ **SF.65**

◇ [Divers/fourier2exo.tex/sf:49]

◆ **SF.66** (★★) X PC – 2005

Soit f une fonction continue et 2π -périodique. On note c_k ses coefficients de Fourier.

1) Montrer que la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k r^{|k|} e^{ikt}$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $r \in]-1; 1[$.
 2) Calculer $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k r^{|k|} e^{ikt}$.

◇ [Rec00/fourier2-r0.tex/div:168] et $f_2(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-ikt} r^k$,
 1) Application du théorème de convergence normale : la série $\sum c_k$ converge absolument. on a convergence en $r = 1$ et par définition, $f_1 + f_2 = f$. Ainsi,
 2) D'après un théorème connu de séries entières, en notant

$$f_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{ikt} r^k \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k r^{|k|} e^{ikt} = f(t).$$

◆ **SF.67** (★★) Mines MP – 1998

Montrer que les seules fonctions $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π -périodiques, qui vérifient :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^{*+} \quad \exists M \in \mathbb{R}^{*+} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f^{(n)}(x)| \leq M \lambda^n$$

sont les polynômes trigonométriques.

◇ [Rec00/fourier2-r0.tex/sf:4] On en déduit que $|p|^{2n} |c_p| \leq M \lambda^n$, et donc
 En effet, on a $c_p(f^{(n)}) = (ip)^n c_p$, soit $|c_p| \leq M \left(\frac{\lambda}{|p|}\right)^n$.
 Pour $|p| > \lambda$, en prenant $[n \rightarrow \infty]$, cela donne donc $c_p = 0$. Réciproquement, tout polynôme trigo vérifie bien la condition demandée.

◆ **SF.68** CCP PC – 2001

Montrer l'existence de la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\forall x \in]0; \pi[$, $\text{ch } x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin(nx)$.
 Étudier la convergence de la série $\sum \lambda_n \sin(nx)$ sur \mathbb{R} .

◇ [Rec01/fourier2-r1.tex/srf-r:25]

◆ **SF.69** (★★) Mines MP – 2002

On note

$$A = \left\{ f \in \mathcal{C}^2([0; \pi], \mathbb{R}) ; f(0) = f(\pi) = 0 \right\}.$$

Calculer $\inf_{\substack{f \in A \\ f \neq 0}} \left(\frac{\int_0^{\pi} f''(t)^2 dt}{\int_0^{\pi} f'(t)^2 dt} \right)$. Cette borne inférieure est-elle atteinte ? Si oui, pour quelle fonction ?

◊ [Rec02/fourier2-r2.tex/bil-r2:15]

Une vision « espace vectoriel normé » de l'exercice est la suivante : on munit l'espace vectoriel A de la forme bilinéaire symétrique $\langle f|g \rangle = \int_0^\pi f'g'$. Elle est positive et définie puisque si $\langle f|f \rangle = 0$ alors $f' \equiv 0$ et donc $f \equiv 0$ puisque $f(0) = 0$. On cherche donc la borne inférieure sur la boule unité de $\int_0^\pi f''(t)^2 dt$, c'est-à-dire la norme linéaire de l'application « dérivée ».

Pour la résolution, il faut passer aux séries de Fourier. On peut soit faire de la série de Fourier sur $[0; \pi]$ quitte à changer les conventions, soit étendre la fonction à $[-\pi; \pi]$ en la rendant impaire, et en notant qu'elle est alors de classe \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^2 par morceaux, ce qui suffit en pratique.

Le quotient étudié s'écrit

$$\frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} n^4 |c_n|^2}{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} n^2 |c_n|^2},$$

qui est bien sûr supérieur ou égal à 1 (faire la différence entre numérateur et dénominateur, c'est positif !), et qui vaut 1 pour une fonction telle que $c_n = 0$ pour $n \geq 2$, $|c_{\pm 1}| = 1$ (et $c_0 = 0$ bien sûr, pour qu'elle fasse partie de A), c'est-à-dire la fonction sin.

◆ **SF.70** (★) Navale MP – 2002
 Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π -périodiques, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = 2 \sin x f'(x).$$

◊ [Rec02/fourier2-r2.tex/fou-r2:4]

La série de Fourier de f converge normalement, on peut raisonner sur cette série. Si f est solution, ses parties paire et impaire le sont aussi. On suppose f paire ou impaire. Si f est paire, le système obtenu sur les a_n se réduit rapide-

ment à $a_0 = -2a_1$: les seules solutions paires sont $p_\lambda(x) = \lambda(\cos(x) - 1)$. De même, les solutions paires sont $i_\mu = \mu \sin(x)$. En conclusion, les solutions sont $f_{\lambda, \mu}(x) = \mu \sin x + \lambda(\cos x - 1)$.

◆ **SF.71 (Inégalité de Wirtinger)** CCP MP – 2002
 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, 2π -périodique, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, de moyenne nulle. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f'|^2.$$

Étudier le cas d'égalité. Dans ce cas, et si f est suffisamment dérivable, que dire des valeurs de $\int_0^{2\pi} |f^{(j)}|^2$?

◊ [Rec02/fourier2-r2.tex/fou-r2:8]

Avec $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$, et Parseval, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{[2\pi]} f(t)^2 dt &= |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{[2\pi]} |f'(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Il y a égalité si et seulement si

$$f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x.$$

On vérifie que les dérivées successives sont alors également de moyenne nulle, donc la suite des valeurs moyennes de $|f^{(j)}|$ est décroissante.

◆ **SF.72** (★) TPE MP – 2002
 Soient $(a, b \in \mathbb{R}^+)$ tels que $0 < b - a < 2\pi$ et $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$. On suppose que, pour toute fonction $g \in \text{Vect}\{t \mapsto \cos pt, t \mapsto \sin pt; p \in \mathbb{N}\}$, on a $\int_a^b f(t)g(t) dt = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

◊ [Rec02/fourier2-r2.tex/int-r2:8]

On complète f sur une période de 2π par la fonction nulle, puis on la 2π -périodise. Elle est alors de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Tous ses coefficients de Four-

rier sont nuls, et d'après Dirichlet la série de Fourier converge simplement vers la régularisée de f , donc f est nulle.

◆ **SF.73** Centrale MP – 2003
 Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |u(t)| < \frac{c}{1+t^2}.$$

On définit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\phi_N(t) = \sum_{k=-N}^N u(t - 2k\pi)$.

- Étudier la convergence de la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Que peut-on dire de sa limite ϕ ?
- Calculer les coefficients de Fourier de cette limite en fonction de $\hat{u}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{ist} dt$.
- Calculer la fonction ϕ associée à $u : x \mapsto e^{-|x|}$.

◊ [Rec03/fourier2-r3.tex/r3:450]

◆ **SF.74** (★★) INT MP – 2003
 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et 2π -périodique. Montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt + \sqrt{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt}.$$

On rappelle que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

◊ [Rec03/fourier2-r3.tex/r3:79]

Décomposons f en série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int} \quad \text{et} \quad f'(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} in c_n e^{int}.$$

Alors

$$\sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt} = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} n^2 |c_n|^2},$$

ce qui bien sûr fait tout de suite penser à Cauchy-Schwarz. On écrit donc que $\|a\| \cdot \|b\| \geq \langle a|b \rangle$ dans \mathbb{C}^n et avec le produit scalaire hermitien canonique, puis

on prend la limite $n \rightarrow \infty$ qui existe grâce au fait que f' est continue. On obtient donc

$$\sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt} \geq \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| - |c_0|,$$

et puisque $|c_0| \leq \int_0^{2\pi} |f(t)| dt$, on a bien

$$\sqrt{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt} \geq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| - \int_0^{2\pi} |f|.$$

◆ **SF.75 (Inégalité isopérimétrique)** (★★) ENS Cachan MP – 2004
 Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissante, telle que $f(1) = \frac{2L}{\pi}$ où L est la longueur de la courbe d'équation $y = f(x)$.

- Montrer que $\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{\pi}{4}$.
- Étudier les cas d'égalité.

◊ [Rec04/fourier2-r4.tex/r4:194]

C'est un exercice d'inégalité isopérimétrique, cf **SF.48**.

Cas d'égalité si f représente un arc de cercle, mais ce n'est pas tout à fait \mathcal{C}^1 .

◆ **SF.76** (★★) Mines MP – 2004
 Soit f une fonction continue, 2π -périodique, impaire. On note $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$. Montrer que la série $\sum \frac{b_n}{n}$ converge et calculer sa somme.

◊ [Rec04/fourier2-r4.tex/r4:233]

Intégrale sur un segment

Sommes de Riemann

◆ **INT.1** (♣)

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:54] On reconnaît une somme de Riemann associée à $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{1}{2}$.

◆ **INT.2** (★★)

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:55] et ces intégrales admettent une limite (elles se calculent aisément).
On a $\ln S_n = \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n} \right)$. Or, en utilisant des techniques de
monotonie classique, on a

$$\int_{1/n}^1 \ln t dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n} \leq \int_{2/n}^{1+1/n} \ln t dt,$$

◆ **INT.3** (★★)

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:56] droite, la somme de Riemann $\sum k/n^2$ associée à $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ et, à gauche, par cette même somme augmentée d'une somme de Riemann multipliée par $1/n$, qui converge donc vers 0. D'où $\lim S_n = e^{1/2} = \sqrt{e}$.

◆ **INT.4** (★★)

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right\}^{1/n}$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:57] $\lim S_n = 4/e$.
 $\ln S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \ln 2 - 1$ donc

◆ **INT.5 (Une application des sommes de Riemann)** (*)

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f \left(\frac{k}{n} \right) = 0$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:58] On décompose en deux fois la différence de deux sommes de Riemann.

◆ **INT.6**

Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{e^{-n/k}}{k^2} \sim \frac{1}{en}$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:1] en remarquant que la fonction est prolongeable par continuité sur $[0; 1]$.

On calcule la somme de Riemann

$$n \sum_{k=1}^n \frac{e^{-n/k}}{k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{e^{-n/k}}{k^2/n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t^2} dt = \frac{1}{e}.$$

◆ **INT.7** (★★)

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[f \left(\frac{2k+1}{2n} \right) - f \left(\frac{k}{n} \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [f(1) - f(0)].$$

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:2]

Accroissements finis puis somme de Riemann.

◆ **INT.8 (Inégalité de convexité)** (★★)

Soient $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ et $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $\phi \left(\int_0^1 f \right) \leq \int_0^1 \phi \circ f$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:3] Avec sommes de Riemann, ϕ étant convexe, elle est continue, donc $\phi \circ f$ est bien intégrable. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\phi \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) \right] \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \phi \left[f \left(\frac{k}{n} \right) \right],$$

et en passant à la limite $n \rightarrow \infty$ on obtient l'inégalité voulue.

◆ **INT.9**

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:14]

ce qui tend (somme de Riemann) vers

On calcule pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1+k/n}{1+(k/n)^2} = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= [\text{Arctan } x]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+y} dy$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} [\ln(1+x)]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

◆ **INT.10** (★★)

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=n+1}^{2n} k^{1/k}$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:15]

à cause du premier $\ln n$ (le reste c'est Riemann).

$$= \ln n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

◆ **INT.11** (★★)

Calculer la limite quand $[n \rightarrow \infty]$ de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:16]

que l'on encadre, en utilisant la monotonie de f , par

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n} \right)} \leq S_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n} \right)}$$

ce qui prouve que

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+x)^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2.$$

◆ **INT.12**

Calculer la limite quand $[n \rightarrow \infty]$ de $\frac{1}{n} \left[\frac{(2n)!}{n!} \right]^{1/n}$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:17]

et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{4}{e}$.

Avec une somme de Riemann, on calcule $w_n = \ln u_n$, et on obtient

$$w_n = \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln \frac{k}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln(x+1) dx.$$

◆ **INT.13**

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{1/n}$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:50]

et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{4}{e}$.

On passe au logarithme pour obtenir après quelques calculs

$$\ln u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \ln 2 - 1$$

◆ **INT.14** (★★)

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ avec $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin \left(\frac{k\pi}{n+1} \right)$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:60]

À un terme près, c'est la somme de Riemann d'ordre $n+1$ associée à $\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x} dx$.

◆ **INT.15** (★★)

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ avec $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin \left(\frac{k\pi}{n+1} \right)$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:61]

Par monotonie et encadrement (séparer la somme en deux moitiés), on trouve la somme de Riemann associée à $\int_0^1 x \sin(\pi x) dx$.

◆ **INT.16** (★★)

1) Soit f une fonction continue, et notons F une primitive de f . Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, si $k \in [0, n-1]$, alors il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$nF \left(\frac{k+1}{n} \right) - nF \left(\frac{k}{n} \right) - f \left(\frac{k}{n} \right) = \frac{1}{2n} f' \left(\frac{k+\theta}{n} \right)$$

2) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \int_0^1 f - \sum_{k=0}^{n-1} f \left(\frac{k}{n} \right) \right\} = \frac{1}{2} (f(1) - f(0)).$$

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:18]

La première formule est l'égalité de Taylor-Lagrange d'ordre 2 (voir exercice **DER.34** page 340).

et on applique alors le résultat de 1, ce qui donne

$$S_n = \frac{1}{2n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f' \left(\frac{k+\theta_k}{n} \right) \right\}$$

On reconnaît au facteur $1/2$ près une somme de Riemann associée à $\int_0^1 f'(t) dt = f(1) - f(0)$.

$$S_n = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} n \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left[f(t) - f \left(\frac{k}{n} \right) \right] dt \right\}$$

◆ **INT.17**
Calculer, si elle existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \dots + \frac{1}{n^2+(n+1)^2} \right)$$

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:19]

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

◆ **INT.18** (*)

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 \sqrt{n^3+k^3}}$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:44]

On reconnaît $\frac{1}{\sqrt{n}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(k/n)^2}{\sqrt{1+(k/n)^3}} \right)}_{I_n}$ où $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de somme de Riemann convergeant vers $I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$, donc la limite cherchée est 0.

◆ **INT.19** (★★)

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n} \right) \sin \left(\frac{k}{n^2} \right)$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:45]

ce qui montre que

On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n} \right) \sin \left(\frac{k}{n^2} \right)$. Alors on a $x(1-\varepsilon(n)) \leq \sin x \leq x$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, où ε est une fonction tendant vers 0. On en déduit que pour n suffisamment grand

$$\frac{k}{n^2} (1 - \varepsilon(1/n)) \leq \sin \left(\frac{k}{n^2} \right) \leq \frac{k}{n^2} \quad \forall k \in [1, n],$$

donc, par théorème des gendarmes, on a convergence vers $\int_0^1 x \sin x dx$.

◆ **INT.20** (♣)

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue. Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose

$$u_n(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{n} f \left(\frac{k}{n} \right) \right).$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \exp \left\{ x \int_0^1 f(t) dt \right\}$.

3) En déduire la limite quand $[n \rightarrow \infty]$ de $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k+n} \right)$.

◇ [Divers/riemannexo.tex/int:23]

On pose $w_n = \ln u_n$, alors par encadrement, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $x \int_0^1 f(t) dt$. Le dernier produit tend vers $e^{x \int_0^1 f(t) dt} = 2^x$.

◆ **INT.21** (*)

X PC – 1997

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \operatorname{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{k+n}} \right) - n$.

◇ [Rec00/riemann-r0.tex/supp-r0:16]

On montre dans un premier temps, en utilisant la formule de Taylor-Young, que pour x suffisamment petit (disons $|x| \leq \eta$) :

$$\frac{x^2}{2} \leq \operatorname{ch} x - 1 \leq \frac{x^2}{2} + x^3,$$

où bien une inégalité de Taylor-Lagrange qui donne

$$\left| \operatorname{ch}(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \right| \leq \operatorname{ch}(1) \frac{x^3}{6} \quad \text{pour } |x| \leq 1.$$

On somme et on obtient, pour $n \geq 1/\eta$:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq S_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^{3/2}}.$$

On vérifie que le dernier terme tend vers 0 et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \frac{\ln 2}{2}.$$

◆ **INT.22** (★★)

ENS ULC MP – 2001

Soit $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n} F \left(\frac{k}{n} \right) \right)$.

◇ [Rec01/riemann-r1.tex/srn-r:11]

On note que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

On encadre alors après être passé au logarithme, cela nous donne comme limite $\exp \left\{ \int_0^1 F \right\}$.

◆ **INT.23**

Centrale PC – 2001

Donner un équivalent de $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n E(\sqrt{k})$, où E désigne la partie entière.

◇ [Rec01/riemann-r1.tex/sui-r:7]

Encadrer puis utiliser des sommes de Riemann, la limite vaut $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

◆ **INT.24** (★★★)

CCP PC – 2001

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. On pose $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(\frac{k}{n} \right)$ et $w_n = n \left[\int_0^1 f(t) dt - v_n \right]$.

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{1}{2} [f(1) - f(0)].$$

INDICATION : On utilisera $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt$, ainsi que l'égalité (hors-programme) de Taylor-Lagrange.

◇ [Rec01/riemann-r1.tex/int-r:1]

donc

$$w_n = n \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] dt \right\},$$

or d'après l'égalité hors-programme de Taylor-Lagrange, si $n \in \mathbb{N}$, si $k \in [0, n-1]$, alors il existe $\theta \in [0; 1]$ tel que

$$nF\left(\frac{k+1}{n}\right) - nF\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n} f''\left(\frac{k+\theta}{n}\right).$$

en vertu du théorème de Riemann.

$$S_n = \frac{1}{2n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f''\left(\frac{k+\theta_k}{n}\right) \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^1 f'' = \frac{1}{2} [f(1) - f(0)]$$

◆ **INT.25** Mines PC – 2002

On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \exp\left(\frac{1}{n+k}\right) - n$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

◇ [Rec02/riemann-r2.tex/sui-r:2:4]

Une égalité de Taylor intégral permet de montrer que, sur un voisinage de 0, on a

$$x \leq e^x - 1 \leq x + x^2.$$

En effet, en posant $g(x) = e^x - 1 - x - x^2$, alors $g(0) = g'(0) = 0$ et $g''(1) = -1$, donc $g'' \leq 0$ sur un intervalle $[0; \eta]$.

On conclut par sommes de Riemann que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \ln 2$.

◆ **INT.26** TPE PC – 2002

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right) - n \right|.$$

INDICATION : On utilisera l'inégalité de Taylor-Lagrange pour le cosinus hyperbolique à l'ordre 3.

◇ [Rec02/riemann-r2.tex/int-r:2:13]

On l'écrit sous la forme

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{k}{n} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2.$$

On utilise

$$\left| \operatorname{ch}(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \right| \leq \operatorname{ch}(1) \frac{x^3}{6} \quad \text{pour } |x| \leq 1, \quad \text{donc la limite est } \ln(2)/2.$$

on prend $x = \frac{1}{\sqrt{k+n}}$ et on somme pour obtenir

$$\left| \sum_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right) - n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \right| \leq \frac{\operatorname{ch}(1)}{6\sqrt{n}}$$

◆ **INT.27** Mines MP – 2003

On pose $u_n = \prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{p}{n^2}\right)$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

◇ [Rec03/riemann-r3.tex/r3:433]

trouve donc

$$x - x \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln u_n = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

puis on encadre par des sommes de Riemann et un terme qui tend vers 0, on a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{e}$.

◆ **INT.28** TPE PC – 2003

Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n-k}}\right)$.

INDICATION : On utilisera un encadrement judicieux.

◇ [Rec03/riemann-r3.tex/r3:107]

on tire

De la double inégalité, valable au voisinage de 0 :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1,$$

et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

$$1 - \frac{1}{2n} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}}_{\rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2} \leq a_n \leq 1$$

◆ **INT.29** CCP PC – 2003

Pour tout $t \geq \mathbb{R}^+$, on pose $f(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t}}$. Étudier la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

◇ [Rec03/riemann-r3.tex/r3:452]

◆ **INT.30** CCP PC – 2004

On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}$.

- Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite S.
- Soit $f :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$.
 - On définit $(\sigma_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sigma_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{1}{n+k}\right).$$
 Étudier le comportement de la suite $(\sigma_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - Soit $m \in \mathbb{N}^*$; étudier le comportement de la suite de terme général

$$\sigma_n(f, m) = \sum_{k=0}^m f\left(\frac{1}{n+k}\right).$$

◇ [Rec04/riemann-r4.tex/r4:78]

2) a) On écrit $f(x) = x f'(0) + \varepsilon(x)$, où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$. La suite converge vers $f(0) \ln 2$.

1) Somme de Riemann convergeant vers $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$.

b) **À FINIR !!!**

◆ **INT.31** TPE PC – 2004

Soit $\alpha \geq 1$. Trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, où $u_n = \tan\left(\frac{1}{n^2\alpha}\right) + \tan\left(\frac{2}{n^2\alpha}\right) + \dots + \tan\left(\frac{n}{n^2\alpha}\right)$.

◇ [Rec04/riemann-r4.tex/r4:115]

$$\forall x \in [0; \frac{1}{\alpha}] \quad |\tan(x) - x| \leq \frac{x^2}{2} \tan\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

On utilise des sommes de Riemann et l'inégalité de Taylor-Lagrange :

On obtient une limite égale à $1/2\alpha$.

◆ **INT.32** TPE PC – 2004

Notons $\varphi : x \mapsto 2E(x) - E(2x) + 1$.

- Étudier le graphe de φ .
- Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \varphi(nx) dx$.

◇ [Rec04/riemann-r4.tex/r4:409]

2) $\frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$ par des sommes de Riemann et le théorème de la moyenne pour une intégrale.

◆ **INT.33** CCP PC – 2005

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+n}{k^2+n^2}$.

- Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
- Si $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en 0 et vérifie $f(0) = 0$, calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k+n}{k^2+n^2}\right).$$

◇ [Rec05/riemann-r5.tex/r5:64]

◆ **INT.34** ENSEA PC – 2005

Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ tel que $f(0) = 0$ et f est dérivable en 0. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

◇ [Rec05/riemann-r5.tex/r5:144]

$$f'(0) \cdot \int_0^1 x dx = \frac{f'(0)}{2}.$$

Formules de Taylor

◆ **INT.35 (Série exponentielle)** (*)

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \leq e^x$. En déduire que la série $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum \frac{x^k}{k!}$ est convergente. Quelle est sa somme ?

◇ [Divers/taylorexo.tex/int:64] Par Taylor-intégral, ce qui permet de conclure sur l'inégalité ; enfin, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc converge. Une inégalité de Taylor Lagrange montre que $\lim S_n = e^x$.

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

◆ **INT.36 (La fusée qui ne voulait pas s'écraser)** (**)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. On suppose que f'' est bornée et on note $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \sqrt{2Mf(x)}.$$

INDICATION : On écrira l'inégalité de Taylor-Lagrange pour f entre x et $x+h$ et on notera que le résultat est valable pour tout h ; on en tirera les conclusions qui s'imposent... On cherchera également une interprétation cinématique de l'exercice.

◇ [Divers/taylorexo.tex/int:65] Cela veut donc dire que le trinôme en h étant toujours positif, son discriminant est négatif :

$$f'(x)^2 - 2Mf(x) \leq 0,$$

et donc, puisque M est $f(x)$ sont positifs : $|f'(x)| \leq \sqrt{2Mf(x)}$.

donc $\forall h \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x+h) \leq f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}M.$

◆ **INT.37** (***)

Soient $a > 0$ et $f : [0; a] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 sur $[0; a]$ telle que $f(0) = 0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $na > 1$, on note $u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et calculer sa limite.

◇ [Divers/taylorexo.tex/int:67] On en déduit $\left|u_n - \frac{n+1}{2n^4}f'(0)\right| \leq \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^n k^2 \|f''\|_\infty$

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $\left[0; \frac{k}{n^2}\right]$:

et puisque $0 \leq \sum_{k=1}^n k^2 \leq n^3$, on en déduit que

$$\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0) + \frac{k}{n^2}f'(0)\right| \leq \frac{k^2}{2n^4} \|f''\|_\infty.$$

$$u_n - \frac{1}{2n^4}f'(0).$$

◆ **INT.38** (**)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 telle que f et f'' admettent des limites finies en $+\infty$. Montrer que f' et f'' tendent vers 0 en $+\infty$.

INDICATION : On utilisera la formule de Taylor-Lagrange entre $f(x+1)$ et $f(x)$, avec $x \in \mathbb{R}$.

◇ [Divers/taylorexo.tex/int:68] On fait tendre x vers l'infini, ce qui montre l'existence d'une limite pour f' . Cette limite ne saurait être autre que 0.

◆ **INT.39** (***)

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, on note $E_x = \left\{\theta \in]0; 1\right\} ; \text{sh } x = x + \frac{x^3}{6} \text{ch}(\theta x)\right\}$.

- 1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$ on a $\text{Card } E_x = 1$.
- 2) En notant, pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $\theta(x)$ l'unique élément du singleton E_x , calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$.

◇ [Divers/taylorexo.tex/int:69] L'unicité vient de ce que si on trouve θ_1 et θ_2 , on en déduit aisément $\text{ch}(\theta_1 x) = \text{ch}(\theta_2 x)$ et donc, par positivité, $\theta_1 = \theta_2$. En utilisant ensuite $\text{sh } x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ et $\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} \left(1 + \frac{\theta^2 x^2}{2} + o(x^2)\right)$, on en déduit que θ tend vers $1/\sqrt{10}$. L'existence, c'est le théorème de Taylor-Lagrange hors programme, donc il faut plutôt utiliser une variation sur l'égalité des accroissements finis...

◆ **INT.40** (*)

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

est convergente, et calculer sa limite.

◇ [Divers/taylorexo.tex/int:70] On applique du Taylor-* sur $[0; 1]$ à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et on obtient

◆ **INT.41**

En utilisant la fonction exponentielle et un théorème de Taylor, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq n!e - E(n!e) \leq \frac{e}{n+1}.$$

◇ [Divers/taylorexo.tex/int:71] On applique Taylor-Lagrange à l'exponentielle sur $[0; 1]$:

donc $E(n!e) = n! + \frac{n!}{1!} + \dots + \frac{n!}{n!}$

et donc $n!e - E(n!e) < \frac{e}{n+1}$

après réduction.

$$\left|e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)\right| \leq \frac{1}{n!}$$

◆ **INT.42** () Mines MP – 2004 ?

- 1) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral sur une primitive de f , donner une expression de $\int_a^b f$.
- 2) En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\cos(\ln n)}{n}$.

◇ [Rec04/taylor-r4.tex/r4:166] **À FINIR !!!**

Limites d'intégrales

◆ **INT.43 (Lemme de Riemann-Lebesgue)** (*)

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ une application de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin nt dt = 0.$$

Peut-on étendre ce résultat à une fonction continue sur $[a; b]$?

◇ [Divers/limintegralesexo.tex/int:27] Il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. Grâce à une intégration par parties, D'après le résultat précédent, il existe $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel

donc, puisque f et f' sont continues et donc bornées sur $[a; b]$:

$$\int_a^b f(t) \sin nt dt = \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos nt dt + \frac{1}{n} [f(t) \cos nt]_a^b$$

$$\left| \int_a^b P(t) \sin(nt) dt \right| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que, pour tout $n \geq N$, on a

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| \leq 2\varepsilon. \square$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$. Conclusion : le résultat est vrai pour les fonctions continues, grâce au théorème de Weierstrass (argument classique de densité).
 □ Soit $\varepsilon > 0$.

◆ **INT.44** (*)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a; b]$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos xt dt = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt \quad K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(4n+1)t}{\cos t} dt.$$

Calculer $I_{n+1} - I_n$ et en déduire I_n . Calculer $I_n - J_n$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1} . En déduire J_n .

◇ [Divers/limintegralesexo.tex/int:37]

$$I_n - I_{n-1} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \cos 2nt}{\sin t} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos 2nt dt = 0,$$

donc $I_n = I_0 = \pi/2$.

$$\begin{aligned} I_n - J_n &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \frac{t}{2} \cos(4n+1)\frac{t}{2}}{\sin t} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(4n+1)\frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(4n+1)t}{\cos t} dt \end{aligned}$$

◆ INT.45 (Jordan)

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{ix} e^{i\theta} d\theta = 0$.

◇ [Divers/limintegralesexo.tex/int:24]

On sépare en deux parties symétriques :

$$|I_x| \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin \theta} d\theta,$$

qui tend vers 0. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \pi/2$.

Enfin,

$$J_n - J_{n-1} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \cos(2n-1)t}{\sin t} dt = (-1)^{n+1} \frac{2}{2n-1}.$$

et on peut écrire que $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ pour tout $\theta \in [0; \pi/2]$, ce qui donne

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2x\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{2x}(1 - e^{-\pi x}),$$

qui tend manifestement vers 0.

◆ INT.46

(★)

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^n x}{1+x^3} dx = 0$

◇ [Divers/limintegralesexo.tex/int:46]

On utilise la CVU sur tout compact $[0; a] \subset [0; \frac{\pi}{4}]$.

◆ INT.47

(★)

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $a \in [0; 1[$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(a^n t) dt$.

◇ [Divers/limintegralesexo.tex/int:49]

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [0; \eta]$, on a $|f(x) - f(\eta)| \leq \varepsilon$, et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $a^n \leq \eta$, et notamment

donc

$$\int_0^1 |f(a^n x) - f(0)| dx \leq \varepsilon,$$

$\forall x \in [0; 1], 0 \leq a^n x \leq \eta$, et donc $|f(a^n x) - a(0)| \leq \varepsilon$,

ce qui établit la convergence de l'intégrale demandée vers $f(0)$.

◆ INT.48 (Intégrales de Wallis)

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx$ et $I'_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx$.

- 1) Trouver une relation de récurrence en I_{n+1} et I_n .
- 2) En déduire l'expression de I_n .

$$3) \text{ Calculer } H_n = \int_0^{\pi/2} x \sin^{2n} x dx.$$

4) On pose $J_n^m = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$. Trouver une relation de récurrence entre J_n^m et J_{n-1}^{m+1} . En déduire J_n^m .

5) Calculer $K_n^m = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2m+1} (\cos x)^{2n+1} dx$ (on pourra poser $x = \text{Arc sin } \sqrt{t}$).

6) En déduire I'_n .

◇ [Divers/limintegralesexo.tex/int:48]

◆ INT.49 (Intégrales de Wallis)

(★)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$.

- 1) a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
- b) En déduire que

$$I_{2p} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2p} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p+1)}.$$

2) a) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Converge-t-elle ?

b) Calculer $nI_n I_{n-1}$.

c) Montrer que $\forall n \geq 2 \quad \frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$.

d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$ et en déduire un équivalent de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Divers/limintegralesexo.tex/int:62]

1) On écrit

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt - \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^n t \cos t}_{u'} \cos t dt \\ &= I_n - \left(\frac{1}{n+1} \right) I_{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui mène à la formule demandée.

2) On, a pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}], 0 \leq \sin^{n+1} t \leq \sin^n t$. On en déduit que

$(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et donc converge, et même tend vers 0 par application du théorème de convergence dominée.

Par ailleurs $nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La double inégalité vient de cette décroissance.

Enfin, d'après la relation de récurrence établie au début, $\frac{I_n}{I_{n-1}} =$

$$\frac{n-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

On en déduit $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

◆ INT.50

(★)

Trouver toutes les fonctions f continues telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f(t) dt = f^2(x)$.

◇ [Divers/limintegralesexo.tex/int:25]

En dérivant on trouve $f(x) = f(x)f'(x)$ donc $f'(x) = 1$ pour tout x où f

ne s'annule pas. Donc $f(x) = x + C^{\mathbb{R}}$, et la constante vaut 0.

◆ INT.51

(★★)

Soit $f \in \mathcal{C}([0; \pi], \mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx$.

INDICATION : On commencera par montrer que, si ϕ est une fonction positive et g une fonction réelle continues et définies sur un segment $[a; b]$, alors il existe $\xi \in [a; b]$ tel que

$$\int_a^b \phi(t) g(t) dt = g(\xi) \times \int_a^b \phi(t) dt.$$

◇ [Divers/limintegralesexo.tex/int:51]

On montre la formule de la moyenne en notant que, si ϕ est positive, on peut encadrer

$$\inf_{x \in [a; b]} g(x) \times \int_a^b \phi(t) dt \leq \int_a^b g(t) \phi(t) dt \leq \sup_{x \in [a; b]} g(x) \times \int_a^b \phi(t) dt.$$

On applique la formule de la moyenne à chaque intégrale, ce qui nous donne une famille de réel $((1, \dots, (n)\xi)$ telle que :

$$\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(x) |\sin nx| dx = f(\xi_k) \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin nx| dx = \frac{2}{n} f(\xi_k),$$

On conclut avec le théorème des valeurs intermédiaires.

On peut ensuite revenir au cas qui nous intéresse et écrire

$$I_n = \int_0^\pi f(x) |\sin nx| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(x) |\sin nx| dx.$$

$$\text{d'où} \quad I_n = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx.$$

On peut également consulter l'exercice **SF.57** page 548. Une démonstration dans le cas où f est croissant se trouve en **INT.70** page 567.

◆ INT.52

(★)

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x f(t)}{x^2 + t^2} dt$.

◇ [Divers/limintegralesexo.tex/int:72]

Effectuer un changement de variable $y = t/x$, puis utiliser la continuité en 0

ou le théorème de convergence dominée sur un segment s'il est déjà vu; on trouve alors $\frac{\pi}{2} f(0)$.

♦ **INT.53** ($(\int f^x)^{1/x}$) (★★★)
 Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs strictement positives. On pose, pour tout $x > 0$:

$$\phi(x) = \left(\int_0^1 [f(t)]^x dt \right)^{1/x}.$$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \|f\|_\infty$.
 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = \exp \left(\int_0^1 \ln f(t) dt \right)$.
 3) Que vaut $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x)$?

▷ [Divers/limintegralesexo.tex/int:73]
 1) Notons $M = \max_{t \in [0; 1]} f(t)$ (qui est bien atteint). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un intervalle de largeur η sur lequel $f(t) \geq M - \varepsilon$, donc

$$\int_0^1 f(t)^x dt \geq \eta(M - \varepsilon)^x$$

donc $M \geq \phi(x) \geq \eta^{1/x}(M - \varepsilon)$.
 Ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = M$.
 2) La fonction $t \mapsto \ln f(t)$ est bornée car f atteint son maximum M et son minimum (non nul) m .
 On écrit

$$\phi(x) = \exp \left[\frac{1}{x} \ln \left(\int_0^1 f(t)^x dt \right) \right].$$

On peut écrire $f(t)^x = 1 + x \ln f(t) + o(x)$, mais on ne peut pas sommer une infinité de « petit o ». On doit donc plutôt étudier la différence ! Pour cela, en notant $\beta = \sup_{t \in [0; 1]} |\ln f(t)|$ et en utilisant une inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$|f(t)^x - 1 - x \ln f(t)| \leq \frac{\beta^2 x^2}{2} e^{x \ln M} \leq \alpha x^2.$$

On écrit alors

$$\left| \int_0^1 f^x - 1 - x \int_0^1 \ln f \right| \leq \int_0^1 |f^x - 1 - x \ln f| \leq \alpha x^2,$$

c'est-à-dire, après une inégalité triangulaire :

$$\int_0^1 f(x) = 1 + x \int_0^1 \ln f + O(x^2).$$

On prend le logarithme et on divise par x !

$$\frac{1}{x} \ln \int_0^1 f^x = \frac{1}{x} \ln \left(1 + x \int_0^1 \ln f + O(x^2) \right)$$

$$\text{frac} 1x \left[x \int_0^1 \ln f + O(x^2) \right] = \int_0^1 \ln f + O(x),$$

ce qui montre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = \exp \left[\int_0^1 \ln f(t) dt \right].$$

3) Même démonstration que pour la limite en $+\infty$, mais on trouve $m = \min_{x \in [0; 1]} f(x)$.

♦ **INT.54 (Diraquerie)** (*)
 Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

▷ [Divers/limintegralesexo.tex/int:74] Utiliser la continuité en 1 et $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.

♦ **INT.55** (*)
 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

1) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 2) En notant ℓ la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ déterminer la nature de $\sum (v_n - \ell)$.

▷ [Divers/limintegralesexo.tex/int:75b]
 On commence par « deviner » que la limite est 1. On calcule ensuite

$$|v_n - 1| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$$

$$\leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On a, en posant $u = x^n, v_n - 1 \sim \frac{\ln 2}{n}$ donc la série diverge.

♦ **INT.56** (★★★) X PC – 2005
 On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$.

1) Relation de récurrence sur la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
 2) Pour quelle valeur de α a-t-on $I_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$?

▷ [Rec00/limintegrale-r0.tex/div:176]
 1) Intégration par parties.

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{3n x^3}{(1+x^3)^{n+1}} dx$$

$$= 3n I_n - 3n I_{n+1},$$

ce qui montre que

$$I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n.$$

2) Ouh là là, ça sent le Raabe-Duhamel à plein nez.

$$\ln \left(\frac{I_{n+1}}{I_n} \right) = -\frac{1}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc en sommant et en notant w_n les sommes partielles des $O(1/n^2)$, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et

$$\ln I_n - \ln I_1 = -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + w_n$$

$$= -\frac{1}{3} \ln N + \ell + o(1)$$

donc, en notant $\Lambda = e^\ell$, on a

$$I_n = \frac{e^{\ell+o(1)}}{n^{1/3}} \sim \frac{\Lambda}{N^{1/3}}.$$

♦ **INT.57** (★★★) X PC – 2005
 Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et 1-périodique.

1) On pose $I_n = \int_0^1 f(t)g(nt) dt$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \left(\int_0^1 f \right) \cdot \left(\int_0^1 g \right)$.
 2) Même question si l'on suppose f seulement continue.

▷ [Rec00/limintegrale-r0.tex/div:171]
 1) On note $\ell = \int_0^1 g$ la valeur moyenne de g et $g^* = g - \ell$. Alors

$$I_n = \ell \int_0^1 f + \int_0^1 f(t)g^*(nt) dt$$

Or g^* est de valeur moyenne nulle, on a donc un résultat du type « lemme de Riemann-Lebesgue » :

LEMME Si f est de classe \mathcal{C}^1 et si g^* est d'intégrale nulle, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t)g^*(nt) dt = 0$.

Pour démontrer ce résultat, il suffit d'intégrer par parties et de majorer, sachant que toute primitive G^* de g^* est périodique et donc bornée. Le résultat s'ensuit immédiatement.
 2) Plus difficile, bien sûr. Mais, quitte à ajouter une constante (qui ne changera rien au résultat), on peut supposer g positive. Alors, on peut appliquer le théorème de la moyenne sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n} \right]$, puis sommer en reconnaissant des sommes de Riemann.
 Une autre solution est évidemment de procéder par densité des fonctions de classe \mathcal{C}^1 dans l'espace vectoriel des fonctions continues muni de $\|\cdot\|_\infty$.

♦ **INT.58** (★★) Centrale PC – 2005
 Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}^{*+})$. Calculer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où

$$u_n = \frac{\int_0^1 x^n f(x) dx}{\int_0^1 x^n f(x^n) dx}.$$

▷ [Rec00/limintegrale-r0.tex/r0:34] Un changement de variable $y = x^n$. Alors

$$u_n \sim \frac{\frac{1}{n} f(1)}{\frac{1}{n} \int_0^1 f} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f(1)}{\int_0^1 f}.$$

♦ **INT.59** ($\|\cdot\|_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|\cdot\|_\infty$) (★★★) Centrale PC – 2001
 Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, et $M = \max_{[a; b]} f$.

1) Montrer que $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \int_a^b f^n \geq \eta(M - \varepsilon)^n$.
 2) En déduire la limite de $\left(\int_a^b f^n \right)^{1/n}$.

▷ [Rec01/limintegrale-r1.tex/int-r:7]
 f est supérieure à $M - \varepsilon$ sur au moins un intervalle, dont on note η la largeur.
 □ Soit $\varepsilon > 0$. On prend η comme dans la question 1, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\eta^{1/n}(M - \varepsilon) \leq \left(\int_a^b f^n \right)^{1/n} \leq (b - a)^{1/n} M.$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (b - a)^{1/n} = 1$. Cela montre que, pour n suffisamment grand, on a

$$M - 2\varepsilon \leq \left(\int_a^b f^n \right)^{1/n} \leq M + \varepsilon. \square$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f\|_n = \|f\|_\infty$, ce qui est très joli.

♦ **INT.60 (Moyenne pondérée)** (★★★) Centrale MP – 2001

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$ une application continue. On pose $A = \int_0^1 f(t) dt$.

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une subdivision $\sigma_n = (0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1)$ de $[0; 1]$ telle que pour tout $k \in [1; n]$, $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt = \frac{A}{n}$.
- 2) Étudier le comportement de $\delta(\sigma_n) = \max_k(x_k - x_{k-1})$ (diamètre de la subdivision).
- 3) Soit $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g(x_k)$. Étudier la convergence de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Rec01/limintegres-r1.tex/int-r1:12] ce qui montre que

- 1) On note $F : x \mapsto \int_0^x f$. Alors f réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $[0; A]$. Il suffit alors de poser $x_k = F^{-1}\left(\frac{kA}{n}\right)$. On note que cette subdivision est unique.
- 2) f atteignant son minimum > 0 , le diamètre tend vers 0.
- 3) On subodore une convergence vers $\frac{\int_0^1 f(x)g(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}$. Pour le montrer, on note que

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g \circ F^{-1}\left(\frac{kA}{n}\right)$$

avec $t = F^{-1}(Ax)$ donc $x = F(t)/A$ et $dx = f(t) dt/A$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 g \circ F^{-1}(Ax) dx = \int_0^{F^{-1}(A)} g(t) f(t) \frac{dt}{A} = \frac{\int_0^1 f(t)g(t) dt}{\int_0^1 f(t) dt}$$

♦ **INT.61** (*) CCP PC – 2001

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^n}} dx$. En effectuant un changement de variable, donner un équivalent de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Rec01/limintegres-r1.tex/sfr-r:30] On pose $u = x^n$, on a alors

$$I_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n} du}{\sqrt{1+u}}$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2\sqrt{2}-2}{n}$$

♦ **INT.62** (★★) Mines MP – 2002

Calculer $I = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0; \pi], \mathbb{R})$. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{f(x)}{1 + \cos^2 nx} dx.$$

◇ [Rec02/limintegres-r2.tex/int-r2:11] par max f'/n , on en déduit

On pose $t = \tan x$, alors

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

On pose $y = nx$ et on découpe l'intégrale en n morceaux

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \int_0^\pi \frac{f\left(\frac{k\pi+x}{n}\right)}{1 + \cos^2 x} dx.$$

On remplace alors $f\left(\frac{k\pi+x}{n}\right)$ par la constante $f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, l'erreur est majorée

On reconnaît une somme de Riemann au facteur π près et donc

$$\lim I_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi f.$$

(Remarque : le résultat reste vrai avec f simplement continue et intégrable ; il suffit en effet d'utiliser la formule de la moyenne pour avoir une somme de Riemann sur des ξ_k autrement répartis).

♦ **INT.63** (★★) Centrale MP – 2002

On considère $f : x \mapsto \frac{x^2}{1-x} \ln x$.

- 1) Montrer que f est prolongeable en une fonction $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$.
- 2) Calculer $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \tilde{f}(x) dx$.
- 3) Trouver un équivalent de $\int_0^1 x^n \tilde{f}(x) dx - L$ en $+\infty$.
- 4) Soit $g \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 x^n g(x) dx}{\int_0^1 x^n g(x^n) dx}$$

- 5) Montrer que $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

◇ [Rec02/limintegres-r2.tex/int-r2:32]

- 1) Simple calcul de limite et prolongement de dérivée $f(1) = -1$.
- 2) On majore $|f|$ par une constante pour aboutir à $L = 0$.
- 3) On intègre par partie, le même raisonnement que ci-dessus donne

$$\int_0^1 x^n \tilde{f}(x) dx \sim \frac{f(1)}{n}$$

et

$$\int_0^1 x^n g(x^n) dx \sim \int_0^1 g/n.$$

La limite cherchée est alors $g(1)/\int_0^1 g$.

- 4) On suppose $\int_0^1 g(x) dx \times g(1) \neq 0$. On pose $y = x^n$ dans les intégrales, le théorème de convergence dominée donne
- 5) On utilise $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Les théorèmes d'inversion somme intégrale permettent de conclure.

♦ **INT.64** (★★★) Centrale PC – 2002

On note

$$A = \left\{ \int_0^1 f(t) e^t dt ; f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}), f \geq 0, f \neq 0 \right\}$$

- 1) Montrer que A borné.
- 2) Déterminer ses bornes $m = \inf A$ et $M = \sup A$.
- 3) Montrer que $A =]m; M[$.

◇ [Rec02/limintegres-r2.tex/evn:99] que le résultat est

- 1) On a clairement, pour tout $a \in A, 1 \leq a \leq e$; on peut vérifier qu'il n'y a pas égalité.
- 2) On prend une suite de Dirac en 0 et une autre en 1 pour obtenir $m = 1$ et $M = e$. Par exemple $f_n : t \mapsto e^{-nt}$ et $g_n : t \mapsto e^{nt}$.
- 3) On calcule la valeur pour $f_\alpha : t \mapsto \alpha t$ avec $\alpha \in]-\infty; +\infty[$; on vérifie

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{1-e^{\alpha-1}}{1-e^\alpha},$$

ce qui définit une fonction continue sur \mathbb{R} — notamment en 0 grâce à un petit DL — dont la limite en $-\infty$ est e et la limite en $+\infty$ est 1.

♦ **INT.65** (♣) Centrale PC – 2002

Soit f continue de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} . Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx$. (L'examinateur attend une justification parfaite!)

◇ [Rec02/limintegres-r2.tex/int-r2:7] montre la convergence uniforme en utilisant la continuité uniforme ? Ou encore, on découpe l'intégrale en 2 sur $[0; 1-\varepsilon]$ et $[1-\varepsilon; 1]$ et on « approxime » à la main !

♦ **INT.66** TPE MP – 2002

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \frac{n!}{(x+1) \cdots (x+n)} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

- 1) Montrer que $I_{n-1} > I_n > \frac{n}{n+1} I_{n-1}$.
- 2) Donner la limite de I_n quand $[n \rightarrow \infty]$.
- 3) Calculer I_n sous la forme d'une somme.
- 4) Tracer le graphe de f_n .

◊ [Rec02/limintegrale-r2.tex/int-r2:29]

On a $\frac{n+1}{n} \geq \frac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)} \geq 1$ avec inégalité stricte en un point de $[0; 1]$, ce

qui donne 1). I_n est positive et décroît donc converge. On vérifie que f_n tend simplement vers 0 sur $]0; 1[$ (ou uniformément sur $[a; 1]$) donc $\lim I_n = 0$ par convergence dominée (ou découpage). Pour calculer, on décompose en éléments et ainsi

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{k(x+k)},$$

$$I_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{k} \ln(1 + 1/k).$$

◆ INT.67 (*) TPE MP – 2002

Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$.

Calculer $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} dt$.

◊ [Rec02/limintegrale-r2.tex/int-r2:12]

On commence par vérifier que l'intégrale est bien définie car les intégrandes se prolongent par continuité.

$$I_n - I_{n-1} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \cos 2nt}{\sin t} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos 2nt dt = 0,$$

donc $I_n = I_0 = \pi/2$. De même $J_n - J_{n-1}$, les formules de trigonométrie classiques montrent que $J_n - J_{n-1} = I_{2n+1}$, donc $J_n = n\pi/2$.

◆ INT.68 TPE MP – 2002

On pose $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

◊ [Rec02/limintegrale-r2.tex/int-r2:22]

On a convergence simple vers une fonction presque partout nulle. On applique alors le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

On alors on a convergence uniforme vers zéro sur $] \varepsilon; 1]$ et on coupe les ε en quatre.

◆ INT.69 (♣) Télécom INT MP – 2002

Soit f continue sur $[0; 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t^n) dt = f(0).$$

◊ [Rec02/limintegrale-r2.tex/int-r2:18]

Théorème de convergence dominée de Lebesgue par exemple! Après tout,

rien ne l'interdit même sur un compact.

◆ INT.70 (***) TPE MP – 2003

1) Soit f une fonction continue, croissante de $[0; \pi]$ dans \mathbb{R}^{*+} . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) |\sin(nt)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt.$$

2) On suppose maintenant f de classe \mathcal{C}^1 . Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt$.

◊ [Rec03/limintegrale-r3.tex/r3:325]

On montre la formule de la moyenne en notant que, si ϕ est positive, on peut encadrer

$$\inf_{x \in [a; b]} g(x) \times \int_a^b \phi(t) dt \leq \int_a^b g(t) \phi(t) dt \leq \sup_{x \in [a; b]} g(x) \times \int_a^b \phi(t) dt.$$

$$\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(x) |\sin nx| dx = f(\xi_k) \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin nx| dx = \frac{2}{n} f(\xi_k),$$

On conclut avec le théorème des valeurs intermédiaires.

On peut ensuite revenir au cas qui nous intéresse et écrire

$$I_n = \int_0^\pi f(x) |\sin nx| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(x) |\sin nx| dx.$$

d'où $I_n = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx.$

◆ INT.71 ISUP MP – 2003

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/3} \frac{\tan^n t}{1 + \tan^n t} dt$.

◊ [Rec03/limintegrale-r3.tex/r3:190]

Sur $[0; \frac{\pi}{4}]$, la limite est nulle par convergence dominée sur un segment. Sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$, l'intégrande tend vers 1. La limite de l'intégrale vaut donc

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

◆ INT.72 (***) Mines PC – 2005

Posons $A_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$.

- 1) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, écrire A_n sous forme d'une série.
- 3) Déterminer un équivalent de A_n en $+\infty$.

◊ [Rec05/limintegrale-r5.tex/r5:10]

Manipulations diverses, résultats théoriques

◆ INT.73 (Produit de convolution)

On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$. Si $f, g \in E$, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t) g(t) dt$$

appelé **produit de convolution de f et g** .

Montre que $*$ définit une loi de composition interne associative et commutative sur E .

◊ [Divers/manipintegralesexo.tex/cint:29]

Pour la continuité de $f * g$, revenir par exemple à $f * g(x + \varepsilon) - f * g(x)$.

L'associativité vient du théorème de Fubini.

◆ INT.74 (*)

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f = 0$. On note $m = \inf f$ et $M = \sup f$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \leq -mM$.

◊ [Divers/manipintegralesexo.tex/int2:24]

On a

$$\begin{aligned} m \leq f \leq M &\implies (M-f)(m-f) \geq 0 \\ &\implies \int_0^1 (M-f)(m-f) \geq 0 \\ &\implies -\int_0^1 f^2 + (m+M) \int_0^1 f - mM \geq 0 \\ &\implies \int_0^1 f^2 \leq -mM. \end{aligned}$$

◆ INT.75 (*)

Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $\int_0^x \frac{\sin t}{t+1} dt \geq 0$ et $\int_0^x \frac{\sin t}{t+x} dt \geq 0$.

◊ [Divers/manipintegralesexo.tex/int2:25]

CSA + dessins.

◆ INT.76 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$. On pose, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$F(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt.$$

Montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 . Montrer que

$$\forall x \in [0; 1], \quad F(x) = \int_0^x \left(\int_s^1 f(t) dt \right) ds.$$

◊ [Divers/manipintegralesexo.tex/int:66]

On a bien sûr

$$F(x) = \int_0^x t f(t) dt + x \int_0^1 f(t) dt.$$

$$F(x) = \int_0^x F'(t) dt + F(0) = \int_0^x \left(\int_s^1 f(t) dt \right) ds.$$

Cela montre que F est de classe \mathcal{C}^1 . Bon, calculons sa dérivée, on trouve

$$\forall x \in [0; 1], \quad F'(x) = \int_x^1 f(t) dt,$$

♦ **INT.77** (*)
 Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $|f'|$ est bornée. On pose $M = \sup_{t \in [a; b]} |f'(t)|$. On suppose de plus que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{4} M.$$

Étudier les cas d'égalité.

◊ [Divers/manipintegralesexo.tex/int:4] on fait pareil à droite : $|f(x)| \leq (b-x)M$, et donc
 Pour tout $x \in [a; \frac{a+b}{2}]$ on a $|f(x)| \leq (x-a)M$ donc, après intégration,

$$\left| \int_a^{(a+b)/2} f(x) dx \right| \leq M \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{(b-a)/2} = \frac{(b-a)^2}{8} M, \quad \left| \int_{(a+b)/2}^b f(x) dx \right| \leq M \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{(b-a)/2} = \frac{(b-a)^2}{8} M.$$

♦ **INT.78** (**)
 Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que

$$\sup_{x \in [a; b]} |f(x)| \leq \int_a^b |f'(x)| dx + \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)| dx.$$

◊ [Divers/manipintegralesexo.tex/int:5] $|f(x_2)| = \inf |f(x)|$. On a alors

$$\begin{aligned} |f(x_1)| &\leq |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx \right| + |f(x_2)| \\ &\leq \int_{x_1}^{x_2} |f'(x)| dx + \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)| dx \\ \text{La fonction } x &\mapsto |f(x)| \text{ étant continue sur le compact } [a; b] \text{ elle atteint} \\ \text{ses bornes, il existe donc } x_1, x_2 &\in [a; b] \text{ tels que } |f(x_1)| = \sup |f(x)| \text{ et} \end{aligned}$$

♦ **INT.79** (**)
 Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue à valeurs complexes, et vérifiant

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Montrer que f est d'argument constant (partout où elle est non nulle).

INDICATION : On posera $I = \int_a^b f$ et, si $I \neq 0$, $g = f/I$.

◊ [Divers/manipintegralesexo.tex/int:6] ce qui montre que $\int_a^b (|g| - \Re(g)) = 1 - 1 = 0$. Or $|g| - \Re(g)$ est une fonction positive, donc $|g| = \Re(g)$ ce qui montre que f est d'argument constant.
 On pose $I = \int_a^b f$ que l'on suppose non nulle (sinon $f \equiv 0$) et $g \stackrel{\text{def.}}{=} f/I$.
 Alors $\int_a^b g = 1$ et $\int_a^b |g| = 1$ aussi. On a de plus, en notant $g = \Re g + i \Im g$:

$$\int_a^b \Re(g) + i \int_a^b \Im(g) = 1 \quad \text{donc} \quad \int_a^b \Im(g) = 0,$$

♦ **INT.80** (*)
 Soient $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ telle que

$$\int_a^b t^k f(t) dt = 0 \quad \forall k \in [0, n]$$

Montrer que f admet au moins $(n+1)$ zéros sur $]a; b[$.

◊ [Divers/manipintegralesexo.tex/int:20] $P = \prod_i (X - x_i)$. Alors si $k \leq n$, on a $\int f P = 0$, or cette fonction est de signe constant...
 f s'annule au moins une fois car f est continue et $\int f = 0$. Si f a un nombre finis de zéros, notons x_1, \dots, x_k les zéros où f change de signe, et notons

♦ **INT.81**
 Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ une fonction telle que

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $f \equiv 0$.
 Même question sur la propriété n'est vraie que pour $n \geq 17$.

◊ [Divers/manipintegralesexo.tex/int:7] $\int P^n(t) f(t) dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 P^n(t) f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b P^n(t) f(t) dt = 0.$$

Solution élémentaire. ► On suppose que $f \not\equiv 0$, alors il existe $a, b \in [0; 1]$, $b > a$ et $\alpha > 0$ tel que $f(t) \geq \alpha$ sur $]a; b[$ (au signe près).
 Or $\int_a^b P^n(t) f(t) dt \geq (b-a)\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. **Contradiction.** ◄
Solution rusée, par Weierstrass on considère une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes qui CVU vers f . Alors $\int f P_n \rightarrow \int f^2$ or $\int f P_n = 0$ donc $\int f^2 = 0$.
 On pose alors $P(t) = (t-a)(b-t) + 1$. Alors pour tout $t \in [0; 1] \setminus]a; b[$, on a $0 \leq P(t) < 1$ (faire un dessin) et donc $\lim P^n(t) = 0$. Comme

♦ **INT.82**
 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un réel $C \geq 0$ tel que, pour toute fonction $\phi : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $\phi(a) = \phi(b) = 0$, on ait

$$\left| \int_{[a; b]} f \phi^2 \right| \leq C \int_{[a; b]} (|\phi|^2 + |\phi'|^2).$$

◊ [Divers/manipintegralesexo.tex/int:30] Or $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$.
 On note $F(x) = \int_a^x f$, qui est donc de classe \mathcal{C}^1 sur $]a; b[$ donc bornée :
 $|F(x)| \leq C$ pour tout $x \in [a; b]$. On a alors par IPP

$$\int_{[a; b]} f \phi^2 = \int_{[a; b]} F' \phi = - \int_{[a; b]} 2F \phi \phi'.$$

♦ **INT.83** (**)
 Soient a et b deux réels, $a < b$, et f une application de $[a; b]$ dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^2 . Montrer que

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) - \frac{1}{2} \int_a^b (b-x)(x-a) f''(x) dx.$$

◊ [Divers/manipintegralesexo.tex/int:40] avec $w = t - b$ et $z(t) = (t-a)f'(t)$.
 On intègre par parties avec $u(x) = x - a$ et $v = f$, puis une seconde fois Recommencer avec $u(x) = x - b$, ajouter, diviser par deux.

♦ **INT.84 (Inégalité de convexité)** (**)
 Soient $f, g \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. On suppose $f \geq 0$, $g(x) > 0$ pour tout $x \in [0; 1]$ et $\int_0^1 f = 1$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x) \ln(g(x)) dx \leq \ln \left\{ \int_0^1 f(x) g(x) dx \right\}.$$

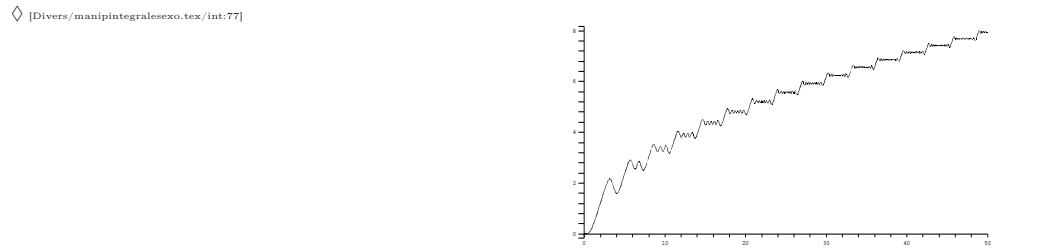
◊ [Divers/manipintegralesexo.tex/int:47] Établir l'inégalité de Jensen puis utiliser des sommes de Riemann.

♦ **INT.85** (**)
 Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur $]a; b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b f'^2(x) dx.$$

◊ [Divers/manipintegralesexo.tex/int:59] sur chaque demi-intervalle une inégalité des accroissements finis.
 On coupe en $c = (a+b)/2$ et, comme dans l'exercice INT.77, on effectue

♦ **INT.86** (***)
 On considère la fonction $x \mapsto \int_0^x \sin(t \sin t) dt$. Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.
 Tracer le graphe de cette fonction avec MAPLE ou un programme équivalent (MuPad, Mathematica,...)



♦ INT.87

Calculer $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (\ln x)^q dx$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

◊ [Divers/manipintegraleexo.tex/div:99]

♦ INT.88

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$.

X PC – 2005

1) Montrer que $\left(\int_0^1 f\right)^2 \leq \int_0^1 f^2$.

2) On recherche λ et k tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$, on ait

$$\int_0^1 f^2 \leq \lambda \left(\int_0^1 f\right)^2 + k \int_0^1 f'^2.$$

a) Montrer que $\lambda \geq 1$.

b) Avec $f(x) = \cos(\pi x)$, montrer que $k \geq 1\pi^2$.

c) En utilisant $I = \iint [f(u) - f(v)]^2 du dv$, montrer que $\lambda = 1$ et $k = \frac{1}{2}$ conviennent.

◊ [Rec00/manipintegrales-r0.tex/div:159]

b) Calcul.

- 1) Cauchy-Schwarz.
2) a) Prendre $f = 1$.

c) À FINIR !!!

♦ INT.89

(*)

Centrale MP – 2002

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $k \in [0, n]$, on a $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$.

Montrer que f s'annule au moins $(n + 1)$ fois sur $]a; b[$.

◊ [Rec02/manipintegrales-r2.tex/int-r2:26]

f s'annule au moins une fois car f est continue et $\int f = 0$. Si f a un nombre fini de zéros, notons x_1, \dots, x_k les zéros où f change de signe, et notons

$P = \prod_i (X - x_i)$. Alors si $k \leq n$, on a $\int fP = 0$, or cette fonction est de signe constant...

♦ INT.90

(*)

CCP MP – 2002

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx.$$

◊ [Rec02/manipintegrales-r2.tex/int-r2:20]

C'est un exercice très classique : il suffit que f soit de signe constant.

On pose $I = \int_a^b f$ que l'on suppose non nulle (sinon $f \equiv 0$) et $g \stackrel{\text{def}}{=} f/I$.

Alors $\int_a^b g = 1$ et $\int |g| = 1$ aussi. On a donc $\int_a^b (|g| - g) = 0$. Or $|g| - g$ est une fonction positive, donc $|g| = g$ ce qui montre que g est positive et donc que f est de signe constant.

♦ INT.91

(★)

ENS Ulm/Lyon PC – 2003

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Majorer $\left| \int_0^1 f(t) dt \right|$ en fonction de $M = \sup_{[0; 1]} |f''|$. Optimiser cette majoration.

◊ [Rec03/manipintegrales-r3.tex/r3:50]

Commençons par une approche intuitive : une fusée, qui va partir à vitesse aussi grande que possible en décelérant à M pour, à $t = 1/2$, se retrouver à vitesse nulle. Sa vitesse initiale est donc $M/8$, sa trajectoire

$$f(t) = \frac{M}{2} t(1-t),$$

(*)

et donc l'intégrale vaut $M/12$.

Montrons maintenant ce résultat de manière rigoureuse. Soit f une fonction vérifiant les conditions données.

Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]0; 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

On en déduit que, pour tout $x \in [0; 1]$, on a

$$f'(x) = \int_c^x f''(u) du$$

et donc

$$|f'(x)| \leq |c - x| M.$$

On en déduit que, pour tout $t \in [0; c]$, on a

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_0 + \int_0^t f'(x) dx$$

et donc

$$|f(t)| \leq \int_0^t (c-x) M dx = \frac{Mt}{2}(2c-t).$$

On fait la même chose en partant de 1 (ou on symétrise le problème en changeant t en $1-t$ et c en $1-c$, ce qui donne, pour tout $t \in [c; 1]$:

$$|f(t)| \leq \frac{M(1-t)}{2}(1+t-2c).$$

Il ne reste plus qu'à intégrer pour obtenir

$$\begin{aligned} \left| \int_0^c f(t) dt \right| &\leq \int_0^c |f(t)| dt \\ &\leq \frac{Mc^3}{2} - \frac{Mc^3}{6} = \frac{Mc^3}{3}, \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \left| \int_c^1 f(t) dt \right| &\leq \int_c^1 |f'(t)| dt \\ &\leq \frac{M(1-c)^3}{2} - \frac{M(1-c)^3}{6} = \frac{M(1-c)^3}{3}, \end{aligned}$$

ce qui donne la majoration

$$\left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \frac{M}{3} [c^3 + (1-c)^3].$$

Cette majoration dépend encore de la variable c .

On va montrer qu'on peut toujours prendre $c = \frac{1}{2}$.

♦ INT.92

(*)

Navale MP – 2003

Soit f une fonction définie et continue sur $[0; \pi]$, telle que

$$\int_0^\pi f(t) \cos t dt = \int_0^\pi f(t) \sin t dt = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]0; \pi[$.

◊ [Rec03/manipintegrales-r3.tex/r3:265]

Tout d'abord, si f ne s'annule pas sur $]0; \pi[$, puisque $t \mapsto f(t) \sin t$ est une fonction positive (ou négative) sur $]0; \pi[$, cela conduit à une contradiction. Donc f s'annule au moins une fois avec changement de signe sur $]0; \pi[$.

Maintenant, par combinaison linéaire, on a

$$\forall \varphi \in \mathbb{R} \quad \int_0^\pi f(t) \cos(t + \varphi) dt = 0$$

En effet, si f est une fonction vérifiant les conditions données, alors la fonction

$$f^* : t \mapsto \frac{f(t) + f(1-t)}{2}$$

vérifie également ces conditions, et de plus $f^{**}(\frac{1}{2}) = 0$. Enfin, on a évidemment $\int_0^1 f = \int_0^1 f^*$. Ainsi, le résultat prouvé s'applique à f^* avec $c = 1/2$, ce qui donne

$$\left| \int_0^1 f(t) dt \right| = \left| \int_0^1 f^*(t) dt \right| \leq \frac{M}{12}.$$

Comme ce résultat est obtenu pour la parabole (*), c'est la meilleure majoration possible.

♦ INT.93

(**)

INT Télécom PC – 2004

Soient ϕ et ψ deux fonctions continues sur \mathbb{R} . On suppose que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b \phi \cdot \int_a^b \psi = 0.$$

Montrer que $\phi = 0$ ou $\psi = 0$.

◊ [Rec04/manipintegrales-r4.tex/r4:147]

Notons Φ et Ψ des primitives. On suppose que $\phi \neq 0$, alors Φ n'est pas constante. On peut donc trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\Phi(a) \neq \Phi(b)$, ce qui prouve

que...

À FINIR !!!

♦ INT.94

(★)

CCP PC – 2005

Calculer $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$.

◊ [Rec05/manipintegrales-r5.tex/r5:139]

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+t^2) dt &= \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt + \left[t \ln(1+t^2) \right]_0^1 \\ &= 2 - 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \ln 2 \\ &= 2 + \ln 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Calculs d'intégrales

♦ INT.95

Calcul de $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$.

◊ [Divers/integraleexo.tex/int:21]

Une IPP donne

$$-\int_0^1 \frac{x \cdot 2x}{1+x^2} dx + \left[x \ln(1+x^2) \right]_0^1$$

et le terme de bord vaut $\ln 2$. L'intégrale vaut

$$-\int_0^1 \frac{x \cdot 2x}{1+x^2} dx = -2 \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^2} dx + 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = -2 + 2 \frac{\pi}{4},$$

ce qui donne au total $\frac{\pi}{2} + \ln 2 - 2$.

♦ INT.96

Étudier la fonction définie par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

◇ [Divers/integraleexo.tex/int:10]

Def $f = \mathbb{R}^{*+} \setminus \{1\}$.
De plus $f'(x) = \frac{2x}{\ln(x)^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$.

Donc $f'(0) = 0$, $f'(1) = 1$ à gauche et à droite, et f se prolonge par continuité en 1 avec la valeur $\ln 2$, car

$$f(x) = \int_{\ln x}^{2 \ln x} \frac{e^u}{u} du \quad (u = \ln t).$$

On montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et même $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ par minoration bête.

◆ INT.97

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_3^4 \frac{2x-4}{x^3-3x+2} dx$$

$$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$$

$$I_4 = \int_0^{\pi/4} x(\tan^2 x + \tan^4 x) dx$$

$$I_5 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$I_6 = \int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

◇ [Divers/integraleexo.tex/int:63]

- 1) $I_1 = \frac{1}{2} \ln 3$;
- 2) $I_2 = -\frac{1}{5}(3^{-5/2} - 1)$;
- 3) $I_3 = 1 + 2/(1+e)$;

- 4) $I_4 = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{\ln 2}{6}$.
- 5) $I_5 = \frac{\pi}{4}$
- 6) $I_6 = \frac{20}{3}$.

◆ INT.98

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{4 \cos x - 5} dx$.

- 1) Calculer a_0 et a_1 .
- 2) Calculer $a_n + a_{n+2}$. En déduire une relation de récurrence sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 3) Déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ [Divers/integraleexo.tex/int:41]

- 1) On effectue le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$. Alors $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$, ce qui mène à

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{5}{4}} dt = -\frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+9t^2} dt.$$

En effectuant le changement de variable $u = 3t$, on obtient

$$a_0 = -\frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{3} = -\frac{4}{3\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{\pi/2}{\pi/2}$$

soit

$$a_0 = -\frac{2}{3}$$

Avec le même changement de variable, on a

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{4 \cos x + 5} dx = -\frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-t^2}{(1+9t^2)(1+t^2)} dt.$$

On réduit alors en éléments simples, en remarquant que seul t^2 apparaît dans l'intégrand. On calcule, selon les techniques habituelles, que

$$\frac{1-X}{(1+9X)(1+X)} = \frac{5/4}{1+9X} - \frac{1/4}{1+X}$$

ce qui mène à

$$a_1 = -\frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{5/4}{1+9t^2} - \frac{1/4}{1+t^2} \right] dt = -\frac{4}{\pi} \left[\frac{5\pi}{4 \cdot 6} - \frac{1\pi}{4 \cdot 2} \right]$$

soit

$$a_1 = -\frac{1}{3}$$

- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les formules usuelles de trigonométrie nous enseignent que $\cos((n+2)x) + \cos nx = 2 \cos x \cos((n+1)x)$.

On obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

◆ INT.99

Calculer

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x} \cos x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x} \cos x} dx$$

◇ [Divers/integraleexo.tex/int:42]

On remarque que $y = \frac{\pi}{2} - x$ et donc que $I = J$. On prend ensuite $u = \sin y$,

et on trouve $I = J = \sqrt{2} \operatorname{Arc sin} \frac{1}{\sqrt{3}}$.

◆ INT.100

Calculer $\int_0^{2\theta} \frac{t}{\cos(t-\theta)} dt$.

◇ [Divers/integraleexo.tex/int:43]

Calculons

$$K = \int_0^{2\theta} \frac{t}{\cos(t-\theta)} dt = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{u+\theta}{\cos u} du = 2\theta \int_0^{\theta} \frac{du}{\cos u} = 2\theta \left[\ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right| \right]_0^{\theta} = 2\theta \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right|.$$

◆ INT.101

Calculer $I = \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$.

◇ [Divers/integraleexo.tex/int:39]

On pose $c = b - a$, alors

$$I = c^2 \int_0^1 \sqrt{u(1-u)} du = c^2 \int_0^1 \sqrt{1-\frac{1}{4} - (u-1/2)^2} du = \frac{c^2}{2} \int_0^1 \sqrt{1-(2u-1)^2} du = \frac{x^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{2} dt \quad (2u-1 = \sin t) = \frac{c^2}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{c^2}{8}.$$

◆ INT.102

Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a^2 \sin^2 x}$ avec $a > 0$.

◇ [Divers/integraleexo.tex/int:34]

On pose $t = \tan x/2$, $\sin x = 2t/(1+t^2)$, $dx = 2 dt/(1+t^2)$, donc

◆ INT.103

Calculer $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ (on posera $u = \tan x$).

◇ [Divers/integraleexo.tex/int:34bis]

ce qui mène à

On peut poser $t = \tan x/2$, $\sin x = 2t/(1+t^2)$, $dx = 2 dt/(1+t^2)$, mais il y a plus simple.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\frac{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+2u^2}$$

On considère $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. On effectue le changement de variable

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Du coup

$$u = \tan x \quad du = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

◆ INT.104

Calculer $I = \int_a^b \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ et $J = \int_a^b \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$.

INDICATION : On remarquera que certaines combinaisons linéaires sont particulièrement simples à calculer...

◇ [Divers/integraleexo.tex/int:38]

d'où I et J.

On remarque que $I + J = b - a$ et

$$I - J = \int_a^b \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_a^b \frac{f'}{f} = \ln \left| \frac{\sin b + \cos b}{\sin a + \cos a} \right|,$$

♦ **INT.105**
 On se propose ici d'établir le résultat suivant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 1} dx.$$

1) Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 1} dx$.

2) Soient p et q deux entiers naturels. On note $B_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$. Calculer $B(p, q)$ en fonction de p et q .

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n B(k, k)$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N} : 0 \leq B(k, k) \leq \frac{1}{4k}$.

b) Quelle est la nature de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ et conclure.

◇ [Divers/integraleexo.tex/int:76]

- 1)
- 2) Par récurrence : $B_{p,q}$.
- 3) a) T.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 1} dx -$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}(1-x)^{n+1}}{x^2 - x - 1} dx.$$

c) Cette dernière intégrale tend vers 0.

♦ **INT.106** (★★)
 Nature de la série de terme général $u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

◇ [Divers/integraleexo.tex/div:126]

Divergence grâce à une démonstration en « grand M ».

♦ **INT.107** (★★★) ENS PC – 2005
 On note $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}), f(0) = 0, f(1) = 1 \right\}$. Existence et calcul de

$$\inf \left\{ \int_0^1 |f'(x) - f(x)| dx ; f \in E \right\}.$$

◇ [Rec00/integrale-r0.tex/div:178]

Notons E l'ensemble des fonctions en question et $m = \inf E$. Posons $g(x) = e^{-x} f(x)$, ainsi

$$g'(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x)),$$

et, pour que g_n soit de classe \mathcal{C}^1 , on multiplie par un polynôme :

$$f_n(x) = nx(2-nx)e^x \quad \forall x \in \left[0; \frac{1}{n}\right].$$

et l'on a la minoration

$$\int_0^1 |f'(x) - f(x)| dx = \int_0^1 e^x |g'(x)| dx \geq \int_0^1 g'(x) = \frac{1}{e}.$$

On vérifie, par un développement limité de $e^{1/n}$, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f'_n(x) - f_n(x)| dx = \frac{1}{e}.$$

Ainsi, $m \geq 1/e$.

Réciproquement, si l'on veut approcher $1/e$ au plus près, il faut que la fonction g soit telle que g' soit très piquée en 0 mais qu'ailleurs elle soit nulle, on prend donc

$$f_n(x) = e^x \text{ pour } x \in \left[\frac{1}{n}; 1\right]$$

Conclusion : $m = \frac{1}{e}$.

♦ **INT.108** TPE PC – 2002
 Notons

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \cos x \sin x}} dx$$

et

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x \sin x}} dx.$$

1) Montrer que $I = J$.

2) Calculer I .

◇ [Rec02/integrale-r2.tex/int-r2:6] et on trouve $I = J = \sqrt{2} \operatorname{Arc} \sin \frac{1}{\sqrt{3}}$.
 On remarque que $y = \frac{\pi}{2} - x$ et donc que $I = J$. On prend ensuite $u = \sin y$,

♦ **INT.109** (★★) ENSAI MP – 2002
 Calculer les intégrales

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \lambda^2 \sin^2 t}, \quad \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \lambda^2 \sin t}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2 \sin^2 t}.$$

◇ [Rec02/integrale-r2.tex/int-r2:34]

Pour la première $x = \tan t$ donne

$$I_1(\alpha) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

$$I_2(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{1-\lambda^4}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^4}} \right).$$

La dernière intégrale diverge ; en effet, on a on a

La seconde, $x = \tan t/2$, donne

$$I_2(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{2dt}{(t+\lambda^2)^2 + 1 - \lambda^4},$$

$$\int_0^{2n\pi} \frac{dt}{1+t^2 \sin^2 t} \geq \sum_{k=1}^n I_1(2k\pi)$$

par exemple si $|\lambda| < 1$, on a

mais $I_1(2k\pi) \sim C/k$ donc l'intégrale diverge.

♦ **INT.110** Mines MP – 2003
 On pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}} dx$ pour tout $n \geq 2$. Calculer I_n sachant que

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

et

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad 0 < p < 1.$$

◇ [Rec03/integrale-r3.tex/r3:71]

♦ **INT.111** (★) Centrale MP – 2004
 On définit $f : x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t^2 x^2}}{t} dt$.

1) Domaine de définition, étude et graphe de f .

2) Équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

◇ [Rec04/integrale-r4.tex/r4:152]

♦ **INT.112** CCP PC – 2004
 (Sans préparation) Calcul de $\int_0^{3\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}$.

◇ [Rec04/integrale-r4.tex/r4:17]

♦ **INT.113** (★★★) Mines PC – 2005
 Montrer qu'il existe une unique fonction f telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $y = f(x)$ où y est défini par $\int_x^y e^{t^2} dt = 1$.

On pose $g : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$. À partir de g , étudier les propriétés de f : variations, continuité, dérivabilité, inverse... Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

◇ [Rec05/integrale-r5.tex/r5:134]

Primitives

♦ **INT.114**
 Trouver les primitives de $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 10}}{x + 1}$, en utilisant le changement de variable $y = \sqrt{x^2 + 2x + 10}$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:8]

$$\sqrt{x^2 + 2x + 10} - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{3 + \sqrt{x^2 + 2x + 10}}{3 - \sqrt{x^2 + 2x + 10}} \right| + C^{\text{te}},$$

◆ INT.115

Trouver les primitives de $\frac{1}{x + \sqrt{x}}$. On utilisera un changement de variable bien choisi.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:9]

$2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C^{\text{te}}$ sur \mathbb{R}^{*+} . (Poser $y = \sqrt{x}$.)

◆ INT.116

Trouver les primitives de $x \mapsto 1/(\text{sh}^4 x \text{ch} x)$ en effectuant le changement de variable $y = \text{sh} x$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:11]

(poser $y = \text{sh} x$.)

$$\frac{-1}{3 \text{sh}^3 x} + \frac{1}{\text{sh} x} + \text{Arc tan sh} x + C^{\text{te}} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{*-}, \mathbb{R}^{*+}$$

◆ INT.117

Trouver les primitives de $x \mapsto \frac{x^3 + 7x - 2}{x + 1}$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:12]

ce qui donne

On décompose en éléments simples :

$$\frac{X^3 + 7X - 2}{X + 1} = X^2 - X + 8 - \frac{10}{X + 1},$$

sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, +\infty[$.

$$\int \frac{x^3 + 7x - 2}{x + 1} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 8x - 10 \ln(x + 1) + C^{\text{te}}$$

◆ INT.118

(★★)

Soient α et β deux réels. Soit $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; montrer qu'il existe une unique application $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $f'' = g$, $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$. Montrer que

$$f(x) = \alpha(1 - x) + \beta x - \int_0^1 (\min(x, t) - xt)g(t) dt.$$

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:13]

Cf feuille Paul.

◆ INT.119

Trouver les primitives de $\frac{\tan x}{1 + \sin^2 x}$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:21bis]

(Poser $y = \sin x$.)

$$\frac{1}{4} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + \ln \frac{1}{2(1 + \sin x)} + C^{\text{te}} \text{ sur chaque intervalle } (n - \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi[.$$

◆ INT.120

Trouver les primitives de $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:22bis]

Ou bien $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \tan x - \cotan x + C^{\text{te}}$.

$$\int \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right) dx = \int \frac{4}{\sin^2 2x} dx = -2 \cotan 2x + C^{\text{te}}.$$

◆ INT.121

Trouver les primitives de $\frac{\text{ch} x}{3 + \text{ch}^2 x}$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:23bis]

 $\frac{1}{2} \text{Arc tan} \frac{\text{sh} x}{2} + C^{\text{te}}$ sur \mathbb{R} . (Poser $y = \text{sh} x$.)

◆ INT.122

Trouver les primitives de $f : x \mapsto (3x^2 + 5x - 12) \cos 3x$ et $g : x \mapsto [(x + 3) \cos x]^2$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:28]

$$\frac{x^2}{2} \cos x \sin x + \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} \cos^2 x + \frac{17}{4} \cos x \sin x + \frac{17}{4} x + 3x \cos x \sin x + \frac{1}{3} (3x^2 + 5x - 12) \sin 3x.$$

$$\frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 x.$$

◆ INT.123

Trouver les primitives de $t \mapsto \frac{1}{(t^2 + 1)^2}$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:29]

On effectue une IPP sur

$$\int \frac{dt}{(1 + t^2)^2} = \frac{t}{1 + t^2} + 2 \int \frac{t^2}{(1 + t^2)^2} dt = \frac{t}{1 + t^2} + 2 \int \frac{dt}{1 + t^2} - 2 \int \frac{1}{(1 + t^2)^2} dt$$

donc le résultat est $\frac{1}{2} \text{Arc tan} t + \frac{t}{2(1 + t^2)} + C^{\text{te}}$.

◆ INT.124

Calculer les primitives de $x \mapsto \frac{x^3 + 7x + 2}{(x + 1)^2}$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:26]

◆ INT.125

Calculer les primitives de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ et de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:32]

Les primitives sont définies sur $] -1; 1[$.

$$I = \int \frac{\sqrt{1+x} - \pm \sqrt{1-x}}{2x} dx = I_1 \pm I_2$$

tandis que $\int \frac{\sqrt{1-x}}{x} dx \stackrel{y=\sqrt{1+x}}{=} 2 \int \frac{y^2}{1-y^2} dy = -2y + \int \frac{1}{y^2-1} dy$,

$$\text{avec } I_1 = \int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx \stackrel{y=\sqrt{1+x}}{=} 2 \int \frac{y^2}{y^2-1} dy = 2y - \int \frac{1}{y^2-1} dy,$$

soit au total $= \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + \text{Arg th} \sqrt{1-x} - \text{Arg th} \sqrt{1+x}$.

◆ INT.126

Trouver les primitives de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}$ puis de $x \mapsto \sqrt{x^2 + A}$, où A est une constante réelle positive.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:33]

On commence par intégrer par parties :

raître l'intégrale que l'on cherche à calculer, donc

$$2 \int \sqrt{x^2 + A} dx = x \sqrt{x^2 + A} + \int \frac{A}{\sqrt{x^2 + A}} dx$$

$$\int \sqrt{x^2 + A} dx = x \sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + A}} dx.$$

et donc

Dans le numérateur de la seconde intégrale, on ajoute $+A - A$, ce qui fait appa-

$$\int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \text{Arg sh} \left(\frac{x}{\sqrt{A}} \right).$$

◆ INT.127

Calculer $I(x) = \int \frac{dx}{x^3(x+1)}$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:31]

On décompose en éléments simples :

donc $I(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \ln|x| - \ln|x+1| + C^{\text{te}}$, où la constante l'est sur $] -\infty, -1[$, sur $] -1, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$.

$$\frac{1}{X^2(X+1)} = \frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1},$$

◆ INT.128

Calculer $I = \int \frac{dx}{x^3 + 1}$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:35]

On effectue une décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} , avec

Au total,

$$\frac{1}{X^3 + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{X + 1} + \frac{-X/3 + 2/3}{X^2 - X + 1},$$

$$I(x) = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1)$$

donc $I(x) = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} J(x)$, avec

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arc tan} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C^{\text{te}}(x), \quad (51.1)$$

 $J(x) = \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) - \frac{3}{2} K(x)$, où $C^{\text{te}}(x)$ est constante sur $] -\infty; -1[$ et $] -1; +\infty[$.

ou l'on a posé

$$K(x) = \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arc tan} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C^{\text{te}}.$$

◆ INT.129

Calculer $\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$ en utilisant le changement de variable $x = t^6$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:36]

$$6 \left[\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + \text{Arc tan } t \right] + C^{\text{te}}$$

◆ INT.130

Notons $E = \left\{ f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}) ; f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1 \right\}$. Montrer que

$$\inf_{f \in E} \int_0^1 |f'(x) - f(x)| dx = \frac{1}{e}.$$

◇ [Divers/primitivesexo.tex/int:75]

À FINIR !!!

◆ INT.131

Calculer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1 - x^4}$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/div:64]

et donc une primitive sur $]-\infty; -1[$; $]-1; 1[$ ou $]1; +\infty[$ est

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{1 - x^4} = \frac{-1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)} \quad \int \frac{dx}{1 - x^4} = -\frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} + \frac{\text{Arc tan } x}{2} + C^{\text{te}}.$$

◆ INT.132

Primitive de $x \mapsto \frac{1}{1 + x^4}$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/div:65]

$$y = x^2 \text{ puis } \int \frac{1}{1 + x^4} dx = \frac{1}{2} \text{Arc tan}(x^2) + C^{\text{te}}.$$

◆ INT.133

Calculer $\int \frac{x^3}{x^2 + 2x + 2}$.

◇ [Divers/primitivesexo.tex/div:66]

$$\frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x^2 + 2x + 2) = 2 \text{Arc tan}(x + 1) + C^{\text{te}}.$$

◆ INT.134

Trouver une primitive de $x \mapsto \frac{\sin 2x}{\cos 3x}$.

Centrale PC – 2001

◇ [Rec01/primitives-r1.tex/int-r:13]

◆ INT.135

(♣)

CCP PC – 2002

1) Calculer $\int \frac{u^2}{(1 + u^2)^2} du$ grâce à une intégration par parties puis en déduire $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$.

2) Calculer $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ en précisant le domaine de validité.

INDICATION : On pourra effectuer le changement de variable $X = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

◇ [Rec02/primitives-r2.tex/int-r2:23]

1) On a

$$\int \frac{u^2}{(1 + u^2)^2} du = \frac{-u}{2(1 + u^2)} + \int \frac{1}{2(1 + u^2)} du = \frac{-u}{2(1 + u^2)} + \frac{1}{2} \text{Arc tan } u$$

Comme

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \int \frac{1}{(1 + u^2)^2} du + \int \frac{u^2}{(1 + u^2)^2} du,$$

on a donc

$$\int \frac{1}{(1 + u^2)^2} du = -\frac{u}{2(1 + u^2)} + \frac{1}{2} \text{Arc tan } u.$$

2) Sur n'importe quel intervalle ne contenant pas 1, on peut faire le changement de variables. On se place sur $]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$. On pose $y^2 = (1+x)/(1-x)$ avec $y \geq 0$, on tombe sur

$$\int_0^M \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \int_1^{\sqrt{\frac{1+M}{1-M}}} \frac{-2y^2}{(y^2+1)^2} dy,$$

et l'on retrouve l'intégrale précédente. Il faut bien sûr que $M \in [-1; 1[$.

Intégrale sur un intervalle non compact

Intégrabilité

◆ **IG.1** (♣)
 Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-\alpha x} x^\beta$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .
 Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto x^\alpha (\ln x)^\beta$.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:0] Deuxième cas est la règle de Bertrand!

◆ **IG.2** (♣)
 Étudier l'intégrabilité de $t \mapsto (\ln t)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$ sur $]0; +\infty[$ et sur $]0; a]$, où a est un réel fixé strictement positif.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:20] Pour $n < 0$, il faut regarder les trois problèmes : en 0, en 1 et en $+\infty$.
 Il faut faire attention à $t = 1$ pour $n \leq 0$! On commence par noter que f_n est continue sur $]0; +\infty[$ pour $n \geq 0$ et sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ pour $n < 0$, donc intégrable sur tout segment inclus dans ces intervalles.
 Il est clair que pour $n \geq 0$, f_n ne saurait être intégrable en $+\infty$, en revanche, en 0, il n'y a pas de problème car $\sqrt{t} f_n(t) \rightarrow 0$ et d'après la règle $t^\alpha f(t)$, f_n est donc intégrable sur $]0, a]$.
 En $+\infty$, la décroissance est lente car $\sqrt{t}(\ln t)^n$ tend vers $+\infty$, or $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ n'est pas intégrable, donc f_n ne l'est pas non plus.
 En 1, il y a aussi un problème car $\ln t \sim t - 1$ donc ça déconne grave (ça marcherait pour $n = \alpha$ réel et $\alpha \in]-1; +\infty[$).
 En 0, la fonction admet un prolongement par continuité en posant $f_n(0) = 0$.

◆ **IG.3** (♣)
 Étudier l'intégrabilité de $t \mapsto t/\ln t$ sur $]0; +\infty[$.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:21] Intégrable en 0 car prolongeable par continuité mais pas en $+\infty$.

◆ **IG.4** (★)
 Étudier l'intégrabilité de la fonction sur le domaine concerné pour les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^\infty \sin(x^2) dx \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{1 - \sqrt{1-t}} dt$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t^2 + 1} dt \qquad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha \ln t}{(1+t^2)^\beta} dt$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt \qquad I_6 = \int_{-1}^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^3}{1+t^4}\right) dt.$$

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:1] et ces deux termes convergent quand $|t| \rightarrow \infty$.
 □ I_1 est délicate, faire un dessin, trouver une série divergente (en $1/\sqrt{n}$) et faire diverger. Ou bien à l'aide du théorème de changement de variable, on obtient du $\frac{\sin y}{2\sqrt{y}}$ et on est ramenés à I_5 .
 Pour l'intégrale impropre, on remarque que (en évitant le 0 qui est un artefact)

$$\int_a^t \sin x^2 dx = \int_{a^2}^{t^2} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du = \frac{\text{IPP}}{2\sqrt{u}} \Big|_{a^2}^{t^2} - \int_{a^2}^{t^2} \frac{\cos u}{4u^{3/2}} du,$$

 □ I_2 non intégrable ($\sim 2/t$ en 0).
 □ I_3 aussi, trivialement.
 □ Pour I_4 , il faut $\alpha > -1$ pour l'intégrabilité en 0 et $\alpha - 2\beta < -1$ pour celle en $+\infty$.
 □ I_5 non intégrable (sauf improprement) d'ailleurs on le sait avec $\int (\sin t)/t dt$; un changement de variable nous ramène d'ailleurs à I_1 .
 □ I_6 n'est clairement pas intégrable car l'intégrande tend vers $-\infty$ en $+\infty$.

◆ **IG.5**
 Soient f, ϕ continues par morceaux sur $[a; b]$, ϕ positive et intégrable, et supposons que $f = O_b(\phi)$. Montrer qu'alors f est intégrable.
 De même, si $f = o(\phi)$, montrer que f intégrable.
 De même, si $f \sim g$, montrer que f intégrable.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:10] ??? Mais c'est du cours!!!

◆ **IG.6** (★)
 Étudier la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale $\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{\sqrt{\ln x}} dx$, selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:30] $x^{-\beta} f(x) \rightarrow \infty$ et $\int x^\beta$ diverge déjà, donc l'intégrale diverge.
 Si $\alpha < -1$, pareil mais cette fois-ci ça converge.
 Pour $\alpha = -1$, on effectue le changement de variable $y = \ln x$, ce qui prouve la divergence.

□ Pour la convergence en 1, on effectue le changement de variable $y = \ln x$, ce qui est parfaitement convergent, quelle que soit la valeur de α .
 ce qui donne
$$\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{\sqrt{\ln x}} dx = \int_0^\infty \frac{e^{(\alpha+1)y}}{\sqrt{y}} dy,$$

Conclusion : L'intégrale est convergente pour $\alpha < -1$.

◆ **IG.7** (♣)
 Nature, en fonction de α , de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^\alpha e^x}{(1+e^x)^\alpha} dx$.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:13] $]0; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
 En $+\infty$, il faut $\alpha > 1$. En 0, il faut $\alpha > -1$. En conclusion : intégrabilité sur

◆ **IG.8** (★)
 Étudier l'intégrabilité sur $]1; +\infty[$ de
$$x \mapsto \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha \ln x} dx$$

 en fonction de α et $\beta \in \mathbb{R}$.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:15] il faut donc $\alpha < 0$.
 En $+\infty$ il faut $\beta < 0$ ou $(\beta = 0$ et $\alpha > 1)$. En 0, le logarithme pose problème : Conclusion : il faut $\beta < 0$ et $\alpha < 0$.

◆ **IG.9 (Espace L_w^2)** (★)
 On note E l'ensemble des fonctions f continues sur $]0; +\infty[$ et à valeurs réelles, telles que la fonction $t \mapsto \frac{f(t)^2}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$. Montrer que E est un \mathbb{R} -e.v.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:16] ce qui montre l'intégrabilité de $\frac{(f+g)^2}{1+t^2} = \frac{f^2+2fg+g^2}{1+t^2}$.
 Le seul point délicat est de montrer que si $f, g \in E$ alors $f+g \in E$. On commence par montrer que, puisque $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, alors

$$\forall t \in]0; +\infty[, \quad \left| \frac{f(t)g(t)}{1+t^2} \right| \leq \frac{f^2(t) + g^2(t)}{1+t^2}$$

◆ **IG.10** (♣)
 Étudier l'intégrabilité sur $]0; +\infty[$ de $t \mapsto \frac{(\ln t)^k}{1+t^2}$, où $k \in \mathbb{N}$.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:17] C'est intégrable en l'infini et en 0 grâce à la règle $t^\alpha f(t)$.

◆ **IG.11** (★)
 Soient P, Q deux polynômes. Étudier l'intégrabilité sur $]0; 1]$ de $t \mapsto P(t)Q(\ln t)$.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:18] Intégrable grâce à la règle $x^\alpha f(x)$.

◆ **IG.12** (★)
 Étudier l'intégrabilité sur $]0; +\infty[$ de $t \mapsto \frac{\ln t}{t(1-t^2)}$.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:19] Il y a un problème en 0 et en 1 (effectuer un DL).

◆ **IG.13 ($f, f'' \in L^2 \Rightarrow f' \in L^2$)** (★★★)
 Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que si f et f'' sont de carré intégrable, alors f' est de carré intégrable. Montrer de plus que
$$\left(\int_0^{+\infty} f'^2 \right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} f^2 \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} f''^2 \right).$$

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:30bis] Donc f'^2 est intégrable. De plus, $f(x)f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f'^2 + \int_0^{+\infty} f f'' = \ell$.
 Par Cauchy-Schwarz, $f f''$ est intégrable. Or
$$\int_0^x f'^2 - f(x)f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} f f''.$$

 □ Si f'^2 n'est pas intégrable, alors l'intégrale $\int_0^x f'^2$ tend vers $+\infty$, donc $f(x)f'(x) \rightarrow +\infty$. Mais de plus $\int_0^x f f'' = \frac{1}{2} f(x)^2$, donc si l'intégrand tend vers $+\infty$, l'intégrale aussi donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^2 = +\infty$; ceci n'est pas possible puisque f est de carré intégrable. □
 □ Si $\ell \neq 0$, alors $\frac{1}{2} f^2(x) = \int_0^x f f'' \sim \ell x$, ce qui est impossible car f^2 est intégrable. □
 Donc $\ell = 0$, et $\int_0^{+\infty} f'^2 = - \int_0^{+\infty} f f''$. On applique Cauchy-Schwarz :
$$\left(\int_0^{+\infty} f'^2 \right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} f f'' \right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} f^2 \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} f''^2 \right).$$

◆ **IG.14 (Avons-nous compris le cours?)** (♣)

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a; +\infty[, \mathbb{R}^+)$. Préciser les liens (implication, équivalence) entre les assertions suivantes :

- 1) f est intégrable sur $[a; +\infty[$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:43] Aucune implication. Contre-exemples dans le cours.

◆ **IG.15** (★)

Pour quelles valeurs des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \frac{(\ln x)^\alpha}{(1+x^2)^\beta}$ est-elle intégrable sur $]0; +\infty[$?

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:33]

◆ **IG.16**

Déterminer la « nature » de $\int_0^1 \frac{(\sin x)^x - x^x}{\tan x} dx$.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:26] Simple exercice de DL.

◆ **IG.17** (★)

Déterminer la nature de $\int_2^\infty \frac{dx}{(\ln x)^{\ln(\ln x)}}$.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:44] Divergente grâce à la règle « $t^\alpha f(t)$ ».

◆ **IG.18** (★)

Déterminez les valeurs des paramètres réels α et β pour que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+e^{1/x}} + \alpha + \frac{\beta}{x}$ soit intégrable sur $[1; +\infty[$.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:46] Un DL montre $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc il faut prendre $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$.
On peut avoir un problème d'intégrabilité en $+\infty$.

◆ **IG.19**

Déterminer les valeurs des paramètres α et β pour que la fonction $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}^\alpha x}{1+x^\beta}$ soit intégrable sur \mathbb{R} .

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:47] $\beta \in \mathbb{R}$ convient. Il faut absolument que $\alpha \leq 0$. Si $\alpha = 0$, alors il faut $\beta > 1$. Si $\alpha < 0$, tout

◆ **IG.20 (Intégration des relations de comparaison)** (★★)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soient f, ϕ continues par morceaux, $\phi \geq 0$ et ϕ intégrable sur $[a; b]$. Montrer que

- 1) si $f = o_{x \rightarrow b}(\phi)$, alors $\int_x^b f = o_{x \rightarrow b}\left(\int_x^b \phi\right)$;
- 2) si $f = O_{x \rightarrow b}(\phi)$, alors $\int_x^b f = O_{x \rightarrow b}\left(\int_x^b \phi\right)$;
- 3) si $f \sim \phi$, alors $\int_x^b f \sim \int_x^b \phi$.

On suppose $\phi \geq 0$ et ϕ non intégrable sur $[a; b]$. Montrer que

- 1) si $f = o_{x \rightarrow b}(\phi)$, alors $\int_a^x f = o_{x \rightarrow b}\left(\int_a^x \phi\right)$;
- 2) si $f = O_{x \rightarrow b}(\phi)$, alors $\int_a^x f = O_{x \rightarrow b}\left(\int_a^x \phi\right)$;
- 3) si $f \sim \phi$, alors $\int_a^x f \sim \int_a^x \phi$.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:11]

◆ **IG.21 (Un grand classique)** (★)

Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0; +\infty[$.

◇ [Divers/integrabiliteexo.tex/int2:38] Calculer l'intégrale sur $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, (ou la minorer en disant que $t \geq 1/(2n+1)\pi$, ce qui est plus simple!!!) qui est en $1/n$, et utiliser la divergence de la série harmonique pour montrer que f^+ n'est pas intégrable (et f^- non plus par la même occasion).

◆ **IG.22 (Hyper classique)** (★★★) X PC – 2005

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} .

- 1) On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. La fonction f' admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle?
- 2) On suppose f de classe \mathcal{C}^2 , que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et que f'' est bornée. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f' = 0$.

◇ [Rec00/integrabilite-r0.tex/div-157] « $\lim f' = 0$ » et le caractère lipschitzien de f' , on en déduit que $\lim f' = 0$ (cf. exercice **IG.23** ou faire un dessin : il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $|f|$ dépasse ε une infinité de fois; alors l'intégrale de $|f|$ autour de ce point est au moins ε/k où k est la constante de Lipschitz; donc $|f|$ n'est pas intégrable.)

(Cf. exercices **DER.44 page 342 et IG.23**)

- 1) f' peut faire n'importe quoi (exemple : $f(x) = \sin(e^x) e^{-x}$.)
- 2) En revanche, dans ce cas, f' est donc intégrable, et f'' bornée. En utilisant (MP) l'uniforme continuité ou (PC), par l'absurde la négation de

◆ **IG.23 (Exemple pédagogique)** (★★★) X PC – 1999

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ à valeurs dans \mathbb{R} .

- 1) On suppose que f est intégrable. La fonction f tend-elle vers 0 en $+\infty$?
- 2) Qu'en est-il si de plus, f' est bornée?

◇ [Rec00/integrabilite-r0.tex/supp-r0:3] sont croissants et séparés d'au moins ε/M . On vérifie alors sur un dessin que

$$\int_{x_n - \varepsilon/M}^{x_n + \varepsilon/M} f \geq \varepsilon^2/M,$$

ce qui est suffisant (les x_n étant en nombre infini) pour montrer que f n'est pas intégrable, ni même que l'intégrale impropre existe!

◆ **IG.24** (★) CCP PT – 1999

Convergence de l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \cos t \ln(\tan t) dt$.

◇ [Rec00/integrabilite-r0.tex/int2:14] qui est équivalent à $\ln x$ en 0, fois un truc qui tend vers 0, bref c'est intégrable. Converge en 0 sans problème, et en faisant $y = \frac{\pi}{2} - x$, on a quelque chose

◆ **IG.25** (♣) X PC – 2001

Que dire de l'intégrabilité de $f_x : t \mapsto \frac{\cos 2\pi x t}{t \ln t}$ sur $[2; +\infty[$ en fonction de x ?

Que dire de la convergence de la série de terme général $u_n(x) = \frac{\cos(2\pi n x)}{n \ln n}$?

◇ [Rec01/integrabilite-r1.tex/int-r:14] technique habituelle : on écrit

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(2k\pi x)$$

Cette fonction n'est jamais intégrable. En effet, sur des intervalles en t de largeur $1/x$, sur lesquels le cosinus est de signe constant, on peut minorer l'intégrale par une constante multipliée par $1/n \ln n$: on compare ensuite à une série de Bertrand divergente.

En revanche, si $x \neq 0$, l'intégrale impropre existe, comme à chaque fois que l'on quelque chose du style $\int f(t) \cos t$ avec f positive, décroissante et de limite nulle. Pour cela, il suffit d'intégrer par parties, ça roule tout seul.

Pour la série, si x est un entier, ça diverge évidemment puisque c'est une série de Bertrand. Enfin, si x n'est pas un entier, cette série converge; pour cela, il faut effectuer une transformation d'Abel et majorer la somme de cosinus selon la

et dans la série, on remplace $\cos(2k\pi x)$ par $T_n(x) - T_{n-1}(x)$, ce qui donne

$$\sum_{n=1}^N \frac{\cos(2\pi n x)}{n \ln n} = \sum_{n=2}^{N-1} T_n(x) \left[\frac{1}{n \ln n} - \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \right] + \frac{T_N}{N \ln N}.$$

Enfin, on montre que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et on conclut.

◆ **IG.26** (★) Centrale PC – 2002

Étudier l'intégrabilité de la fonction f_α définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f_\alpha : t \mapsto \frac{1}{1 + t^\alpha \sin^2 t}.$$

INDICATION : Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, on a l'inégalité $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t \geq 0$.

◇ [Rec02/integrabilite-r2.tex/int-r2-1] On a deux problèmes, en $+\infty$ et en 0.

1) En 0, si $\alpha < 0$, on prolonge la fonction par continuité.

◆ **IG.27** (♣) Centrale MP – 2002
 Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arc tan } x}{x^{3/2}} dx$.

◇ [Rec02/integrabilite-r2.tex/int-r2-24] Application des théorèmes sur les équivalents, pas de vrais problèmes !

◆ **IG.28** (★) TPE MP – 2002
 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Étudier l'existence de $\int_0^1 |1 - x^a|^b dx$.

◇ [Rec02/integrabilite-r2.tex/int-r2-4] elle converge si $b > -1$ (on a $a \neq 0$), en conclusion $b > -1$ et $a > 0$ ou $a < 0$ et $ab > -1$. En 1, on écrit

$$1 - x^a = 1 - (1 - h)^a = ah,$$

◆ **IG.29** (★) CCP PC – 2002
 Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que l'intégrale suivante existe :

$$I = \int_1^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1/x} - a - \frac{b}{x} \right] dx.$$

◇ [Rec02/integrabilite-r2.tex/int-r2-9] Exercice sur les équivalents, $a = e$ et $b = -e/2$.

◆ **IG.30 (Un exemple pédagogique)** (♣) CCP PC – 2002
 Étudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$.
 Calculer $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{x}{1+x^2} dx$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-2A}^A \frac{x}{1+x^2} dx$.

◇ [Rec02/integrabilite-r2.tex/int-r2-21] La fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ n'est pas intégrable sur \mathbb{R} au sens de Lebesgue. Par ailleurs, par imparité, on a

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \int_{-A}^A \frac{x}{1+x^2} dx = 0.$$

et donc notamment la première limite est nulle. La deuxième intégrale vaut

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+4A^2}{1+A^2} \right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \ln 2.$$

◆ **IG.31** (♣) CCP MP – 2002
 Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{R}$ l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-3} + x^n}{(x+1)^{n+1}x^3} dx$$

existe-t-elle ?

◇ [Rec02/integrabilite-r2.tex/int-r2-28] Sans intérêt, en ∞ , il faut et il suffit $n < 6$. En 0, $n > 5/2$!

◆ **IG.32** Mines MP – 2003
 Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^a} \quad \text{et} \quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) dt.$$

1) Déterminer la nature de $\sum u_n$ en fonction de a .
 2) Étudier la sommabilité de f sur \mathbb{R}^{*+} en fonction de a .

◇ [Rec03/integrabilite-r3.tex/r3-60]

◆ **IG.33** CCP MP – 2003
 Montrer que $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

◇ [Rec03/integrabilite-r3.tex/r3-262]

◆ **IG.34** (★) CCP MP – 2004
 La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ est-elle intégrable sur $]0; +\infty[$?

◇ [Rec04/integrabilite-r4.tex/r4-215] Oui.

◆ **IG.35** CCP PC – 2004
 1) Étudiez l'intégrabilité de $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln \sin \left(\frac{1}{x} \right) dx$.
 2) Étudiez l'intégrabilité de $\int_{2/\pi}^{+\infty} x^a \ln \sin \left(\frac{1}{x} \right) dx$ en fonction de a .

◇ [Rec04/integrabilite-r4.tex/r4-426]

◆ **IG.36** (★) Mines PC – 2005
 Intégrabilité de $x \mapsto |\sin x|^x$ sur $[0; +\infty[$.

◇ [Rec05/integrabilite-r5.tex/r5-109]

Calcul et manipulation d'intégrales

◆ **IG.37**
 Après avoir étudié l'existence (c'est-à-dire l'intégrabilité de la fonction sur le domaine demandé), calculer si cela a un sens les valeurs de

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \quad I_2 = \int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3 - 2x + 17}}{x^2 + 1} dx \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{t^3 \ln t}{(1+t^2)^2} dt.$$

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2-2]

donc

□ Pour I_1 : On divise en deux le domaine, puis par récurrence, on peut avoir I_n en fonction de $I_1 = [\text{Arc tan } x]_0^{+\infty}$; on intègre par partie, en dérivant $1/(1+t^2)^n$ et en intégrant 1 : la ruse !

soit

$$2I_{n+1}(t) = (2n-1)I_n(t) + \frac{t}{(1+t^2)^n}.$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2} \text{Arc tan } t + \frac{t}{2(1+t^2)} + C^{\text{te}}.$$

$$I_n(t) = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

$$= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n(I_n(t) - I_{n+1}(t))$$

□ I_2 intégrable. Poser $y = \sqrt{t}$ pour avoir $\int 2y^3 e^{-y} dy$, puis quelques IPP, et $I_2 = 12$.

□ I_3 : pas intégrable.

□ I_4 : intégrable. Couper l'intégrale en 1, et effectuer dans l'une des deux le changement de variable $y = 1/t$, pour obtenir l'opposé de la seconde. $I_4 = 0$.

◆ **IG.38 (Constante d'Euler)** (★★)
 Déterminer la nature et calculer la valeur de $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t} \right] \right) dt$ où $[\cdot]$ est la fonction « partie entière ».

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2-37]

Alors $I = 1 - \gamma$.

Effectuer le changement de variables $t = 1/x$ et découper sur $[k; k+1]$.

◆ **IG.39 (Moments de la gaussienne)** (♣)
 Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de

$$I_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n} dt$$

en sachant que $I_0 = \sqrt{\pi}$.

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2-4]

intégrant sur un compact et en passant à la limite.

$I_n = n! \sqrt{\pi}$ grâce à une IPP et une récurrence immédiate. Justifier l'IPP en

◆ **IG.40** (★)
 Prouver la convergence de, et calculer $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$. On effectuera le changement de variable $y = 1/x$, et on combinera astucieusement les deux intégrales obtenues.

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2:7]

On effectue le changement de variable $y = 1/x$, d'où

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} = \int_0^\infty \frac{y dy}{y^3 + 1},$$

◆ **IG.41**

Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$ après avoir montré son existence.

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2:8]

Nous allons calculer cette intégrale en effectuant une intégration par parties. Malheureusement, l'intégrande diverge en 1, aussi devons-nous prendre quelques précautions. Tout d'abord, notons que l'intégrande est prolongeable par continuité en 0 et est intégrable en 1 puisque

$$\frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \ln(1-x).$$

On peut donc écrire

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx.$$

Or, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

ce qui donne

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^\infty \frac{x+1}{x^3+1} dx = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2-x+1} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-1/\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\pi + \text{Arc tan } \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right] = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx &= - \int_0^{1-\varepsilon} \frac{2}{1-x^2} dx - \left[\frac{\ln(1-x^2)}{x} \right]_0^{1-\varepsilon} \\ &= - \int_0^{1-\varepsilon} \left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right] dx - \frac{\ln(2\varepsilon-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon} \\ &= \ln \varepsilon - \ln(2-\varepsilon) - \frac{\ln(2\varepsilon) + \ln(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx = (\ln \varepsilon) \left[1 - \frac{1}{1-\varepsilon} \right] - \ln(2-\varepsilon) - \frac{\ln 2}{1-\varepsilon} - \frac{\ln(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon}.$$

Un simple développement limité montre que le premier terme et le dernier tendent vers 0 et les deux suivants vers $-\ln 2$ chacun. Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx = -2 \ln 2.$$

◆ **IG.42**

(**)

Étudier l'intégrabilité et, si c'est possible, calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} dx && \text{avec } a \in \mathbb{R}, \\ I_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1+x^2}} && \text{avec } a \in \mathbb{R}, \\ I_3 &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \text{Arc sin } \frac{1}{x} \right) dx. \end{aligned}$$

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2:9]

On trouve $I_1 = \frac{\pi}{2|a|}$.

Si $a = 0$, alors I_2 diverge, sinon intégrabilité. On effectue le changement de variables $x = \tan t$, pour avoir

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt$$

et en posant $y = \sin t$, on trouve

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dy}{y^2+a^2(1-y^2)} = \frac{1}{a^2} \int_0^1 \frac{dy}{1+\frac{1-a^2}{a^2}y^2}$$

et donc si $|a| > 1$

$$I_2 = \frac{1}{2|a|\sqrt{a^2-1}} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2-1}+|a|}{\sqrt{a^2-1}-|a|} \right|$$

et si $|a| < 1$:

$$I_2 = \frac{1}{|a|\sqrt{1-a^2}} \text{Arc tan } \frac{\sqrt{1-a^2}}{|a|}.$$

Pour I_3 , on pose $y = \frac{1}{x}$ puis $z = \text{Arc sin } y$, ce qui nous donne du

$$\int_0^{\pi/2} (\sin z - z) \frac{\cos z dz}{\sin^2 z},$$

ce qui nous montre la convergence (un D.L. de Arc sin donne le même résultat). On trouve

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\cos u}{\sin u} du - \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{u \cos u}{\sin^2 u} du \\ &= [\ln \sin u]_\varepsilon^{\pi/2} - \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{u \cos u}{\sin^2 u} du. \end{aligned}$$

On traite cette dernière intégrale par partie, elle vaut donc

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{u \cos u}{\sin^2 u} du &= \left[-\frac{u}{\sin u} \right]_\varepsilon^{\pi/2} + \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{1}{\sin u} du \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} + \frac{1}{2} \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{du}{\cos^2 \frac{u}{2} \cdot \frac{\sin u/2}{\cos u/2}} \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} + \ln \tan \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \end{aligned}$$

et a donc pour limite

$$I_3 = \frac{\pi}{2} - 1 - \ln 2.$$

◆ **IG.43 (Riemann généralisé)**

(**)

Soit f une application monotone de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} et intégrable sur $[0; +\infty[$. Calculer $\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{k=1}^{\infty} h f(kh)$.

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2:5]

On compare chaque terme à un petit morceau d'intégrale $\int_{kh}^{(k+1)h} f$, on en cadre ensuite entre $\int_h^{+\infty} f$ et $\int_0^{+\infty} f$.

◆ **IG.44**

Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\text{ch } t}{t} dt.$$

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2:27]

◆ **IG.45 (Étude sommaire de la fonction Γ d'Euler)**

La fonction Γ est définie par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Montrer que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2:29]

Par récurrence et $\Gamma(0) = 1$.

◆ **IG.46**

Calculer les deux intégrales $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$. Pour ce faire, on montrera que $I = \frac{1}{2}(I+J)$ et on effectuera le changement de variable $x = 1/t$.

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2:31]

Ces deux intégrales sont bien définies (fonctions continues sur $[0; +\infty[$ et positives, comparées avec Riemann).

Par changement de variable $x = 1/t$, on calcule

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{1+1/x^4} \frac{-dx}{x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dx = J.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dt \\ &= \left[\sqrt{2} \text{Arc tan } (\sqrt{2}t + 1) \right]_0^{+\infty} \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{2} \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

On évalue ensuite

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4} dt = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} \right) dt$$

◆ **IG.47**

(*)

Montrer l'intégrabilité puis calculer les valeurs des intégrales

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx.$$

En particulier, on montrera que $I = \frac{1}{2}(I+J)$.

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2:32]

Montrer que I et J existent, puis qu'elles sont égales par $y = \frac{\pi}{2} - x$. On utilise les formules de trigo : $\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$, ce qui mène à

et cette dernière intégrale est I en coupant en deux à $\pi/4$. $I = -\pi \ln(2)/2$.

$$2I = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t) dt,$$

◆ **IG.48**

Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables sur l'intervalle indiqué. Si oui, calculer la valeur de l'intégrale.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(t/3)}{\sin(t/2)} dt && J = \int_0^1 t^2 \sqrt{\frac{t}{t-1}} dt && K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 2t + 2)^{3/2}} dt \\ L &= \int_0^{+\infty} \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^3} dt && M = \int_0^{\pi/2} \ln(\tan t) dt. \end{aligned}$$

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2:34]

Par changement de variable, $M = 0$.

◆ **IG.49**

Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables sur l'intervalle indiqué. Si oui, calculer la valeur de l'intégrale.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx \quad J = \int_0^x \frac{dt}{1-2xt+t^2} \quad K = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x^2-1}}.$$

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2:39]
 I est bien intégrable. De plus, en coupant en 1 et en effectuant le changement de variable $x = 1/t$, on montre $I = 0$.

Pour J, on pose $u = x - t$ qui est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme,

$$J = \int_0^x \frac{1}{u^2 + 1 - x^2} du$$

donc si $|x| < 1$, $J = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{Arc tan } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\text{Arc sin } x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Si $|x| > 1$ alors

$$J = -\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \ln \left| \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \ln \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}}$$

Pour $|x| = 1$, la fonction n'est pas intégrable.
 Enfin, on pose $x = \text{ch } t$, $dx = \text{sh } t dt = \sqrt{x^2 - 1} dt$. Alors

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \text{ch}^2 t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{4}{e^{2t} + 6 + e^{-2t}} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{4e^{2t}}{e^{4t} + 6e^{2t} + 1} dt = \int_1^{+\infty} \frac{4u}{u^4 + 6u^2 + 1} du \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{4u}{(u^2 + 3)^2 - 8} du = \int_4^{+\infty} \frac{2dw}{w^2 - 8} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{1 + w\sqrt{2}/4}{1 - w\sqrt{2}/4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \end{aligned}$$

◆ **IG.50 (Recueil de belles formules)** (♣)

Soit $\alpha \in [0; \pi]$.
 1) Montrer que l'on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(k\alpha)}{k^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x\alpha)}{x^2} dx,$$

en prenant par convention que le terme pour $k = 0$ vaut α^2 .

2) Montrer que (au sens de l'intégrale impropre)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt.$$

3) Montrer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

4) En posant $I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q x dx$, exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p,q-1}$. En posant $u_n(x) = (-x \ln x)^n$, montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

4) Pour la dernière formule, une simple intégration par parties montre que

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1},$$

ce qui donne, après une récurrence immédiate,

$$\int_0^1 (-x \ln x)^n dx = (-1)^n I_{n,n} = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

On développe alors l'exponentielle en série entière :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^x} dx &= \int_0^1 e^{-x \ln x} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x \ln x)^n}{n!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \end{aligned}$$

la convergence se justifiant de mille manières possibles (la fonction $x \mapsto |x \ln x|$ est bornée et de norme $1/e < 1$, on a donc convergence uniforme de la série de fonctions à intégrer ; ou bien, puisque l'on somme des fonctions positives, convergence monotone ; &c.)

◆ **IG.51**

En posant $I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q x dx$, exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p,q-1}$. En posant $u_n(x) = (-x \ln x)^n$, montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

◇ [Divers/integrale2exo.tex/div:15]
 Une simple intégration par parties montre que

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1},$$

ce qui donne, après une récurrence immédiate,

$$\int_0^1 (-x \ln x)^n dx = (-1)^n I_{n,n} = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

On développe alors l'exponentielle en série entière :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^x} dx &= \int_0^1 e^{-x \ln x} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x \ln x)^n}{n!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \end{aligned}$$

la convergence se justifiant de mille manières possibles (la fonction $x \mapsto |x \ln x|$ est bornée et de norme $1/e < 1$, on a donc convergence uniforme de la série de fonctions à intégrer ; ou bien, puisque l'on somme des fonctions positives, convergence monotone ; &c.)

◆ **IG.52 (Constante d'Euler)** (★★)

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad a_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t^n}{n!} \ln t dt, \quad b_n = a_n - \ln n.$$

- 1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre $\gamma \in]0; 1[$.
- 2) Montrer que $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- 3) Soit α n réel vérifiant $0 < \alpha < 1$. On pose

$$c_n(\alpha) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_{1+\alpha}^{+\infty} e^{-nt} t^n \ln t dt \text{ et } d_n(\alpha) = -\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^{1-\alpha} e^{-nt} t^n \ln t dt.$$

Montrer que la suite $\left(\frac{c_{n+1}(\alpha)}{c_n(\alpha)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par une suite convergente de limite $L < 1$.

Même question pour $\left(\frac{d_{n+1}(\alpha)}{d_n(\alpha)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. En déduire les limites des suites $(c_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(d_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- 4) Majorer $\left| \frac{n^{n+1}}{n!} \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} e^{-nt} t^n \ln t dt \right|$ par $|\ln(1-\alpha)|$.
- 5) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Conclure.

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2:42]

◆ **IG.53** (★★)

Montrer que la fonction $x \mapsto \text{th}(x) - \text{th}(x-1)$ est intégrable sur \mathbb{R} et montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} [\text{th}(x) - \text{th}(x-1)] dx = 2$. Proposer une généralisation de ce résultat.

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2:45]

◆ **IG.54** (★★)

Montrer que la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x) - \text{Arc tan}(x-1)$ est intégrable sur \mathbb{R} et montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} [\text{Arc tan}(x) - \text{Arc tan}(x-1)] dx = \pi$. Proposer une généralisation de ce résultat.

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2:45b]

◆ **IG.55** ($\int_0^1 t^n \ln t dt$) (♣)

Calculer $\int_0^1 t^n \ln t dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2:49]

Une bête récurrence donne $\frac{-1}{(n+1)^2}$.

◆ **IG.56**

Calculer $\int_0^1 |\ln t|^k dt$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

◇ [Divers/integrale2exo.tex/int2:50]

On démontre en effectuant un changement de variable $y = \ln t$ puis k intégrations par parties, que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 |\ln t|^k dt = \int_0^{+\infty} y^k e^{-y} dy = k!$$

◆ **IG.57** (*)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. On suppose que f et f' sont toutes deux intégrables ; montrer que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

◇ [Divers/integrale2exo.tex/div:98]

qu'être 0.

Puisque f' est intégrable, f admet une limite en $\pm\infty$; celle-ci ne peut

◆ **IG.58** CCP PC – 2000

Intégrabilité et calcul de

$$I = \int_0^\infty \frac{t^5 \ln t}{(1+t^6)^2} dt.$$

Même question pour

$$I = \int_0^\infty \frac{t^n \ln t}{(1+t^{n+1})^2} dt \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}.$$

◇ [Rec00/integrale2-r0.tex/int2:28]

montrer que l'intégrale est nulle...

On coupe en deux, on effectue un changement de variable ($u = 1/t$) pour

◆ **IG.59** (***) Mines PC – 2004

Existence et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} [\text{Arc tan}(x+1) \text{th}(x+1) - \text{Arc tan}(x) \text{th}(x)] dx$.

◇ [Rec00/integrale2-r0.tex/div:104]

par l'égalité des accroissements finis, et

Notons $f : x \mapsto \text{Arc tan}(x) \cdot \text{th}(x)$. On vérifie aisément que $x \mapsto f(x+1) - f(x)$ est intégrable (au moyen d'une formule de Taylor). En notant F une primitive, on a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} f(\zeta_M) = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} f(\xi_M) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-M}^M [f(x+1) - f(x)] dx = F(M+1) - F(M) - F(-M+1) + F(-M)$$

ce qui montre que l'intégrale cherchée vaut 0.

On aurait pu également construire $\phi(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2})$ qui est alors impaire et intégrable, donc d'intégrale nulle.

$$= f(\zeta_M) - f(\xi_M)$$

◆ **IG.60** (*) INT MP – 2001

Intégrabilité et calcul de $\int_0^1 x^{k-1} \ln x dx$ avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

◇ [Rec01/integrale2-r1.tex/ip-r:1]

Une récurrence montre que $\int_0^1 x^{k-1} \ln x dx = -\frac{1}{k^2}$.

◆ **IG.61** CCP PC – 2001

Existence et calcul de $I = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \text{Arc sin} \frac{1}{x} \right) dx$.

◇ [Rec01/integrale2-r1.tex/int-r:3]

On traite cette dernière intégrale par partie, elle vaut donc

On pose $y = \frac{1}{x}$ puis $z = \text{Arc sin } y$, ce qui nous donne du

$$\int_0^{\pi/2} (\sin z - z) \frac{\cos z dz}{\sin^2 z},$$

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{u \cos u}{\sin^2 u} du = \left[-\frac{u}{\sin u} \right]_\varepsilon^{\pi/2} + \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{1}{\sin u} du$$

ce qui nous montre la convergence (un D.L. de Arc sin donne le même résultat). On trouve

$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} + \frac{1}{2} \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{du}{\cos^2 \frac{u}{2}} \cdot \frac{\sin u/2}{\cos u/2}$$

$$I = \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\cos u}{\sin u} du - \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{u \cos u}{\sin^2 u} du$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} + \ln \tan \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)$$

$$= [\ln \sin u]_\varepsilon^{\pi/2} - \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{u \cos u}{\sin^2 u} du.$$

et a donc pour limite $I = \frac{\pi}{2} - 1 - \ln 2$.

◆ **IG.62** TPE MP – 2001

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+iax)}$.

◇ [Rec01/integrale2-r1.tex/int-r:4]

◆ **IG.63** (*) CCP PC – 2001

Existence et calcul de $\int_0^\pi \frac{dt}{a + \cos t}$.

◇ [Rec01/integrale2-r1.tex/int-r:5]

Aucune règle de Bioche ne s'applique, on pose $t = \tan \frac{x}{2}$,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{(a+1) + (a-1)t^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \left[\text{Arc tan} \left(\sqrt{\frac{|a-1|}{|a+1|}} t \right) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \end{aligned}$$

Si $|a| < 1$, la fonction n'est pas intégrable. Sinon, aucun problème, c'est une intégrale sur un segment.

◆ **IG.64** (*) CCP PC – 2001

Convergence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x - \text{Arc tan } x}{x(x^2+1) \text{Arc tan } x} dx$.

◇ [Rec01/integrale2-r1.tex/int-r:6]

Posons $f(x) = \frac{x - \text{Arc tan } x}{x(x^2+1) \text{Arc tan } x}$. Alors

$$f(x) \sim x/2 [x \rightarrow 0]$$

donc f admet un prolongement par continuité en 0 et est intégrable en 0.

En $+\infty$, $f(x) \sim \frac{2}{x^2}$ donc est intégrable.

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{x dx}{x(1+x^2) \text{Arc tan } x} &= [\ln(\text{Arc tan } x)]_a^{+\infty} \\ &= \ln \frac{\pi}{2} - \ln(\text{Arc tan } a). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{\text{Arc tan } x dx}{x(1+x^2) \text{Arc tan } x} &= \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} \\ &= \int_0^{1/a} \frac{y dy}{1+y^2} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{a^2} \right), \end{aligned}$$

et donc en ajoutant tout ces termes et en faisant tendre a vers 0, on obtient $I = \ln(\pi/2)$.

◆ **IG.65** (***) CCP PC – 2001

Étude de la fonction $x \mapsto \int_{x^\alpha}^{x^\beta} \frac{dt}{\ln t}$. Calculer sa limite quand $[x \rightarrow 1]$.

Même question avec $x \mapsto \int_{x^\alpha}^{x^\beta} \frac{dt}{t \ln t}$.

◇ [Rec01/integrale2-r1.tex/int-r:9]

On obtient donc l'encadrement

Astuce : on écrit

$$f(x) = \int_{x^\alpha}^{x^\beta} \frac{1}{t \ln t} dt$$

$$x^\alpha [\ln \ln t]_{x^\alpha}^{x^\beta} \leq f(x) \leq x^\beta [\ln \ln t]_{x^\alpha}^{x^\beta}$$

puis : on majore le premier facteur « t » par x^β , on le minore par x^α , pour $x > 1$ (on fait le contraire pour $x < 1$).

et chaque terme admet pour limite $\ln \beta - \ln \alpha$.
Pour le second, il suffit de calculer l'intégrale, la limite est la même.

◆ **IG.66** Centrale MP – 2001

Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$.

◇ [Rec01/integrale2-r1.tex/int-r:11]

◆ **IG.67** (***) X PC – 2001

(Pour combler 5 min.) Étude de $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$.

◇ [Rec01/integrale2-r1.tex/int-r:2]

En 0, la fonction est prolongeable par continuité (limite -1). En 1, la fonction est équivalente à $\ln(1-x)$ donc intégrable.

Or

$$\int_0^1 \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{1}{(n+1)^2}$$

On développe le logarithme en série entière, et on utilise le critère $\sum f|f_n|$:

donc la série $\sum f|f_n|$ converge et on obtient

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$\int \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

◆ **IG.68 (Constante d'Euler)** TPE MP – 2001

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t - \text{E}(t)}{t(t+x)} dt$. Montrer que f existe sur \mathbb{R}^{*+} et calculer f .

◇ [Rec01/integrale2-r1.tex/int-r:10]

◆ **IG.69 (Riemann généralisé)** (★★) Centrale MP – 2001

Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(k-n)}}$.

◇ [Rec01/integrale2-r1.tex/int-r:15]

On note que $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(\frac{k}{n}-1)}}$ et doit donc tendre vers $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ qui est intégrable. Cependant, il faut justifier la convergence, car le théorème des sommes de Riemann qui est dans le cours ne fonctionne que pour les fonctions continues sur un segment. La monotonie de la fonction rend les choses triviales (encadrer par une intégrale).

◆ **IG.70** (★) CCP PC – 2002

Intégrabilité et calcul de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx$.

INDICATION : On effectuera le changement de variable $x = \text{sh } t$.

◇ [Rec02/integrale2-r2.tex/int-r:2:3]

L'intégrabilité ne pose pas de problèmes. On pose $x = \text{sh } t$, puis on intègre par parties sur $[1; A]$:

$$I(A) = -\ln \text{sh } A \frac{\text{ch } A}{\text{sh } A} + \int_{\text{sh}^{-1}(1)}^A \frac{\text{ch}^2 t}{\text{sh}^2 t} dt$$

$$= -\ln \text{sh } A \frac{\text{ch } A}{\text{sh } A} + A - \text{sh}^{-1}(1) - \frac{\text{ch } A}{\text{sh } A} + \sqrt{2}$$

en utilisant les primitives usuelles. À la limite,

$$I = \int_{\text{sh}^{-1}(1)}^{+\infty} \frac{\ln \text{sh } t}{\text{sh}^2 t} dt, \quad I = \sqrt{2} - 1 - \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

◆ **IG.71** (★★) TPE PC – 2002

Pour quelles valeurs de a l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{a^3 + t^3}$ existe-t-elle ?

Trouver un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lim_{a \rightarrow 0^+} a^n \int_0^1 \frac{dt}{t^3 + a^3} = \ell$,

avec $\ell \neq 0$.

Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3 + 1}$.

◇ [Rec02/integrale2-r2.tex/int-r:2:27]

$a \notin [-1; 0]$, sinon la fonction a une singularité d'ordre 1 et donc n'est pas intégrable. En posant $t = ax$, on voit qu'il faut $n = 2$ et la limite est $\ell = 1$. On décompose en éléments simples :

$$\frac{3}{x^3 + 1} = \frac{1}{1+x} + \frac{-x+2}{x^2-x+1},$$

on intègre sur $[0; A]$ et on prend la limite en $+\infty$, $I = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

◆ **IG.72** (★★) Centrale MP – 2002

Équivalent de $\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt$ en $+\infty$.

◇ [Rec02/integrale2-r2.tex/int-r:2:16]

On encadre $\frac{1}{t}$ sur $[2k\pi; 2(k+1)\pi]$ par $\frac{1}{2k\pi}$ et $\frac{1}{2(k+1)\pi}$ pour trouver $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{x}{2\pi} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln x$.

◆ **IG.73** (★) Centrale MP – 2002

Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arc tan } x}{1+x^2} dx$.

◇ [Rec02/integrale2-r2.tex/int-r:2:25]

On reconnaît $\int f f' = \frac{1}{2} f^2$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arc tan } x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\text{Arc tan } x]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$.

◆ **IG.74 (Extension des sommes de Riemann)** (★) CCP PC – 2002

Soit f une fonction définie, continue, positive et décroissante sur $]0; 1]$. On suppose que f est intégrable sur $]0; 1]$.

- 1) Montrer que si f n'est pas prolongeable par continuité en 0, alors $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = +\infty$.
- 2) On pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. Montrer que $\int_{1/n}^1 f(t) dt + \frac{f(1)}{n} \leq S_n \leq \int_0^1 f(t) dt$.
- 3) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.
- 4) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$.
- 5) Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ pour tout $\alpha \in]0; 1[$.

◇ [Rec02/integrale2-r2.tex/int-r:2:10]

- 1) Comme f est décroissante continue, si elle est majorée, alors elle est prolongeable par continuité en 0 (car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe) : c'est la contraposée!
- 2) Simple comparaison de f avec des fonctions étagées.
- 3) $S_n \rightarrow \int_0^1 f$ par encadrement.
- 4) En prenant le \ln , on tombe sur S_n pour $f(x) = \ln(x)$, qui est négative et croissante mais on peut adapter la méthode précédente, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n} = e^{\int_0^1 \ln(t) dt} = \frac{1}{e}$.
- 5) On prend $f(t) = 1/t^\alpha$!

◆ **IG.75** CCP MP – 2002

Pour quelles valeurs de α et β l'intégrale $\int_0^1 \frac{|\ln x|^\beta}{(1-x)^\alpha} dx$ est-elle convergente ?

En déduire la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx$ et calculer cette intégrale.

◇ [Rec02/integrale2-r2.tex/int-r:2:30]

β quelconque et $\alpha < 1$. On intègre par parties, puis $y = \sqrt{1-x}$.

◆ **IG.76** (★★★) Télécom INT MP – 2002

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N} : I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$.

- 1) Existence de I_n ?
- 2) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
- 3) Nature de la série de terme général I_n ?

◇ [Rec02/integrale2-r2.tex/int-r:2:14]

donc $I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) I_n$.

- 1) Ours.
- 2) On intègre par parties $I_n = 3n \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}} dx = 3n(I_n - I_{n+1})$
- 3) La série diverge (par exemple par la règle de Duhamel), voir **CVD.29**.

♦ **IG.77** (★★) INT Management MP – 2002

Soit α un réel strictement supérieur à 1.

1) Montrer que $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ admet une limite en $+\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose $u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.

2) En intégrant par parties, établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n(\alpha) = n\alpha(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)).$$

Exprimer $u_n(\alpha)$ en fonction de $u_1(\alpha)$.

3) Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $b < 1$:

$$u_n(\alpha) \leq b + \frac{1}{(1+b^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1}.$$

(On pourra décomposer l'intégrale en trois intervalles.)
Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\alpha)$.

4) On pose $w_n(\alpha) = \ln(u_n(\alpha)) + \frac{\ln n}{\alpha}$. En considérant la série de terme général $(w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha))$ et en effectuant un développement limité, montrer que l'on a

$$u_n(\alpha) \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}.$$

◊ [Rec02/integrale2-r2.tex/int-r2:19]

1) Voir **IG.76**.

2) Voir **IG.76** : $u_n(\alpha) = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right)$

3) u_n décroît et est minorée par 0 donc converge. Pour l'inégalité, on intègre

sur $[0; b]$ en majorant par 1, puis sur $[b; 1]$ en majorant par $1/(1+b^\alpha)^n$ puis sur $[1; \infty[$ en majorant par $1/t^{\alpha n}$. Puis on passe à la limite pour trouver $\lim u_n(\alpha) \leq b$ donc la limite est 0.

4) Un D.L à l'ordre deux donne $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha) \sim -1/(2\alpha n^2)$, donc $\sum w_n - w_{n-1}$ converge donc w_n converge vers K_α , en passant à u_n , on obtient le résultat.

♦ **IG.78** X MP – 2003

Calculer $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^8 + t^4 + 1}$.

◊ [Rec03/integrale2-r3.tex/r3:419]

♦ **IG.79** (*) Mines MP – 2003

Existe-t-il une fonction [continue ? dérivable ? \mathcal{C}^∞ ?] $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt = 1.$$

◊ [Rec03/integrale2-r3.tex/r3:426] Ben, oui ! La seule difficulté est de prouver la continuité !

♦ **IG.80** Mines MP – 2003

Montrer que, pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arc tan}(x/t)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$.

◊ [Rec03/integrale2-r3.tex/r3:291]

♦ **IG.81** Centrale MP – 2003

1) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x).$$

2) Étudier l'intégrabilité de $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$.

3) Calculer par récurrence $B(x, n+1)$.

4) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} n^x B(x, n+1)$.

◊ [Rec03/integrale2-r3.tex/r3:199]

1) 3) $\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

2) 4)

♦ **IG.82** Centrale MP – 2003

Calcul de $\int_0^{+\infty} \ln(th) dt$.

◊ [Rec03/integrale2-r3.tex/r3:73] J'adore ce genre d'exercices !

♦ **IG.83** (♣) TPE MP – 2003

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$. Étudier l'existence et calculer

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^n dx.$$

◊ [Rec03/integrale2-r3.tex/r3:94] Récurrence : $I_n(\alpha) = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

♦ **IG.84** TPE MP – 2003

Pour $x > 0$ on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t - E(t)}{t(t+x)} dt$.

1) Déterminer le domaine de définition de f .

2) Calculer $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◊ [Rec03/integrale2-r3.tex/r3:216]

♦ **IG.85** (*) CCP PC – 2003

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \ln x}{(1+x+x^2)^4} dx$.

◊ [Rec03/integrale2-r3.tex/r3:184] Pour le calcul, quelle arnaque ! On découpe l'intégrale en deux parties : sur $[0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$; dans la première on effectue le changement de variable $y = 1/x$ et on trouve l'opposé de la seconde. Moralité, l'intégrale est nulle !

♦ **IG.86** CCP MP – 2003

On pose $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}$.

1) Montrer que $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon$, où $I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} dx$.

2) Calculer I .

◊ [Rec03/integrale2-r3.tex/r3:300]

♦ **IG.87** () ENS MP – 2004

? Soit $y; \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que y^2 et $(y'')^2$ soient intégrables sur \mathbb{R} . Montrer que, si $\int y'^2 \leq \int y^2 + \int y''^2$, alors $\int y'^2 \leq 4 \int y^2 \int y''^2$.
Montrer qu'il n'y a égalité que si $y : x \mapsto \alpha e^{-x/2} \sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$.

◊ [Rec04/integrale2-r4.tex/r4:197]

♦ **IG.88** (♣) Mines PC – 2004

Étude de l'intégrabilité sur $]0; +\infty[$ de $x \mapsto x^p / \text{sh}(x)$.

◊ [Rec04/integrale2-r4.tex/r4:143]

♦ **IG.89** (★★) TPE PC – 2004

On définit, pour tout $t > 0$: $f(t) = \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2}$.

1) Montrer que f est intégrable sur $]0; +\infty[$;

2) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2} dt$.

◇ [Rec04/integrale2-r4.tex/r4:106]

dont on calcule ensuite la limite $M \rightarrow +\infty$:

- 1) Prolongeable par continuité en 0 et trivialement intégrable en $+\infty$.
- 2) Par un changement de variable $y = 1/t$, on note que $\int_0^1 = -\int_1^{+\infty}$, donc la première intégrale est nulle. Pour la seconde, on intègre par parties, on trouve

$$\begin{aligned} \int_1^M \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2} dt &= \frac{1}{4} \int_1^M \frac{dt}{t(1+t^4)} \\ &= \frac{1}{4} \int_1^M \left(\frac{1}{t} - \frac{t^3}{1+t^4} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln(M) - \frac{1}{4} \ln(1+M^4) - \frac{1}{4} \ln 2 \right) \end{aligned}$$

$$\int_1^M \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2} dt = \frac{\ln 2}{16}.$$

◆ **IG.90**

CCP PC – 2004

- 1) Définition de la moyenne d'une fonction sur un intervalle
- 2) Exemple d'une fonction intégrable n'atteignant pas sa moyenne
- 3) Montrer que toute fonction continue atteint sa moyenne

◇ [Rec04/integrale2-r4.tex/r4:405]

◆ **IG.91**

(★)

Petites Mines PC – 2004

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_p = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1) \cdots (x+p)}$. Calculer I_p lorsqu'elle converge.

◇ [Rec04/integrale2-r4.tex/r4:62]

 I_p est définie pour $p \geq 2$.◆ **IG.92**

(★)

Mines PC – 2005

On pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t^3)}{1+n^\alpha t^2} dt$, où $\alpha > 0$.

- 1) Existence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

◇ [Rec05/integrale2-r5.tex/r5:104]

◆ **IG.93 (Intégrale gaussienne)**

(★)

CCP PC – 2005

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$, et

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx, \quad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx \quad \text{et} \quad W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

1. Trouver une relation entre I_n et les W_k puis entre J_n et les W_k .
2. Montrer que $(1-x^2) \leq e^{-x^2}$ pour $x \in [0; 1]$.
3. Montrer que $e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in [0; +\infty[$.
4. En déduire un encadrement de I .
5. En admettant que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, donner une valeur de I .

◇ [Rec05/integrale2-r5.tex/r5:504]

1. on pose $x = \cos u$: $I_n = -\int_{\pi/2}^0 \sin^{2n+1} u du = W_{2n+1}$

$$\text{on pose } x = \tan u : J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} u du \quad u' = \pi/2 - u$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} u' du' = W_{2n-1}$$

2. convexité classique

3. on inverse $e^{x^2} \geq 1 + x^2$

$$4. \int_0^1 (1-x^2) dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\text{Mieux : } (1-x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} I$$

D'où $I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} I \leq J_n$ donc $W_{2n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} I \leq W_{2n-1}$ puis en faisant tendre n vers $+\infty$, $I = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Intégrales impropres

◆ **IMP.1** (Valeur de $\int_0^{+\infty} (\sin t)/t \, dt$) (★★★)

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} \, dt = \frac{\pi}{2}$. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin(xt) \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

En déduire la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt$.

INDICATION : On montrera que $t \mapsto \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ est de classe \mathcal{C}^1 , et on utilisera le « lemme de Lebesgue ».

◆ [Divers/impropresexo.tex/int2:36]

De plus, si $x \in [(2n-1)\frac{\pi}{2}, (2n+1)\frac{\pi}{2}]$, alors

On calcule $I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} 2\cos(2nt) \, dt = 0$, d'où la constance $I_n = I_0 = \pi/2$.

Par le lemme de Lebesgue, puisque $t \mapsto \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ est de classe \mathcal{C}^1 , on en déduit que l'intégrale demandée tend vers 0.

Enfin, par changement de variable $y = xt$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

◆ **IMP.2** ($\int (\sin t)/t \, dt$ et $\int |\sin t|/t \, dt$) (◆)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et *périodique* de période $T > 0$. On pose

$$m = \frac{1}{T} \int_{[0,T]} f \quad \text{et} \quad F(x) = \int_0^x f(t) \, dt.$$

- On suppose dans un premier temps que $m = 0$. Montrer que F est T -périodique, et prouver l'existence de l'intégrale impropre $\int_{T; +\infty[} \frac{f(t)}{t} \, dt$.
- On suppose maintenant que $m \neq 0$. Montrer que l'intégrale impropre $\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \, dt$ diverge.
- Que peut-on dire de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} \, dt$?
- Montrer que $\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} \, dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln x$.

◆ [Divers/impropresexo.tex/int2:6]

1) La périodicité est immédiate. Puisque F est continue, on en déduit également qu'elle est majorée. Par ailleurs, on peut intégrer par parties :

$$\int_T^A \frac{f(t)}{t} \, dt = \int_T^A \frac{F(t)}{t^2} \, dt - \left[\frac{F(t)}{t} \right]_T^A.$$

L'intégrale admet une limite quand $A \rightarrow \infty$ par comparaison avec

$t \mapsto 1/t^2$ et bornitude de F . Le terme de bord admet une limite également. Ainsi l'intégrale impropre existe.

2) On se ramène au cas précédent : $f = g + m$ avec g de moyenne nulle.

3) converge, diverge.

4) Trouver une manière élégante utilisant les questions précédentes, ou bourriner.

◆ **IMP.3** (★★★)

Étudier l'intégrabilité sur $]0; +\infty[$ de $t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$. En posant $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ où

$$F(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{t} \sin t \, dt.$$

INDICATION : On montrera que $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x [f(x) - f(t)] \, dt$.

◆ [Divers/impropresexo.tex/int2:35]

Ce n'est pas intégrable en $+\infty$ (même raisonnement que pour $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$, mais c'est même pire) mais en revanche c'est intégrable sur $]0; x]$ pour tout $x \geq 0$ (fonction continue et $\sim \sqrt{x}$ en 0 donc prolongeable par continuité).

On pose $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt$. Alors si $0 < a \leq x$, on a

$$f(x) - f(a) = \int_a^x \phi(t) \, dt = \int_a^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{\cos a}{\sqrt{a}} - \int_a^x \frac{\cos t}{2t\sqrt{t}} \, dt \quad (\text{IPP}).$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{2t\sqrt{t}}$ est intégrable sur $[a; +\infty[$, donc $f(x) - f(a)$ admet une limite quand $[x \rightarrow +\infty]$. Notons ℓ cette limite.

On pose maintenant $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{t} \sin t \, dt = \frac{1}{x} \int_0^x t f'(t) \, dt$. Par parties, on montre la formule suggérée.

□ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x, t \in \mathbb{R}, \quad x \geq A \quad \text{et} \quad t \geq A \implies |f(x) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $x \geq A$. Alors

$$|F(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^A |f(x) - f(t)| \, dt + \frac{1}{x} \int_A^x |f(x) - f(t)| \, dt \leq \frac{2A}{x} \sup_{t \in [0, A]} |f(t)| + \frac{\varepsilon}{2} \frac{x-A}{x} \leq \frac{2}{x} \sup_{t \in [0, A]} |f(t)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, lorsque A est fixé, il existe $B > 0$ tel que

$$\forall x \geq B, \quad \frac{1}{x} \leq \frac{\varepsilon}{4 \sup_{t \in [0; A]} |f(t)|}.$$

Si $x \geq \max(A, B)$, alors $\sup_{t \in [0; A]} |f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □ Ceci montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

◆ **IMP.4** ($\int f$ converge et $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$)

On pose $f : x \mapsto x e^{ix^4}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$ et $\int_0^{+\infty} f$ converge.

◆ [Divers/impropresexo.tex/div:78]

◆ **IMP.5** (★★★) Centrale MP – 2001

Soit $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction T -périodique ($T > 0$). On pose $M(\phi) = \frac{1}{T} \int_0^T \phi(t) \, dt$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, tel que $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$.

Sous réserve d'existence, on pose $\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi(xt) \, dt$.

- On suppose $M(\phi) = 0$. Montrer que $\lambda = 0$.
- On suppose $M(\phi)$ quelconque. Déterminer λ .

◆ [Rec01/impropres-r1.tex/int-r:8]

Puisque f' est intégrable, f possède des limites en $\pm\infty$ et, puisque f est intégrable, ces limites sont nulles.

□ On suppose que $M(\phi) = 0$.

En notant Φ une primitive de ϕ , on montre aisément que Φ est T -périodique, donc bornée par un réel A . On peut de plus effectuer une intégration par parties (sur $[-M; M]$ puis en prenant la limite $M \rightarrow \infty$ grâce aux remarques précédentes) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi(xt) \, dt = \frac{1}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \Phi(xt) \, dt.$$

Cette dernière intégrale est majorable par $A \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)| \, dt$. On obtient donc $\lambda = 0$. □

□ **Supposons $M(\phi) \neq 0$** . On pose $\psi(t) = \phi(t) - M(\phi)t$. Alors $M(\psi) = 0$ et on applique le résultat précédent. On trouve donc $\lambda = M(\phi) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f$.

◆ **IMP.6** (★★) ENSAE MP – 2002

Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin t^2 \, dt$ converge.

Qu'en est-il de $\int_0^{+\infty} |\sin t^2| \, dt$?

(C'est-à-dire que l'intégrale impropre existe, NdW).

◆ [Rec02/impropres-r2.tex/int-r2:5]

On se place sur $[0; A]$ et on pose $t^2 = x$, pour se ramener à $\int \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx$ devant la série des intégrales sur $[k\pi; (k+1)\pi]$ et en utilisant le critère des séries alternées). Les mêmes calculs montrent que l'intégrale n'est pas absolument convergente (minorer le sin par 1/2 sur les bons intervalles).

qui converge (par Abel ou une intégration par parties, ou bien encore en consi-

◆ **IMP.7** ($\int_0^{+\infty} g(t) \sin t \, dt$ avec $g \searrow 0$) (★★) CCP PC – 2002

Soit $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante de limite nulle en $+\infty$. Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} g(t) \sin t \, dt ?$$

Que conclure sur l'existence de $\int_0^{+\infty} g(t) \sin t \, dt$?

◆ [Rec02/impropres-r2.tex/int-r2:35]

$$\left| \int_{k\pi}^{k\pi+x} g(t) \sin t \, dt \right| \leq g(k\pi)$$

C'est une série alternée (faire un dessin) donc convergente. Comme de plus si $0 \leq x < 1$, on conclut par encadrement que l'intégrale converge.

◆ **IMP.8 (Valeur de $\int_0^{+\infty} (\sin t)/t dt$)** Centrale MP – 2003

1) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$. Que vaut $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$?

2) Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt) \cos t}{\sin t} dt$ par récurrence.

3) En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$.

INDICATION : Poser $g(t) = \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t}$.

4) Équivalent en $+\infty$ de $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln \left(2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right) \cos(nt) dt$?

◇ [Rec03/impropres-r3.tex/r3:308]

◆ **IMP.9** Mines MP – 2003

Montrer que $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \cos(x^2) dx = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt$

et que $0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt$.

◇ [Rec03/impropres-r3.tex/r3:321]

◆ **IMP.10** Air PC – 2004

Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge, avec

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

◇ [Rec04/impropres-r4.tex/r4:401]

T.

◆ **IMP.11** Petites Mines PC – 2004

On pose $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{x}} \sin x dx$ et $b_n = \int_{n\pi}^{2n\pi} e^{-\sqrt{x}} \sin x dx$.

Étudier les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$

◇ [Rec04/impropres-r4.tex/r4:415]

Convergence dominée, ...

◆ **CVD.1 (Suite de Dirac)** (*)
 Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on note

$$F(x) = \int_0^1 x f(t) e^{-xt} dt.$$

Montrer que F est continue sur \mathbb{R}^+ . Calculer $\int_0^1 x e^{-xt} dt$ ainsi que la limite de cette intégrale pour $[x \rightarrow +\infty]$.
 En déduire la limite de F en $+\infty$ (on pourra commencer par le cas où $f(0) = 0$).

◇ [Divers/convdomineexo.tex/ip:26] $x \in [0, a], |f(x)| < \varepsilon$. Notamment,
 On intègre sur un segment une fonction continue sur $[0; +\infty[\times [0; 1]$: le résultat est continu.
 Par changement de variable $u = xt$, on trouve

$$\int_0^1 x f(t) e^{-xt} dt = \int_0^x f\left(\frac{y}{x}\right) e^{-y} dy \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(0)$$

Or, pour x suffisamment grand, $\int_\varepsilon^1 x f(t) e^{-xt} dt < \varepsilon$ (on majore par $\|f\|_\infty x e^{-\varepsilon x}$ qui tend vers 0).
 Donc pour x suffisamment grand,

grâce au théorème de convergence dominée !
 Ou bien, sans ce résultat :
 On suppose pour commencer $f(0) = 0$.
 □ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $a > 0$ (et par exemple $a < 1$) tel que pour tout $x \in [0, a], |f(x)| < \varepsilon$.
 On en déduit $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$ et, dans le cas général, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = f(0)$.

◆ **CVD.2 (Suite de Dirac)** (*)
 Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1) On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $M \geq 0$ tels que, pour tout $x \in [m; +\infty[$, $|f(x)| \leq e^{ax}$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x) dx = 0.$$

2) On suppose f bornée. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x) dx = f(0).$$

◇ [Divers/convdomineexo.tex/ip:29] $y = nx$ pour obtenir
 Une majoration puis, sur $[0; M]$, le théorème de la limite sur un segment. Sur $[M; +\infty[$, le théorème de convergence dominée.
 $n \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} f\left(\frac{y}{n}\right) dy$
 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(0) e^{-y} dy = f(0)$
 Supposer ensuite $f(0) = 0$, utiliser la continuité en 0 pour montrer que l'intégrale est plus petite que tout ε , ou bien effectuer le changement de variable grâce à une domination par $y \mapsto \|f\|_\infty e^{-y}$.

◆ **CVD.3 (Diraqueries)**
 Soit f une fonction continue et bornée sur \mathbb{R} . Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} f(x) dx.$$

◇ [Divers/convdomineexo.tex/ip:31] née.
 On pose $y = nx$ et la limite vaut $f(0)$ par le théorème de convergence domi-

◆ **CVD.4 (Diracquerie)**
 Soit $f : [0; 1] : \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

◇ [Divers/convdomineexo.tex/ip:32] étapes : 1° $f(0) = 0$ puis 2° $f(0) \neq 0$. La formule s'ensuit.
 Il suffit de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nt^n f(t) dt = f(1)$, ce qui se fait en deux rème de convergence dominée.

◆ **CVD.5** (*)
 Déterminer, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x e^{-x/n}}{\sqrt{1+x^n}} dx$.

◇ [Divers/convdomineexo.tex/srf:59] exemple) : la limite est donc nulle.
 La théorie de convergence dominée s'applique (dominer par $\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^3}}$ par

◆ **CVD.6** (**)
 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \quad \text{et} \quad w_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx.$$

1) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 2) En notant ℓ la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ déterminer la nature de $\sum (v_n - \ell)$.
 3) Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 4) En notant L la limite de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ déterminer la nature de $\sum (w_n - L)$.

◇ [Divers/convdomineexo.tex/int2:3] $u = x^n$,
 On a, en posant $u = x^n$, $v_n - 1 \sim \frac{\ln 2}{n}$ donc la série diverge. $w_n - 1 = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u^{1-1/n}}{1+u} (u^{-2/n} - 1) du$.
 On a $w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ par le théorème de convergence dominée et, en posant On montre $w_n - 1 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

◆ **CVD.7** (♣)
 Déterminer, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} dx$.

◇ [Divers/convdomineexo.tex/srf:16] Vers 0, mais il faut séparer $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$.

◆ **CVD.8** (♣)
 Déterminer, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1+x^2} dx$.

◇ [Divers/convdomineexo.tex/srf:17] La théorie de convergence dominée s'applique : $\pi/2$;

◆ **CVD.9** (**)
 Déterminer, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ne^{-x^2} \cos x}{1+n^2x^2} dx$.

INDICATION : On pourra utiliser un changement de variable approprié.

◇ [Divers/convdomineexo.tex/srf:18] ce qui montre que pour $n \geq N = \max(N_1, N_2)$,

Solution compliquée On commence par montrer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} \frac{ne^{-x^2} \cos x}{1+n^2x^2} dx = 0 \quad \forall a > 0, \quad \left| \int_0^\infty f_n(x) dx - \frac{\pi}{2} \right| \leq 3\varepsilon.$$

grâce à la convergence dominée.
 En suite, soit $\varepsilon > 0$, il existe η tel que pour tout $x \in [0, \eta]$,
 $|e^{-x^2} \cos x - 1| \leq \frac{2\varepsilon}{\pi}$, ce qui montre que, puisque

$$\int_0^\eta \frac{n}{1+n^2x^2} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2},$$

il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$,

$$\left| \int_0^\eta \frac{n}{1+n^2x^2} dx - \int_0^\eta f_n(x) dx \right| \leq 2\varepsilon.$$

Enfin, η étant fixé, il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, on a

$$\left| \int_\eta^{+\infty} \frac{ne^{-x^2} \cos x}{1+n^2x^2} dx \right| \leq \varepsilon$$

Solution simple On pose $y = nx$, et on trouve

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2/n^2} \cos(y/n)}{1+y^2} dy,$$

et on a convergence simple vers

$$\frac{1}{1+x^2}$$

ainsi que domination par $\frac{1}{1+x^2}$ qui est intégrable.

Réponse : π .

◆ **CVD.10 (Un grand classique)**

- 1) Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par le terme général $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge, et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e^x$.
- 2) Montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $\ln(1+x) \leq x$.
- 3) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}.$$

Montrer que $f_n(x) \leq e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

◇ [Divers/convergenceexo.tex/srf:21]

- 1) □ Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce qui montre que

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = x + o(1),$$

et donc $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge vers x ; par continuité de l'exponentielle, on a $\lim u_n = e^x$.

- 2) Étude simple

- 3) On passe à l'exponentielle avec la valeur x/n :

$$1 = \frac{x}{n} \leq e^{x/n}$$

puis, en élevant le tout à la puissance n :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

On a donc une jolie domination dans l'intégrale donc la limite est

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

◆ **CVD.11 (Diraquerie)**

(**)

Soit $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{xf(t)}{x^2 + t^2} dt$.

INDICATION : On pourra utiliser théorème de convergence dominée en ramenant la limite « continue » à une limite « discrète » — il suffit pour cela d'utiliser la caractérisation séquentielle de la limite.

◇ [Divers/convergenceexo.tex/srf:24]

On a

$$\int_0^1 \frac{xf(t)}{x^2 + t^2} dt = \int_0^{1/x} \frac{f(xy)}{1 + y^2} dy.$$

Si on pose

$$f_x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad y \mapsto \begin{cases} \frac{f(xy)}{1 + y^2} & \text{si } y \leq 1/x \\ 0 & \text{si } y > 1/x, \end{cases}$$

alors $f_x(y) \stackrel{\text{c.v.s.}}{=} \frac{f(0)}{1 + y^2}$. De plus, f étant bornée par une constante M (étant continue sur un compact), on a la domination

$$|f_x(y)| \leq \frac{M}{1 + y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}^+,$$

on utilise alors le théorème de convergence dominée, et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} f_x(y) dy = \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1 + y^2} dy = \frac{\pi}{4} f(0).$$

◆ **CVD.12**

(♣)

Étudier la convergence de la suite de fonction $x \mapsto \frac{x}{n(1+x^n)}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty \frac{x}{n(1+x^n)} dx$.

◇ [Divers/convergenceexo.tex/srf:25]

On a CVU vers 0, et le tout est intégrable et dominable par $x/(1+x^3)$ (au moins dès que $n \geq 3$) donc ça tend vers 0.

◆ **CVD.13 (Irrationalité de π)**

(***)

Soient a, b deux entiers non nuls. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n le polynôme $P_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (bx - a)^n$.

- 1) Montrer que P_n et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières en $x = 0$ et $x = a/b$.
- 2) Montrer que $I_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\pi P_n(x) \sin x dx$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.
- 3) On suppose que $\pi = a/b$. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite non nulle à valeur dans \mathbb{Z} . Conclure.
- 4) Soit $r \in \mathbb{Q}$ un rationnel strictement positif. En considérant la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $J_n = \int_0^r P_n(t) e^t dt$, montrer que e^r n'est pas un rationnel.

◇ [Divers/convergenceexo.tex/ip:30]

- 1) La formule de Leibniz nous donne pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\frac{d^p}{dx^p} \left(\frac{x^n (bx - a)^n}{n!} \right) = \sum_{k=0}^p \frac{C_k^n}{C_k^n} b^k (bx - a)^{n-k} x^k.$$

Notamment, la valeur en 0 est $(C_p^0/C_n^0)(-a)^n \in \mathbb{Z}$ et en $x = a/b$ cela

(Voir également **CVD.41** page 613.)

donne $(C_p^n/C_n^n)a^n \in \mathbb{Z}$.

- 2) Le polynôme P_n est le terme général d'une série définissant une exponentielle, donc tend vers 0. La convergence est même uniforme sur un segment. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.
- 3) Supposons π rationnel, $\pi = a/b$. On intègre par parties : $I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x dx$ et on réitère pour obtenir

$$I_n = \int_0^\pi \underbrace{P_n^{(2n)}(x)}_{=C_n^n} \sin x dx = 2k$$

et k est un entier, non nul, valant $b(2n)!/n!$. Ainsi la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant à valeurs dans \mathbb{Z}^* ne saurait tendre vers 0 : contradiction.

En conclusion : π est irrationnel.

- 4) Tout pareil.

◆ **CVD.14 (Calcul de $\int_0^1 \ln t \cdot \ln(1-t) dt$)**

On cherche à calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \ln t \cdot \ln(1-t) dt$.

- 1) Décomposer la fraction $\frac{1}{n(n+1)^2}$ en éléments simples.
- 2) Calculer $\int_0^1 t^n \ln t dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) En utilisant le développement $\ln(1-t) = -\sum_{i=1}^n \frac{t^i}{i}$ valable pour tout $t \in]-1; 1[$, calculer I .

◇ [Divers/convergenceexo.tex/div:10]

- 1) $\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$.
- 2) $\int_0^1 t^n \ln t dt = \frac{-1}{(n+1)^2}$.

- 3) On intègre terme à terme grâce au théorème sans nom et on obtient

$$I = \int_0^1 \ln t \cdot \ln(1-t) dt = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

◆ **CVD.15**

Écrit Centrale

Donner un équivalent de l'intégrale :

$$c_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k!} \int_0^1 (-\ln t)^k p(t) dt \quad \text{où} \quad p(t) = \frac{\ln(t) \cdot \ln(1-t)}{t}.$$

◇ [Divers/convergenceexo.tex/div:11]

Dans l'expression

$$c_k = \frac{1}{k!} (-\ln t)^k \frac{\ln(t) \cdot \ln(1-t)}{t} dt,$$

effectuons le changement de variable $u = -\ln t$; on obtient

$$c_k = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} u^{k+1} \ln(1 - e^{-u}) du.$$

Or, on peut écrire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x,$$

ce qui montre que l'on peut décomposer, pour tout $u \in \mathbb{R}^+$:

$$\ln(1 - e^{-u}) = e^{-u} + \psi(u) \quad \text{avec} \quad |\psi(u)| \leq \frac{e^{-2u}}{2}$$

On peut alors écrire

$$c_k = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} u^{k+1} e^{-u} du + \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} u^{k+1} \psi(u) du = b_k + d_k,$$

$$\text{où } |d_k| \leq \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} u^{k+1} e^{-2u} du = \frac{1}{2^{k+1} k!} \int_0^{+\infty} y^{k+1} e^{-y} dy = \frac{b_k}{2^{k+1}}$$

ce qui montre que $d_k = o(b_k)$ et donc que $c_k \sim b_k$.

Par ailleurs, une suite de k intégrations par parties conduit au résultat classique :

$$\int_0^{+\infty} u^{k+1} e^{-u} du = (k+1)!$$

ce qui montre finalement que $\boxed{c_k \sim k+1}$.

Remarque 1 Bien entendu, on aurait pu tout aussi bien écrire $c_k \sim k$, puisque $k \sim k+1$. Nous laissons malgré tout le résultat sous cette forme la différence entre c_k et $k+1$, étant majorée par $(k+1)/2^{k+1}$, tend (rapidement) vers 0, c'est-à-dire que l'équivalent $k+1$ est remarquablement bon.

◆ **CVD.16**

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbf{U}$, calculer $f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z - e^{it}} dt$.

◇ [Divers/convergenceexo.tex/ip:37]

On développe le dénominateur en série, on vérifie que la convergence est normale et on en déduit que

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ \frac{2\pi}{z} & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

◆ **CVD.17**

(*)

X PC - 2005

Soit $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, étudier $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(x) e^{-nx} dx$.

◇ [Rec00/convdominée-r0.tex/div:163] dominée.
 $= \int_0^1 f\left(\frac{y}{n}\right) e^{-y} dy \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^{+\infty} f(0) e^{-y} dy = f(0)$ par convergence Cf. **IP.35** page 629.

◆ **CVD.18** (★★★) X PC – 2005

1) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Trouver une relation entre $\int_{-1}^1 Q(x) dx$ et $\int_0^\pi Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$.

INDICATION : Essayer $Q(X) = X^n$.

2) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$; montrer que $\int_0^1 P^2(x) dx \leq \pi \sum_{k=0}^n |a_k|^2$.

3) Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ et posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$a_k = \int_0^1 x^k f(x) dx.$$

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \leq \pi \int_0^1 |f|^2.$$

INDICATION : On écrira que

$$\sum_{k=0}^N a_k^2 = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^N a_k x^k \right) f(x) dx$$

et on appliquera Cauchy-Schwarz.

Remarque La première question est un cas particulier du **théorème de Cauchy** : l'intégrale sur un chemin fermé d'une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe est nulle.

◇ [Rec00/convdominée-r0.tex/div:158]

1) Un calcul immédiat montre que, avec $Q = X^n$, on a

$$\int_0^\pi Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{i(n+1)} [(-1)^{n+1} - 1]$$

et $\int_{-1}^1 Q(x) dx = \frac{1}{n+1} [(-1)^{n+1} - 1]$.

Par linéarité, pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\int_0^\pi Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = i \int_{-1}^1 Q(x) dx.$$

2) La fonction P^2 étant positive, écrivons, en subordant du Parseval :

$$\begin{aligned} \int_0^1 P^2(x) dx &\leq \int_{-1}^1 P^2(x) dx = \int_0^\pi P^2(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \\ &\leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta \end{aligned}$$

car $P(\bar{\lambda}) = \overline{P(\lambda)}$ puisque P est réel. On continue :

$$\begin{aligned} \int_0^1 P^2(x) dx &\leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \pi P(e^{i\theta}) \overline{P(e^{i\theta})} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \pi \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n a_k \bar{a}_\ell e^{i(k-\ell)\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \sum_{k=0}^n |a_k|^2 \end{aligned}$$

puisque $\int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)\theta} d\theta = \delta_{k,\ell}$.

3) On écrit, en suivant l'indication, que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N a_k^2 &= \langle P_N, f \rangle \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^N a_k x^k \right)^2 dx} \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx} \\ &\leq \sqrt{\pi \sum_{k=0}^N |a_k|^2} \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx} \end{aligned}$$

on élève au carré, on simplifie, on obtient

$$\sum_{k=0}^N a_k^2 \leq \pi \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

Ceci est vrai pour tout N , on passe à la limite.

◆ **CVD.19** (*) CCP MP – 2000

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in [0; n]$, on a $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^n (\sin x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$. Existence et valeur de la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

◇ [Rec00/convdominée-r0.tex/sf:22]

On peut faire une étude de fonction

$$f_{1/2}(x) = -x \pm \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n,$$

ou bien appliquer l'inégalité $e^t \geq 1 + t \pm \frac{t^2}{n}$.

On pose

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sin x & \text{si } x \in]0; n] \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

Alors f_n est continue par morceaux pour tout $n \in \mathbb{N}$, et intégrable sur $]0; +\infty[$. De plus on a CVS vers $f(x) = (\sin x)e^{-x}$ qui est continue. De plus $|f_n| \leq |f|$ donc on a domination, donc $\int_0^\infty f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^\infty f$.

◆ **CVD.20** (*) École de l'air – 1994

Calculer, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} dt$.

◇ [Rec00/convdominée-r0.tex/sf:23]

On remarque que

$$\frac{t^n - t^{2n}}{1-t} = t^n \frac{1-t^n}{1-t} = \sum_{k=0}^{n-1} t^{n+k}.$$

On en déduit, en intégrant terme à terme cette somme finie, que

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(k/n)} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2. \end{aligned}$$

◆ **CVD.21** CCP PSI – 2000

Pour tout $n \geq 3$ on définit $f_n :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x}{(1+x)^n}$.

- 1) Montrer que toutes les fonctions f_n sont intégrable sur $]1; +\infty[$.
- 2) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
- 3) En déduire que la série de terme général $g_n = \int_1^{+\infty} f_n$ converge, et calculer sa somme.

◇ [Rec00/convdominée-r0.tex/sf:46]

- 1) \mathbb{I} .
- 2) Pour tout $x \in [1; +\infty[$, on a

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = \frac{x(1+x)^{-3}}{1 - \frac{1}{(1+x)}} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

- 3) Puisqu'on somme des fonctions positives, le théorème de convergence monotone permet de conclure que

$$\sum_{n=3}^{\infty} g_n = \int_1^{+\infty} f = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

(Sauf erreur de calcul).

◆ **CVD.22** TPE MP – 2001

On pose $f_n(x) = \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^x dt$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$.

Montrer que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{1+x}}{(1+x)(2+x) \cdots (n+x)}$.

◇ [Rec01/convdominée-r1.tex/sf:r:31]

◆ **CVD.23** (★★★) CCP PC – 2001

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f_n(x) = \frac{\ln(1+x/n)}{1+x^2}$.

- 1) Discuter l'intégrabilité de f_n sur $]0; +\infty[$.
- 2) On pose $u_n = n \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et sa limite.

◇ [Rec01/convdominée-r1.tex/sf:r:32]

On choisit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

On a

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{\frac{1}{n^2} + y^2} dy.$$

$$\begin{aligned} \ell &\geq u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{\frac{1}{n^2} + y^2} dy \\ &\geq \int_a^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{\frac{1}{n^2} + y^2} dy, \end{aligned}$$

Montrons que cela tend vers $+\infty$, résultat dont l'intuition nous est donnée car $y \mapsto \frac{\ln(1+y)}{y^2}$ non intégrable.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Soit elle tend vers $+\infty$, ce que l'on veut montrer, soit elle converge dans \mathbb{R} . Elle converge donc vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

donc, en prenant $n \rightarrow \infty$, ce qui est parfaitement licite grâce au théorème de convergence dominée sur $]a; +\infty[$ où la fonction est parfaitement intégrable :

$$\ell \geq \int_a^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{y^2} dy;$$

ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on peut faire tendre a vers 0 et on obtient $\ell = +\infty$.

Autre méthode : (peut-être moins jolie car moins généralisable).

□ Soit $M \geq 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{y^2} dy \geq 2M.$$

Alors, pour tout $n \geq 1/\alpha$, on a

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{\frac{1}{n^2} + y^2} dy \geq \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{2y^2} dy \geq M,$$

donc $u_n \geq M$. □

◆ **CVD.24** (★) Centrale MP – 2001

Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^3}} dt$.

◇ [Rec01/convdominee-r1.tex/srf-r:28]

On remarque que, pour $n \geq 2$, on peut écrire

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^3}} t^{n-2} dt,$$

et la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{\sqrt{1-t^3}}$ est prolongeable par continuité sur $[0; 1]$, donc majorée. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée.

◆ **CVD.25** (★) TPE MP – 2001

Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$ et de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Comparer ces réels.

◇ [Rec01/convdominee-r1.tex/srf-r:16]

On vérifie que

$$\frac{x}{e^x - 1} = x \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)x} = x \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}.$$

On utilise ensuite le théorème d'intégration d'une série de fonctions (toutes les hypothèses sont justifiées!), et on intègre terme à terme, en utilisant $\int_0^{+\infty} x e^{-ax} dx = 1/a^2$. On a donc égalité entre les deux réels.

◆ **CVD.26** (★★) Mines MP – 2001

Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

◇ [Rec01/convdominee-r1.tex/srf-r:17]

On justifie l'existence de la somme et de l'intégrale, puis on développe

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx},$$

puis on intègre terme à terme la série de fonctions, en justifiant par le théorème de convergence monotone (le théorème d'intégration terme à terme ne permet pas de conclure).

◆ **CVD.27** (♣) CCP – 2001

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n+t} dt$.

◇ [Rec01/convdominee-r1.tex/srf-r:45]

Chaque intégrale existe bien grâce à l'exponentielle, et on a trivialement

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n+t} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{n}.$$

La limite cherchée est donc 1 sans avoir à recourir aux théorèmes du cours.

◆ **CVD.28** (★★) Centrale MP – 2002

On pose $I_n = \int_0^1 \frac{du}{1+u^n}$.

- Déterminer $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.
- Trouver un équivalent en $+\infty$ de $I_n - \ell$.
- On pose $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy$. A-t-on l'égalité $J = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$?
- Donner le troisième terme du développement de I_n .

◇ [Rec02/convdominee-r2.tex/int-r2:31]

1) $\ell = 1$ par convergence dominée.

2) $I_n - 1 = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^n} du$, on pose $t = u^n$ pour obtenir

$$I_n - 1 = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t^{1/n}}{1+t} dt$$

et le théorème de convergence dominée donne

$$I_n - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}.$$

3) On pose $x = 1 - y$ et on utilise le développement de $1/(1-x)$ et les théorèmes d'inversion \int/\sum .

4) Par convergence dominée ($n|e^{x/n} - 1| \leq x$ pour $x \leq 0$), on a $\int_0^1 \frac{t^{1/n} - 1}{1+t} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt = c$. Le terme suivant est donc c/n^2 .

◆ **CVD.29** (★★) CCP PC – 2002

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

- Existence de I_n ?
- Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.
- Étudier la série $\sum I_n$.

◇ [Rec02/convdominee-r2.tex/int-r2:15]

1) T.

2) La limite est nulle par convergence dominée.

3) Voir **IP.58**. On a une série positive, notons $\ell = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On a alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\ell \geq \sum_{n=1}^N I_n \geq \int_a^1 \left(\frac{1 - 1/(1+x^2)^N}{x^2} \right) dx$$

en passant à la limite $N \rightarrow \infty$ (il est permis d'intégrer sur un segment une suite de fonctions dominée par une constante $1/a^2$),

$$\ell \geq \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx;$$

et ceci pour tout a , ce qui montre que $\ell = +\infty$.

Remarque On peut également effectuer une intégration par parties pour calculer I_n directement ; on effectue l'intégration par parties sur I_n pour obtenir

$$I_n = 2n I_n - 2n I_{n+1}$$

et donc $I_{n+1} = \left(\frac{2n-1}{2n} \right) I_n$.

Cette relation de récurrence permet de montrer que

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

et donc la série $\sum I_n$ diverge grâce à la règle (hors-programme) de Raabe-Duhamel, ce que l'on montre par comparaison logarithmique avec la série $\sum 1/\sqrt{n}$.

◆ **CVD.30** (★) ESIM PC – 2002

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que $t \mapsto t^k \ln t$ est intégrable sur $]0; 1[$.
- Calculer $\int_0^1 t^k \ln t dt$.
- Prouver que la fonction $f : t \mapsto \frac{t^2 \ln t}{t^2 - 1}$ est intégrable sur $]0; 1[$.
- Prouver que $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)^2}$.

◇ [Rec02/convdominee-r2.tex/int-r2:3]

1) Cours.

2) Par parties, on trouve $-1/(k+1)^2$.

3) Cours.

4) On décompose $1/(1-t^2)$ en série, et on inverse série/intégrale.

◆ **CVD.31** (★) Mines MP – 2003

Montrer que, si f est continue,

$$\int_0^1 f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 e^{x(t-1)^n} f(t) dt.$$

◇ [Rec03/convdominee-r3.tex/r3:160]

On échange après justification (par le théorème « $\sum \int |f_n|$ » par exemple...) intégrale et somme, on tombe sur

$$\int_0^1 \exp\{-e^{x(t-1)}\} f(t) dt,$$

puis on invoque le TCD (f étant bornée), et on obtient le résultat.

◆ **CVD.32** (♣) Mines MP – 2003

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{1+t^n} dt$.

◇ [Rec03/convdominee-r3.tex/r3:281]

Le théorème de convergence dominée sur un segment donne $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$.

◆ **CVD.33 (Intégrale gaussienne)** Centrale MP – 2003
 On définit la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n] \\ 0 & \text{si } x \in]n; +\infty[. \end{cases} \end{cases}$$

1) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 2) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

◇ [Rec03/convdominee-r3.tex/r3:264]

◆ **CVD.34** Centrale MP – 2003 (*)
 Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n] \\ \text{sinon.} \end{cases}$

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t^3}{n}\right)^n dt$.

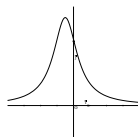
◇ [Rec03/convdominee-r3.tex/r3:324]

◆ **CVD.35** CCP PC – 2003
 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t+t^2)^n} dt$.

1) Montrer l'existence de a_n .
 2) Tracer $t \mapsto 1/(1+t+t^2)$. La courbe présente-t-elle une symétrie ?
 3) Montrer que la série de terme général a_n est divergente.
 4) Exprimer a_n en fonction de $w_n = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^n}$.
 Trouver une relation de récurrence entre w_n et w_{n+1} .
 5) Donner le domaine de définition de $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

◇ [Rec03/convdominee-r3.tex/r3:238]

- Le dénominateur ne s'annule pas (discriminant $-3 < 0$) et intégrande en $1/t^2$.
- La courbe est symétrique par rapport à $t = -\frac{1}{2}$ puisque les racines du trinôme sont j et j^2 de partie imaginaire $-\frac{1}{2}$.
 La courbe de la fonction est :



ce qui montre que la fonction est décroissante sur $[0; +\infty[$ et toujours inférieure à 1.

- On écrit par exemple que

$$a_n \geq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+2t+t^2)^n} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{2n}} du = \frac{1}{2n+1}$$

donc la série $\sum a_n$ diverge.

-
-
-
-
- Le rayon est égal à 1.

À FINIR !!!

◆ **CVD.36 (Valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$)** Centrale PC – 2003 (★★★)

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ est convergente ; on note γ sa limite.

2) Soit f une fonction continue sur $]0; +\infty[$, à valeurs dans \mathbb{C} et telle que la fonction $g : t \mapsto f(t)e^{-t}$ soit intégrable sur $]0; +\infty[$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t} dt$.

3) Montrer que $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} dt = -\gamma$.

4) Montrer que $\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

◇ [Rec03/convdominee-r3.tex/r3:185]

(Cf. **CVD.46** pour une autre méthode.

- On écrit $v_n = u_n - u_{n-1}$ et on montre par un DL simple que $\sum v_n$ converge.

- Simple (ou presque) application du théorème de convergence dominée, en remarquant que si $x \in [0; 1]$, alors $1-x \leq e^{-x}$ et donc

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq (e^{-t/n})^n = e^{-t},$$

ce qui nous permet de dominer la suite de fonctions

$$g_n : t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cdot \chi_{[0;n]}(t).$$

- Puisque $t \mapsto \ln(t) e^{-t}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n,$$

où

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt \\ &= n \int_0^1 (1-x)^n \ln(nx) dx \\ &= n \int_0^1 (1-x)^n \ln(x) dx + n \ln n \underbrace{\int_0^1 (1-x)^n dx}_{1/(n+1)}. \end{aligned}$$

La première intégrale se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x)^n \ln(x) dx &= \int_0^1 y^n \ln(1-y) dy \\ &= - \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{n+k}}{y} dy \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+n+1)} \\ &= - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n+1} \right] \\ &= - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$I_n = \frac{n}{n+1} \left[\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\gamma.$$

- On coupe l'intégrale en deux ; ensuite, sur chaque bout, on exécute une intégration par parties, en dérivant le logarithme et en prenant $t \mapsto 1 - e^{-t}$ comme primitive dans la première, $t \mapsto -e^{-t}$ dans la seconde.

◆ **CVD.37** INT MP – 2003 (★)
 Existence et limite quand $n \rightarrow \infty$ de

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^{2n} x dx.$$

◇ [Rec03/convdominee-r3.tex/r3:89]

Application immédiate du théorème de convergence dominée : $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

◆ **CVD.38 (Diracquerie)** TPE PC – 2003 (*)
 Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$.

◇ [Rec03/convdominee-r3.tex/r3:366]

Changement de variable $y = x^n$ + théorème de convergence dominée.

◆ **CVD.39 (Diraquerie)** (★★) CCP PC – 2003

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit

$$\phi_n : \begin{cases} [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto n^2(t^n - t^{n+1}). \end{cases}$$

- 1) Montrer que la suite $(\phi_n \cdot f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
- 2) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \phi_n = 1$.
- 3) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \phi_n f = f(1)$.
- 4) Montrer que l'hypothèse de domination dans le théorème de Lebesgue est une condition nécessaire.

◆ [Rec03/convdominee-r3.tex/r3:235]

- 1) On peut écrire, en utilisant le théorème des accroissements finis, que $n^2 |t^n - t^{n+1}| \leq \inf_{x \in [n; n+1]} n^2 (\ln t) t^x \leq n^2 t^n \ln t$, et cette quantité tend vers 0 pour tout $t \in [0; 1]$. Puisque f est continue, le théorème de convergence dominée permet de conclure.
- 2) Simple calcul.
- 3) Changement de variable $x = t^n$ puis théorème de convergence dominée, par exemple.
- 4) Sens de la question ?

◆ **CVD.40** CCP MP – 2003

Soit $\alpha \in [0; 1[$. On pose $a_n = \int_0^1 (1 - x^n) x^{-\alpha} dx$.

- 1) Montrer que a_n est bien définie. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2) En déduire que la série $\sum (a_n - a_{n-1})$ converge.
- 3) Montrer que $a_n - a_{n-1} = \frac{1 - \alpha}{n} a_n$.
- 4) En déduire $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◆ [Rec03/convdominee-r3.tex/r3:417]

◆ **CVD.41 (Irrationalité de π)** (★★) CCP PC – 2003

Soient a, b deux entiers non nuls. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n le polynôme $P_n = \frac{1}{n!} X^n (bX - a)^n$.

- 1) Calculer $P_n(\frac{a}{b} - x)$. Que peut-on en déduire pour $P^{(k)}(\frac{a}{b})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$?
- 2) Trouver le maximum de $|P(n)|$ sur $[0; \frac{a}{b}]$.
- 3) Montrer que $I_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\pi P_n(x) \sin x dx$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.
- 4) On suppose que $\pi = a/b$. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite non nulle à valeur dans \mathbb{Z} . Conclure.

◆ [Rec03/convdominee-r3.tex/r3:240]

(Cf. exercice CVD.42, X PC 2004.)

- 1) On a $P_n(\frac{a}{b} - x) = P_n(x)$, ce qui montre que les dérivées en a/b sont égales, au signe près, à celles en 0. On peut montrer que toutes les dérivées en a/b et en 0 sont entières. En effet, les dérivées d'ordre $p \in [0; n-1]$ s'annulent en 0 car 0 est racine d'ordre n de P_n . Les dérivées d'ordre $\geq 2n+1$ sont identiquement nulles. Enfin, pour $p \in [n; 2n]$, la formule de Leibniz nous donne
- 2) On fait un dessin de $X(bX - a)$, on voit qu'alors P_n atteint son maximum en $a/2b$ et que celui-ci vaut $2^2/4b^2 n!$.
- 3) La convergence est uniforme sur le segment $[0; 1]$ puisque P_n atteint son maximum en $a/2b$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.
- 4) Supposons π rationnel, $\pi = a/b$. On intègre par parties : $I_n = \int_0^\pi P_n''(x) \sin x dx + \text{entiers}$; et on réitère pour obtenir

$$I_n = \int_0^\pi \underbrace{P_n^{(2n)}(x)}_{=C^{2n}=k_n} \sin x dx + C^{2n} = 2k_n + C^{2n}$$

et k_n est un entier, non nul, valant $b(2n)!/n!$, et où la constante est également entière. Ainsi la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant à valeurs dans \mathbb{Z}^* ne saurait tendre vers 0 : contradiction.

En conclusion : π est irrationnel.

◆ **CVD.42 (Irrationalité de π)** (★★) X PC – 2004

Soient a, b deux entiers non nuls. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n le polynôme $P_n = \frac{1}{n!} X^n (bX - a)^n$.

- 1) Montrer que P_n et ses dérivées successives prennent des valeurs entières en 0 et en a/b .
- 2) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi P_n(x) \sin x dx = 0$.
- 3) En déduire que π est irrationnel.

◆ [Rec04/convdominee-r4.tex/r4:16]

(Cf. exercice CVD.41, CCP PC 2003) : quel scandale !

- 1) On a $P_n(\frac{a}{b} - x) = P_n(x)$, ce qui montre que les dérivées en a/b sont égales, au signe près, à celles en 0. On peut montrer que toutes les dérivées en a/b et en 0 sont entières. En effet, les dérivées d'ordre $p \in [0; n-1]$ s'annulent en 0 car 0 est racine d'ordre n de P_n . Les dérivées d'ordre $\geq 2n+1$ sont identiquement nulles. Enfin, pour $p \in [n; 2n]$, la formule de Leibniz nous donne
- 2) Le polynôme P_n est le terme général d'une série définissant une exponentielle, donc tend vers 0. La convergence est même uniforme sur

le segment $[0; 1]$ puisque P_n atteint son maximum en $a/2b$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

- 3) Supposons π rationnel, $\pi = a/b$. On intègre par parties : $I_n = \int_0^\pi P_n''(x) \sin x dx + \text{entiers}$; et on réitère pour obtenir

$$I_n = \int_0^\pi \underbrace{P_n^{(2n)}(x)}_{=C^{2n}=k_n} \sin x dx + C^{2n} = 2k_n + C^{2n}$$

et k_n est un entier, non nul, valant $b(2n)!/n!$, et où la constante est également entière. Ainsi la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant à valeurs dans \mathbb{Z}^* ne saurait tendre vers 0 : contradiction.

En conclusion : π est irrationnel.

◆ **CVD.43** (★) Mines MP – 2004

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs, tendant vers $+\infty$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-a_n x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^n}.$$

◆ [Rec04/convdominee-r4.tex/r4:159]

Utiliser le théorème de convergence dominée appliqué à la suite des sommes partielles, dominée par le théorème de Leibniz des séries alternées.

◆ **CVD.44** (★) Mines MP – 2004

Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx$.

◆ [Rec04/convdominee-r4.tex/r4:235]

et par convergence dominée.

◆ **CVD.45 (Diraquerie)** (★★) Mines MP – 2004

Soit $g \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{C})$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\sin(nx)^2 g(x)}{x^2} dx$.

◆ [Rec04/convdominee-r4.tex/r4:05]

On effectue le changement de variables $y = nx$ et on trouve

$$I_n = \int_0^n \frac{\sin^2 y g(y/n)}{y^2} dy.$$

Cette suite de fonctions est dominée sur \mathbb{R}^+ par la fonction

$$\phi : y \mapsto \frac{\sin^2 y}{y^2} \|g\|_\infty,$$

On définit alors la suite de fonctions continues par morceaux $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\phi_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin^2 y}{y^2} g(y/n) & \text{si } y \in]0; n[\\ g(0) & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{si } y \in]n; +\infty[. \end{cases} \end{cases}$$

qui est intégrable sur \mathbb{R}^+ . Ainsi, le théorème de convergence dominée nous permet-il d'écrire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = g(0) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2} dy = \frac{\pi}{2} g(0).$$

◆ **CVD.46 (Valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$)** (★★) Mines MP – 2004

- 1) Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} + \ln t - \frac{1}{t} \right) dt$.
- 2) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$.

◆ [Rec04/convdominee-r4.tex/r4:192]

(Cf. CVD.36) pour une autre méthode.

◆ **CVD.47** (★) Mines PC – 2004

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n e^{-x^2} \cos x}{1 + n^2 x^2} dx$.

◆ [Rec04/convdominee-r4.tex/r4:119]

Changement de variable $y = nx$ puis TCD : la limite vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + y^2} dy = \pi.$$

◆ **CVD.48** (**) Mines PC – 2004
 Nature et limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général

$$u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \phi(x) dx,$$

où $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et intégrable.

◇ [Rec04/convdominee-r4.tex/r4:67] donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \phi(x) dx$.
 Le théorème de convergence dominée devrait s'appliquer, sachant que $\cos^n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) = \exp \left[n \ln \left(1 - \frac{x^2}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right] = e^{-x^2/2+o(1)}$,

◆ **CVD.49** (*) Mines PC – 2004
 Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1-x^5} dx$.

◇ [Rec04/convdominee-r4.tex/r4:76] TCD.

◆ **CVD.50** (*) Mines PC – 2004
 Étude et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt$ au moyen d'une série.

◇ [Rec04/convdominee-r4.tex/r4:41]

◆ **CVD.51** (*) TPE MP – 2004
 Existence et limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)} dx$.

◇ [Rec04/convdominee-r4.tex/r4:168] Dominer tout ça et faire tendre vers $\pi/2$.

◆ **CVD.52** CCP PC – 2004
 On pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)} dt$.

- 1) Montrer que f existe pour $x \in]0; +\infty[$.
- 2) Montrer que $e^x - 1 \geq x$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x)$.
- 3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$.
- 4) Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer J (et montrer que J existe), avec $J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1 - e^{-\sqrt{t}}} dt$.
- 5) Montrer que $\int_0^{+\infty} f$ existe et la calculer

INDICATION : Effectuer une intégration par parties.

◇ [Rec04/convdominee-r4.tex/r4:406]

Posé en 2005 : CVD.60.

◆ **CVD.53** (*) CCP PC – 2004

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $x \in [0; n]$, $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^2 \leq e^{-x}$.
- 2) En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sin x dx$.

◇ [Rec04/convdominee-r4.tex/r4:122]

2) Simple application du TCD : la limite cherchée est $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = 1/2$.

1) Pour tout $t \in [0; 1]$, $1-t \leq e^{-t}$; on applique ça à x/n et on élève à la puissance n .

◆ **CVD.54** CCP PC – 2004

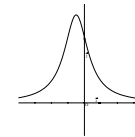
- 1) Existence pour $n \in \mathbb{N}^*$ de $a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t+t^2)^n} dt$.
- 2) Tracer la courbe de $f(t) = \frac{1}{1+t+t^2}$. Axe de symétrie ?
- 3) Démontrer que la série de terme général a_n diverge.

INDICATION : Utiliser $a_n \geq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t+t^2)^n} dt$.

- 4) Exprimer a_n en fonction de $w_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)^n} du$.
Relation entre w_n et w_{n+1} ?
- 5) Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$?

◇ [Rec04/convdominee-r4.tex/r4:418] (Déjà posé en 2003, CVD.35).

- 1) Le dénominateur ne s'annule pas (discriminant $-3 < 0$) et intégrande en $1/t^{2n}$.
- 2) La courbe est symétrique par rapport à $t = -\frac{1}{2}$ puisque les racines du trinôme sont j et j^2 de partie imaginaire $-\frac{1}{2}$. La courbe de la fonction est :



ce qui montre que la fonction est décroissante sur $[0; +\infty[$ et toujours inférieure à 1.

- 3) On écrit par exemple que

$$a_n \geq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+2t+t^2)^n} = \frac{1}{2n+1}$$

donc la série $\sum a_n$ diverge.

- 4) Le rayon est égal à 1.

À FINIR !!!

◆ **CVD.55** (*) CCP PC – 2004
 Notons $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{e^x - 1} dx$.

- 1) Domaine de définition
- 2) Calculer $I(1)$ en admettant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

◇ [Rec04/convdominee-r4.tex/r4:424]

$$I(1) = \int_0^{+\infty} \frac{x e^x}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^{+\infty} x e^x \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} dx$$

On écrit

puis on intègre terme à terme sans difficultés, puis par parties.

◆ **CVD.56** (*) Navale PC – 2004
 Trouver un équivalent de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

◇ [Rec04/convdominee-r4.tex/r4:132]

Changement de variable $y = x^n$, on trouve

$$u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{y^{1/n}}{1+y} dy \sim \frac{\ln 2}{n}.$$

◆ **CVD.57 (Noyau de la chaleur)** (**) X PC – 2005
 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{\pm\infty} f = 0$. Pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$P_t(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \exp \left(-\frac{(x-y)^2}{t} \right) dy.$$

On rappelle de plus que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$.

- 1) Montrer que $P_t(f)(x)$ est bien définie.
- 2) Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0} P_t(f)(x) = f(x)$.

◇ [Rec05/convdominee-r5.tex/r5:17]

(Cf. version plus complète au IP.34 page 629).

◆ **CVD.58** (**) Mines PC – 2005

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive, bornée et intégrable. On définit $\delta = \sup f$ et $I_n = \int_0^{+\infty} f^n$.

- 1) Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie.
- 2) Montrer que :
 - a) si $\delta > 1$, alors la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge ;
 - b) si $\delta < 1$, alors la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
- 3) Et si $\delta = 1$?

◇ [Rec05/convdominee-r5.tex/r5:35]

- 1) Soit $n \geq 1$. On a $0 < f^n < M^n \cdot f$ donc f^n est intégrable et I_n existe.
- 2) a) On suppose $\delta > 1$ et on pose $\delta' = \frac{1+\delta}{2}$. Il existe un intervalle $[a; b]$ sur lequel $f(x) \geq \delta'$ donc $I_n \geq (b-a) \delta'^n$ et cette dernière quantité tend vers $+\infty$.
- b) On suppose $\delta < 1$. Alors $0 \leq I_n \leq \delta^{n-1} I_1$ qui tend vers 0.

- 3) On a de toute façon $0 \leq f^{n+1} \leq f^n \leq f$ donc la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et donc converge.

L'exemple $f(x) = \max(1 - |x|, 0)$ montre que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ peut tendre vers 0.

L'exemple $f(x) \approx \Pi(x)$ (fonction « porte » légèrement élargie pour être continue) montre que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ peut tendre vers autre chose (ici, 1).

◆ **CVD.59** (*) Centrale PC – 2005

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } s \in [0; n] \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

- 1) Déterminer la limite simple (notée f) de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- 2) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x \, dx$.
- 3) Montrer que $(f - f_n)$ est bornée, et en déduire que $\|f - f_n\|_\infty = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

◇ [Rec05/convdominee-r5.tex/r5:57]

◆ **CVD.60** () CCP PC – 2005

? On pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)} \, dt$.

- 1) Montrer que f existe pour $x \in]0; +\infty[$.
- 2) Montrer que $e^x - 1 \geq x$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x)$.
- 3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$.
- 4) Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer l'existence de, et calculer : $J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1 - e^{-\sqrt{t}}} \, dt$.
- 5) Montrer que f est intégrable et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f = J$.

◇ [Rec05/convdominee-r5.tex/r5:11]

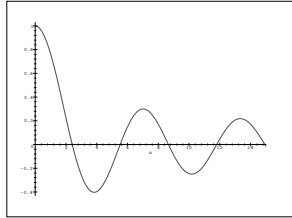
Déjà vu en 2004 : CVD.52.

◆ **IP.5 (Fonction J_0 de Bessel)**
 On définit la **fonction J_0 de Bessel d'ordre 0** sur \mathbb{R} par

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt.$$

Montrer que J_0 admet un zéro et un seul dans $[0, \pi]$ et que celui-ci est non nul, différent de π et strictement plus grand que $\pi/2$.

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:7]



On note que J_0 est dérivable et
 $J_0'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -\sin(x \sin t) \sin t dt$

ce qui montre que, pour tout $t \in]0, \pi[$, $J_0'(t) < 0$, donc J_0 est strictement décroissante sur $]0, \pi[$.

Par ailleurs, on a $J_0(0) = 1$. Il ne reste plus qu'à montrer que $J_0(\pi) < 0$.

Or

$$\begin{aligned} J_0(\pi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\pi \sin t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi \cos(\pi \sin t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\pi \sin t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos \pi y}{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2} \frac{\cos \pi y}{\sqrt{1-y^2}} dy + \frac{2}{\pi} \int_{1/2}^1 \frac{\cos \pi y}{\sqrt{1-y^2}} dy, \end{aligned}$$

et clairement la seconde intégrale est plus grande que la première.

Enfin, si $x = \pi/2$, $x \sin \theta = \frac{\pi}{2} \sin \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $\cos(x \sin \theta) \geq \cos \frac{\pi}{2} = 0$ donc $J_0(\pi/2) > 0$.

◆ **IP.6**
 Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^{\pi/2} t^x \ln(\tan t) dt$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]-1; +\infty[$.

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:8]

◆ **IP.7** (**)
 Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = 0.$$

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:9]

On intègre par parties :

$$\frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = -\frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt + \frac{1}{x} [tF(t)]_0^x,$$

Or F admet une limite en $+\infty$, donc on montre (avec des ε comme chez Césaire) que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt = F(+\infty).$$

◆ **IP.8** (**)
 Soient $\alpha, \beta > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt$ en utilisant le théorème de dérivation d'une intégrale paramétrée (on montrera qu'on peut utiliser $x = \beta/\alpha$ comme unique paramètre, et imposer $x \geq 1$).

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:10]

On impose $\beta > \alpha$, donc $x \in [1; +\infty[$. Alors

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-xu}}{u} du.$$

On note

$$f : \left[\begin{array}{l}]1; +\infty[\times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}, \end{array} \right.$$

et on remarque que f est continue et vérifie HD locale (en posant $\phi_\alpha(t) = f(\alpha, t)$ et en dominant f par ϕ_α sur $[1, \alpha] \times]0; +\infty[$.

De plus, $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe, est continue et vérifie HD sur $]1; +\infty[$ par $t \mapsto e^{-t}$.

On a donc (th. de dérivation sous le signe somme) : g est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1; +\infty[$ et

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

On en déduit que $g(x) = \ln x + C^{\text{te}}$. De plus, $g(1) = 0$, donc $g(x) = \ln x$. D'où

$$I(\alpha, \beta) = g\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \ln \frac{\beta}{\alpha} = \ln \beta - \ln \alpha$$

si $0 < \alpha \leq \beta$, et $I(\alpha, \beta) = -I(\beta, \alpha) = \ln \beta - \ln \alpha$ dans le cas contraire, soit au total

$$I(\alpha, \beta) = |\ln \beta - \ln \alpha|.$$

◆ **IP.9 (T.F. de la lorentzienne)** (***)
 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales suivantes sont bien définies, en exposant lesquelles sont définies au sens de Lebesgue et lesquelles le sont au sens d'une intégrale impropre :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt, & g(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t \sin xt}{1+t^2} dt, \\ h(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t \sin xt}{(1+t^2)^2} dt, & k(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{(1+t^2)^2} dt. \end{aligned}$$

Montrer de plus que

- 1) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xf(x) = 2h(x)$;
- 2) h est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et $h' = f - k$;
- 3) k est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et $k' = -h$;
- 4) f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$ et $f'' = f$;
- 5) pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}.$$

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:11]

g est définie par une intégrale impropre.

2) Théorème de dérivation (H vérifie HD et $\frac{\partial H}{\partial x}$ aussi).

3) Théorème de dérivation pareil.

1) On considère un intervalle $[0, T]$ et on effectue une intégration par parties :

4) Déduit des questions précédentes.

5) Immédiat pour f , attention pour g : il faut prendre des limites.

◆ **IP.10** (**)
 Déterminer le domaine de définition et donner une expression simple de

$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt.$$

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:14]

On commence par noter que $f(0) = 0$.

Pour $x \neq 0$, on définit $\phi : (x, t) \mapsto \frac{t^x - 1}{\ln t}$. Alors

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &\sim \frac{-1}{\ln t} \quad [t \rightarrow 0^+] \quad \text{si } x > 0, \\ &\sim \frac{t^x}{\ln t} \quad [t \rightarrow 0^+] \quad \text{si } x < 0. \end{aligned}$$

On calcule de plus $\frac{\partial \phi}{\partial x} = e^x \ln t$. Alors si $-1 < a < 0$, on a

$$0 < \frac{\partial \phi}{\partial x} \leq t^a \quad \forall x \in [a; +\infty[, \forall t \in [0; 1],$$

or $t \mapsto t^a$ est intégrable, donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall x \in]-1; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{x+1},$$

De plus $\phi(t, x) \sim x \quad [t \rightarrow 1]$, ce qui montre que f est bien définie si et seulement si $x > -1$ (règle de Bertrand).

ce qui montre finalement que $f(x) \ln(x+1) + C^{\text{te}} = \ln(x+1)$.

◆ **IP.11 (Intégrale gaussienne)** (**)
 On pose $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$, et $g : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- 1) Exprimer f en fonction de g (on calculera pour cela f').
- 2) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:15]

On pose

$$\phi : \left[\begin{array}{l} \mathbb{R} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+y^2)}}{1+y^2}, \end{array} \right.$$

est dérivable et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) dt = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2g'(x)g(x), \end{aligned}$$

ce qui montre que $f + g^2 = C^{\text{te}} = \frac{\pi}{4}$ et enfin, puisque

$$f(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = e^{-x^2} \frac{\pi}{4},$$

qui est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \times [0; 1]$. Comme on n'intègre que sur un segment, f on en déduit $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et l'intégrale voulue vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

◆ **IP.12**
 Étudier la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} e^{-t} dt$.

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:16] Existe et est dérivable sur ℝ, de dérivée

f'(x) = ∫_0^{+∞} (sin tx / t) e^{-t} dt,

qui est positive si x est positif et négative si x ≤ 0 (la fonction f est d'ailleurs paire), donc la fonction est croissante sur ℝ+, nulle en 0. On effectue un changement de variable y = xt, alors

f'(x) = |x| ∫_0^{+∞} (1 - cos y / y^2) e^{-y/x} dy.

◆ IP.13 (Produit de convolution) On note K(ℝ) l'ensemble des fonctions continues sur ℝ dont le support supp f = {x ∈ ℝ; f(x) ≠ 0} est borné.

- 1) Montrer que K(ℝ) est un sous-espace vectoriel de C(ℝ).
2) Pour tout couple (f, φ) ∈ C(ℝ) × K(ℝ), on note f * φ la convoluée de f par φ :

(f * φ)(x) = ∫_{-∞}^{+∞} f(t) φ(x - t) dt.

Montrer que f * φ ∈ C(ℝ).

- 3) Montrer que K(ℝ) est stable par convolution, c'est-à-dire que si φ, ψ ∈ K(ℝ) alors φ * ψ ∈ K(ℝ).
4) Montrer que, pour tout φ, ψ ∈ K(ℝ), on a

∫_{-∞}^{+∞} π * ψ(x) dx = ∫_{-∞}^{+∞} φ(x) dx × ∫_{-∞}^{+∞} ψ(x) dx.

- 5) Montrer que * est une loi de composition associative et commutative (ψ * φ = φ * ψ) dans K(ℝ).

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:17]

◆ IP.14 (Fonctions de Bessel)

Soit z ∈ ℤ. On définit la fonction J_n : ℝ → ℝ par

J_n(x) = 1/π ∫_0^π cos(nt - x sin t) dt.

- 1) Montrer que J_n est définie sur ℝ. Quelle est sa parité?
2) Exprimer J_{-n} en fonction de J_n.
3) Montrer que J_n est de classe C^∞ sur ℝ.
4) Montrer que J'_n(x) = ∫_0^π (cos t) [(n - x cos t) cos(nt - x sin t)] dt. En déduire que J_n est solution de l'équation différentielle linéaire homogène

x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:18] Voir également exercice EDL67 page 684.

- 1) Paire si n est pair, impaire si n est impair.
2) J_{-n}(x) = J_n(-x) pour tout x ∈ ℝ et tout n ∈ ℕ.
3) On est sur un segment, aucun problème particulier.
4) Dériver, on obtient

J'_n(x) = 1/π ∫_0^π sin t sin(nt - x sin t) dt

puis effectuer une intégration par parties. Ensuite, on dérive la formule ci-dessus pour obtenir

J''_n(x) = 1/π ∫_0^π -sin^2 t cos(nt - x sin t) dt

et on met tous les termes ensemble, après réduction on a

x^2 J''_n(x) + x J'_n(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = -n/π ∫_0^π (n - x cos t) cos(nt - x sin t) dt = -n/π [sin(nt - x sin ty)]_0^π = 0.

◆ IP.15 (*)

On pose, pour tout x ∈ [-1, 1] :

J(x) = ∫_0^{π/2} dt / sqrt(sin^2 t + x^2 cos^2 t) et K(x) = ∫_0^{π/2} cos t dt / sqrt(sin^2 t + x^2 cos^2 t).

Calculer K(x) pour tout x ∈ [-1, 1] \ {0}. Montrer que J(x) - K(x) -> ln 2. En déduire que J(x) = -ln|x| + 2 ln 2 + o(1) [x -> 0].

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:19]

puis par c.v. y = sqrt(1-x^2)/x, on obtient

K(x) = 1/sqrt(1-x^2) ∫_0^{sqrt(1-x^2)} 1/(1+y^2) dy = 1/sqrt(1-x^2) Arg sh((sqrt(1-x^2))/x) = 1/sqrt(1-x^2) [ln(1+sqrt(1-x^2)) - ln|x|].

Par changement de variable φ^1 u = sin t on trouve

K(x) = ∫_0^1 1/sqrt(u^2(1-x^2)+x^2) du,

Ensuite (cf. le poly de Jacques).

◆ IP.16 (Intégrale de Poisson) (**)

Pour tout ρ ∈ ℝ, |ρ| ≠ 1, on pose I(ρ) = ∫_0^π ln(1 - 2ρ cos θ + ρ^2) dθ.

- 1) Comparer I(ρ) et I(1/ρ).
2) Montrer que I(-ρ) = I(ρ).
3) Montrer que I(ρ^2) = 2I(ρ).
4) En déduire que, pour ρ ∈]-1; 1[, on a I(ρ) = 0.
5) En déduire I(ρ) pour tout ρ ∈ ℝ \ {-1, 1}.

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:20]

On a

∀x ∈]-1; 1[\ {0}, I(1/ρ) = I(ρ) - 4π ln |ρ|

On a

2I(ρ) = I(ρ) + I(-ρ) = ∫_0^π ln((1+2ρ cos θ + ρ^2)(1-2ρ cos θ + ρ^2)) dθ = ∫_0^π ln(1-2ρ^2 cos 2θ + ρ^4) dθ = 1/2 ∫_0^{2π} ln(1-2ρ^2 cos θ + ρ^4) dθ = 1/2 (I(-ρ^2) + I(ρ^2)) = I(ρ^2).

On en déduit I(ρ) = 1/2n I(ρ^{2n}) doc par continuité en 0, I(ρ) = 0 pour tout ρ ∈]-1; 1[.

D'où I(ρ) = 2π ln |ρ| pour |ρ| > 1.

◆ IP.17 (Calcul de ∫_0^{+∞} (sin t)/t dt) (♣)

On pose F(x) = ∫_0^{+∞} e^{-tx} sin t/t dt pour tout x > 0. Calculer F' et en déduire, en admettant qu'elle existe, la valeur de lim_{x->∞} ∫_0^x sin t/t dt. Proposer une généralisation.

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:0]

On vérifie (hypothèse de domination locale) que F est de classe C^1. On a alors

F'(x) = -∫_0^{+∞} e^{-tx} sin t dt = ℑ(-∫_0^{+∞} e^{-(x+i)t} dt) = ℑ(1/(x+i)) = -1/(x^2+1)

donc F(x) = -Arctan x + C. Or F(+∞) = 0 par le théorème de convergence dominée, donc F(x) = π/2 - Arctan x.

Posons φ(x) = ∫_0^x sin t/t dt. L'énoncé nous indique que φ admet une limite en +∞; par conséquent, φ étant continue sur [0; +∞[, elle est bornée.

Soient A > 0 et x > 0. On a ∫_0^A e^{-xt} sin t/t dt = e^{-xA} φ(A) + x ∫_0^A e^{-xt} φ(t) dt.

Mais puisque φ est bornée, l'application t ↦ e^{-xt} φ(t) est intégrable sur ℝ+ et le terme de bord admet une limite nulle quand A -> +∞.

Cela prouve que, pour tout x > 0, on peut effectuer une intégration par parties sur F et écrire

F(x) = x ∫_0^{+∞} e^{-xt} sin t/t dt = ∫_0^{+∞} e^{-u} φ(u/x) du.

Posons alors

g(u, x) = { φ(u/x) si x > 0, +∞ φ si x = 0 }

et posons également F(0) = lim_{x->∞} φ.

On a alors :

∀x ≥ 0 F(x) = ∫_0^{+∞} e^{-u} g(u, x) du.

Par ailleurs, pour tout u > 0, la fonction x ↦ e^{-u} g(u, x) est continue sur ℝ+ et elle est dominée par u ↦ ||φ||_∞ e^{-u}. Cela prouve la continuité de F en 0.

On montre de la même façon que, si f est une fonction dont l'intégrale impropre sur [0; +∞[existe, alors

F : x ↦ ∫_0^{+∞} e^{-xt} f(t) dt

est définie sur ℝ+ et continue sur ℝ+, notamment en 0.

◆ **IP.18 (sinc est \mathcal{C}^∞)** (L)

Calculer $\int_0^1 \cos(xt) dx$. En déduire que l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:25]
On vérifie que

$$\int_0^1 \cos(xt) dx = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

L'application $\phi : \mathbb{R} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto \cos(xt)$ est définie et conti-

nue. On intègre sur un compact, donc $t \mapsto \int_0^1 \cos tx dx$ est continue. De plus, ϕ admet une dérivée partielle par rapport à t de n'importe quel ordre, continue sur $\mathbb{R} \times [0; 1]$. Comme on intègre sur un compact, g est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} et

$$g^{(k)}(t) = \int_0^1 \frac{\partial^k \phi}{\partial t^k}(t, x) dx.$$

◆ **IP.19 (T.F. de la gaussienne)** (**)

Existence, continuité et dérivabilité de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$. Calculer f' ; montrer que f est solution d'une équation différentielle simple. En déduire f .

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:22]

Par convergence dominée, f est définie sur \mathbb{R} et $\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| \leq te^{-t^2}$ qui est intégrable, donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . De plus,

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(tx) dt.$$

On intègre par parties avec $u = \sin(tx)$ et $v = \frac{1}{2}e^{-t^2}$, donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= - \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(tx) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(tx) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} x \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t^2} dt \\ &= -\frac{x}{2} f(x). \end{aligned}$$

On en déduit que f est solution de $2y' + xy = 0$ soit

$$f(x) = \alpha \exp \left\{ \int -\frac{x}{2} dx \right\} = \alpha e^{-x^2/4}.$$

De la valeur de $f(0) = \sqrt{\pi}/2$ on tire

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{4} \right).$$

◆ **IP.20 (Recherche d'équivalent de Γ)** (**)

On cherche un équivalent en $+\infty$ de $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$.

- En utilisant le changement de variable $t = x + u\sqrt{x}$, montrer que

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u) du,$$
 où $f(x, u)$ est une fonction à préciser, nulle pour tout couple (x, u) tel que $u \leq -\sqrt{x}$.
- Déterminer la limite de f , à u fixé, quand x tend vers $+\infty$.
- Si $x \geq 1$, montrer que pour tout $u \geq 0$, on a $0 < f(x, u) \leq (1+u)e^{-u}$.
- Montrer que, pour tout $u \in]-\sqrt{x}, 0]$, on a $0 < f(x, u) \leq e^{-u^2/2}$.
- Conclure que $\Gamma(x+1) \sim \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$, puis que $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:21]

5) On pose

$$\begin{aligned} 1) \text{ On pose } f(x, u) &= \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} \text{ si } u \geq -\sqrt{x}. \\ 2) f(x, u) &= \exp \left\{ x \ln \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right) - u\sqrt{x} \right\} = e^{-u^2/2 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-u^2/2}. \end{aligned}$$

3) On pose $F(t) = \ln(1+t) - x \ln(1+t/\sqrt{x}) - t(\sqrt{x}-1)$. Alors F est \mathcal{C}^1 et $F'(t) = (\sqrt{x}-1)t^2/(t+1)(t+\sqrt{x}) \geq 0$ donc F croissante et $F(0) = 0$. La croissance de l'exponentielle permet de conclure.

4) On pose $G :]-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \ln(1+u) - u + u^2/2$. Une simple étude montre que G croissante, $G(0) = 0$, donc $G \leq 0$. On pose $u = t/\sqrt{x}$ et on conclut avec la croissance de l'exponentielle.

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-t^2/2} & \text{si } t \leq 0, \\ (1+t)e^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Alors ϕ est intégrable et, pour tout $(x, t) \in [1; +\infty[\times \mathbb{R}$, on a $0 \leq f(x, u) \leq \phi(t)$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

◆ **IP.21** (*)

On pose $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+x^2t^2)^2} dt$. Pour quelles valeurs de x la fonction f est-elle définie? Montrer que $-2xf$ est la dérivée d'une fonction simple. En déduire f .

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:23]

f est définie pour tout $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ donc f est définie sur \mathbb{R} .

De plus

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2t^2 x}{(1+x^2t^2)^2} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1+t^2x^2} dt \\ &= \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} dt = \frac{d}{dx} \frac{\pi}{|x|} = \frac{-\pi}{x|x|}. \end{aligned}$$

(Ceci est possible grâce à une hypothèse de domination locale avec $x \in [a; b]$; en zéro, pas de problème, et vers l'infini on écrit que

$$\left| \frac{2t^2 x}{(1+x^2t^2)^2} \right| \leq \frac{2b}{a^4 t^3}$$

qui est intégrable, ce qui montre HDL.)

On en déduit que $f(x) = \frac{\pi}{2x^2|x|}$.

◆ **IP.22**

Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch} 2xt dt$ est de classe \mathcal{C}^1 et est solution de l'équation différentielle $y' - 2xy = 0$.

En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch} 2xt dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}$.

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:24]

◆ **IP.23**

Notons F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x \cos^2 t + \sin^2 t) dt$. Montrer que F est dérivable sur $]0; +\infty[$. Calculer et simplifier F' et en déduire F .

Pour $a, b \in \mathbb{R}^*$, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t) dt$.

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:27]

◆ **IP.24 (Contre-exemple)**

On pose, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x, t) = \begin{cases} \exp \left\{ -\frac{\pi(t-1/x)^2}{2} \right\} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Étudier sur \mathbb{R} la continuité de l'intégrale

$$F(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dt.$$

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:28]

Pour tout $x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(x, t)$ est intégrable et

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dt = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{*+}.$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x, t)$ est continue. On n'arrive cependant pas à montrer de domination, puisque f présente une bosse en $y = 1/x$ et que donc $\|f(x, \cdot)\|_\infty = 1$ pour tout $x \neq 0$.
De fait, $F(0) = 0$ car $f(0, t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On n'a donc pas continuité.

◆ **IP.25 (Produit de convolution)** (*)

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues, f intégrable et g bornée. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt.$$

- Montrer que ϕ est continue.
- Montrer que si f est de classe \mathcal{C}^1 et si f' est intégrable, alors ϕ est de classe \mathcal{C}^1 .

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:33]

1) Simple application du théorème de Leibniz.

2) On écrit $\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt$.

◆ **IP.26** (**)

On pose, sur $\mathbb{R} : F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos tx}{t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos tx}{t\sqrt{1+t^2}} dt$.

- Montrer que les intégrales précédentes sont définies sur \mathbb{R} et calculer $F(x)$ en fonction de $F(1)$.
- Montrer que $F - G$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . En déduire que G est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* mais n'est pas dérivable en 0.

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:34]

Joli exercice pour faire de la domination par une fonction continue par morceaux.

Aucun problème de définition sur \mathbb{R} si on considère à part le cas $x = 0$. Un simple changement de variable montre que, si $x > 0$, on a $F(x) = xF(1)$. Par

parité, on a $F(x) = |x| F(1)$. On a également continuité des deux fonctions.

On regarde la dérivée par rapport à x de l'intégrande, qui est

$$t \sin tx \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \right),$$

c'est une fonction continue sur $\mathbb{R} \times [0; +\infty[$.

On domine cette fonction sur $[1; +\infty[$ par

$$t \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \right),$$

qui est bien intégrable sur $[1; +\infty[$ car $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et sur $[0; 1]$ (en majorant

$\sin tx \leq tx \leq t$) par

$$t^2 \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \right),$$

qui est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable.

Ainsi, $F - G$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Donc G n'est pas dérivable en 0.

♦ IP.27 (Transformée de Fourier de f') (**)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1) On suppose que f et f' sont sommables : $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{\pm\infty} f = 0$.

2) On définit la **transformée de Fourier** de f par

$$\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ \nu \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx. \end{cases}$$

Montrer que la transformée de Fourier de f' est $\tilde{f}' : \nu \mapsto 2i\pi\nu\tilde{f}(\nu)$.

3) Proposer une généralisation aux dérivées d'ordre supérieur.

◇ [Divers/intparamexo.tex/int2:48]

2) On écrit

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f'(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \left[f(x) e^{-2i\pi\nu x} \right]_{-R}^R + \int_{-R}^R (2i\pi\nu) f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (2i\pi\nu) f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx = (2i\pi\nu)\tilde{f}(\nu). \end{aligned}$$

1) f' étant intégrable, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_0^x f'$ existe, donc f admet une limite en $\pm\infty$ et cette limite vaut nécessairement 0 puisque f est intégrable.

♦ IP.28 (***))

Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$.

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:35]

De plus, si $x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{f(x)}{x} = \int_{1/x}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du \\ &= \frac{1}{x} \left[-\frac{\cos u}{u^3} \right]_{1/x}^{+\infty} - \frac{1}{x} \int_{1/x}^{+\infty} \frac{2 \cos u}{u^3} du, \end{aligned}$$

Regardons de plus près ce qui se passe en 0, car aucun théorème du cours ne permet de conclure.

La fonction est paire et ne saurait admettre, comme prolongement en 0, que la valeur 0 car $|f(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ce qui montre que f admet une dérivée nulle à droite en 0, donc par parité une dérivée nulle à gauche aussi, donc f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(0) = 0$.

♦ IP.29 (Recherche d'équivalent) (**)

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt$. Trouver un équivalent de F en 0^+ .

◇ [Divers/intparamexo.tex/ip:36]

(Utilisé dans l'exercice **SRF.32** page 475 pour obtenir un équivalent de $\zeta(1+x)$ en 0.)

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} = C^{\text{te}},$$

et de plus

$$\int_0^1 \frac{t^x}{e^t - 1} dt \sim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$$

puisque la différence des intégrandes est intégrable quand $x = 0$, donc est bornée par continuité d'une intégrale à paramètres, et que chaque intégrale diverge vers $+\infty$.

♦ IP.30

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $f(x) = x u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

◇ [Divers/intparamexo.tex/div:100]

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt$$

Pour tout $x \neq 0$, on écrit que

et on effectue le changement de variable $t = sx$ pour obtenir

$$f(x) = x \cdot \int_0^1 f'(sx) ds.$$

On pose alors

$$u(x) = \int_0^1 f'(sx) ds$$

dont on montre, en utilisant de manière répétée le théorème de dérivation sous le signe somme, qu'elle est de classe \mathcal{C}^∞ .

♦ IP.31 (Un contre-exemple au théorème de Leibniz)

On définit, sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, la fonction f par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{y^2} e^{-x^2/y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

1) Calculer $g(x) = \int_0^1 f(x, y) dy$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Calculer $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$ pour tout $x \neq 0$, puis en $x = 0$. Commenter.

◇ [Divers/intparamexo.tex/div:25b]

f est une fonction continue de chacune de ses variables, l'autre étant fixée.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (y compris pour $x = 0$), on a

$$g(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^1 f(x, y) dy = x e^{-x^2}.$$

On peut donc dériver g sur \mathbb{R} et obtenir

$$g'(x) = (1 - 2x^2) e^{-x^2},$$

et notamment $g'(0) = 1$.

Par ailleurs, pour $x = 0$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^+$; et donc

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) dy = 0 \neq g'(0)$$

On pourra remarquer qu'ailleurs qu'en $x = 0$, on a le résultat attendu puisque, pour tout $x \neq 0$,

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy = \int_0^1 e^{-x^2/y} \left(\frac{3x^2}{y^2} - \frac{2x^4}{y^3} \right) dy = e^{-x^2} (1 - 2x^2).$$

♦ IP.32 (***))

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^2 e^{ix^2 t^2}}{t^2 + 1} dt$.

2) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{ix^2 t^2}}{t^2 + 1} dt$.

◇ [Divers/intparamexo.tex/div:148]

1) On écrit

$$\int_0^1 \frac{t^2 e^{ix^2 t^2}}{t^2 + 1} dt = \int_0^1 \underbrace{\frac{t}{2(t^2 + 1)}}_v \underbrace{2t e^{ix^2 t^2}}_{u'} dt$$

et on effectue une intégration par parties, qui majore l'intégrale par C^{te}/x^2 . Ou bien on pose $y = t^2$ et on applique directement Riemann-Lebesgue puisque l'intégrande est \mathcal{C}^1 .

2) On a

$$\int_0^1 e^{ix^2 t^2} dt = \frac{1}{x} \int_0^x e^{iy^2} dy \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{x},$$

donc tend vers 0. Or

$$\int_0^1 \frac{e^{ix^2 t^2}}{t^2 + 1} dt = \int_0^1 e^{ix^2 t^2} dt - \int_0^1 \frac{t^2 e^{ix^2 t^2}}{t^2 + 1} dt$$

donc tend vers 0.

Remarque : on ne peut pas utiliser la méthode présentée dans la question précédente...

♦ IP.33 (Équivalent d'une T.F.) (**)

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R})$ telle que f et f' soient intégrables.

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) \sin(xt) dt = \frac{f(0)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) On suppose que f est de classe \mathcal{C}^3 et que f'' est intégrable. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt = -\frac{f'(0)}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

4) Peut-on affaiblir les hypothèses précédentes ?

◇ [Divers/intparamexo.tex/div:183]

1) Classique : $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$.

2) On effectue une intégration par parties, en utilisant le résultat précédent :

$$\int_0^{+\infty} f(t) \sin(xt) dt = \frac{f(0)}{x} + \underbrace{\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \cos(xt) f'(t) dt}_{\rightarrow 0}$$

grâce au lemme de Lebesgue qui se démontre bien par une seconde intégration par parties et le fait que $f'' \in L^1$.

3) Idem avec deux intégrations par parties :

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt = -\frac{f'(0)}{x^2} - \frac{1}{x^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \sin(xt) f''(t) dt}_{\rightarrow 0}$$

4) Le lemme de Lebesgue doit pouvoir se démontrer même si f est de classe un cran en dessous, par densité et epsilonïneries.

◆ **IP.34 (Noyau de la chaleur)** (★★★) X PC – 2005

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{\pm\infty} f = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ on pose :

$$\rho_t(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2t}\right] dy.$$

1) Montrer que $\rho_t(f)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \rho_t(f)(x) = f(x).$$

2) On suppose de plus que $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que, pour tout $i \in \{0, \dots, 3\}$, on a $\lim_{\pm\infty} f^{(i)} = 0$. Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\rho_t(f)(x) - f(x)}{t} \right\} = \frac{f''(x)}{2}.$$

◇ [Rec00/intparam-r0.tex/div:154]

- Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = (x-y)/\sqrt{t}$ et d'utiliser le théorème de convergence dominée.
- La fonction f''' est bornée car continue et de limites nulles. On note $M = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f'''(s)|$ et on utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange : pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| f(y) - f(x) - (y-x)f'(x) - \frac{(y-x)^2}{2}f''(x) \right| \leq \frac{|y-x|^3}{6} \cdot M.$$

Posons

$$g(y) = f(y) - f(x) - (y-x)f'(x) - \frac{(y-x)^2}{2}f''(x),$$

on a notamment

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = 0 \quad \text{et} \quad g'''(y) = f'''(y).$$

En utilisant le fait que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2/2t} dy = 1,$$

on écrit que

$$\frac{\rho_t(f)(x) - f(x)}{t} = \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(y) - f(x)] e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy.$$

Utilisons alors le fait qu'une intégrale sur \mathbb{R} d'une fonction impaire intégrable est nulle, on obtient que le membre de droite vaut également

$$\frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(y) - f(x) - (x-y)f'(x)] e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy$$

ou encore

$$\frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[g(y) + \frac{(y-x)^2}{2} \right] e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy$$

Le premier terme tend vers 0 (simple majoration puisque l'on sait contrôler g). Quant au second terme, on peut l'écrire en sortant la constante $f''(x)$ puis en effectuant un changement de variable $s = y - x$:

$$f''(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{t} e^{-s^2/2t} dt = \frac{1}{2} f''(x)$$

après une intégration par parties.

◆ **IP.35** (★) X PC – 2005

Soit $f :]0; +\infty[$ une fonction continue et bornée. On note

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) dx,$$

montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} tF(t) = f(0)$.

◇ [Rec00/intparam-r0.tex/div:173]

ractérisation séquentielle. Cf. **CVD.17** page 606.

Application immédiate du th. de convergence dominée avec $y = tx$ puis ca-

◆ **IP.36** (★★★) X PC – 2005

Notons $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{e^t + 1} dt$.

- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + x^2}.$$

- Donner un équivalent de f en $+\infty$.
- QdW** : Montrer que f est décroissante et convexe.

◇ [Rec00/intparam-r0.tex/div:169]

On intervertit donc limite et intégrale :

- On a $f(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) dt$, où l'on a défini

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} e^{-kt} \cos xt.$$

On peut dominer par le CSA (à t fixé) :

$$|g_n(t)| \leq e^{-t}.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} e^{-kt} \cos xt dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} k}{k^2 + x^2}. \end{aligned}$$

2) Cf. exercice **IP.33** page 628.

On effectue deux intégrations par parties successives : on obtient, en notant $g : t \mapsto \frac{1}{e^t + 1}$:

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \underbrace{f''(t) \cos(xt)}_{\rightarrow 0 \text{ (Lemme de Lebesgue)}} dt - \frac{g'(0)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

puisque $g'(0) = -1/4$.

Conclusion : $f(t) \sim \frac{1}{4x^2}$.

3) On dérive une ou deux fois sous le signe somme et on évalue le signe de l'intégrale grâce à des séries alternées : on trouve alors $f' < 0$ et $f'' > 0$.

◆ **IP.37** (★★) Mines – 1988

Existence, continuité, dérivabilité de

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} dt.$$

◇ [Rec00/intparam-r0.tex/ip:12]

En zéro, tout va bien, en l'infini aussi : G existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, domination locale sur $]a; b[\subset]0; +\infty[$ en posant

$$\phi_{[a;b]}(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos bx}{t^2} & \text{si } 0 < t < \frac{\pi}{2b} \\ \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq \frac{\pi}{2b} \end{cases}$$

Ce qui montre la continuité sur \mathbb{R}^+ et même $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 0$.

On pose ensuite $g(x, t) = \frac{1 - \cos tx}{t^2}$, qui vérifie donc HD locale, mais

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{t \sin tx}{t^2} = \frac{\sin tx}{t}.$$

Et clairement ceci ne vérifie pas la domination, fût-ce localement.

On ne peut a priori rien dire sur la dérivabilité...

En fait, un petit changement de variable $u = xt$ montre que, si $x \geq 0$, on a

$$G(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} du = xG(1)$$

donc, puisque G est paire : $G(x) = |x| G(1)$. Il ne reste qu'à calculer G(1), ou bien montrer que $G(1) \neq 0$. Pour cela, on intègre par parties en faisant attention :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

C'est donc bien la preuve que G n'est pas dérivable en 0!

◆ **IP.38 (Intégrale de Poisson)** (★★★) Mines MP – 2000

On définit, pour tout $\rho \in \mathbb{R}^{*+} \setminus \{1\}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$F(\rho, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln |e^{it} - \rho e^{i\theta}| dt.$$

- Montrer que F ne dépend pas de θ .
- En notant $G(\rho) = F(\rho, 0)$, et en calculant $G'(\rho)$, en déduire F. (On se reportera à l'exercice **IP.4**)

◇ [Rec00/intparam-r0.tex/ip:3]

On se réfère alors à la correction exercice **IP.4**.

On reconnaît du Poisson ! En effet,

$$F(\rho) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\rho \cos t + \rho^2) dt.$$

◆ **IP.39** (♣) Mines MP – 2000

On définit la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{(t-y)^2 + x^2} dt. \end{cases}$$

Quel est le domaine de définition de f ? Calculer f .

◇ [Rec00/intparam-r0.tex/ip:4]

avec

Il faut $x \neq 0$. Avec un changement de variable,

$$f(x, y) = \frac{e^{iy}}{x} \int \frac{e^{itx}}{t^2 + 1} dt = \frac{e^{iy}}{x} h(x),$$

$$h(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{t^2 + 1} dt.$$

Malheureusement le calcul de la T.F. de la lorentzienne n'est pas aisé. On se reportera à l'exercice **IP.9** ou à **IP.67**.

◆ **IP.40** (ENSI – 1988)

Existence, continuité, dérivabilité et calcul de

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2 + 1} dt.$$

(Voir exercice **IP.11**.)

◇ [Rec00/intparam-r0.tex/ip-r:13]
 On pose $G(x, t) = \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$, alors

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, t) = 2xe^{-(t^2+1)x^2},$$

ce qui montre que $g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2f'(x)f(x)$, ce que l'on sait bien sûr intégrer...

◆ **IP.41** X MP – 2001

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-|x+u^2|}}{1+u^2} du$.

- 1) Montrer que F est définie et continue sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que F est intégrable sur \mathbb{R} .
- 3) Montrer que $\int_0^{+\infty} F(x) dx = 2\pi$.

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:7]

◆ **IP.42** INT MP – 2001

Intégrabilité et calcul de $\int_0^1 x^{k-1} \ln x dx$ avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:7] Une récurrence montre que $\int_0^1 x^{k-1} \ln x dx = -\frac{1}{k^2}$.

◆ **IP.43** Mines MP – 2001

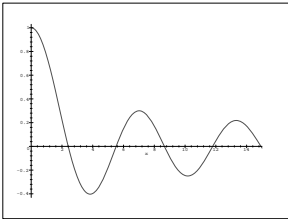
On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-tx} dt$. Domaine de définition? Continuité? La fonction f est-elle \mathcal{C}^1 ? Trouver une équation différentielle vérifiée par f . En déduire f . À partir de l'expression initiale, trouver $\lim_{+\infty} f$.

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:3]

◆ **IP.44 (Annulations de J_0)** Mines PC – 2001

On pose $f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$. Nombre d'annulations de f sur $[\pi/2; \pi]$?

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:4]



ce qui montre que, pour tout $x \in]0; \pi[$, $J_0(x) < 0$, donc J_0 est strictement décroissante sur $]0; \pi[$.
 Par ailleurs, on a $J_0(0) = 1$. Il ne reste plus qu'à montrer que $J_0(\pi) < 0$.
 Or

$$J_0(\pi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\pi \sin t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi \cos(\pi \sin t) dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\pi \sin t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos \pi y}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2} \frac{\cos \pi y}{\sqrt{1-y^2}} dy + \frac{2}{\pi} \int_{1/2}^1 \frac{\cos \pi y}{\sqrt{1-y^2}} dy,$$

et clairement la seconde intégrale est plus grande en valeur absolue que la première (la première est inférieure à $\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$ et la seconde plus grande que cette valeur, trouvée en mettant le dénominateur à $\sqrt{1-1/4}$).
 Enfin, si $x = \pi/2$, $x \sin \theta = \frac{\pi}{2} \sin \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $\cos(x \sin \theta) \geq \cos \frac{\pi}{2} = 0$ donc $J_0(\pi/2) > 0$.

On note que J_0 est dérivable et

$$J_0'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -\sin(x \sin t) \sin t dt$$

◆ **IP.45** Centrale MP – 2001

On pose $\phi(x) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+x} dt$.

- 1) Montrer que ϕ est définie pour $x > 0$.
- 2) Continuité et dérivabilité de ϕ ?
- 3) Calculer $\phi(1)$. On rappelle que $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2 = \pi^2/6$.
- 4) On pose $f : x \mapsto \phi(x) + \phi(1/x)$. Calculer f' . En déduire f .

INDICATION : Pour la question 2, effectuer le changement de variable $t = ux$.

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:5] 3) On développe en série entière.
 1) 4)
 2)

◆ **IP.46 (Valeur de $\int_0^{+\infty} (\sin t)/t dt$)** (★★★) Centrale MP – 2001

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$.

- 1) Montrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$.
- 2) Montrer que f et g vérifient $y'' + y = 1/x$.
- 3) Montrer que f et g sont continues en 0.
- 4) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$.

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:6] (Cf également IP.80, IP.78, IP.116 et IP.115).

1) On peut écrire également

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt$$

$$= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt, \quad (*)$$

ce qui permet de dériver g sans problème et de vérifier que g est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$.
 On montre que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$ par une domination locale.
 2) Simple calcul.
 3) On en déduit que f et g diffèrent simplement, sur $]0; +\infty[$, d'une combinaison linéaire du type $A \sin + B \cos$.

Or, on peut montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$ par une domination sur $]0; +\infty[$ de l'intégrande par $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.
 L'expression développée (*) de g permet de montrer très facilement que g est continue en 0, puisque la divergence de la dernière intégrale n'est « que » logarithmique.
 4) On remarque que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par simple convergence dominée ou majoration bête, et de plus en écrivant g sous la forme développée (*) ci-dessus, on a également $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. On en déduit que $f(x) = g(x)$ pour tout $x > 0$.
 On prend les limites en 0 :

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

◆ **IP.47** Centrale MP – 2001

On pose $f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x t dt$.

- 1) Domaine de définition, continuité, dérivabilité de f ?
- 2) On pose $\phi(x) = x f(x) f(x-1)$. Montrer que ϕ est 1-périodique.
- 3) Montrer que $x \mapsto \phi(x)/x$ est décroissante.
- 4) Montre que ϕ est constante.
- 5) Équivalent de f en $-1+$ et en $+\infty$.

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:8]

◆ **IP.48** Mines MP – 2001

On définit $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et on pose $k = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

- 1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{*+} .
- 2) On pose $h(x) = ke^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$. Montrer que $f = h$.
- 3) Calculer k .

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:9]

◆ **IP.49 (Intégrale gaussienne — CLASSIQUE)** CCP PC – 2001

On définit, lorsqu'elles existent, $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- 1) Montrer que f et g sont bien définies sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que $f + g^2 = C^{te}$.
- 3) En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:2]

On pose $\phi : \mathbb{R} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$, qui est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \times [0; 1]$. Comme on n'intègre que sur un segment, f est dérivable et

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) dt = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2g'(x)g(x),$$

ce qui montre que $f + g^2 = C^{\text{te}} = \frac{\pi}{4}$ et enfin, puisque

$$f(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = e^{-x^2} \frac{\pi}{4},$$

on en déduit $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et l'intégrale voulue vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

◆ IP.50

ENSEA PC – 2001

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$. On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt} \cos xt}{t} dt$.

- 1) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur un domaine à préciser.
- 2) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. Calculer $f'(0)$.
- 3) Calculer f .

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:10]

Mettre $f(0) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-bt}}{t} dt$ sous la forme $\int_{\varepsilon}^{eb} e^{-u} / u du$.

◆ IP.51

Centrale MP – 2001

Exprimer $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ à l'aide des fonctions usuelles.

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:11]

Par convergence dominée, f est définie sur \mathbb{R} et $\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| \leq te^{-t^2}$ qui est intégrable, donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . De plus,

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \sin(xt) dt.$$

On intègre par parties (d'abord sur un compact, puis en prenant la limite, comme l'exige le programme !!!!!) avec $u = \sin(xt)$ et $v = \frac{1}{2}e^{-t^2}$, donc

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \sin(xt) dt = \left[\frac{1}{2}e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}x \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2} dt = -\frac{x}{2}f(x).$$

On en déduit que f est solution de $2y' + xy = 0$ soit

$$f(x) = \alpha \exp \left\{ \int -\frac{x}{2} dx \right\} = \alpha e^{-x^2/4}.$$

De la valeur de $f(0) = \sqrt{\pi}/2$ on tire

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{4} \right).$$

Remarque : il est également possible de développer le cosinus en série entière, d'échanger intégrale et sommation au prix de quelques vérifications fastidieuses, et de retrouver le résultat. C'est la méthode employée dans l'exercice **DSE.31**.

◆ IP.52

INT MP – 2001

On pose $f(x) = \int_0^{\pi} \cos(x \sin t) dt$. Montrer que f est DSE. Montrer que f ne s'annule qu'une seule fois sur $[\pi/2, \pi]$?

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:12]

◆ IP.53 (Recherche d'équivalent)

IIE MP – 2001

On pose $I(a) = \int_0^1 \frac{dt}{t^3 + a^3}$ et $J(a) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3 + a^3}$. Domaines de définition, équivalents et limites en 0 et $+\infty$ de I et J.

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:13]

◆ IP.54 (T.L de la lorentzienne tronquée)

Mines MP – 2001

On définit $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

- 1) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^{∞} sur \mathbb{R} .
- 2) Trouver une équation différentielle vérifiée par f .
- 3) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x g(t) \cos(x-t) dt + \frac{\pi}{4} \cos x + \frac{\ln 2}{2} \sin x,$$

où g est une fonction que l'on déterminera.

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:14]

Utiliser la méthode de variation de la constante, le wronskien fait apparaître

une convolution entre cos et $g : t \mapsto 1/t$.

◆ IP.55

Mines PC – 2001

On pose $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt$. Domaine de définition et valeur de $I(a)$?

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:15]

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-xu}}{u} du.$$

On note

$$f : \begin{cases} [1; +\infty[\times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}, \end{cases}$$

et on remarque que f est continue et vérifie HD locale (en posant $\phi_a(t) = f(a, t)$ et en dominant f par ϕ_a sur $[1, a] \times]0; +\infty[$).

De plus, $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe, est continue et vérifie HD sur $[1; +\infty[$ par $t \mapsto e^{-t}$.

On a donc (th. de dérivation sous le signe somme) : I est de classe \mathcal{C}^1 sur $[1; +\infty[$ et

$$I'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

On en déduit que $I(x) = \ln x + C^{\text{te}}$. De plus, $I(1) = 0$, donc $I(x) = \ln x$.

◆ IP.56

(**)

Centrale MP – 2001

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - x^2/t^2} dt$. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et en déduire une expression de f .

◇ [Rec01/intparam-r1.tex/ip-r:16]

On montre la dérivabilité sur \mathbb{R}^* grâce à une domination locale.

On pose $u = x/t$, on vérifie alors que $f(x) = -2f'(x)$ (grâce à une domination par la gaussienne, on peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales paramétrées) pour $x \geq 0$, et donc

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}.$$

Pour $x \leq 0$, le même changement de variable nous donne $f(x) = 2f'(x)$, mais on pouvait conclure par parité que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}.$$

◆ IP.57 (Intégrale de Poisson)

ENS Lyon PC – 2002

Calculer de deux façons $\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta$.

◇ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r:2:13]

(Examinateur absolument muet.) (Cf également **IP.16** page 624.)

On peut poser $t = \tan t/2$ et intégrer par parties... Autrement, on note f la fonction de x définie par l'intégrale : f est paire en posant $\theta' = -\theta$, et $f(1/x) = f(x) - 2\pi \ln x$. Par les théorèmes de continuité/dérivation, f est \mathcal{C}^1 , on se limite à l'étude sur $]0; 1[$.

$$f'(x) = \int_0^{\pi} \frac{2(x - \cos \theta)}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} d\theta,$$

Où bien, en posant $u = \tan t/2$, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8 \int_0^{+\infty} \frac{(x-1) + (x+1)u^2}{((x-1)^2 + (x+1)^2 u^2)(1+u^2)} du \\ &= \frac{4}{x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+u^2} + \frac{x^2-1}{(x-1)^2 + (x+1)^2 u^2} \right) du \\ &= \frac{4}{x} \left[\text{Arc tan } u + \text{Arc tan} \left(\frac{x+1}{x-1} u \right) \right]_0^{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

(Puisque $\frac{x+1}{x-1}$ est négatif.)

Comme $f(0) = 0$, $f = 0$.

Enfin, on peut remarquer que f est paire et que $f(x^2) = 2f(x)$ donc par récurrence $f(x) = 2^{-n} f(x^{2^n})$ et par continuité $f(x) = 0 \cdot f(0) = 0$ sur $] -1; 1[$.

◆ IP.58

Mines MP – 2002

On note $f_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $a \in \mathbb{R}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f_n . Montrer que f_n est continue.
- 2) Montrer que f_n est dérivable et exprimer f'_n en fonction de f_{n+1} .
- 3) Calculer f_1 et montrer qu'il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $f_n(a) = \frac{u_n}{a^{k_n}}$.
- 4) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

◇ [Rec02/intparam-r2.tex/int-r:2:33]

- 1) f_n est définie sur \mathbb{R} , on applique le théorème de continuité sous le signe \int pour $|a|$ dans $]a_0; \infty[$ avec $a_0 > 0$ pour avoir l'hypothèse de domination.
- 2) Théorème du cours : $f'_n(a) = -2naf_{n+1}(a)$.
- 3) $f_1(a) = \frac{\pi}{2a}$. Par récurrence $k_n = 2n - 1$ et $u_n = \pi/2 \prod_{k=1}^{n-1} (1 - /2k)$.

4) On utilise les critères sur les suites (Hadamard), si $a \geq 1$ la limite est 0, sinon $+\infty$; on peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée dans le premier cas et minorer

$$f_n(a) \geq \int_0^{\sqrt{1-a^2}/4} \frac{1}{(1/2 + a^2/2)^n}.$$

◆ **IP.59 (Recherche d'équivalent)** (*) Mines MP – 2002

Montrer que, pour tout $a \in]0; +\infty[$, on a

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} \ln x}{1-x^2} dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+a)^2}.$$

En déduire

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} \ln x}{1-x^2} dx \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2a}.$$

◇ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:15] Pour l'équivalent, on compare chaque terme à une intégrale du style

On utilise $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k \geq 0} x^{2k}$, puis on vérifie que l'on peut inverser \sum et $\int \dots$ $\int_n^{n+1} \frac{1}{(2x+a)^2} dx$, puis on somme de $n = 1$ à l'infini.

◆ **IP.60 (Recherche d'équivalent)** (***) Mines MP – 2002

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt} - 1} dt$.

- 1) Domaine de définition et continuité de f sur \mathbb{R}^{+*} ?
- 2) Décomposer f sous forme d'une série de fractions rationnelles.
- 3) En déduire un équivalent de f en 0^+ .

◇ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:12] Pour l'équivalent, on compare à une intégrale : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on peut écrire

Le domaine de définition est \mathbb{R}^{+*} . On décompose $\frac{1}{1-e^{-tx}}$ en série et on inverse \sum et \int (cela ne marche pas avec le théorème d'intégration terme à terme car la série $\sum |f_n|$ diverge ! En revanche, il suffit de dominer les sommes partielles par $\frac{|\sin t|}{e^{xt} - 1}$ pour que le théorème de convergence dominée s'applique.)

On obtient

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 x^2 + 1}.$$

$$\frac{1}{x} \int_{kx}^{(k+1)x} \frac{dt}{t^2 + 1} \leq \frac{1}{k^2 x^2 + 1} \leq \frac{1}{x} \int_{(k-1)x}^{kx} \frac{dt}{t^2 + 1},$$

$$\text{donc} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} \leq x f(x) \leq \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1},$$

ce qui mène à

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2x}.$$

◆ **IP.61** Mines MP – 2002

Soit $a > 0$. On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arc tan } xt}{t(1+a^2 t^2)} dt$.

- 1) Domaine de définition de f ?
- 2) Continuité de f .
- 3) Calculer la dérivée de f .
- 4) En déduire f .

◇ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:2] Par ailleurs, puisque l'on montre trivialement que f' est continue, cette expression reste vraie pour $x = a$.

Comme $f(0) = 0$, pour $x \geq 0$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \ln \left(\frac{x+a}{a} \right).$$

Ensuite, par parité, on doit avoir

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \text{sgn}(x) \ln \left(\frac{a+|x|}{a} \right).$$

(On peut également calculer $f'(x) = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{x-a}$ par la même méthode et intégrer, bien sûr !)

$$f'(x) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+a^2 t^2)(1+x^2 t^2)}.$$

4) On décompose en éléments simples, pour $x \geq 0$ et $x \neq a$, on trouve

$$f'(x) = \frac{\pi}{2(x+a)}.$$

◆ **IP.62** (*) Mines PC – 2002

Domaine de définition et calcul de $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\text{sh } t}{t} dt$.

◇ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:4]

Le domaine de définition est $]1; +\infty[$. On applique le théorème de dérivée

tion sous le signe somme pour $x > 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\int_0^{+\infty} \text{sh } t e^{-tx} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{t(1-x)} - e^{-t(1+x)}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

c'est-à-dire $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C^{\text{te}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + C^{\text{te}}$, et d'après le théorème de convergence dominée, la limite en $+\infty$ de f est 0, donc la constante est nulle :

$$\forall x > 1 \quad f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right).$$

◆ **IP.63** (*) Centrale MP – 2002

On pose $F(x) = \int_0^{2\pi} e^{2x \cos t} dt$. Trouver une équation différentielle vérifiée par F et calculer F .

◇ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:1] Sans difficulté technique. On a, en intégrant par parties,

$$F'(x) = \int_0^{2\pi} 2 \cos(t) e^{2x \cos t} dt = 4x \int_0^{2\pi} \sin^2(t) e^{2x \cos t} dt,$$

et donc $x F''(x) + F'(x) - 4x F(x) = 0$.

Pour le calcul, on décompose l'exponentielle en série ou on injecte :

$$F(x) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!^2}.$$

Cf. également l'exercice **DSE.40** page 529.

◆ **IP.64** (***) Centrale MP – 2002

On pose $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

- 1) Domaine de définition ?
- 2) Montrer que $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+x}$.
- 3) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^{∞} sur un domaine à préciser.
- 4) F est-elle développable en série entière ?

◇ [Rec02/intparam-r2.tex/int-r2:17] que f est \mathcal{C}^{∞} sur son domaine.

1) $x > -1$ par les théorèmes sur les équivalents.

2) On utilise $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ et on utilise les théorèmes d'inversion somme/intégrale.

3) Soit on utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, soit on utilise les théorèmes de dérivation sur les séries de fonctions (on peut regrouper les termes par 2 pour être dans le cadre du cours !) pour voir

4) Oui avec rcv 1. On utilise $t^x = e^{x \ln t}$ et on décompose en série : on remarque

$$\frac{k!}{2} \leq \left| \int_0^1 \ln^k \left(\frac{t}{1+t} \right) dt \right| \leq k!$$

en encadrant $1+t$, ainsi les coefficients de F sont de l'ordre de 1 en valeur absolue.

◆ **IP.65** (***) Centrale MP – 2002

On définit $f(x) = \int_0^1 t^{xt} dt$.

- 1) Montrer que f est définie sur \mathbb{R} , continue, décroissante et dérivable.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}$ en fonction de α .

◇ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:8] Pour la majoration, c'est un peu plus délicat, on commence par fixer $\varepsilon > 0$, on découpe l'intégrale en trois

$$\int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^1;$$

1) Comme $t^{xt} = e^{xt \ln t}$ et $g(t) = t \ln t$ est continue sur $[0; 1]$, il n'y a aucun problème pour la définition, dérivabilité ! La décroissance est évidente car g est négative.

2) Par convergence dominée : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Et en utilisant

$$f(x) \geq \int_{1/4}^{1/2} t^{xt} dt \geq \frac{1}{4} \exp \left\{ x \min_{t \in [1/4; 1/2]} g(t) \right\},$$

on trouve $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

3) On a $f(x) \sim 1/x$. Pour la minoration, on a $t \ln t \geq \ln t$ et donc

$$f(x) \geq \int_0^1 t^{xt} dt \geq \frac{1}{x+1}.$$

$$\int_0^\varepsilon t^{xt} dt \leq \int_0^\varepsilon e^{x t \ln \varepsilon} dt = \frac{1 - e^{x \varepsilon \ln \varepsilon}}{-x \ln \varepsilon},$$

puis sur $[\varepsilon; 1-\varepsilon]$, par convexité de g ,

$$e^{xg(t)} \leq \max\{e^{x\varepsilon \ln \varepsilon}, e^{x(1-\varepsilon) \ln(1-\varepsilon)}\},$$

on a ainsi $\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \leq \max\{e^{x\varepsilon \ln \varepsilon}, e^{x(1-\varepsilon) \ln(1-\varepsilon)}\}.$

Enfin sur $[1 - \varepsilon; 1]$, on utilise $\ln t \leq t - 1$, cela donne

$$\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{1 - e^{x\varepsilon(\varepsilon-1)}}{x(1-\varepsilon)} dx$$

Puis, on conclut $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 \exists x_0 \dots$ (ou alors avec $\lim \inf$ et $\lim \sup$).

◆ **IP.66** (**) Centrale PC – 2002

On pose $f(x) = \int_0^{\pi/2} \text{Arc tan}(x \cos t) dt$.

- 1) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 et déterminer f' .
- 2) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{u du}{\text{sh } u} = \frac{\pi^2}{4}$.

◊ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:14]

- 1) Il n'y a aucun problème de définition, Arc tan est bornée et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , f est donc définie sur tout \mathbb{R} .
On peut calculer $f'(x)$ avec le changement de variable $y = \sin t$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+x^2 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2-x^2y^2} \\ &= \frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \text{Arg th} \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \end{aligned}$$

- 2) On intègre maintenant : si $y > 0$, on a

$$f(y) = \int_0^y \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \text{Arg th} \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} dx,$$

ce qui donne, en posant

$$x = \text{sh } u, \quad \sqrt{1+x^2} = \text{ch } u, \quad \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \text{th}^2 u :$$

$$f(y) = \int_0^{\text{Arg sh } y} \frac{u du}{\text{sh } u}.$$

Or le théorème de convergence dominée s'applique à l'expression initiale de f et on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Le résultat demandé tombe alors immédiatement.

◆ **IP.67 (T.F. de la lorentzienne)** (☛) Centrale PC – 2002

On note $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ux}{1+u^2} du$.

- 1) Donner le domaine de définition de f , étudier sa continuité. Est-elle bornée ? Atteint-elle ses bornes ?
- 2) Soit $k > 0$. On pose $g_k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos kt}{x^2+t^2} dt$. Donner le domaine de définition de g_k et étudier sa continuité.
- 3) Trouver une équation différentielle vérifiée par g_k . On commencera par comparer

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right).$$

Résoudre cette équation.

- 4) En déduire f .

◊ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:10]

(Voir sur le même sujet, autre traitement, **IP.84**.)

- 1) Par simple domination par $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$, f est définie et continue sur \mathbb{R} , bornée par π par simple majoration, et elle atteint π en 0.

- 2) On a domination locale sur tout segment ne contenant pas 0. Ainsi, g est définie et continue sur \mathbb{R}^* . On peut en fait, par changement de variable, écrire que, si $x > 0$

$$g_k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kxy}{1+y^2} dy = f(kx),$$

ce qui montre que g admet une limite en 0^+ , qui est $g(0^+) = \pi$. De même, si $x < 0$, on obtient $g_k(x) = -f(kx)$ et donc $g(0^-) = -\pi$. Bien sûr, $g_k(0) = 0$ et la fonction g_k n'est pas continue en 0.

- 3) On calcule successivement

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) = \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) = \frac{2x^3-6xt^2}{(x^2+t^2)^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) = -\frac{2tx}{(x^2+t^2)^2}$$

Cela permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_k(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos kt \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \cos kt \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \cos kt \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) dt, \end{aligned}$$

grâce à deux intégrations par parties, ce qui montre que g_k vérifie l'équation différentielle

$$g_k''(x) - k^2 g_k(x) = 0,$$

dont la solution générale est

$$g_k(x) = \alpha_{\pm} e^{kx} + \beta_{\pm} e^{-kx},$$

sur chaque domaine \mathbb{R}^{*+} et \mathbb{R}^{*-} (on ne peut pas donner d'argument de parité sur g pour éliminer *a priori* des solutions, puisque celles-ci ne sont définies que sur des demi-intervalles !)

Par ailleurs, grâce à un changement de variable, $g_k(x) = f(kx)$ donc g_k est bornée, donc on élimine la solution en e^{kt} sur \mathbb{R}^+ et celle en e^{-kt} sur \mathbb{R}^- pour $k > 0$, et le contraire si $k < 0$.

Enfin, puisque g est impaire, on a donc, en tenant compte de $g(0^+) = \pi$:

$$g_k(x) = \pi \text{sgn}(x) e^{-|kx|}.$$

- 4) Enfin, on note que $f(x) = g_k(x/k) = g_1(x)$ selon que l'on prend la forme de la définition ou après le changement de variables, donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \pi e^{-|x|}.$$

◆ **IP.68** CCP PC – 2002

Calculer $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{x-\alpha} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx$.

◊ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:5]

On pose $t = \sqrt{\frac{1-x}{x}} - 1$, ce qui donne

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(t^2+1)(1-\alpha-\alpha t^2)} dt.$$

On calcule ensuite en réduisant en pôles simples. Particulièrement chiant...

◆ **IP.69** (★) CCP PC – 2002

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \sin(xu)}{u} du$.

- 1) Domaine de définition de f ?
- 2) Existe-t-il un développement en série entière de f ? Si oui, donner son expression et son rayon de convergence.

◊ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:7]

f est définie sur tout \mathbb{R} . Par changement de variable, notons qu'elle vaut également

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t/x} du = F\left(\frac{1}{x}\right),$$

où la fonction F est définie dans l'exercice **IP.76** page 640 et vaut donc

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan} \left(\frac{1}{x} \right) = \text{Arc tan } x.$$

Sinon, il suffit de calculer

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-u} \cos(xu) du \\ &= \mathcal{L} \left(\frac{1}{ix+1} \right) = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

et on a le résultat immédiatement avec la condition $f(0) = 0$.

Une fois que l'on a l'expression exacte de f , il faut bien dire que la seconde question manque singulièrement d'intérêt.

◆ **IP.70 (Intégrale gaussienne — CLASSIQUE)** CCP PC – 2002

On définit, lorsqu'elles existent,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2.$$

- 1) F et G sont-elles définies sur \mathbb{R} , continues, dérivables ?
- 2) Montrer que $F' + G' = 0$.
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

◊ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:16]

On pose

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{e^{-x^2(1+y^2)}}{1+y^2}, \end{aligned}$$

est dérivable et

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) dt = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -G'(x), \end{aligned}$$

ce qui montre que $F + G = \mathcal{C}^{\infty} = \frac{\pi}{4}$ et enfin, puisque

$$F(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = e^{-x^2} \frac{\pi}{4},$$

qui est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Comme on n'intègre que sur un segment, F on en déduit $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et l'intégrale voulue vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

◆ **IP.71** (*) CCP PC – 2002

On pose $f(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} dt$.

- Variations et limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f .
- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|f(x)| \leq \frac{\pi}{4}$.
- Montrer que la suite définie par son premier terme et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente.

◇ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:17]

- 1) $\sin t$ varie entre 0 et 1. Si $x \rightarrow +\infty$, on a convergence simple de l'intégrande vers 0 presque partout et majoration par une constante; le théorème de convergence dominée permet donc de conclure :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

En $-\infty$ au contraire, on a divergence : par exemple, sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \geq \frac{1}{2}$ ce qui permet de montrer aisément que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

- 2) Le plus simple est de constater que f est convexe et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$, puis de faire un dessin.

Autre solution : f est clairement décroissante (soit un raisonnement direct, soit une dérivation sous le signe somme, triviale car on a un segment).

De plus, elle est continue. Une simple étude de $f - \text{Id}$ montre que c'est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- 3) De la décroissance de f on tire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f(x) \leq f(0)$. De plus on a trivialement

$$0 \leq f(0) \leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

- 4) Technique usuelle pour les suites définies par une relation de récurrence ! Notamment, on est amené, après avoir fait un dessin, à évaluer

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin t e^{-x \sin t} dt \leq \frac{1}{2}$$

ce qui montre que la fonction f est contractante sur un intervalle stable et donc il y a convergence de la suite.

◆ **IP.72 (Fonction de Bessel)** (*) CCP PC – 2002

On note $f(x) = \int_0^{\pi} \cos(x \sin t) dt$.
Montrer l'égalité

$$f(\pi) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos(\pi \sin t) dt$$

$$= 4 \int_0^{\pi/4} \cos\left(\pi \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cos\left(\pi \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right) dt.$$

Que dire du signe de $f(\pi)$?
Montrer que la fonction f s'annule une et une seule fois sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

◇ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:18]

La première égalité est triviale (couper à $\pi/2$). Pour la seconde, couper à $\pi/4$ et effectuer le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ et utiliser les formules de trigonométrie connues.

On en déduit que $f(\pi)$ est négatif. Par ailleurs, on montre aisément que $f'(x) \leq 0$ donc f décroissante. Puisque $f(0) = \pi$, f s'annule une et une seule fois sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Enfin, on évalue $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$, donc l'annulation a lieu sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

◆ **IP.73 (Recherche d'équivalent)** (***) TPE MP – 2002

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x$.

◇ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:6]

Tout d'abord, écrivons que, grâce au changement de variable $y = tx$:

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$$

Ensuite, on va enlever un équivalent pratique de $-\ln x$. Pour cela, on note que, au voisinage de $x = 0$:

$$\begin{aligned} \phi(x) &\stackrel{\text{dft}}{=} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy + \int_x^1 \frac{e^{-y}-1}{y} dy - \ln x \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x \end{aligned}$$

puisque la première intégrale est bornée.

Alors

$$\begin{aligned} |f(x) - \phi(x)| &= \int_x^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy \\ &\leq \int_x^1 e^{-y} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy + \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

On peut alors majorer la première intégrale

$$\begin{aligned} \int_x^1 e^{-y} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy &\leq \int_x^1 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy \\ &= \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \text{Arg sh}\left(\frac{1}{x}\right) = o(\ln x) \end{aligned}$$

puisque $\text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln\left(\frac{2}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x$.

◆ **IP.74** (***) École de l'air MP – 2002

On pose $f(x) = \int_0^1 \ln(1+t^x) dt$.

- Montrer que f est définie, décroissante et continue sur \mathbb{R} .
- Étudier $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Calculer la dérivée de f .

◇ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:9]

- 1) On effectue une domination sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$:

$$0 \leq \ln(1+t^x) \leq t^x,$$

ce qui montre la continuité sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

On effectue une autre domination sur $]-A; 0]$, en notant tout d'abord que, formellement (et en notant $y = -x$)

$$\begin{aligned} f(-y) &= \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{1}{t^y}\right) dt \\ &= - \int_1^{+\infty} \ln(1+u^y) \frac{du}{u^2}, \end{aligned}$$

On a alors, pour tout $u \in [1; +\infty[$ et tout $y \in [0; A]$:

$$0 \leq \frac{\ln(1+u^y)}{u^2} \leq \frac{1+u^A}{u^2},$$

cette dernière fonction étant intégrable.

On a donc bien montré que f était définie et continue sur \mathbb{R} . La décroissance est bien sûr triviale.

- 2) On utilise le théorème de convergence dominée pour obtenir $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Une simple minoration

$$f(x) \geq \int_{1/2}^1 \ln(1+t^x) dt \geq \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2^x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

permet de conclure en $-\infty$.

- 3) On pose $h(x, t) = \ln(1+t^x)$, alors

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{(\ln t) t^x}{1+t^x}$$

ce qui est bien continu sur $\mathbb{R} \times]0; 1]$ et admet la domination

$$|h(x, t)| \leq |\ln t|,$$

qui est intégrable. On peut donc dériver sous le signe somme ce qui donne

$$f'(x) = \int_0^1 \ln t \frac{t^x}{1+t^x} dt.$$

◆ **IP.75** (*) Navale MP – 2002

On pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$.

- Montrer que f est définie et intégrable sur \mathbb{R}^{++} .
- Calculer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

◇ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:11]

Cette fonction est en fait calculable aisément :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt \\ &= \left[\ln(1-e^{-t}) \right]_x^{+\infty} = -\ln(1-e^{-x}). \end{aligned}$$

Elle est donc continue sur $]0; +\infty[$ et on obtient les équivalents

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x},$$

ce qui assure l'intégrabilité sur $]0; +\infty[$.

On développe ensuite la fonction \ln en série entière, on intervertit sans mystère et on trouve

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

◆ **IP.76 (Valeur de $\int_0^{+\infty} (\sin t)/t dt$)** (♣) Navale PC – 2002

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$.

- Définition, continuité de F ? Est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?
- Donner une expression de F' .
- En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

INDICATION : Pour la dernière question, montrer que l'on ne peut pas utiliser de convergence dominée directement. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ existe. Montrer que l'on peut, à l'aide d'une intégration par parties, exprimer F en fonction de $\phi : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. Ensuite, effectuer un changement de variables astucieux et conclure.

◇ [Rec02/intparam-r2.tex/ip-r2:3]

alors

$$\begin{aligned} F'(x) &= - \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin t dt = \mathcal{F} \left(- \int_0^{+\infty} e^{-(x+i)t} dt \right) \\ &= \mathcal{F} \left(\frac{1}{x+i} \right) = - \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

On vérifie (hypothèse de domination locale) que F est de classe \mathcal{C}^1 . On a

grande par $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. En revanche, s'il n'est *a priori* pas sûr qu'elle soit de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^+ car on ne peut pas dominer, cependant on sait que c'est vrai grâce au théorème de prolongement des fonctions de classe \mathcal{C}^2 .

2) Simple intégration par parties pour les deux premières, et combinaison linéaire d'icelles pour avoir la troisième.

3) Si l'on résout l'équation différentielle par la méthode de variation de la constante, wronskien et tout le toutim, on trouve

$$f(x) = \lambda \sin x + \mu \cos x + \underbrace{\int_1^x \frac{\sin(x-t)}{t} dt}_{g(x)}.$$

La continuité de g se voit en écrivant

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_1^x \frac{\sin(t-x)}{t} dt \\ &= \cos x \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt, \end{aligned} \quad (*)$$

ce qui permet de dériver g sans problème et de vérifier que g est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$ et continue en 0, puisque la divergence de la dernière intégrale n'est « que » logarithmique.

Travaillons de nouveau sur l'expression développée de g . En posant

$$\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \quad \text{et} \quad \beta = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt,$$

on a

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin x \left[\alpha - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \right] \\ &\quad + \cos x \left[\beta - \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right] \\ &= \alpha \sin x - \beta \cos x - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{t} dt. \end{aligned}$$

La dernière intégrale, que nous noterons $h(x)$, tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$ comme on le voit facilement sous sa forme développée.

De plus, la différence $f-h$ est une combinaison linéaire de sin et de cos, et f tend vers 0 en $+\infty$, ce qui montre par conséquent que $f=h$.

Le continuité de f et h en 0 permet d'écrire que

$$I = -h(0) = -\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

◆ IP.81

Mines PC – 2003

Notons $E = \mathbb{R}[X]$. On définit $L(P)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t+x) dt$.

1) Montrer que $L(P) \in E$.

2) Montrer qu'il existe une unique suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $P \in E$,

$$L(P) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P^{(n)}.$$

◆ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:392]

◆ IP.82

Mines PC – 2003

Étude de $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{t} \ln(t^2 - 2t \cos x + 1) dt$.

◆ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:395]

◆ IP.83

Mines PC – 2003

Pour $a \in \mathbb{R}$ on pose $F(a) = \int_0^{+\infty} (a^3 \operatorname{ch}^3 x + \operatorname{sh}^3 x)^{-1/3} dx$. Établir le domaine de définition de F .

◆ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:446]

◆ IP.84 (T.F. de la lorentzienne)

Centrale MP – 2003

On pose $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2} e^{it} dt$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

1) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$.

2) Montrer que $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) = 0$. En déduire que f est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$.

3) Montrer que $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1+u^2} du$.

Montrer que f est bornée sur $]0; +\infty[$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \pi$.

4) Calculer f .

◆ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:297]

(Voir sur le même sujet, autre traitement, IP.67.)

◆ IP.85 (T.F. de la gaussienne)

(**)

Centrale MP – 2003

On définit $\phi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$. Calculer ϕ :

1) en cherchant une équation différentielle ;

2) à l'aide du développement en série du cosinus.

◆ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:276]

1) Par convergence dominée, ϕ est définie sur \mathbb{R} et $\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| \leq t e^{-t^2}$ qui est intégrable, donc ϕ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . De plus,

$$\phi'(x) = - \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(tx) dt.$$

On intègre par parties avec $u = \sin(tx)$ et $v = \frac{1}{2} e^{-t^2}$, donc

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= - \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(tx) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(tx) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} x \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t^2} dt \\ &= -\frac{x}{2} \phi(x). \end{aligned}$$

On en déduit que ϕ est solution de $2y' + xy = 0$ soit

$$\phi(x) = \alpha \exp \left\{ \int -\frac{x}{2} dx \right\} = \alpha e^{-x^2/4}.$$

De la valeur de $\phi(0) = \sqrt{\pi}/2$ on tire

$$\phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp \left(-\frac{x^2}{4} \right).$$

◆ IP.86 (DA de la fonction erff)

(***)

Mines MP – 2003

Trouver le développement asymptotique d'ordre 2 en $+\infty$ de $f(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$.

◆ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:166]

On a déjà

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - g(x).$$

On écrit $e^{-u^2} = -2u e^{-u^2} \cdot \frac{1}{-2u}$ et on intègre par parties :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{+\infty} \underbrace{e^{-u^2}}_w \cdot \underbrace{\frac{1}{-2u}}_v du = \left[\frac{e^{-u^2}}{-2u} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{2u^2} du \\ &= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{2u^2} du. \end{aligned}$$

Bon, on cherche maintenant un équivalent de la deuxième intégrale (notamment pour montrer qu'elle est négligeable devant le premier terme). L'idée est toujours la même : puisque l'on travaille avec des fonctions intégrables, on sait que le « reste intégral » passe aux équivalents. On cherche donc une fonction $h \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[; \mathbb{R})$ telle que

$$\frac{d}{du} (h(u) e^{-u^2}) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-u^2}}{2u^2},$$

◆ IP.87

(**)

Mines MP – 2003

On pose $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} bx}{x} e^{-ax} dx$.

1) Trouver le domaine de définition de I .

2) Étudier la continuité de I .

3) Étudier la dérivabilité de $b \mapsto I(a, b)$ et calculer $\frac{\partial I}{\partial b}$.

4) En déduire la valeur de $I(a, b)$.

◆ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:69]

4) On en déduit

1) En 0, tout va bien. En l'infini, il faut et il suffit que $|b| < a$ et $a > 0$.

2) On domine l'intégrande sur tout compact inclus dans \mathcal{D} .

3) Pareil pour la dérivée partielle. On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial b}(a, b) &= \int_0^{+\infty} \operatorname{ch}(bx) e^{-ax} dx \\ &= \frac{a}{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^b \frac{a}{a^2 - u^2} du \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a+b}{a-b} \right). \end{aligned}$$

Il eût été plus simple d'effectuer un changement de variable $y = bx$ et voir que le résultat ne dépendait plus que du paramètre a/b ; on était alors ramené à l'exercice IP.62 ou IP.103.

2) On injecte le développement et on utilise le théorème « $\sum f |f_n|$ ». Un rien pète-couille. (Voir DSE.31 page 527, avec une normalisation un peu différente.)

On intervient donc la somme et l'intégrale (en justifiant après) :

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{2k} e^{-t^2} dt}_{I_n}.$$

On calcule ensuite I_n par récurrence : $I_n = (2n-1) I_{n-1}$ donc

$$I_n = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n! 2},$$

ce qui justifie l'interversion de la somme et de l'intégrale au passage. On en déduit

$$\phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}.$$

◆ **IP.88** Mines MP – 2003

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on pose $F_a(x) = \frac{1}{x + ia}$. On définit $\mathcal{F} = \text{Vect}\{F_a ; a \in \mathbb{R}^*\}$.

- Calculer $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n F_a(t) dt$.
- En déduire $F_a * F_b(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} F_a(x-t)F_b(t) dt$ (**convolée** de F_a et F_b).
- Montrer que $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}(X)$. Est-ce une sous-algèbre ?
- On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $G_n : x \mapsto \frac{n}{nx+1}$.
Calculer $F_a * G_n(x)$.
- Trouver une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de complexes telle que $(\lambda_n G_n)$ tende vers l'élément unité de \mathcal{F} s'il existe.
- Calculer $\|G_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |G_n(t)|^2 dt$.

◇ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:144]

◆ **IP.89** Mines MP – 2003

Étude de la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\cos t - e^t}{t} dt$.

◇ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:200] calcul de F' est immédiat.
Bien définie pour tout $x > 1$, et dérivable sur $]1; +\infty[$. Si l'on dérive, le

◆ **IP.90 (Recherche d'équivalent)** Centrales MP – 2003

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

- Domaine de définition de f ?
- Montrer que f est solution de l'équation
$$y' - y + \frac{1}{x} = 0. \tag{E}$$
- Résoudre (E).
- Trouver un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

◇ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:154]

- $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.
- On dérive aisément sous le signe somme grâce à la domination par l'exponentielle :

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt + \left[\frac{e^{-t}}{x+t} \right]_0^{+\infty} = f(x) - \frac{1}{x}$$

- La solution homogène est $y_0 = e^x$. On cherche $y = \lambda e^x$, on injecte, cela donne $\lambda' = -e^{-x}/x$ donc

$$y = - \int_x^+ \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

La constante « * » peut très bien être prise égale à $+\infty$. La solution générale est donc (après changement de variable)

$$f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{x-y} dy + \lambda e^x.$$

Le coefficient λ se calcule en utilisant le fait connu (grâce au th. de convergence dominée) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, ce qui donne bien sûr $\lambda = 0$. On se retrouve avec une belle formule qui n'est autre que la définition après translation de variable de x . Intérêt de la question ???

- On utilise plutôt la forme

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \lambda e^x,$$

ce qui donne plus ou moins rapidement

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x.$$

Pour l'équivalent en $+\infty$, on revient à la formule initiale :

$$x f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t/x} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

grâce au théorème de convergence dominée, ce qui montre que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Remarque 1 On peut avoir aisément un développement asymptotique, selon la méthode de M. Leichnam p.233.

◆ **IP.91 (Recherche d'équivalent)** Centrales PC – 2003

Posons $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$.

- Démontrer que f est défini et de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1; +\infty[$.
- Calculer $f(1)$.
- Déterminer une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$.
- Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow -1$.
- En remarquant que

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2} \sin(2t)\right) dt,$$

calculer $f'(0)$.

◇ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:445]

$$f(x) = \frac{(x+2)f(x+2)}{x+1} \underset{x \rightarrow -1^+}{\sim} \frac{1}{x+1}.$$

- I .
- $f(1) = 1$.
- Dans $f(x+2)$, on décompose l'intégrande sous forme $(\sin t)^{x+1} \cdot \sin t$, on effectue une intégration par parties et on trouve au final

$$f(x+2) = \frac{x+1}{x+2} f(x).$$

- On trouve en manipulant la 3^e intégrale, en la coupant en deux et en effectuant un changement de variable $u = 2t$, que

$$I = -\frac{\pi \ln 2}{4} + \frac{I}{2}$$

et donc $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

- On déduit de la formule précédente et de la valeur en 1 que

◆ **IP.92** Centrales PC – 2003

(Avec Maple)

On pose $P(x, y) = \frac{\sin x}{\text{ch } y - \cos x}$.

- Calculer le laplacien ΔP , soit avec MAPLE, soit en posant $z = x + iy$ et $\tilde{P}(x, y) = \frac{2}{1 - e^{iz}}$.
- On pose $I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) dy$. Calculer $I(x)$.
INDICATION : $I(x) = 2 \mathcal{I}m \int_0^{+\infty} \frac{2}{1 - e^{iz}} dy$.
- Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $t \mapsto e^{-|t|} \phi(t)$ soit intégrable sur \mathbb{R} . Montrer que
$$(x, y) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y-t) \phi(t) dt$$
 est continue.

◇ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:344]

◆ **IP.93 (Intégrale de Fresnel)** TPE PC – 2003

On note $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$x \mapsto i \int_0^1 \frac{e^{ix^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt + \left(\int_0^x e^{iu^2} du \right)^2.$$

- Montrer que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Calculer F' . Conclusion ?
- On pose $G : A \mapsto \int_0^A e^{iu^2} du$. Montrer que G admet une limite complexe en $+\infty$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^2 e^{ix^2 t^2}}{t^2+1} dt$.
INDICATION : Effectuer une intégration par parties ou appliquer le théorème de Riemann-Lebesgue.
- En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{ix^2 t^2}}{t^2+1} dt$.
- En déduire $\int_0^{+\infty} e^{iu^2} du$.

◊ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:77]

1) La dérivation est immédiate :

$$F'(x) = -2x e^{ix^2} \int_0^x e^{ix^2 t^2} dt + 2 e^{ix^2} \int_0^x e^{it^2} dt$$

$$\stackrel{y=xt}{=} -2 e^{ix^2} \int_0^x e^{it^2} dt + 2 e^{ix^2} \int_0^x e^{it^2} dt = 0.$$

On en déduit que $F \in C^{\infty} = F(0) = i \frac{\pi}{4}$.

2) On a $G(A) = \int_0^{A^2} \frac{e^{iy}}{\sqrt{y}} dy$, intégrale impropre bien connue (on en montre la convergence en coupant en $[1; A^2]$ puis par un changement de variable $t = y^2$ puis une intégration par parties). On notera ℓ la limite de G .

3) On écrit

$$\int_0^1 \frac{t^2 e^{ix^2 t^2}}{t^2 + 1} dt = \int_0^1 \underbrace{\frac{t}{2(t^2 + 1)}}_v \underbrace{2t e^{ix^2 t^2}}_{v'} dt$$

et on effectue une intégration par parties, qui majore l'intégrale par C^{∞}/x^2 . Ou bien on pose $y = t^2$ et on applique directement Riemann-Lebesgue puisque l'intégrande est \mathcal{C}^1 .

4) On a

$$\int_0^1 e^{ix^2 t^2} dt = \frac{1}{x} \int_0^x e^{iy^2} dy \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{x},$$

donc tend vers 0. Or

$$\int_0^1 \frac{e^{ix^2 t^2}}{t^2 + 1} dt = \int_0^1 e^{ix^2 t^2} dt - \int_0^1 \frac{t^2 e^{ix^2 t^2}}{t^2 + 1} dt$$

donc tend vers 0.

Remarque : on ne peut pas utiliser la méthode présentée dans la question précédente...

5) On en déduit que

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{iu^2} du \right)^2 = i \frac{\pi}{4}.$$

Il reste une indétermination sur le signe... Or on vérifie que la partie imaginaire de l'intégrale est

$$\int_0^{+\infty} \sin u^2 du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy \geq 0,$$

et donc finalement

$$\ell = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1 + i).$$

quer le théorème de convergence dominée puisque $f \in L^1$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-xt} f(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, la seconde intégrale est majorée par ε pour x suffisamment grand. \square

On obtient donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \phi(x) = 0.$$

Dans le cas général, on écrit $f = f(0) + g$, et on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \phi(x) = f(0).$$

◆ IP.97 (Méthode de la phase stationnaire) (★★)

ENS Lyon MP – 2004

1) Soit f de classe \mathcal{C}^2 (ou \mathcal{C}^{∞} , au choix) sur $[a; b]$. On définit $F : x \mapsto \int_a^b f(t) e^{-ixt} dt$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ et $F(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) Montrer que $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it^2/2} dt$ converge.

3) On pose $g : t \mapsto \alpha + \frac{\beta}{2} t^2$. Montrer que

$$\int_a^b f(t) e^{-ixg(t)} dt = \frac{f(0)}{\sqrt{\beta x}} \text{I} e^{-i\alpha x} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

◊ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:189]

◆ IP.98 (★)

Mines MP – 2004

On définit $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$. Donner le domaine de définition, de dérivabilité, et calculer f .

◊ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:231]

◆ IP.99 (★★)

Mines MP – 2004

Soit f une fonction continue par morceaux, 2π -périodique. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. On note

$$\Phi : x \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{f(x-t)}{1 - a e^{it}} dt.$$

1) Montrer que Φ est définie, 2π -périodique, continue. Montrer que Φ est la somme d'une série trigonométrique.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Existe-t-il une fonction Π telle que

$$\Pi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \frac{\Pi(x-t)}{1 - a e^{it}} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^2} ?$$

◊ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:141]

◆ IP.100 (★)

Centrale PC – 2004

On pose $g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}(t-x)}$.

1) Domaine de définition de g ?

2) Montrer que, si $\alpha > 0$, $g(1-\alpha) \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t-1-\alpha)}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

INDICATION : $u + t \geq 2\sqrt{u}t$.

◊ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:23]

◆ IP.101 (★★)

Mines PC – 2004

On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(1 - \cos tx)}{t^2} dt$.

1) Quel est le domaine de définition de f ?

2) Calculer f .

◆ IP.94

CCP MP – 2003

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1 + \cos^2(xt)} dt$.

1) Calculer $F\left(\frac{1}{2}\right)$ et trouver une méthode pour calculer $F(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

2) F est-elle continue ?

3) F est-elle uniformément continue ?

◊ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:91]

◆ IP.95 (★)

CCP MP – 2003

Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction continue sur $\mathbb{R} \times [a; b]$.

1) Justifier que f est uniformément continue sur tout ensemble de la forme $[c; d] \times [a; b]$. En déduire la continuité de la fonction

$$x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt.$$

2) On introduit la fonction $g : x \mapsto \int_0^1 e^{xt} dt$. Déduire de la question 1) la continuité de g . Retrouver ce résultat en calculant $g(x)$.

◊ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:320]

1) Heine : uniforme continuité sur tout compact. Mais bon on a quand même un théorème qui permet de conclure sans passer par là! Sinon, on peut le montrer avec des ε , un peu pête-couille mais sans difficulté.

2) $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ qui est bien continue (et même de classe \mathcal{C}^{∞} comme on le voit en passant par le développement en série entière de l'exponentielle).

◆ IP.96 (Transformée de Laplace) (★)

INT PC – 2003

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et intégrable. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

1) Intégrabilité de $g : t \mapsto e^{-xt} f(t)$. On pose

$$\phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt.$$

2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \phi(x)$.

INDICATION : On utilisera la continuité de f .

◊ [Rec03/intparam-r3.tex/r3:109]

Alors

$$\phi(x) \leq \varepsilon x \underbrace{\int_0^{\eta} e^{-xt} dt}_{\frac{1}{x}(1 - e^{-\eta x})} + \int_{\eta}^{+\infty} x e^{-xt} f(t) dt,$$

et $x e^{-xt} \leq x e^{-\eta x}$ qui est bornée sur $]0; +\infty[$ et permet d'appli-

◊ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:70]

- $D_f = \mathbb{R}$.
- Par domination immédiate, il est possible de dériver deux fois sous le signe somme, ce qui nous donne

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(tx)}{t} dt$$

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(tx) dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

◆ **IP.102** (*) Mines PC – 2004

On définit $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et on pose $k = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

- Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{*+} .
- Calculer k .

◊ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:28]

(Déjà en 2001 : IP.48.)

◆ **IP.103** (*) Mines PC – 2004

Domaine de définition et calcul de $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\text{sh } t}{t} dt$.

◊ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:90]

(Déjà tombé aux mines en 2002 : IP.62 et en 2003 : IP.87.)
Le domaine de définition est $]1; +\infty[$. On applique le théorème de dérivation sous le signe somme pour $x > 1$:

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} \text{sh } t e^{-tx} dt$$

$$= - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{t(1-x)} - e^{-t(1+x)}) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{1-x^2}.$$

c'est-à-dire $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + C^{\text{te}}$, et d'après le théorème de convergence dominée, la limite en $+\infty$ de f est 0, donc la constante est nulle :

$$\forall x > 1 \quad f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{x-1} \right).$$

◆ **IP.104** (*) Mines PC – 2004

On note $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{ixt} dt$.

- Étudier f et en donner une expression simplifiée.
- Donner une expression simple de $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt) dt$.

◊ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:100]

Enfin,

Une primitive de $\frac{-x+i}{2(x^2+1)}$ est $x \mapsto -\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{i}{2} \text{Arc tan } x$.

Cela donne donc

$$f(x) = \frac{A}{\sqrt{x^2+1}} e^{i \text{Arc tan}(x)/2},$$

avec $A = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

$$\cos^2 \left(\frac{\text{Arc tan } x}{2} \right) = \frac{1 + \cos(\text{Arc tan } x)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

$$\sin^2 \left(\frac{\text{Arc tan } x}{2} \right) = \frac{1 - \cos(\text{Arc tan } x)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

donc, en prenant la racine et en transformant l'exponentielle complexe en sinus et cosinus :

$$u(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}+1}}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

◆ **IP.105** (***) Centrale PC – 2004

On pose $\phi : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{\sqrt{1+t}} dt$.

- Trouver le domaine de définition \mathcal{D}_ϕ de ϕ .
- Montrer que ϕ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{D}_ϕ , positive, décroissante et convexe.
- Trouver la limite de ϕ en $+\infty$ ainsi qu'un équivalent.
- Exprimer $\phi(x+1)$ en fonction de $\phi(x)$ et conclure.

On en déduit que $f'(x) = \text{Arc tan}(x)$ (car $f'(0) = 0$) et donc, par intégration par parties, $f(x) = x \text{Arc tan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

◊ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:99]

- $\mathcal{D}_\phi =]1; +\infty[$.
- Dérivation terme à terme.
- Pour tout $x > 1$,

$$0 \leq \phi(x) \leq \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$$

ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$.

4) On intègre par parties :

$$\phi(x+1) = - \int_0^1 x t^{x-1} 2\sqrt{1+t} dt + 2\sqrt{2}$$

$$- 2x \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{\sqrt{1+t}} (1+t) dt + 2\sqrt{2}$$

$$= -2x \phi(x) - 2x \phi(x+1) + 2\sqrt{2}$$

ce qui montre que

$$\phi(x) = \frac{2\sqrt{2} - 2x \phi(x)}{1+2x}.$$

◆ **IP.106** (*) TPE MP – 2004

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt$.

◊ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:178]

Existe sur \mathbb{R}^+ , de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$. De plus, $f(0) = 0$ et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

donc

$$f(x) = \sqrt{\pi x}.$$

◆ **IP.107 (Transformée de Laplace)** (*) IIE MP – 2004

Soit f une fonction continue et bornée sur \mathbb{R}^+ . On pose

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt.$$

- Montrer que F est bien définie pour $x > 0$.
- Montrer que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{*+} .
- On suppose que f admet une limite ℓ non nulle en $+\infty$. Montrer que $F(x) \sim \frac{\ell}{x}$.
- On suppose que f est T-périodique. Donne un équivalent de F en 0^+ .

◊ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:218]

- \mathbb{T} .
- \mathbb{T} .
- $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-y} f\left(\frac{y}{x}\right) dy$ et on conclut par domination, puisque

f est bornée.

- Découper l'intégrale, observer l'apparition d'une série géométrique et conclure.

◆ **IP.108** (***) CCP MP – 2004

On définit sur $\mathbb{R}^{*+} \setminus \{1\}$ la fonction f par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

- Déterminer les limites de f en 0, 1 et $+\infty$.

INDICATION : Pour la limite en 1, on montrera que, pour tout $t \neq 1$,

$$\frac{1}{\ln t} = \frac{1}{t-1} + \phi(t)$$

où ϕ est prolongeable par continuité en 1.

- Donner les variations de f .

◊ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:248]

On dérive : $f'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$.

Donc $f'(0) = 0$, $f'(1) = 1$ à gauche et à droite, et f se prolonge par continuité en 1 avec la valeur $\ln 2$, car

$$f(x) \stackrel{u=\ln t}{=} \int_{\ln x}^{2 \ln x} \frac{e^u}{u} du$$

On montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et même $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \infty$ par minoration bête.

◆ **IP.109** (**) CCP MP – 2004

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}t^2} \cos\left(\frac{t^3}{3}\right) dt$.

- 1) Montrer que I est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^{++} .
- 2) Montrer que I vérifie l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2\sqrt{x}y' - \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 0.$$

◇ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:265]

◆ **IP.110** (**) CCP PC – 2004

On pose, pour tout $a > 0$: $I(a) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^\pi \cos(x \sin t) dt \right) e^{-ax} dx$.

- 1) Justifier l'existence de I(a).
- 2) Montrer que $I(a) = \int_0^\pi \left(\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(x \sin t) dx \right) dt$.
- 3) Montrer que $I(a) = 2a \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a^2 \sin^2 t} dt$.

◇ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:49]

[0; M] puis en prenant des limites : théorème de continuité d'une intégrale à paramètre M.

- 1) La fonction J_0 de Bessel est bornée, l'intégrale externe converge pour tout $a > 0$.
- 2) Il faut Fubiner en passant d'abord à des intégrales sur un segment
- 3) **À FINIR !!!**

◆ **IP.111** (***) CCP PC – 2004

On considère $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer l'existence de cette intégrale, la calculer, et généraliser ce résultat.

◇ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:413]

Pour que cette intégrale existe, il faut $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ (ou $\alpha = \beta$).

On impose $\beta > \alpha$, donc $x \stackrel{\text{dét.}}{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} \in [1; +\infty[$. Alors

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-xu}}{u} du.$$

On note

$$f : \begin{cases} [1; +\infty[\times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}, \end{cases}$$

et on remarque que f est continue et vérifie HD locale (en posant $\phi_a(t) = f(a, t)$ et en dominant f par ϕ_a sur $[1, a] \times]0; +\infty[$.

De plus, $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe, est continue et vérifie HD sur $[1; +\infty[$ par $t \mapsto e^{-t}$.

On a donc (th. de dérivation sous le signe somme) : g est de classe \mathcal{C}^1 sur $[1; +\infty[$ et

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

On en déduit que $g(x) = \ln x + \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. De plus, $g(1) = 0$, donc $g(x) = \ln x$. D'où

$$I(\alpha, \beta) = g\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \ln \frac{\beta}{\alpha} = \ln \beta - \ln \alpha$$

si $0 < \alpha \leq \beta$, et $I(\alpha, \beta) = -I(\beta, \alpha) = \ln \beta - \ln \alpha$ dans le cas contraire, soit au total

$$I(\alpha, \beta) = \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)$$

◆ **IP.112** CCP PC – 2004

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.
On pose $F_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^4 + t^2}$.

- 1) Continuité et dérivabilité de $F_n(x)$. Expression de $F'_n(x)$ en fonction de $F_{n+1}(x)$.
- 2) Calcul de $F_1(x)$.
- 3) Montrer que $F_n(x)$ peut se mettre sous la forme $F_n(x) = a_n x^{4-2n}$ où a_n dépend de n .
- 4) Calcul explicite de $F_n(x)$.

◇ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:432]

◆ **IP.113** (*) CCP PC – 2004

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_n(x) = \int_0^n \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de F.
- 2) Montrer que F_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.
- 3) Montrer que les suites $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(F'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément. Qu'en déduire sur F ?
- 4) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
- 5) Trouver une équation différentielle vérifiée par f , en déduire F.

◇ [Rec04/intparam-r4.tex/r4:126]

◆ **IP.114** (***) Centrale PC – 2005

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^+$, on définit $\phi(x, t) = \text{ch}(\lambda t) e^{-x \text{ch } t}$.

- 1) Montrer l'existence de la fonction f_λ définie, pour tout $t > 0$, par

$$f_\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \phi(x, t) dt.$$

Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{-x \text{ch } t} dt.$$

- 2) On considère la fonction $g_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g_\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t - \frac{x^2}{4t}\right) t^{-\lambda-1} dt.$$

- a) Déterminer le domaine de définition de g .
- b) Par les changements de variables successifs $u = e^t$ et $v = x/2u$, montrer que

$$f_\lambda(x) = a_\lambda(x) g_\lambda(x),$$

où a_λ est une fonction à déterminer.

- c) Pour tout $\lambda > 0$, montrer que g_λ est continue en 0.
Déterminer un équivalent de g_λ pour $\lambda > 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.
Déterminer un équivalent de g_λ pour $\lambda < 0$ lorsque $x \rightarrow 0^-$.

◇ [Rec05/intparam-r5.tex/r5:88]

◆ **IP.115 (Valeur de $\int_0^{+\infty} (\sin t)/t dt$)** (***) Centrale PC – 2005

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$.

- 1) a) Montrer que g est définie sur \mathbb{R}^+ . Montrer que

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{(x+t)^2} dt \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

- b) Montrer que g est continue et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^{++} .
- c) Vérifier que g est solution de l'équation $y'' + y = \frac{1}{x}$.
- d) Déterminer la limite en $+\infty$ de g .

- 2) Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R}^+ et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^{++} (arguments principaux).
- 3) a) Montrer que f et g sont égales sur \mathbb{R}^{++} .
- b) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

◇ [Rec05/intparam-r5.tex/r5:108]

(Cf. également IP.46, IP.80, IP.78 et IP.116).

◆ **IP.116** (Valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)/t dt}{1+t^2}$) (♣) Centrale PC – 2005

On définit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- 1) a) Domaine de définition et valeurs aux bornes de cet intervalle?
 b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^{*+} .
 c) Montrer qu'il existe une application ℓ telle que f vérifie l'équation différentielle $y'' + y = \ell$.
- 2) Soit $a > 0$. Montrer que $x \mapsto \int_0^x \frac{e^{it}}{t} dt$ admet une limite finie en $+\infty$.
 On notera par la suite $f(x) = \int_a^x \frac{\cos t}{t} dt$ et $g(x) = \int_a^x \frac{\sin t}{t} dt$.
- 3) Montrer que $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u-x} du$ pour tout $x > 0$.
- 4) En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

◆ [Rec05/intparam-r5.tex/r5:117] (Cf. également IP.46, IP.80, IP.78 et IP.115).

◆ **IP.117** (**) Mines PC – 2005

On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx$. Étudier l'existence et la classe de f .

◆ [Rec05/intparam-r5.tex/r5:58]

◆ **IP.118** (*) Mines PC – 2005

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$.

1. Montrer que F et G sont de classe \mathcal{C}^1 .
2. Montrer que $F + G$ est constante sur \mathbb{R} .
3. Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. En déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{+\infty} t^n \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

◆ [Rec05/intparam-r5.tex/r5:514] Quel scandale!

1. on pose $H(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ d'où $F(x) = H(x^2)$
2. d'où $F'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt = \int_{u=x^2}^{+\infty} -2e^{-x^2} \left(\int_0^x e^{-u^2} du \right)^2$
3. par convergence dominée discrétisée, $\lim_{+\infty} F = \int_0^1 \lim_{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dx = 0$.
 on a $F(x) + G(x) = F(0) + G(0) = \frac{\pi}{4} = 0 + \lim_{+\infty} G = I^2$ donc $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
4. $I_n = \int_0^{+\infty} t^n \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_{u=\sqrt{t}}^{+\infty} 2 \int_0^{+\infty} u^{2n} e^{-u^2} dt$
 IPP : $I_n = \frac{2}{2n+1} I_{n+1}$ donc $I_n = \frac{2n-1}{2} I_{n-1} = \frac{(2n)!}{4^n n!} I_0 = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}$
 (= $\Gamma(n + \frac{1}{2})$)

Or $G'(x) = 2e^{-x^2} \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ donc $(F + G)' = 0$

◆ **IP.119** (**) Mines PC – 2005

On définit $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$.

- 1) Domaine de définition.
- 2) Exprimer I avec des fonctions usuelles.

◆ [Rec05/intparam-r5.tex/r5:74]

◆ **IP.120** (**) Mines PC – 2005

On définit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \text{Arc tan}(t) dt$.

- 1) Domaine de définition et continuité de f ?
- 2) Équivalent de f en 0 ?

◆ [Rec05/intparam-r5.tex/r5:122]

◆ **IP.121** TPE PC – 2005

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

- 1) Domaine de définition et continuité de f ?
- 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- 3) Étudier la dérivabilité de f . Montrer que f vérifie une équation de la forme $y' - y = c/\sqrt{x}$.
- 4) Calculer C .

◆ [Rec05/intparam-r5.tex/r5:36]

◆ **IP.122** (***) CCP PC – 2005

On pose $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$.

- 1) Montrer que F est continue sur $[0; +\infty[$.
- 2) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.
- 3) On pose $N(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$. On admet que $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 1$. Exprimer F en fonction de N .

◆ [Rec05/intparam-r5.tex/r5:3]

- 1) Domination de l'intégrande par $1/(1+x^2)$.
- 2) Domination de $\frac{\partial h}{\partial x}$ par e^{-ax^2} pour tout $t \in [a; +\infty[$.
- 3) Posons $\alpha = 2\sqrt{\pi}t$. Alors F vérifie l'équation différentielle

$$F'(t) - F(t) = -\frac{\alpha}{\sqrt{t}},$$

ce que l'on résout, par MVC, en $F(t) = \mu e^t + \lambda(t) e^t$, avec $\lambda'(t) = -\frac{\alpha}{\sqrt{t}}$, donc $\lambda(t) = -2\alpha^2 N(t)$.

Enfin, pour que $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0$ (convergence dominée), on n'a qu'un choix pour la constante μ , et finalement

$$F(t) = 2\alpha^2 [1 - N(t)] e^t = \frac{\pi}{2} [1 - N(t)] e^t.$$

On vérifie notamment que cette solution se prolonge en 0 et que $F(0) = \frac{\pi}{2}$, ce qui est normal.

◆ **IP.123** (*) CCP PC – 2005

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $a \in [0; 1]$ tel que :

$$\forall x \in [0; 1] \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t) dt.$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ .
2. Montrer qu'il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0; 1] \quad f^{(n)}(x) = a^{\alpha_n} \cdot f(a^{\beta_n} x).$$

3. Calculer $f^{(n)}(0)$.
 Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in [0; 1] \quad |f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}.$$

4. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, on a $f(x) = 0$.

◆ [Rec05/intparam-r5.tex/r5:502]

1. trivial
2. $f'(x) = af(ax)$ puis $f''(x) = a^2 f'(ax) = a^3 f(a^2x) \dots$ si $f^{(n)}(x) = a^{\alpha_n} \cdot f(a^{\beta_n} x)$ alors $f^{(n+1)}(x) = a^{\alpha_n + \beta_n} \cdot f'(a^{\beta_n} x) = a^{\alpha_n + \beta_n + 1} \cdot f(a^{\beta_n + 1} x)$ donc $\beta_{n+1} = \beta_n + 1$ donc $\beta_n = n$ et $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n + 1 = \alpha_n + n + 1$ d'où $\alpha_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. On a $f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot f(a^n x)$
4. Il suffit de faire tendre n vers $+\infty$

$f^{(n)}(0) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot f(0)$ or $f(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$ donc $f^{(n)}(0) = 0$.
 Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, $[0; 1]$ étant un compact, $\forall x \in [0; 1]$ $|f(x)| \leq \frac{M_n}{(n+1)!}$ avec $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$
 Mais $f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot f(a^n x)$ et $a \in [0; 1]$ donc $\|f^{(n)}\|_\infty \leq \|f\|_\infty = M$ qui convient.

◆ **IP.124** (★★) CCP PC – 2005

Soit $a > 0$. On définit $I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt dx$.

1) Justifier l'existence de $I(a)$.

2) Montrer que $I(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \int_0^n e^{-ax} \cos(x \sin t) dx dt$.

En déduire que $I(a) = \int_0^\pi \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(x \sin t) dx dt$.

3) Montrer que $I(a) = 2a \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2 + \sin^2 t} dt$. Calculer $I(a)$ en effectuant le changement de variable $u = \tan t$.

◇ [Rec05/intparam-r5.tex/r5:112]

◆ **IP.125** (★) CCP PC – 2005

On pose $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$.

1) Montrer que F est continue sur $]0; +\infty[$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

2) On pose $N(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$ et on admet que $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 1$. Exprimer F en fonction de N .

◇ [Rec05/intparam-r5.tex/r5:132]

◆ **IP.126 (Intégrale gaussienne)** (★) CCP PC – 2005

On définit $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \left(\int_0^1 e^{-t^2} dt \right)^2$.

1) Montrer que les fonctions F et G sont de classe \mathcal{C}^1 .

2) Montrer que $F + G = C^{\text{te}}$.

3) Déterminer la limite de F en $+\infty$. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

◇ [Rec05/intparam-r5.tex/r5:148]

On pose

$$\phi: \begin{cases} \mathbb{R} \times [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}, \end{cases}$$

dérivable et

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) dt = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -G'(x), \end{aligned}$$

ce qui montre que $F + G = C^{\text{te}} = \frac{\pi}{4}$ et enfin, puisque

$$F(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = e^{-x^2} \frac{\pi}{4},$$

qui est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \times [0; 1]$. Par domination astucieuse ou non, F on en déduit $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et l'intégrale voulue vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Compléments de calcul intégral

Intégrales doubles

◆ CINT.1 (Un classique) (★★)

On pose $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}^*)$. Calculer

$$\inf_{f \in E} \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx.$$

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:3]

Ford, vien à la rescousse, pour montrer que

On pose $D = [0; 1]^2$. On a alors

$$I(f) = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)} dx dy = \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D \frac{f(x)^2 + f(y)^2}{f(x)f(y)} dx dy$$

mais l'inégalité arithmético-géométrique, telle la cavalerie dans les fims de John

avec égalité si et seulement si $x = y$, ce qui montre que $I(f) \geq 1$ avec égalité si et seulement si $f(x) = f(y)$ pour tout $x, y \in [0; 1]$, c'est-à-dire que la borne inférieure est atteinte exactement pour les fonctions constantes.

◆ CINT.2 (Intégrale gaussienne) (★)

On note \mathcal{B}_a la boule de centre 0 et de rayon a pour la norme N_2 , et \mathcal{B}'_a la boule de centre 0 et de rayon a pour la norme N_∞ . On pose $f : (x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$, et

$$I_a = \iint_{\mathcal{B}_a} f(x, y) dx dy \quad \text{et} \quad I'_a = \iint_{\mathcal{B}'_a} f(x, y) dx dy.$$

- 1) Calculer I_a .
- 2) Montrer que $I_a \leq I'_a \leq I_{\sqrt{2}a}$.
- 3) En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:4]

2) T.

1) Un passage en polaire montre que

$$I_a = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \pi(1 - e^{-a^2}).$$

3) On fait $[a \rightarrow \infty]$ et $I_a \rightarrow \pi$ donc $I'_a \rightarrow \pi$, or $J_a = \left(\int_a^\infty e^{-x^2} dx \right)^2$.

◆ CINT.3 (Coordonnées paraboliques) (★) CCP PC - 1987

Soient p_1, p_2, q_1, q_2 des réels > 0 . Calculer l'aire du domaine

$$\mathcal{A} : \begin{cases} 2p_1x \leq y^2 \leq 2p_2x \\ 2q_1y \leq x^2 \leq 2q_2y. \end{cases}$$

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:5]

or

On passe en « coordonnées paraboliques » $(x, y) \leftrightarrow (p, q)$ avec

$$p = \frac{y^2}{2x} \quad q = \frac{x^2}{2y},$$

$$\left| \frac{D(p, q)}{D(x, y)} \right| = \left| \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{2x^2} & \frac{y}{x} \\ \frac{x}{2y^2} & -\frac{x^2}{2y^2} \end{vmatrix} \right| = \frac{3}{4},$$

et l'image du domaine est $A^* = [p_1, p_2] \times [q_1, q_2]$. On a alors une aire

d'où $\mathcal{A} = \frac{4}{3}(p_2 - p_1)(q_2 - q_1)$.

$$\mathcal{A} = \iint_{A^*} dx dy = \int_{A^*} \left| \frac{D(x, y)}{D(p, q)} \right| dp dq,$$

◆ CINT.4 (★★★)

Calculer l'intégrale

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2} \quad \text{où} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:9]

$r = \sin \theta$. On trouve

On commence par noter que D est le domaine compris entre le cercle unité et le cercle de centre $(0, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Ainsi,

$$I = \iint_{D_1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2} - \iint_{D_2} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

$$I_1 = \iint_{D_1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{(1+r^2)^2} r dr d\theta = \pi \left[-\frac{1}{1+r^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

En coordonnées polaires, le premier cercle a pour équation $r = 1$ et le second

et

$$I_2 = \iint_{D_2} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2} = 2 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sin \theta} \frac{r}{(1+r^2)^2} dr \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{1+r^2} \right]_0^{\sin \theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{1+\sin^2 \theta} \right) d\theta,$$

donc

$$I = I_1 - I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\sin^2 \theta} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

en posant $t = \tan \theta$.

◆ CINT.5 (★)

Calculer

$$I = \iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad \text{où} \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:11]

Alors

On effectue le changement de variables $x/a = r \cos \theta$ et $y/b = r \sin \theta$, et on a

$$I = \iint_{\Delta} (1-r^2)r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2)r dr = \frac{\pi}{2}.$$

a

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = rab \quad \Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

◆ CINT.6 (★★)

Calculer l'aire du domaine commun aux deux ellipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:12]

secteur il faut : $2 \text{ Arc tan } a/b$. Au total :

On regarde les symétries, et on passe en polaire.

Ou bien on dilate d'un facteur a/b pour obtenir des cercles et on calcule quel

$$\frac{8b}{a} \text{Arctan} \left(\frac{a}{b} \right) \quad \text{si} \quad a > b.$$

◆ CINT.7

On note E l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^∞ et à support borné. On munit E du produit scalaire

$$\langle f|g \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) g(x, y) dx dy.$$

1) Montrer que le laplacien $\Delta : E \rightarrow E$ défini par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

est un endomorphisme symétrique de E .

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:13]

Trivial.

◆ CINT.8

Calculer l'intégrale double $\iint_{\mathcal{D}} \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx dy$ où $\mathcal{D} \stackrel{\text{dét}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:15]

$$I = \int_0^1 \int_y^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx dy = \int_0^1 [\sqrt{x^2 - y^2}]_y^1 dy = \int_0^1 \sqrt{1 - y^2} dy = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

◆ CINT.9

Calculer l'intégrale double $\iint_{\mathcal{D}} \frac{y}{a^2 + y^2} dx dy$ où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ et } x \geq 0, y \geq 0\}$.

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:16]

On calcule bêtement

$$I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{y}{a^2 + y^2} dy dx = \frac{1}{2} \int_0^a [\ln(a^2 + y^2)]_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \ln(\sqrt{2}a - x) dx + \int_0^a \ln(\sqrt{2}a + x) dx - a \ln a = -a + \frac{a}{\sqrt{2}} \ln(3 + 2\sqrt{2}).$$

◆ CINT.10 (Un produit scalaire)

On note \mathcal{D} le disque unité fermé de \mathbb{R}^2 et E l'espace des fonctions $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et nulle sur le bord \mathcal{C} de \mathcal{D} .

Pour tout $f, g \in E$, on pose $\langle f|g \rangle = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy$.

Montrer que l'on a défini un produit scalaire.

◊ [Divers/iintexo.tex/cint:27]

La condition de définie positivité est immédiate.

Noter que l'on peut l'écrire $(f|g) = \iint_{\mathcal{D}} (\nabla f) \cdot (\nabla g)$.

◆ **CINT.11** ($\delta \otimes H$) (★)

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]^2$ et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \iint_{[0;1]^2} (1-x)^n f(x,y) dx dy.$$

◊ [Divers/iintexo.tex/cint:28]

Par les méthodes habituelles et Fubini, on trouve $\int_0^1 f(1,y) dy$.

◆ **CINT.12** (Intégrale gaussienne)

On note $\mathcal{C}_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq \alpha \text{ et } |y| \leq \alpha\}$ et $\mathcal{D}_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq \alpha^2\}$.

- 1) Montrer que $\mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{C}_\alpha \subset \mathcal{D}_{\alpha\sqrt{2}}$.
- 2) En déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

◊ [Divers/iintexo.tex/cint:32]

changement de variables cartésiennes-polaires pour obtenir une inégalité avec l'intégrale sur des disques, puis prendre la limite grâce au théorème d'encadrement.

- 1) Faire un dessin.
- 2) Noter que $\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-x^2} dx\right)^2 = \iint_{\mathcal{C}_\alpha} e^{-x^2-y^2} dx dy$ puis effectuer le

◆ **CINT.13** (★)

Le but de cet exercice est de calculer, *via* une intégrale double, l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

- 1) Vérifier que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dx$ et en déduire que

$$I = \iint_{[0;1]^2} \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy.$$

- 2) Montrer que $2I = \iint_{[0;1]^2} \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy$ et conclure.

◊ [Divers/iintexo.tex/div:93]

◆ **CINT.14**

À l'aide du changement de variables $(u, v, w) = (\sqrt{yz}, \sqrt{xz}, \sqrt{yz})$, calculer les volumes de

$$D_1 = \{(x, y, z) \in]0; +\infty[^3; xy < 1, xz < 1, yz < 1\}$$

et

$$D_2 = \{(x, y, z) \in]0; +\infty[^3; xy + xz + yz < 1\}.$$

◊ [Divers/iintexo.tex/div:94]

◆ **CINT.15** (Contre-exemple au théorème de Fubini)

On définit, pour tout $(x, y) \in [0; 1]^2 : f(x, y) = \text{sgn}(y-x) \cdot \max(x, y)^{-2}$.

- 1) Calculer, pour tout $y \in [0; 1]$, la valeur de $\int_0^1 f(x, y) dx$. En déduire $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy\right) dx$.
- 2) Calculer, de même, $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx\right) dy$.
- 3) Commenter.

◊ [Divers/iintexo.tex/div:28b]

- 1) On a $f(x, y) = \begin{cases} 1/y^2 & \text{si } 0 < x < y < 1, \\ -1/x^2 & \text{si } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour tout $y \in]0; 1[$ on a donc

2) On calcule de même que

$$\int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^y \frac{dx}{y^2} - \int_y^1 \frac{dx}{x^2} = 1,$$

et donc

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx\right) dy = 1.$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy\right) dx = -1.$$

◆ **CINT.16** (★★) ENSI PC - 2000

On pose

$$D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \leq 1 \text{ et } -u \leq v \leq u\}.$$

On considère l'application

$$\Phi: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) \longmapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right). \end{cases}$$

Déterminer l'image $D = \Phi(D')$ et calculer $I = \iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2} dx dy$.

◊ [Rec00/iint-r0.tex/cint:7]

D' est un triangle fermé délimité par les droites $u = 1, u+v = 0$ et $u-v = 0$. ϕ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 car c 'est une application (linéaire, d'ailleurs) de classe \mathcal{C}^1 dont le jacobien vaut identiquement $-\frac{1}{2}$ et ne s'annule donc jamais.

limité par les droites $x = 0, y = 0$ et $x + y = 1$. D est donc un compact sympa sur laquelle la fonction à intégrer est continue, donc l'intégrale existe. Grâce au changement de variables Φ , on trouve

$$I = \frac{1}{2} \iint_{D'} u^2 e^{uv} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-u}^u u^2 e^{uv} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 u [e^{uv}]_{-u}^u du = \frac{1}{2} \int_0^1 u (e^{u^2} - e^{-u^2}) du = \frac{1}{2} \int_0^1 \text{sh } t dt = \frac{\text{ch } 1 - 1}{2}.$$

L'automorphisme réciproque est

$$\Phi^{-1}: (x, y) \longmapsto (x+y, x-y).$$

On en déduit que l'image par Φ du triangle fermé D' est le triangle fermé D

◆ **CINT.17** (★★★) ENSI - 191999

On note D l'ensemble de \mathbb{R}^2 défini par $D = \begin{cases} x^2 + y^2 - y \leq 0, \\ x^2 + y^2 - x \leq 0. \end{cases}$

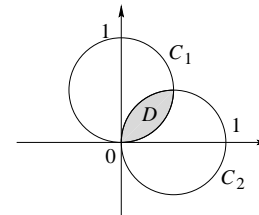
Calculer l'intégrale double $I = \iint_D (x+y)^2 dx dy$.

◊ [Rec00/iint-r0.tex/cint:8]

Le domaine D est délimité par deux cercles C_1 et C_2 , passant par 0, centrés sur Ox et Oy respectivement, et de diamètre 1. C 'est-à-dire qu'ils sont ainsi :

Or le cercle C_2 a pour équation en coordonnées polaires $r = \cos \theta$. De plus, $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$. On trouve donc

$$I = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos \theta + \sin \theta)^2 \int_0^{\cos \theta} r^3 dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 \theta (1 + 2 \sin \theta \cos \theta),$$



et les deux intégrales valent

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \theta \cos^5 \theta d\theta = \left[-\frac{1}{6} \cos^6 \theta\right]_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 = \frac{1}{48},$$

et $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{8} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + \cos^2 \theta + 2 \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{8} \left[\frac{3\pi}{8} - 1\right].$

Le domaine D est donc symétrique par rapport à la droite $\Delta : x = y$, et comme la fonction $(x, y) \longmapsto x + y$ est également invariante, on peut noter D' la moitié du domaine et calculer

$$I = 2 \iint_{D'} (x+y)^2 dx dy \quad D' = \{(x, y) \in D; y \geq x\}.$$

Au total, $I = \frac{3\pi}{64} - \frac{5}{48}.$

◆ **CINT.18** (★) ENSI MP

Soit D l'ensemble défini par les inégalités $(x+y)^2 \leq 2x$ et $y \geq 0$. Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D xy dx dy.$$

◊ [Rec00/iint-r0.tex/cint:14]

D est le domaine compris entre une parabole et une droite. La parabole passe par 0, elle est définie par $F(x, y) = (x+y)^2 - 2x$ la tangente à l'origine est donnée par une perpendiculaire à $\text{grad } F = -2e_x$, donc elle est sur l'axe Oy . L'axe de la parabole est donné par la seconde bissectrice.

D est défini par les inégalités $0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq -x + 2\sqrt{x}$, et

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{-x+2\sqrt{x}} xy dy\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x(-x+2\sqrt{x})^2 dx = \frac{2}{21}.$$

◆ **CINT.19** (*) Mines PC – 1998
 Montrer que la fonction $x \mapsto \psi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ et calculer son intégrale.

◇ [Rec00/iint-r0.tex/supp-r0-13] L'idée est de pouvoir utiliser Fubini puis une interversion d'intégration entre x et t ce qui donne
 Pour montrer que ψ est intégrable, on a bien quatre méthodes :
 – on remarque que $\psi(x) \leq \int_x^{+\infty} \frac{2}{x^3} dx = \frac{1}{x^2}$;
 – on écrit que, si $x \geq 1$, $\psi(x) \leq \int_x^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2}$;
 – on effectue une translation : $\psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+t)^2} dt \leq e^{-x^2} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$;
 – ou peut-être que trois suffisent

On peut, plus simplement, remarquer que $x\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ et donc, par une intégration par parties :
 $\int_0^b \psi(x) dx = [x\psi(x)]_0^b - \int_0^b x\psi'(x) dx$
 et en prenant la limite $b \rightarrow +\infty$:
 $\int_0^{+\infty} \psi = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$.

◆ **CINT.20** CCP MP – 2001
 1) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre k , entre 0 et 1.
 2) À l'aide de cette formule, calculer $\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$, avec $p, q \in \mathbb{N}$.
 3) Soient $p, q, r \in \mathbb{N}$, calculer $\iint_{\mathcal{D}} x^p y^q (1-x-y)^r dx dy$,
 où $\mathcal{D} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, y > 0, x + y < 1\}$.

◇ [Rec01/iint-r1.tex/im-r-1] Or $\iint_{B(0;1)} u^2 du dv = \frac{1}{2} \iint_{B(0;1)} (u^2 + v^2) du dv$
 On reconnaît une ellipse. On effectue le changement de variables $= \frac{1}{2} \iint_{B(0;1)} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta$
 $u = \frac{x}{a}, v = \frac{y}{b}, \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| = |ab|$. $= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$.
 Alors $I = \iint_{\mathcal{D}} (a^2 u^2 - b^2 v^2) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du dv$ avec $\mathcal{D}' = \overline{B}(0; 1)$. Ainsi, $I = \frac{\pi ab}{4} (a^2 - b^2)$.

◆ **CINT.21** CCP MP – 2001
 Calculer $I = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2) dx dy$ où $\mathcal{D} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

◆ **CINT.22** TPE MP – 2001
 On pose $E = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}^{*+})$ et
 $I: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \mapsto \left(\int_a^b f(t) dt \right) \cdot \left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)} \right)$.
 1) Montrer que $\forall f \in E, I(f) \geq (b-a)^2$. Étudier l'égalité.
 2) Montrer que $I(E) = [(b-a)^2; +\infty[$.

◇ [Rec01/iint-r1.tex/im-r-3] Or de $(x-y)^2 \geq 0$ on tire $2ab \leq a^2 + b^2$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ ce qui montre que l'intégrande est au minimum égal à 1. L'inf est bien égal à $(b-a)^2$, atteint pour les fonctions constantes.
 On pose ensuite $f_\alpha : x \mapsto (x-a)^\alpha$ et on calcule $I(f_\alpha)$...

$I(f) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{f(x)}{f(y)} dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right) dx dy$
 $= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \frac{f(x)^2 + f(y)^2}{f(x) \cdot f(y)} dx dy$.

◆ **CINT.23** CCP MP – 2001
 On pose $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calculer $\iint_{\mathcal{D}_k} f(x, y) dx dy$, où l'on a posé
 $\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 - 2ax + y^2 \leq 0\}$ et $\mathcal{D}_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0, \begin{matrix} x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 2y \geq 0 \end{matrix} \right\}$.

◇ [Rec01/iint-r1.tex/im-r-4] ◆ **CINT.24** CCP MP – 2001
 Soit $r > 0$. On pose $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < x < \frac{1}{2} \text{ et } 0 < y < r\}$.
 Calculer $\iint_{\mathcal{D}} x \cos xy \cos^2 rx dx dy$.

◇ [Rec01/iint-r1.tex/im-r-5] ◆ **CINT.25 (Produit de convolution)** ENS Cachan MP – 2002
 1) Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$. On pose $g_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-x^2/2\alpha}$. Montrer que
 $\iint \phi(x+y) g_\alpha(x) g_\alpha(y) dx dy = \int \phi(z) g_{2\alpha}(z) dz$.
 2) Soit f continue, positive, $f = O(e^{-\alpha x^2})$ et normée par $\int f = 1$. Montrer que l'on peut définir $f * f$ telle que $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$:
 $\iint \phi(x+y) f(x) f(y) dx dy = \int \phi(z) f * f(z) dz$.
 Montrer que $f * f$ vérifie, comme f :
 – $f * f$ est continue ;
 – f est positive ;
 – $f * f(x) = O(e^{-\alpha x^2})$;
 – $\int f * f = 1$.

◇ [Rec02/iint-r2.tex/im-r-2-6] intégrales convergent) et vérifie les hypothèses : les théorèmes sur les intégrales à paramètres donnent que F est continue (on a bien les hypothèses de domination). La majoration $F = O(g_\alpha)$ est évidente en utilisant que $f(x) \leq M g_\alpha(x)$. On en déduit la propriété souhaitée $F = f * f$ par Fubini. L'unicité provient du fait que si g est continue vérifie : $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}), \iint \phi(z) g(z) dz = 0$ alors $g = 0$ (prendre $\phi = g \cdot \mathbf{1}_{\{0; n\}}$). La normalisation est une conséquence du théorème de Fubini.

1) On fait le changement de variables $x = x$ et $z = x + y$, et on remarque que $\iint g_\alpha(x) g_\alpha(z-x) dx = g_{2\alpha}(z)$.
 2) Il suffit de remarquer que $F(z) = \iint f(x) f(z-x) dx$ a un sens (les

◆ **CINT.26** CCP PC – 2002
 Calculer l'aire définie par les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 \leq 1$ et $x^2 + y^2 \leq 2x^2 - y^2$.
 ◇ [Rec02/iint-r2.tex/im-r-2-1] $1/\sqrt{2}$. L'aire cherchée est donc $2 \text{Arc tan } 1/\sqrt{2}$, (l'aire d'un secteur est proportionnelle à l'angle).
 Le domaine est l'intersection du disque unité avec $\{(x, y) ; |x| \geq \sqrt{2}|y|\}$, c'est donc la réunion de deux secteurs angulaires, leur demi-angle vérifie $\tan \theta =$

◆ **CINT.27** TPE PC – 2002
 On pose $\mathcal{D} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 ; x + y \leq 1\}$. Calculer $\iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(1+x+y)^3}$.
 ◇ [Rec02/iint-r2.tex/im-r-2-2] le jacobien est 1 donc
 On effectue le changement de variables : $x = x$ et $t = x + y$. Le domaine devient
 $\mathcal{D}' = \{(x, t) ; 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq t\}$, $I = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^3} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3} \right) dt = \frac{1}{8}$.

◆ **CINT.28** (***) TPE MP – 2002
 Soient $a, b \in]1; +\infty[$. Calculer $\int_0^\pi \ln \left(\frac{a - \cos t}{b - \cos t} \right) dt$.
 INDICATION : Introduire une fonction de deux variables et utiliser le théorème de Fubini.

◇ [Rec02/iint-r2.tex/im-r2:5]
On pose $F(x, t) = \ln(x - \cos t)$, on veut calculer $\int_0^\pi [F(a, t) - F(b, t)] dt$.

On utilise Fubini,
 $I(a, b) = \int_0^\pi \int_b^a F'_1(x, t) dx dt = \int_b^a \int_0^\pi \frac{dt}{x - \cos t} dx$.

On calcule la première intégrale par le changement de variable $u = \tan t/2$:

$$I(a, b) = \int_b^a \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - 1}} dx,$$

puis $x = \operatorname{ch} t$ pour trouver

$$I(a, b) = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{b + \sqrt{b^2 - 1}}.$$

◆ **CINT.29 (dans $S_n(\mathbb{R})$, $\det\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \sqrt{\det AB}$)** (***) X-ENS PSI – 2002

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive (c'est-à-dire dont les valeurs propres sont strictement positives). Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tXAX} du dv = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}},$$

où l'on a noté $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

En déduire que $\det\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \sqrt{\det(A)\det(B)}$.

◇ [Rec02/iint-r2.tex/im-r2:9]
On diagonalise au moyen d'une matrice orthogonale, donc le jacobien est égal à ± 1 . La formule s'ensuit directement.
On utilise ensuite une version bidimensionnelle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\iint f \cdot g\right)^2 \leq \iint f^2 \cdot \iint g^2.$$

Alors en posant $C = \frac{1}{2}(A+B)$:

ce qui mène à la formule demandée.

$$\begin{aligned} I &= \left(\iint e^{-tXCX} du dv\right)^2 \\ &= \left(\iint e^{-tXAX/2} e^{-tXBX/2} du dv\right)^2 \\ &\leq \iint e^{-tXAX} du dv \cdot \iint e^{-tXBX} du dv, \end{aligned}$$

◆ **CINT.30 (Intégrale gaussienne)** (*) Centrale PC – 2005

(Avec Maple)
On pose $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

- Montrer que I est bien définie.
- On pose $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq R\}$ et $C_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |x| \leq R \text{ et } |y| \leq R\}$. On définit enfin $g : (x, y) \mapsto e^{-x^2+y^2}$.
 - Calculer les intégrales doubles de g sur D_R, D_{2R} et C_R .
 - En déduire I .
- On pose $J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2-1/t^2} dt$.
 - Montrer que J est bien définie.
 - À l'aide des résultats précédents, calculer J .

◇ [Rec05/iint-r5.tex/r5:78]

◆ **CINT.31** (***) Centrale PC – 2005

- Montrer que la fonction cosinus hyperbolique réalise une bijection de \mathbb{R}^+ dans $]1; +\infty[$. Déterminer sa réciproque à l'aide des fonctions usuelles. Déterminer sa dérivée.
- Soient $a, b \in]1; +\infty[$. On note $I = \int_0^\pi \ln\left(\frac{b - \cos t}{a - \cos t}\right) dt$. Montrer que $I = \pi \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$ en utilisant l'égalité de Fubini.
- Calculer I .

◇ [Rec05/iint-r5.tex/r5:137]

◆ **CINT.32** (*) CCP PC – 2005

On note $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |x| \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- Représenter \mathcal{D} et en donner une expression simplifiée.
- Calculer $K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \cos^2 \theta}$. On pourra effectuer le changement de variable $t = \tan \theta$.
- En déduire la valeur de $\iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$.

◇ [Rec05/iint-r5.tex/r5:65]

1) $\mathcal{D} = \{(x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta) \mid |\rho \cos \theta| \leq \rho^2 \leq 1\} = \{(x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta) \mid |\cos \theta| \leq |\rho| \text{ et } \rho \leq 1\}$
 $\rho = \cos \theta$ correspond à un cercle : $x^2 + y^2 = x \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$, on en déduit la figure par symétrie.

2)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} d\theta &= \int_{t=\tan \theta} \frac{1}{1 + \frac{1}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2 + t^2} dt \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

3)

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx dy = 4 \iint_{\mathcal{D}'} \frac{1}{(1 + \rho^2)^2} \rho d\rho d\theta$$

avec

$$\mathcal{D}' = \{(\rho, \theta) \in [0; 1] \times [0; \frac{\pi}{2}]; \cos \theta \leq \rho \text{ et } \rho \leq 1\},$$

d'où

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx dy &= 4 \int_0^{\pi/2} \left[\int_{\cos \theta}^1 \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^2} d\rho \right] d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1 + \rho^2} \right]_{\cos \theta}^1 d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2} + 2K = \frac{\pi(\sqrt{2} - 1)}{2} \end{aligned}$$

(sauf erreur...)

Intégrales triples

◆ **CINT.33 (Intersection sphère-cylindre)** (*)

Calculer le volume de l'intersection d'une sphère de centre 0 et de rayon 1, et d'un cylindre passant par 0, de rayon $0 < a < 1$.

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:26]

$$V = \frac{4\pi}{3}(1 - (1 - a^2)^{3/2}).$$

◆ **CINT.34 (Intersection cylindre-cylindre)** (*)

Calculer le volume $x^2 + z^2 \leq a^2$ et $y^2 + z^2 \leq a^2$.

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:2]

grâce à un passage en polaire dans le plan (x, y) translaté, où la section est un carré.

$$\int_{-a}^a dz (2\sqrt{a^2 - z^2})^2$$

$V = \frac{16}{3}a^3$, un peu supérieur au volume d'une sphère.

◆ **CINT.35** (♣)

On pose $D = [0, \frac{\pi}{2}]^3$. Calculer

$$\iiint_{\mathcal{D}} \cos(x + y - z) dx dy dz.$$

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:6]

sur chaque variable z , puis y puis x par exemple, ce qui donne

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} [-\sin(x + y - z)]_0^{\pi/2} dx dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} [\cos(x + y) + \sin(x + y)] dx dy \\ &= \int_0^{\pi/2} [\sin(x + y) - \cos(x + y)]_0^{\pi/2} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 2. \end{aligned}$$

La fonction $(x, y, z) \mapsto \cos(x + y - z)$ est continue sur le pavé D , l'intégrale est bien définie. Grâce au théorème de Fubini, on peut intégrer successivement

◆ **CINT.36 (Volume de l'hyperbole)**

Calculer le volume de la boule de rayon a de \mathbb{R}^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:19]

On a un cas particulier $V_1 = 2a$, puis $V_2 = \pi a^2$, $V_3 = \frac{4}{3}\pi a^3$.
On calcule par récurrence :

$$V_n(1) = \int_{-1}^1 dx_1 \left\{ \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_2 \int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \dots \int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\dots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\dots-x_{n-1}^2}} dx_n \right\}$$

et le terme entre crochets est le volume de la boule de rayon $1 - x_1^2$ dans \mathbb{R}^{n-1} , qui est $\mu_{n-1}(\sqrt{1 - x_1^2}) = (1 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} \mu_{n-1}(1)$.

$$\text{On a } \mathbf{d(t)} = \mu_{n-1}(1) \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = 2\mu_{n-1}(1) \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

En posant $t = \sin \theta$, on obtient la relation

$$\mu_n = 2\mu_{n-1} \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta$$

On reconnaît une intégrale de Wallis.

Une récurrence sur la relation $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$ donne

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2^p p!}{(2p+1)!!}$$

◆ **CINT.37 (Volume du trianlotope)**

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:20]

◆ **CINT.38 (Intégrales triples)**

Calculer $\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz$ où :

- | | |
|---|--|
| 1) $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$,
$f(x, y, z) = \frac{1}{(x+y+z+1)^3}$. | 5) $\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq a\}$,
$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3z(x^2 + y^2)$. |
| 2) $\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$,
$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}$ ($a > R > 0$). | 6) $\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$,
$f(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$. |
| 3) $\mathcal{D} = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$,
$f(x, y, z) = xyz$. | 7) $\mathcal{D} = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$,
$f(x, y, z) = x^2 + y^2$. |
| 4) $\mathcal{D} = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$,
$f(x, y, z) = \frac{1}{(x+y+z+1)^2}$. | |

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:21]

- | | |
|---|---|
| 1) On intègre successivement et on trouve fastidieusement $\frac{1}{2}(5 \ln 2 - 3 \ln 3) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{32}{27} \right)$. | 4) $\frac{3}{4} - \ln 2$. |
| 2) $2\pi a^2 \text{Arcsin} \frac{R}{a} - 2\pi R \sqrt{a^2 - R^2}$. | 5) $\frac{\pi R^2 a^2}{4} (a^2 + 3R^2)$. |
| 3) $\frac{1}{720}$ | 6) $\frac{\pi}{2} (1 - \ln 2)$. |
| | 7) $\frac{4\pi}{15} abc(a^2 + b^2)$. |

◆ **CINT.39 (Moments d'inertie d'un tore)**

Calculer les intégrales triples suivantes :

$$I_{ij} \stackrel{\text{def.}}{=} \iiint_D x_i x_j dx dy dz$$

où l'on a noté (x_1, x_2, x_3) pour (x, y, z) .

◇ [Divers/iintexo.tex/cint:30]

◆ **CINT.40** (★) X PC – 2005

On considère un bol d'équation $z = a(x^2 + y^2)$, tel que le rayon de la section à hauteur de 1 m est de 0,5 m. On verse 10 L d'eau dans le bol. Calculer la hauteur d'eau.

◇ [Rec00/iint-r0.tex/div:165]

On a $z = ar^2$ et pour $r = \frac{1}{2}$, on a $z = 1$ donc $a = 4$. Ainsi, le bol a pour équation $z = 4(x^2 + y^2)$. On cherche z pour que le volume total soit 10^{-2} m^3 .

soit

$$V = \int_0^{z_0} \frac{\pi z}{2} dz = \frac{\pi z_0^2}{4} = 0,01$$

$$V = \int_0^{z_0} \pi r^2 dz \quad \text{avec} \quad r = \frac{\sqrt{z}}{2}, \quad \text{soit } z_0 = \frac{0,2}{\sqrt{\pi}}$$

◆ **CINT.41** TPE PC – 2002

On note $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Quel est le volume engendré par la rotation de \mathcal{E} autour de son grand axe (ellipsoïde prolat) ? Autour de son petit axe (ellipsoïde oblat) ?

◇ [Rec02/iint-r2.tex/im-r2:3]

Inutile de faire des calculs, on remarque que le volume est celui d'une sphère

unité dilatée de a dans une direction et de b dans les deux autres dans le cas prolat, on trouve $4/3\pi ab^2$. L'ellipsoïde oblat a pour volume $4/3\pi a^2 b$.

◆ **CINT.42** École de l'air MP – 2002

On donne l'ellipsoïde $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. Calculer le volume maximal d'un parallélépipède contenu dans l'ellipsoïde et dont les côtés sont parallèles aux axes.

◇ [Rec02/iint-r2.tex/im-r2:4]

On remarque si P est un parallélépipède comme dans l'énoncé, l'enveloppe convexe de P avec ses symétriques par rapport aux plans de base en est un aussi, pour calculer le maximum, on se place donc dans le cas où P a pour sommets

les $(\pm x, \pm y, \pm z)$. Évidemment ces points doivent être sur l'ellipsoïde. On veut maximiser $8xyz$ lorsque $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (tous positifs), donc $8\sqrt{abc}$ lorsque $a + b + c = 1$, donc le volume cherché est $\frac{8}{3\sqrt{3}}$.

Intégrales curvilignes & formes différentielles

◆ **CINT.43 (Inégalité isopérimétrique)** (★★)

1) Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 et 2π périodique. Montrer que

$$2 \int_0^{2\pi} f g' \leq \int_0^{2\pi} f'^2 + \int_0^{2\pi} g'^2$$

2) Soit Γ un arc de classe \mathcal{C}^1 , fermé, simple, de longueur 2π . Montrer que l'aire délimitée par Γ est inférieure ou égale à π . Étudier les cas d'égalité.

◇ [Divers/curviligneexo.tex/sf:34b]

- On a $|2mc_n \gamma_n| \leq n |c_n|^2 + n |\gamma_n|^2 \leq n^2 |c_n|^2 + n^2 |\gamma_n|^2$, ce qui nous donne l'inégalité voulue avec c_n et γ_n les coefficients de Fourier de f et g .
- On paramètre Γ par un paramétrage normal $x = f(t)$ et $y = g(t)$, alors l'aire vaut

$$\mathcal{A} = \int x dy = \int_0^{2\pi} f g' \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \underbrace{(f'^2 + g'^2)}_{=1} = \pi$$

Il n'y a égalité que si f et g sont des fonctions de la forme $C \cos(t + \phi)$ et $C \sin(t + \phi)$ puisqu'il faut des coefficients uniquement pour $n = -1, 0, 1$ et de plus $2ab \leq a^2 + b^2$ avec égalité seulement si $a = b$...

◆ **CINT.44 (Théorème des résidus)** (★★★)

On note Γ le cercle unité dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, parcouru dans le sens direct.

- Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle ne possédant pas de pôle sur Γ . Calculer l'intégrale curviligne $I = \int_{\Gamma} F(z) dz$.
- En déduire les intégrales

$$J_n(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos nt}{1 + r^2 - 2r \cos t} dt$$

(coefficients de Fourier du noyau de Poisson).

- Calculer également les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{2\pi} \cos^n t dt$.

◇ [Divers/curviligneexo.tex/mod:31]

- On ne s'occupe que d'éléments simples de la forme $F(z) = \frac{1}{(z-a)^k}$.
On paramètre Γ par l'arc $\gamma(t) = e^{it}$, et alors

$$\int_{\Gamma} F(x) dz = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t)-a)^k} dt$$

Si $k \neq -1$, l'intégrale curviligne se calcule aisément et vaut 0. Si $k = 1$, on pose $a = \alpha + i\beta$ et on note $g(\alpha, \beta)$ l'intégrale calculer. On vérifie aisément que $\frac{\partial g}{\partial \alpha} = \frac{\partial g}{\partial \beta} = 0$ en tout point de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, ce qui prouve que g est constante sur chaque composante connexe. Or $g(0, 0) = 2\pi$ immédiatement, et $g(0, +\infty) = 0$.
On en déduit aisément le théorème des résidus.

- On a $J_n(r) = \Re(I_n(r))$ avec

$$I_n(r) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{int} dt}{(1 - r e^{it})(1 - r e^{-it})} = \frac{1}{-ir} \int_{\Gamma} \frac{z^n}{(z-r)(z-1/r)} dz$$

Ainsi, si $r < 1$, il y a un pôle en r , et

$$J_n(r) = I_n(r) = \frac{2\pi r^n}{1-r^2}$$

Si $r > 1$, le pôle intérieur est en $1/r$ et

$$I_n(r) = J_n(r) = \frac{2\pi}{r^n(r^2-1)}$$

- On a

$$W_n = \frac{1}{i^{2n}} \int_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z} \right)^n \frac{dz}{z}$$

Le seul pôle de $F = \frac{1}{i^{2n}} \frac{(X^2+1)^n}{X^{n+1}}$ est 0. On calcule

$$\frac{1}{i^{2n}} (X^2+1)^n = \frac{1}{i^{2n}} \sum_{k=0}^n C_n^k X^{2k}$$

donc le résidu est nul si n impair, vaut $\frac{1}{i^{2p}} C_{2p}^p$ si $n = 2p$. On en déduit

$$W_{2p} = 2\pi \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$$

◆ **CINT.45 (Théorème des résidus, indice)** (★★★)
 On considère Ω domaine de \mathbb{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. Montrer que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, où l'on a noté $dz = dx + idy$.
 On considère f avec un pôle d'ordre 1 en $a \in \Omega$, c'est-à-dire analytique plus une fraction $r/(z-a)$. Soit γ un chemin. On note

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Montrer que $\text{Ind}_{\gamma}(z) \in \mathbb{Z}$.
 Montrer que $\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi r \times \text{Ind}_{\gamma}(z)$.

◇ [Divers/curviligneexo.tex/cint:18]
 Soit $z \in \Omega$. Supposons que γ est paramétré par $[0; 1]$. Alors

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt \quad (*)$$

Or, si w est un nombre complexe, montrer que $w/2\pi$ est un entier revient à montrer que $e^{iw} = 1$. Il suffit donc, pour montrer que $\text{Ind}_{\gamma}(z)$ est entier, de montrer que $\phi(1) = 1$, avec

$$\phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left\{ \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \right\} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Or, on a $\phi'(t)/\phi(t) = \gamma'(t)/(\gamma(t) - z)$, pour tout $t \in [0; 1]$, sauf éventuellement sur un ensemble fini $\mathcal{S} \subset [0; 1]$ où la courbe γ n'est pas différentiable.

On a donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{\phi(t)}{\gamma(t) - z} \right)' &= \frac{\phi'(t)}{\gamma(t) - z} - \frac{\phi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} \\ &= \frac{\phi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} - \frac{\phi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0 \end{aligned}$$

sur $[0; 1] \setminus \mathcal{S}$. Donc $\phi(t)/(\gamma(t) - z)$ est une constante (car \mathcal{S} est fini.) Comme de plus $\phi(0) = 1$, on a

$$\phi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(0) - z};$$

comme de surcroît $\gamma(1) = \gamma(0)$, on a bien $\phi(1) = 1$.
 Enfin, il suffit d'intégrer terme à terme (grâce à la convergence normale sur un compact contenant γ et dans Ω).

◆ **CINT.46 (Valeur de $\int_0^{+\infty} (\sin x)/x dx$)** (★★)
 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2} \left[(x \sin x - y \cos x) dx + (x \cos x + y \sin x) dy \right]$$

sur le contour γ formé par les deux demi-cercles $x^2 + y^2 = a^2$ ($y \geq 0$) et $x^2 + y^2 = b^2$ ($y \geq 0$) et les deux segments $[-b; -a]$ et $[a; b]$ de l'axe ($\mathcal{O}x$).

Déterminer la limite de cette intégrale lorsque $a \rightarrow 0$ et $b \rightarrow \infty$. En déduire la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

◇ [Divers/curviligneexo.tex/cint:10]
 On note $\omega = P dx + Q dy$, où P et Q sont de classe \mathcal{C}^{∞} sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On vérifie d'abord que

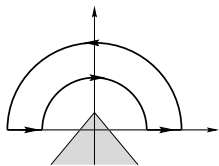
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y),$$

ce qui montre que ω est fermée, et donc grâce au théorème de Poincaré, exacte sur tout ouvert Ω étoilé par rapport à l'un de ses points et ne contenant pas 0.

C'est dû au fait qu'en posant $f(z) = \sin z/z$, on a

$$\omega = \mathcal{M}(f(z) dz).$$

On peut construire un tel ouvert contenant le contour γ proposé :



On a alors $\int_{\gamma} \omega = 0$. Notons C_a et C_b les deux demi-cercles, parcourus dans le sens direct. On trouve alors

$$2 \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \int_{C_a} \omega - \int_{C_b} \omega.$$

On se place ensuite en coordonnées polaires,

$$\int_{C_b} \omega = \int_0^{\pi} e^{-b \sin \theta} \cos(b \cos \theta) d\theta,$$

ce qui montre que

$$\left| \int_{C_b} \omega \right| \leq \int_0^{\pi} e^{-b \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-b \sin \theta} d\theta.$$

On peut alors écrire que $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$, ce qui donne

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} e^{-b \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2b\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{2b} (1 - e^{-b}),$$

ce qui montre que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{C_b} \omega = 0.$$

On calcule maintenant

$$\int_{C_a} \omega = \int_0^{\pi} e^{-a \sin \theta} \cos(a \cos \theta) d\theta,$$

par exemple en utilisant le théorème de la convergence dominée, qui montre que, l'intégrand convergeant simplement vers 1

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{C_a} \omega = \pi.$$

On en déduit

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

◆ **CINT.47**
 Calculer $\int_{\gamma} xy dx + (x^2 + y^2) dy$ sur le cercle $\gamma : x^2 + y^2 - 2Rx = 0$ (on pourra faire intervenir des différentielles exactes).

◇ [Divers/curviligneexo.tex/cint:17]
 On remarque que $y^2 dy = \frac{1}{2} d(y^3)$ et $xy dx + \frac{x^2}{2} dy = \frac{1}{2} d(x^2 y)$, il ne reste donc que $\frac{1}{2} \int_{\gamma} x^2 dy = R \int_{\gamma} x dy = \pi R^3$.

◆ **CINT.48**
 Calculer l'aire délimitée par la courbe d'équation $(y-x)^2 = a^2 - x^2$.

◇ [Divers/curviligneexo.tex/cint:22] Formule de Green. $A = \pi a^2$.

◆ **CINT.49 (Intégrales curvilignes)**
 Calculer les intégrales curvilignes $\int_{\gamma} \omega$ suivantes :

- $\omega = (x - y^3) dx + x^3 dy$, $\gamma : x^2 + y^2 = 1$;
- $\omega = \frac{x dx + y dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$, $\gamma : x^2 + y^2 = 1$.

◇ [Divers/curviligneexo.tex/cint:25]
 1) Paramétrage $x = \cos t, y = \sin t, t \in [-\pi, \pi]$, $\int_{\gamma} \omega = 3\pi/2$.
 2) $\omega = \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$, et l'intégrale est nulle.

◆ **CINT.50** ENSI P - 1990
 Soit \mathcal{P} le plan rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

◇ [Rec00/curviligne-r0.tex/cint:23] Formule de Green : $A = \frac{3\pi a^2}{8}$.

◆ **CINT.51** ENSI P - 1991
 On considère les courbes planes : $\mathcal{Q}_i : x^2 = 2q_i y$ et $\mathcal{P}_i : y^2 = 2p_i x$. On suppose $0 < q_1 < q_2$ et $0 < p_1 < p_2$. Calculer l'aire du « quadrilatère » limité par $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_1$ et \mathcal{Q}_2 .

◇ [Rec01/curviligne-r1.tex/cint:24] Formule de Green. $A = \frac{4}{3}(p_2 - p_1)(q_2 - q_1)$.

◆ **CINT.52** (★★) INT MP - 2003
 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1 tel que P n'a pas de racine de module 1. On pose $f : t \mapsto P(e^{it})$. Calculer $I = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt$.

◇ [Rec03/curviligne-r3.tex/r3:220] On a $|a_k| > 1$.
 On effectue ensuite un DSE du dénominateur en séparant les $|a_k| < 1$ et les $|a_k| > 1$.
 (Ou bien on calcule les dérivées partielles et on montre que cela ne dépend pas de la place de a_k , du moment que l'on ne traverse pas le cercle unité \mathbf{U} , puis on passe à la limite $|a_k| \rightarrow \infty$ pour ceux qui sont à l'extérieur, et on prend $a_k \rightarrow 0$ pour les autres.)

Divers

◆ **CINT.53** (★★) Centrale, ...
 On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ de la norme du sup. On pose

$$T : E \rightarrow E$$

$$f \mapsto T(f) : x \mapsto \int_0^x f(u) du.$$

- Calculer T^n avec un seul symbole d'intégration.
- Calculer $\|T^n\|$.
- Montrer que $\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ existe.
- Montrer que $\Phi(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(f)(x)$ pour tout f et pour tout $x \in [0; 1]$.
- Montrer que $(1 - T)(\Phi(f)) = f$.

◇ [Divers/calculintexo.tex/cint:1] Ceci amorce une récurrence pour montrer

1) On commence par montrer que

$$T^2(f)(x) = \int_0^x du \int_0^u f(t) dt = \int_0^x (x-t)f(t) dt.$$

$$T^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt.$$

Allonzy :

$$\begin{aligned} T^n(f)(x) &= \int_0^x T^{(n-1)}(u) \, du = \int_0^x \int_0^u \frac{(u-t)^{n-2}}{(n-2)!} f(t) \, dt \, du \\ &= \int_0^x \int_u^x \frac{(u-t)^{n-2}}{(n-2)!} f(t) \, dt \, du \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \, dt. \end{aligned}$$

2) On a ensuite $|T^n(f)(x)| \leq \|f\| \frac{x^n}{n!}$ donc

$$\|T^n(f)\| \leq \frac{1}{n!} \|f\| \quad \text{et en fait} \quad \|T\| = \frac{1}{n!}.$$

(on le vérifie avec une fonction constante).

3) Ceci assure l'existence de Φ , qui est même de plus linéaire continue.

4) Il faut montrer la CVU de $(\Phi_n(f))_n$ vers $\Phi(f)$, ce qui est trivial, merci l'exponentielle. Alors

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t) \, dt + f(x). \quad \text{Attention au 1^{er} terme!}$$

5) On calcule alors que $(1 - T)\Phi(f)(x)$ vaut

$$\int_0^x e^{x-t} f(t) \, dt + f(x) - \int_0^x \int_0^u e^{u-t} f(t) \, dt \, du$$

soit
$$\int_0^x e^{x-t} f(t) \, dt + f(x) - \int_0^x \int_t^x e^{u-t} f(t) \, dt \, du$$

ou
$$\int_0^x e^{x-t} f(t) \, dt + f(x) - \int_0^x e^{x-t} f(t) \, dt$$

et donc
$$(1 - T)\Phi(f)(x) = f(x).$$

◆ **CINT.54** ENS MP – 2002

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux telle que $\int_0^1 f = 1$.
Soit $\psi \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. On pose

$$\Lambda_n(\psi) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \psi\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \times f(x_1) \dots f(x_n) \, dx_1 \dots dx_n.$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n(\psi)$.

INDICATION : Commencer avec $\psi \in \mathbb{R}_2[X]$.

◇ [Rec02/calculint-r2.tex/im-r2:7]
On montre que

$$\Lambda(\psi) = \psi\left(\int_0^1 x f(x) \, dx\right).$$

Tout d'abord Λ_n est linéaire (continue pour la norme uniforme). On calcule

$$\Lambda_n(x \mapsto x^k) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \int_0^1 \dots \int_0^1 x_{i_1} \dots x_{i_k} \, dx_1 \dots dx_n.$$

On analyse ces intégrales, si tous les indices i_j sont différents, elle vaut $(\int_0^1 x f(x))^k$; il y a $n \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$ tels cas. Sinon, il y a au moins deux indices différents, l'intégrale est plus petite que 1, on majore le nombre de tels cas il y a

$k(k-1)/2$ choix pour l'indice en double n choix pour sa valeur, les $k-2$ autres indices sont choisis parmi n , donc au plus $\frac{n^{k-1}k(k-1)}{2}$ cas. En synthétisant,

$$\left| \Lambda_n(x^k) - \frac{n \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}{n^k} \left(\int_0^1 x f(x) \, dx\right)^k \right| \leq \frac{k(k-1)}{2n}.$$

En conclusion, pour un polynôme, la limite Λ existe et

$$\Lambda(P) = P\left(\int_0^1 x f(x) \, dx\right).$$

On conclut en approchant ϕ uniformément par des polynômes (th. de Weierstrass) et en remarquant que $|\Lambda_n| \leq 1$.

◆ **CINT.55** (★★★) Mines MP – 2003

Soit $f_0 \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$. On pose $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) \, dt$. Montrer que $\sum f_n$ converge et calculer sa somme.

◇ [Rec03/calculint-r3.tex/r3:434]
(Cf. **CINT.53** page précédente.)

Par récurrence, trouver la forme de f_n .
La somme doit être un truc du genre $\int_a^x e^{x-t} f(t) \, dt$?

◆ **CINT.56** X MP – 2004

Soit $p : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $r \in]0; R[$. On note \mathcal{D} le disque fermé $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Calculer $\iint_{\mathcal{D}} |p(x + iy)|^2 \, dx \, dy$.

◇ [Rec04/calculint-r4.tex/r4:276]

Équations différentielles linéaires

Révision du programme de Sup

◆ EDL.1

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 1$.

◇ [Divers/edosupexo.tex/eds:1] $\lambda e^x + \mu e^{2x} + x^3 + x^2 + x.$

◆ EDL.2

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' + y' + y = x \cos x$.

◇ [Divers/edosupexo.tex/eds:2] $e^{-x/2} \left(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \mu \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$

◆ EDL.3

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 6x e^x$.

◇ [Divers/edosupexo.tex/eds:3] $e^x (x^3 + \lambda x + \mu).$

◆ EDL.4

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = x \operatorname{sh} x$.

◇ [Divers/edosupexo.tex/eds:4]

◆ EDL.5

On considère sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$4xy'' + 2y' - y = 0. \quad (\text{E})$$

- Constater que $x \mapsto u(x) = \operatorname{ch} \sqrt{x}$ est solution de (E) sur $I =]0; +\infty[$. Quelle autre solution peut-on trouver sur $I' =]-\infty, 0[$?
- Résoudre (E) sur $]0; +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$.

◇ [Divers/edosupexo.tex/eds:5]

◆ EDL.6

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$.

◇ [Divers/edosupexo.tex/eds:6] solution générale est donc

On linéarise $\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$. La solution avec le premier second membre est $-\frac{1}{32} \cos 3x$. Pour le second second membre, il y a *résonance* et il faut chercher un terme en $\lambda x \cos x + \mu \sin x$, et plus précisément $\frac{3}{8} \sin x$. La

$$y = \lambda \sin x + \mu \cos x - \frac{1}{32} \cos 3x + \frac{3}{8} \sin x.$$

◆ EDL.7

Solutions dans \mathbb{C} puis dans \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^t$.

◇ [Rec04/edosup-r4.tex/r4:423]

◆ EDL.8

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' + 2y' - 15y = e^{3x} - x e^x$.

◇ [Rec04/edosup-r4.tex/r4:120]

◆ EDL.9

Résoudre $y'' - 2y' + y = x \operatorname{ch}(x)$.

◇ [Rec04/edosup-r4.tex/r4:64] $y(x) = \left(\frac{x^3}{12} + \alpha x + \beta \right) e^x + \frac{1}{8}(x+1)e^{-x}.$

◆ EDL.10

Résoudre $y'' + y' + y = \sin x + x$.

◇ [Rec05/edosup-r5.tex/r5:2]

Équations linéaires scalaires d'ordre 1

◆ EDL.11

Résoudre les équations suivantes :

- $(2+x)y' = 2 - y;$
- $xy' + y = \cos x;$
- $(1+x)y' + y = (1+x) \sin x;$
- $(1+x)y' + y = (1+x) \cos x;$
- $x^3y' - x^2y = 1;$
- $3xy' - 4y = x;$
- $y' + y = \sin x + 3 \sin 2x;$
- $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1;$
- $x(x+1)y' + y = \operatorname{Arc} \tan x;$
- $x(x^2-1)y' + 2y = x \ln x - x^2.$

Pour l'équation 9), on étudiera les problèmes de raccordement.

◇ [Divers/edolinlexo.tex/edo:47]

Source : M. Quercia.

- $y = 2 + \frac{\lambda}{x+2}.$
- $y = \frac{C e^x + \sin x}{x}.$
- $y = -\cos x + \frac{\sin x + \lambda}{1+x}.$
-
- $y = \lambda x - \frac{1}{3x^2}.$
- $y = \lambda x^{4/3} - x.$
- $y = \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{3 \sin 2x - 6 \cos 2x}{5} + \lambda e^{-x}.$
- $y = \frac{\operatorname{Arg} \operatorname{ch}(1-2x) + \lambda}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $x < 0$
 $y = \frac{\operatorname{Arcsin}(2x-1) + \mu}{2\sqrt{x-x^2}}$ pour $0 < x < 1$
 $y = \frac{-\operatorname{Arg} \operatorname{ch}(2x-1) + \nu}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $1 < x.$
- $y = \frac{x-1}{2x} \operatorname{Arc} \tan x + \frac{x+1}{2x} \left(\ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + \lambda \right).$
- $y = \frac{x}{1-x^2} \left((1+x) \ln x + 1 + \lambda x \right).$

◆ EDL.12

Résoudre $y' - 2y = x e^{-|x|}$. Existe-t-il des solutions continues sur \mathbb{R} ?

◇ [Divers/edolinlexo.tex/eds:38]

La solution homogène est $y = \lambda e^{2x}$. On effectue ensuite une MVC en posant $y' = \lambda e^{2x}$, ce qui donne $\lambda' = x e^{-|x|-2x}$.

□ Pour $x > 0$: $\lambda' = x e^{-3x}$ donc $\lambda = -\frac{3x+1}{9} e^{-3x} + \mu$ et donc

$$y = -\frac{3x+1}{9} e^{-x} + \mu e^{2x}.$$

□ Pour $x < 0$, on a $\lambda' = x e^{-x}$ donc $\lambda = -(x+1)e^{-x}$ et donc

$$y = -(x+1)e^x + \mu e^{2x}.$$

On peut raccorder en 0 (y et y') si et seulement si $\lambda = \mu = -\frac{8}{9}$.

◆ EDL.13

Résoudre sur tout intervalle ouvert non vide I l'équation différentielle

$$(1+x^2)y' - 2xy = 0.$$

◇ [Divers/edolinlexo.tex/edo:6]

$$y = \lambda(x^2+1) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

◆ EDL.14

Résoudre l'équation différentielle $\left(1 + \frac{1}{x}\right)y' - y = 0$.

◇ [Divers/edolinlexo.tex/edo:7]

$$y = \frac{\lambda x^x}{x+1} \text{ si } -1 \notin I \text{ et } 0 \notin I. \text{ Si } -1 \in I, \text{ alors la seule solution est } y = 0.$$

◆ EDL.15

Résoudre l'équation différentielle $xy' + y - \ln|x| = 0$.

◇ [Divers/edolinlexo.tex/edo:8]

si $0 \notin I$.

Il y a un second membre. Les solutions sont de la forme $y = \ln|x| - 1 + \lambda/x$

◆ EDL.16 (Changement de variable)

Résoudre l'équation différentielle $2x e^y y' + e^y - x^2 = 0$.

◇ [Divers/edolinlexo.tex/edo:9]

$$S = \left\{ x \mapsto \ln \left(\frac{x^2}{5} + \frac{\lambda}{\sqrt{|x|}} \right); \lambda \in \mathbb{R} \text{ vérifie} \right.$$

On est bien sûr tenté par le changement de variable $z = e^y$. La nouvelle équation est alors $2x z' + z = x^2$; et l'ensemble des solutions est

$$\left. \frac{x^2}{5} + \frac{\lambda}{\sqrt{|x|}} > 0 \quad \forall x \in I \right\}$$

si $0 \notin I$. (Sinon $S = \emptyset$).

◆ EDL.17 Chercher les solutions de l'équation différentielle

$$(E) \quad x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2.$$

Existe-t-il une solution définie sur \mathbb{R} ?

◇ [Divers/edolinlexo.tex/edo:25] Les intervalles de définition sont les $I_1 =]-\infty; -1[$, $I_2 =]-1; 0[$, $I_3 =]0; 1[$ et $I_4 =]1; +\infty[$.
De plus, puisque $x \mapsto x(x^2 - 1)$ est impaire, une solution f_3 sur I_3 donne une solution sur I_2 par $f_2(t) = f_3(-t)$, et de même pour I_4 et I_1 . L'équation homogène associée à (E) est

(E₀) $y' - a(y) = 0$ avec $a(x) = \frac{-2}{x(x^2 - 1)} = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 - 1}\right)$.
Les solutions de E₀, qui est du premier ordre et linéaire, sont donc les $x \mapsto \lambda \frac{x^2}{x^2 - 1}$.
On effectue une MVC en posant $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}\phi(x)$, ce qui mène à $\phi'(x) = \frac{1}{x}$ et

◆ EDL.18 Résoudre l'équation $x^2y' + y = x^2$ sur $]0; +\infty[$. Les solutions admettent-elles une limite en 0^+ ?

◇ [Divers/edolinlexo.tex/edo:26] Les solutions de l'équation homogène sont $y = \lambda e^{1/x}$. Par la MVC, on a $\lambda' = e^{-1/x}$, prolongeable à droite par continuité en 0, et $x \mapsto \int_0^x e^{-1/t} dt$ est une primitive de λ' , ce qui donne la solution générale $y = e^{1/x} \int_0^x e^{-1/t} dt + \mu e^{1/x}$.
Or $x \mapsto e^{-1/x}$ est croissante sur $]0; +\infty[$ et donc $0 < \int_0^x e^{-1/t} dt < xe^{-1/x} \quad \forall x > 0$

◆ EDL.19 Résoudre $(1 + x^2)^2y' + 2xy = x \exp\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)$.

◇ [Divers/edolinlexo.tex/edo:33] Les solutions de l'équation homogène sont données par $\frac{y'}{y} = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}$ qui donne $\lambda = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + t^2}$. Les solutions sont donc les $y = \left(\lambda - \frac{1}{2(1 + x^2)}\right) \exp\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)$.

◆ EDL.20 Résoudre les équations différentielles suivantes

- $(1 + x^2)y' - 2xy = 1 + 2x^2$;
- $xy' - y + \frac{2x + 1}{(x + 1)^2} = 0$;
- $y' - y \tan x = \frac{1}{1 + \cos x}$;
- $y' \cos x + y \sin x = 1 + x$;
- $\left(1 + \frac{1}{x}\right)y' - y = 0$;
- $(x + 1)y' - y = 1$;
- $xy' + y - \ln|x| = 0$;
- $xy' - 2y = (x - 1)(x + 1)^3$;
- $y' - 3y = (3x^2 + 1)e^{2x}$.

◇ [Divers/edolinlexo.tex/edo:41] 1) Solution homogène $y_0 = k(x^2 + 1)$, MVC $k' = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}$ et finalement $y = \frac{3}{2}(x^2 + 1) \text{Arc tan } x - \frac{1}{2}x + C^{\text{te}} \cdot (x^2 + 1)$.
2) Solution homogène sur $]0; +\infty[$: $y_0 = kx$. MVC $k' = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ donc $y = -1 + \frac{x}{x+1} + C^{\text{te}} \cdot x = -\frac{1}{x+1} + C^{\text{te}} \cdot x$.
3) $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $y_0 = \frac{k}{\cos x}$, $k' = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$, qu'on intègre avec $t = \tan(x/2)$. Finalement $y = \frac{x - \tan(x/2) + C^{\text{te}}}{\cos x}$.

4) $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $y_0 = k \cos x$, $k' = \frac{1+x}{\cos^2 x}$, et donc $y = (1 + x) \sin x + \cos x \ln(\cos x) + C^{\text{te}} \cdot \cos x$.
5) $y_0 = \frac{ke^x}{1+x}$.
6) $y_0 = k(1+x)$, MVC $k' = \frac{1}{(1+x)^2}$, et $y = -1 + C^{\text{te}} \cdot (1+x)$.
7) $y_0 = k/x$, $k' = -\ln|x|$ et donc $y = 1 - \ln|x| + \frac{C^{\text{te}}}{x}$.
8) $y_0 = kx^2$ donc $k' = x + 2 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ et donc $y = \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} + Cx^2$.
9) $y_0 = ke^{3x}$, $k' = (3x^2 + 1)e^{-x}$, donc $y = (-3x^2 - 6x - 7)e^{2x} + C^{\text{te}} \cdot e^{3x}$.

◆ EDL.21 Résoudre les équations différentielles suivantes :

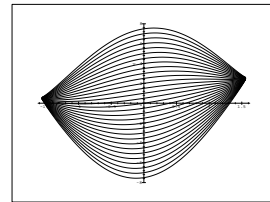
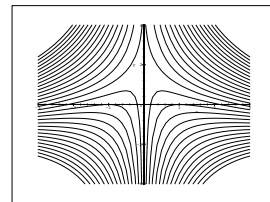
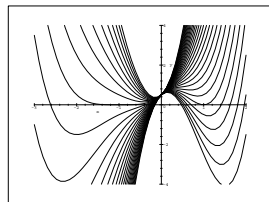
- $xy' \ln x = (3 \ln x + 1)y$;
- $y(1 - y'^2) = 2xy'$;
- $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$;
- $xy' - 2y = 0$.

◇ [Divers/edolinlexo.tex/edo:40] 1) Le domaine est $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1, e^{-1/3}\}$. Les solutions sont de la forme $y = C^{\text{te}} \exp\left[\int \frac{3 \ln x + 1}{x \ln x} dx\right] = C^{\text{te}} \exp\left[\int \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x \ln x}\right) dx\right] = C^{\text{te}} \cdot x^3 \ln x$.
2) Celle-ci n'est pas linéaire. Il faut ruser... On pose $w = y'$. Alors $y = \frac{2wx}{1 - t^2}$. On pose $u = w^2$, alors $\frac{dw}{x} = -\frac{du}{u(1-u)}$ donc $\ln|x| = \ln|(1-u)/u| + \ln \lambda$ soit $x = \lambda(1 - w^2)/w^2$ mais $y = 2wx/(1 - w^2) = \lambda/2w$ donc on a $x = \frac{y^2 - 4\lambda^2}{4\lambda}$.
3) Une solution homogène est $y = \lambda \exp(-\sin x)$. Par la MVC on a $y' = \lambda' e^{-\sin x} - (\cos x)\lambda e^{-\sin x}$ donc $\lambda' = (\sin x e^{\sin x}) \cos x$ donc on peut intégrer directement et $\lambda = e^{\sin x}(\sin x - 1) + C^{\text{te}}$.
Solution générale $y = \sin x - 1 + \mu e^{-\sin x}$.
4) Fastoche, $y = \lambda \exp \int \frac{2 dx}{x} = \lambda x^2$

◆ EDL.22 Résoudre les équations différentielles suivantes et tracer les courbes des solutions :

- $xy' - 2y = (x - 1)(x + 1)^3$;
- $xy' + y - \ln|x| = 0$;
- $y' \cos x + y \sin x = 1 + x$.

◇ [Divers/edolinlexo.tex/edo:48] La première équation se résout en $y = \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} + kx^2$.
La seconde en $y = 1 - \ln|x| + k/x$.
La troisième en $y = (1 + x) \sin x + \cos x \ln(|\cos x|) + k \cos x$.
Les familles de courbes sont données ci-dessous :



◆ EDL.23 (Relaxation vers l'équilibre / phénomène transitoire) Soit f une application continue par morceaux de \mathbb{R} dans \mathbb{R} admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y' + y = f(x)$ admet une limite finie en $+\infty$.

◇ [Divers/edolinlexo.tex/edo:19] donc une solution particulière par la MVC et au final (Voir un énoncé restreint à l'exo EDL.34 page 677, et un énoncé plus général en EDL.79 page 686.) $x \mapsto e^{-x} \left[\int_0^x e^t f(t) dt + C^{\text{te}} \right]$
On connaît les solutions de l'équation homogène : $Y(x) = \lambda e^{-x}$; on trouve est solution pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

◇ [Rec01/edolin1-r1.tex/edo-r:18] Utiliser le produit de Cauchy de deux séries entières.

◆ **EDL.32** CCP MP – 2002

Existe-t-il une solution de $y' \sin(x) + y \cos(x) = \sin^2(x)$ sur $] -\pi; \pi [$?

◇ [Rec02/edolin1-r2.tex/edo-r:2:6]

◆ **EDL.33** CCP MP – 2002

Résoudre $2x(x - 1)y' + (2x - 1)y = 1$.

◇ [Rec02/edolin1-r2.tex/edo-r:2:9]

◆ **EDL.34 (Relaxation vers l'équilibre)** (***) Mines MP – 2003

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\lim_{+\infty} (f + f') = 0$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.

◇ [Rec03/edolin1-r3.tex/r3:156] Posons $h(x) = e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt$. Alors f est bornée sur $\mathbb{R}^+ : |g(x)| \leq A \forall x \geq 0$. Si $\varepsilon > 0$, il existe $X \geq 0$ tel que pour tout $t \geq X$, on a $|g(t)| \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $x \geq 2X$:

$y' + y = g$,
où g est une fonction continue tendant vers 0.
On connaît les solutions de l'équation homogène : $Y(x) = \lambda e^{-x}$; on trouve donc une solution particulière par la MVC et au final

$x \mapsto e^{-x} \left[\int_0^x e^t g(t) dt + \lambda \right]$

$|h(x)| \leq A \int_0^{x/2} e^{-t} dt + \varepsilon \int_{x/2}^x e^{-t} dt = A e^{-x/2} + \varepsilon$,
qui est plus petit que 2ε pour x suffisamment grand.
Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.
Enfin, on sait que $f(x) = h(x) + \lambda e^{-x}$, donc f tend bien vers 0.

On est donc conduit à résoudre

et si $\lambda \in \mathbb{R}$.

◆ **EDL.35 (Oscillations forcées)** (***) Mines MP – 2003

On considère l'équation $y' + y = f(x)$, où f est une fonction continue.

- 1) Trouver toutes les solutions de cette équation/
- 2) On suppose de plus que f est T-périodique. Peut-on trouver une solution T-périodique ?

◇ [Rec03/edolin1-r3.tex/r3:306] On montre maintenant que c'est une condition suffisante, non pas en bourrinant le calcul (vraiment très très bourrin), mais en subtilisant : on pose $y^*(t) = y(t + T)$, on vérifie que y^* est solution de la même équation diff, et vérifie la même condition initiale $y^*(0) = y(T) = y(0)$ et on conclut par le théorème d'unicité de Cauchy.

1) $y(x) = \int_0^x f(t) e^{t-x} dt + \lambda e^{-x}$.

2) Une condition nécessaire pour que y soit T-périodique est que $y(T) = y(0)$, ce qui impose immédiatement la condition nécessaire

$\lambda = \frac{\int_0^T f(s) e^{T-s} ds}{1 - e^{-T}}$.

◆ **EDL.36** CCP MP – 2003

Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$x(1-x)y' + y = x$.

Solutions maximales ?

◇ [Rec03/edolin1-r3.tex/r3:41]

◆ **EDL.37** (*) CC MP – 2004

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $(1+x^2)y' - 2xy = x \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$.

(Cf. exercice EDL.19, presque identique.)

◇ [Rec04/edolin1-r4.tex/r4:176]

◆ **EDL.38** Air PC – 2004

Résoudre l'équation différentielle : $x(x+1)y' + y = \text{Arc tan } x$

◇ [Rec04/edolin1-r4.tex/r4:433]

Équations linéaires scalaires d'ordre 2

◆ **EDL.39 (Équation complète)** (**)

Résoudre $x^2 y'' + 3xy' + y = 1 + x^2$. On cherchera une solution à l'équation homogène sous forme de puissance. L'équation proposée admet-elle des solutions sur \mathbb{R} ?

◇ [Divers/edolin2exo.tex/edo:34] $u = x \mapsto 1/x$ est solution. (On pouvait aussi le trouver en notant que l'on a une équation d'Euler...) On effectue ensuite une MVC avec $v = \lambda u$, ce qui donne $\lambda' = 1/x$ donc, sur \mathbb{R}^+ , $\lambda(x) = \ln|x|$ et donc $v(x) = \frac{\ln|x|}{x}$. Le wronskien est donc

$\left(\frac{\lambda'}{\mu'}\right) = \mathcal{W}^{-1}(x) \left(\frac{0}{1+x^2}\right)$
c'est-à-dire $\lambda'(x) = -(1+x^2) \ln|x|$ et $\mu'(x) = 1+x^2$ ou encore

$\lambda(x) = x + \frac{x^3}{9} - \left(x + \frac{x^3}{3}\right) \ln|x|$ et $\mu(x) = x + \frac{x^3}{3}$.

La solution générale de l'équation différentielle est donc

$y = 1 + \frac{x^2}{9} + \frac{\alpha}{x} + \beta \frac{\ln|x|}{x}$
sur \mathbb{R}^+ , et la même chose sur \mathbb{R}^- avec d'autres constantes.
Si on veut résoudre sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^*$, la solution générale est donc

$y = 1 + \frac{x^2}{9} + \frac{\alpha}{x} + \beta \frac{\ln|x|}{x}$
et si $0 \in I$, on doit poser $\alpha = \beta = 0$ pour garantir la continuité.

de déterminant $W(x) = \frac{1}{x^3}$
et d'inverse $\mathcal{W}^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{\ln|x|}{x} \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1-\ln|x|}{x^2} \end{pmatrix}$

On en déduit qu'un solution de l'équation complète est $y = \lambda u + \mu v$ avec

◆ **EDL.40 (Résonance)**

Résoudre l'équation $y'' + y = \cos \omega x$, où $\omega \in \mathbb{R}$.

◇ [Divers/edolin2exo.tex/edo:37] Si $|\omega| = 1$, la solution est $\frac{1}{2}t \sin t$.
Si la solution est $\frac{1}{1-|\omega|^2} \cos \omega t$. On remarque que l'on a la convergence simple : $f_\omega \xrightarrow{|\omega| \rightarrow 1} f_1$

◆ **EDL.41** (Z) Résoudre l'équation différentielle suivante sur \mathbb{R} :

$x'' - x = \alpha e^{-t}$.

◇ [Divers/edolin2exo.tex/edo:10] La solution générale de l'équation homogène est $x = a e^t + b e^{-t}$. Une solution particulière est de la forme $\lambda t e^t$, et par identification $\lambda = \frac{1}{2}$.

◆ **EDL.42** (***) Résoudre, sur tout intervalle de \mathbb{R} , l'équation différentielle suivante :

$x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 2$.

On cherchera notamment des solutions de type polynomial.

◇ [Divers/edolin2exo.tex/edo:11] On cherche une solution polynomiale $P = a_n X^n + \dots$, et on trouve que le coefficient dominant vérifie $(n^2 - 1)a_n = 0$, donc est nul sauf si $n = 1$. On a alors $P(X) = aX + 2(a-1)$. Par ailleurs, on peut se douter que en prenant $n = -1$ on peut tomber sur quelque chose d'intéressant (ou alors MVC un peu longue). En effet, $1/x$ est solution. Donc on a tout.
Réponse : $y = -2 + \lambda(x+2) + \frac{\mu}{x}$ si $0 \notin I$, sinon on laisse tomber le μ/x .

◆ **EDL.43** Résoudre, sur tout intervalle de \mathbb{R} , l'équation différentielle suivante :

$x(1-x)y'' + (2x^2-1)y' + 2(1-2x)y = 0$.

On cherchera notamment des solutions « évidentes » (c'est-à-dire de type simple).

◇ [Divers/edolin2exo.tex/edo:12] $y = \lambda x^2 + \mu e^{2x}$ pour tout I.

◆ **EDL.44** Résoudre, sur tout intervalle de \mathbb{R} , l'équation différentielle suivante :

$(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$.

On effectuera le changement de variable $t = \text{Arg sh } x$.

◇ [Divers/edolin2exo.tex/edo:13] $y = \lambda(\sqrt{1+x^2}+x) + \mu(\sqrt{1+x^2}-x)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et ce pour tout I.
(Cf. exercice EDL.48.)

◆ **EDL.45** Résoudre, sur tout intervalle de \mathbb{R} , l'équation différentielle suivante :

$x(x^2-1)y'' - 2(x^2-1)y' + 2xy = 0$.

On cherchera notamment des solutions de type polynomial.

◆ **EDL.61** (**) X MP – 1997
 On considère l'équation différentielle

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

1) Déterminer les solutions de cette équation, développables en série entière autour de 0. Notons f_0 la solution développable en série entière vérifiant $f_0(0) = 1$.

2) Soit f une solution de l'équation différentielle sur $]0; a[$. Montrer que la famille (f, f_0) est libre si et seulement si f n'est pas borné au voisinage de 0.

◆ [Rec00/edoin2-r0.tex/edo-r:52]
 1) On obtient, après injection de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, la relation $a_1 = 0$ et $n^2 a_n + a_{n-2} = 0$, ce qui donne finalement

$$a_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p} (p!)^2}.$$

Le rayon de convergence de cette série est donc infini. En particulier, on trouve

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}.$$

2) f_0 ne s'annule pas sur un voisinage de 0, toute solution y de l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme $y = \lambda f_0$, où λ est de classe \mathcal{C}^2 et satisfait l'équation différentielle

$$x f_0(x) \lambda''(x) + (2x f_0'(x) + f_0(x)) \lambda'(x) = 0,$$

c'est-à-dire
$$\lambda'(x) = \frac{C dx}{x f_0^2(x)}.$$

Le wronskien de f_0 et y est alors

◆ **EDL.62** (*) CCP PC – 2001
 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = xf(-x)$.

◆ [Rec01/edoin2-r1.tex/fon-r:2]
 En tournant deux fois la moulinette, on a

$$f''(x) - \frac{1}{x} f'(x) + x^2 f(x) = 0,$$

ce que l'on résout aisément. Ou, nettement plus simple, on décompose $f = P + I$ où P est paire et I impaire, on injecte, on identifie les parties paires et impaires et on trouve que $P' = xP$ et $I' = -xI$.

◆ **EDL.63** CCP PC – 2001
 Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = x \operatorname{ch} x - x^2$.

◆ [Rec01/edoin2-r1.tex/edo-r:1]
 Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, 1 est racine double. On résout l'équation homogène, dont les solutions sont $\lambda e^x + \mu x e^x$.

On cherche une solution pour le second membre $-x^2$, sous forme polynomiale, et on trouve $Y_1 = -x^2 - 4x - 6$.

On cherche une solution pour le second membre $x \operatorname{ch} x = x(e^x + e^{-x})/2$, sous la forme $(ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x + (cx + d)e^{-x}$. On trouve $x^3 e^x/12 + (x + 1)e^{-x}/8$. Les solutions sont donc

$$y = \frac{x^3}{12} e^x + \frac{1}{8} (x + 1) e^{-x} + \lambda e^x + \mu x e^x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

◆ **EDL.64** (**) Centrale PC – 2001
 Intégrer l'équation différentielle $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$. Solutions développables en séries entières ?

◆ [Rec01/edoin2-r1.tex/edo-r:2]
 Cf. **EDL.54**. On suppose que $y = \sum a_n x^n$ est solution, alors on trouve

$$\sum_{n=3}^{\infty} [(n^2 - 1)a_{n+1} + 4a_{n-3}] x^n - a_1 + 3a_3 x^2 = 0,$$

ce qui mène à $a_1 = a_3 = 0$, puis à

$$\begin{aligned} 4a_0 + 8a_4 &= 0 & a_0 : \text{paramètre} \\ 4a_1 + 15a_5 &= 0 & d'où } a_5 = 0 \\ 4a_2 + 24a_6 &= 0 & a_2 : \text{paramètre} \\ 5a_3 + 35a_7 &= 0 & d'où } a_7 = 0, \end{aligned}$$

puis on a les coefficients suivants, avec notamment tous les termes impairs nuls. On obtient donc *a priori* deux familles de solutions, paramétrées par a_0 et a_2 .

La relation de récurrence étant

$$a_{n+1} = -\frac{4}{(n+1)(n-1)} a_{n-3}$$

on en déduit que

$$\alpha_{4k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \alpha_0 \quad \text{et} \quad \alpha_{4k+2} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \alpha_2$$

donc la solution est du type

$$y = \alpha_0 \cos(x^2) + \alpha_2 \sin(x^2).$$

On a donc bien une famille libre de solutions. On vérifie que le rayon de convergence est infini grâce à une petite manipulation permettant d'utiliser le critère de d'Alembert.

◆ **EDL.65** CCP PC – 2001
 Soit y_n la fonction définie par $y_n'' + n^2 y_n = e^{-nx}$ avec $y_n'(0) = 0$ et $y_n(0) = 0$.

- Déterminer y_n .
- Tracer le graphe de y_n .
- Étudier la série $\sum y_n$.

◆ [Rec01/edoin2-r1.tex/edo-r:3]

◆ **EDL.66** TPE MP – 2001
 Résoudre $(x + 2y)y' + y + 2x = 0$. Montrer que les solutions sont représentées par des arcs de coniques dont on précisera la nature.

◆ [Rec01/edoin2-r1.tex/edo-r:4]

◆ **EDL.67 (Équation de Bessel)** CCP PC – 2001
 Trouver les solutions développables en série entière de $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$, avec $n \in \mathbb{N}$. Quel est le rayon de convergence de ces séries ?

◆ [Rec01/edoin2-r1.tex/edo-r:12] problème CCP Maths 2 PC 2001. C'est long !
 On reconnaît là l'équation de Bessel (cf. exercice **IP.14** page 623). Voir le

◆ **EDL.68** (***) CCP PC – 2001
 Résoudre $4xy'' - 2y' + 9x^2 y = 0$ en cherchant une solution DSE.

◆ [Rec01/edoin2-r1.tex/edo-r:13]
 On trouve une relation de récurrence

$$2n(2n - 3) a_n = -9a_{n-3}$$

et donc des coefficients $a_{3p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!} a_0$. C'est-à-dire qu'une solution est

$$f(x) = \begin{cases} a_0 \cos(x^{3/2}) & \text{si } x \geq 0, \\ a_0 \operatorname{ch}(x^{3/2}) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

On peut « deviner » l'autre solution (avec sin et sh...) mais une MVC donne une galère pas possible.

◆ **EDL.69** (**) Mines MP – 2001
 Résoudre $y'' + \lambda y = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cos nx$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. (On effectuera des hypothèses sur la série $\sum a_n \cos nx$.)

◆ [Rec01/edoin2-r1.tex/edo-r:19]
 Si λ est un carré d'entier, ça pose problème, il faut aller plus loin (polynôme

fois trigo), sinon c'est trivial sous forme de série trigonométrique.

◆ **EDL.70** CCP PC – 2001
 Résoudre les équations différentielles suivantes : $xy' + y = (\ln x)/x^3$, $y' \cos x + y \sin x = \tan x$, et $y'' - 2y' + y = \operatorname{sh} x$.

◆ [Rec01/edoin2-r1.tex/edo-r:20]

◆ **EDL.71** X MP – 2002
 Soient p et q deux fonctions continues. On considère l'équation différentielle

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0. \tag{E}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe deux solutions x_1 et x_2 de (E) telles que $x_1 x_2 = 1$.

◆ [Rec02/edoin2-r2.tex/edo-r:2:11]

◆ **EDL.72** Mines PC – 2002
 Existence d'une solution périodique à l'équation

$$y'' + y' + y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

◆ [Rec02/edoin2-r2.tex/edo-r:2:3]
 Tiens, cela ressemble fort à l'exercice **EDL.73**. On commence par résoudre l'équation

$$y'' + y' + y = \frac{\cos nx}{n^2} \tag{E_n}$$

est de la forme

$$y = \frac{1}{n^4 - n^2 + 1} \left[\frac{1 - n^2}{n^2} \cos nx + \frac{\sin nx}{n} \right].$$

On somme ensuite en posant $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ et on vérifie que l'on peut dériver deux fois termes à termes et que y est donc solution de (E).

On peut raisonner dans le sens inverse : si une solution périodique existe, alors elle est développable en série de Fourier et on peut injecter dans l'équation.

◆ **EDL.73** Centrale PC – 2002
 Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

◇ [Rec02/edolin2-r2.tex/edo-r2:5]

Tiens, cela ressemble fort à l'exercice **EDL.72**.

◆ **EDL.74** CCP PC – 2002
 Intégrer l'équation
$$y''(1 - \cos 4x) + y' \sin 4x - 8y = 0 \quad (\text{E})$$
 sachant qu'il existe deux solutions inverses l'une de l'autre.
 INDICATION : Transformer les expressions trigonométriques en fonction de $\tan x$.

◇ [Rec02/edolin2-r2.tex/edo-r2:1]

◆ **EDL.75** TPE MP – 2002
 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + f''(x) \geq 0$.
 Montrer que $f(x) + f(x + \pi) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (On pourra poser $g = f + f''$.)

◇ [Rec02/edolin2-r2.tex/edo-r2:4]

Enfin, on obtient

Un grand classique.
 Il existe une fonction continue $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $y'' + y = g$.

$$f(x) = a \cos x + b \sin x + \int_0^x g(t) \sin(x-t) dt.$$

On utilise alors la MVC : il existe u, v de classe \mathcal{C}^1 telles que

$$\begin{cases} f(x) = u(x) \cos x + v(x) \sin x, \\ f'(x) = -u(x) \sin x + v(x) \cos x. \end{cases} \quad (\text{Ce que l'on pouvait avoir avec les fonctions de Green.})$$

et (u', v') vérifie le système

$$\begin{cases} u'(x) \cos x + v'(x) \sin x = 0, \\ -u'(x) \sin x + v'(x) \cos x = g(x). \end{cases} \quad \begin{aligned} f(x) + f(x + \pi) &= \int_0^x g(t) \sin(x-t) dt + \int_0^{x+\pi} g(t) \sin(x+\pi-t) dt \\ &= \int_{x+\pi}^x xg(t) \sin(x-t) dt = \int_0^\pi g(x-u) \sin u du \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit $u'(x) = -g(x) \sin x$ et $v'(x) = g(x) \cos x$, et donc

$$u(x) = a - \int_0^x g(t) \sin t dt, \quad v(x) = b + \int_0^x g(t) \cos t dt. \quad \text{grâce à la positivité de } g \text{ et celle de } \sin \text{ sur } [0, \pi].$$

◆ **EDL.76** TPE PC – 2002
 On considère l'équation
$$t^2 x''(t) - 2t x'(t) + 2x(t) = t^4 \cos t - 1 \quad (\text{E})$$

 1) Montrer que $x(t) = t$ est solution de l'équation homogène associée. Résoudre entièrement cette équation.
 2) Résoudre (E).

◇ [Rec02/edolin2-r2.tex/edo-r2:8]

◆ **EDL.77** Telecom INT MP – 2002
 Résoudre $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

◇ [Rec02/edolin2-r2.tex/edo-r2:10]

◆ **EDL.78** CCP MP – 2002
 On fixe w et ε dans \mathbb{R}^{*+} . On considère ensuite l'équation différentielle
$$y'' + \omega^2 y = g_\varepsilon,$$
 avec
$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t/2 & \text{si } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 1 & \text{si } t \geq \varepsilon. \end{cases}$$
 On notera y_ε la solution (si elle existe).
 1) Déterminer y_ε sachant que y_ε est identiquement nulle sur \mathbb{R}^- (c'est ce que l'on appelle une **solution causale**).
 2) Déterminer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon$.
 3) Pouvait-on savoir que l'équation différentielle avait une solution ? Quelles sont les conditions d'application du théorème de Cauchy ?

◇ [Rec02/edolin2-r2.tex/edo-r2:13]

◆ **EDL.79 (Relaxation)** Mines MP – 2003
 1) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\alpha) > 0$. Montrer que si $f'(t) + \alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, alors $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.
 2) En déduire que, si $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie $g''(t) + g'(t) + g(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, alors $g(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

◇ [Rec03/edolin2-r3.tex/r3:254]

fait que

- 1) Cf. **EDL.34** pour la méthode générale.
- 2) Posons $h = f' - j^2 f$. Alors $g = h' - jh$. La question précédente montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ et encore un coup que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, grâce au $\Re(-j) = \Re(-j^2) = \frac{1}{2} > 0$.

◆ **EDL.80** Centrale MP – 2003
 (Avec Maple)
 Trouver les solutions de l'équation différentielle $x(x+1)y'' + (x+1)y' - 2y = 0$.

◇ [Rec03/edolin2-r3.tex/r3:126]

◆ **EDL.81** Centrale MP – 2003
 1) Résoudre l'équation différentielle suivante :
$$y''(t) + y(t) = \cos nt. \quad (\text{E}_n)$$

 2) On suppose que la série [réelle] $\sum a_n$ est absolument convergente. Résoudre l'équation différentielle suivante
$$y''(t) + y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt. \quad (\text{E})$$

 3) On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs et décroît vers 0.
 a) Résoudre l'équation (E).
 INDICATION : On note $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos kx$.
 Remplacer, $\cos nt$ par $S_n(t) - S_{n-1}(t)$.
 b) Que dire du cas $a_n = \frac{1}{\ln n}$?

◇ [Rec03/edolin2-r3.tex/r3:422]

- 1) La solution générale est $\alpha \cos t + \beta \sin t$; pour la solution particulière, on a deux cas à considérer :
 – si $n = 1$: $y = \frac{t}{2} \sin t$;
 – si $n \neq 1$: $y = \frac{1}{1-n^2} \cos nt$.
 2) On fait la somme des solutions précédentes, en notant que l'on a conver-

gence normale de la série des dérivées, ce qui justifie le procédé.

- 3) On calcule explicitement $S_n(x)$ et on peut résoudre sur les bons intervalles où S_n est bornée (il faut éviter les $2k\pi$...) en montrant la convergence uniforme par la transformation d'Abel... C'est un peu plus technique, mais ça marche, et on a une solution sur les intervalles de la forme $] \varepsilon + 2k\pi ; 2(k+1)\pi - \varepsilon [$.
 Voir l'exercice **SF.58** page 548 pour un cas similaire (on montre par exemple que la fonction n'est pas continue par morceaux...)

◆ **EDL.82** Centrale MP – 2003
 On considère l'équation différentielle $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$.
 1) Résoudre entièrement cette équation.
 2) Chercher les solutions de cette équation définies de $]0; +\infty[$ dans $]0; +\infty[$, deux fois dérivables. Montrer qu'elles sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

◇ [Rec03/edolin2-r3.tex/r3:252]

◆ **EDL.83** Centrale MP – 2003
 (Avec Maple)
 On pose $E(t) = t^2(1-t)y''(t) - t(1+t)y'(t) + y(t)$.
 1) Proposer plusieurs manières de résoudre $E(t) = 0$, et en appliquer une.
 2) Quelles solutions sont de classe \mathcal{C}^∞ pour $t > 0$?

◇ [Rec03/edolin2-r3.tex/r3:259]

◆ **EDL.84** TPE MP – 2003
 Résoudre l'équation différentielle $x(x-1)y'' + (1-3x)xy' - y = 0$.

◇ [Rec03/edolin2-r3.tex/r3:151]

◆ **EDL.85** Mines PC – 2003
 Trouver les solutions développables en série entière de l'équation $y'' - 2xy' - 2y = 0$. Résoudre entièrement cette équation.

◇ [Rec03/edolin2-r3.tex/r3:162]

On trouve sans doute $u : x \mapsto e^{x^2}$ et

$$v : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

◆ **EDL.86** TPE MP – 2003
 Résoudre $x^2 y'' - xy' + y = x \ln x$ à l'aide du changement de variable $t = \ln x$.

◇ [Rec03/edolin2-r3.tex/r3:218]

◆ **EDL.87 (Résolution d'une EDO par DSE)** (***) Centrale PC – 2004
 On considère l'équation différentielle

$$4x y'' + 2y' - y = 0. \quad (E)$$

1) Trouver toutes les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0 et exprimez-les grâce aux fonctions usuelles.
 2) En déduire les solutions de (E) sur $] -\infty ; 0 [$, sur $] 0 ; +\infty [$, puis sur \mathbb{R} .

◇ [Rec04/edolin2-r4.tex/r4:104]

◆ **EDL.88 (Relaxation vers l'équilibre)** (***) Centrale PC – 2004
 Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ , monotone et ayant une limite finie en $+\infty$.

1) Montrer que les solutions de l'EDO

$$(E) : y'' + y = f$$

sont bornées sur \mathbb{R}^+ .
 2) Montrer que (E) admet une unique solution g admettant une limite finie en $+\infty$.
 3) Déterminer g .
 4) Que dire de $\lim_{+\infty} g$?

◇ [Rec04/edolin2-r4.tex/edo:20]

2) De plus on peut écrire

$$\phi(x) = f(x) + \left(A - f(0) - \int_0^x f'(t) \cos t \, dt \right) \cos x + \left(B - \int_0^x f'(t) \sin t \, dt \right) \sin x,$$

donc pour que ϕ admette une limite finie en $+\infty$, il faut annuler les deux coefficients en $x \rightarrow +\infty$, donc il faut que

$$A = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t) \cos t \, dt \quad \text{et} \quad B = \int_0^{+\infty} f'(t) \sin t \, dt.$$

3) On obtient alors

$$g(x) = f(x) + \int_x^{+\infty} f'(t) \cos(x-t) \, dt$$

et par la construction précédente, le deuxième terme tend vers 0.

4) Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Ce qui n'est guère étonnant quand on voit l'équation, tout physicien qui se respecte aurait pu trouver ça (même si c'est peut-être faux dans le cas général ;c):

Or, grâce à une intégration par parties :

$$\int_0^x f(t) \sin(x-t) \, dt = f(x) - f(0) \cos x - \int_0^x f'(t) \cos(x-t) \, dt$$

et de plus f est bornée sur \mathbb{R}^+ . Comme f' est de signe constant, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f'(t)| \, dt$ est bien définie au sens de Lebesgue et donc $t \mapsto f'(t) \cos(x-t)$ est intégrable et

$$\left| \int_0^{+\infty} f'(t) \cos(x-t) \, dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f'(t)| \, dt = |f(0) - f(+\infty)|.$$

La fonction ϕ est donc bien bornée.

◆ **EDL.89 (Équation d'Euler)** (*) CCP PC – 2004
 Résoudre l'équation différentielle $4x^2 y'' - 2xy' + 9y = x^2 + 1$ sur $] 0 ; +\infty [$, puis sur $] -\infty ; 0 [$, et enfin sur \mathbb{R} .

INDICATION : On pourra chercher les solutions de l'équation homogène associée sous la forme $f : x \mapsto x^\alpha$, où α est un réel.

◇ [Rec04/edolin2-r4.tex/r4:113]

◆ **EDL.90** CCP PC – 2004
 Résoudre $y'' - 2xy' + y = e^x$

◇ [Rec04/edolin2-r4.tex/r4:412]

◆ **EDL.91** (*) CCP PC – 2004
 Résoudre l'équation $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ (il existe une solution évidente).

◇ [Rec04/edolin2-r4.tex/r4:131]

◆ **EDL.92** (*) CCP MP – 2004
 Résoudre, avec la méthode de variation de la constante, l'équation $y'' + y = \cos^3 x$.

◇ [Rec04/edolin2-r4.tex/r4:210]

◆ **EDL.93** (***) Mines PC – 2005
 Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction T-périodique. On considère l'équation $y'' + y = f$. Existe-t-il des solutions de E qui soient T-périodiques ?

◇ [Rec05/edolin2-r5.tex/r5:82]

◆ **EDL.94 (Équation d'Euler)** (***) CCP PC – 2005
 On considère l'équation différentielle $ax^2 y'' + bx y' + cy = 0$ où y est définie sur $] 0 ; +\infty [$ à valeurs dans \mathbb{R} .

1) Montrer que le changement de variable $t = \ln x$ permet de se ramener à une équation différentielle à coefficients constants.
 2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre $x^2 y'' + x y' + y = \sin(\alpha \ln x)$.
 3) On note y_α l'unique solution de l'équation précédente vérifiant $y_\alpha(1) = y'_\alpha(1) = 0$. Montrer que y_α existe et donner, selon les valeurs de α , un équivalent de y_α en 1.

◇ [Rec05/edolin2-r5.tex/r5:6]

◆ **EDL.95** TPE PC – 2005
 Résoudre $xy'' + 2y = \frac{x}{x^2 + 1}$.
 On appelle f la solution définie sur \mathbb{R} de cette équation. Calculer $\int_{-1}^1 f$ et $\int_0^1 f$.

◇ [Rec05/edolin2-r5.tex/r5:28]

◆ **EDL.96** (*) Petites Mines PC – 2005
 On considère l'équation différentielle

$$x y'' + 2y' + \omega^2 x y = 0 \quad (E)$$

1) Trouver une solution de (E) sous la forme d'une série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
 2) Trouver toutes les solutions de E sur $I =] 0 ; +\infty [$.
 3) Retrouver le résultat précédent à l'aide d'un changement de fonction inconnue.

◇ [Rec05/edolin2-r5.tex/r5:91]

Systèmes différentiels linéaires

◆ SDL.1 (Système linéaire homogène)

Résoudre sur \mathbb{R} le système différentiel $\begin{cases} x' = 4x - 2y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

◇ [Divers/edosyslin1exo.tex/edo:1]

$$\begin{cases} x(t) = \lambda e^{2t} + 2\mu e^{3t} \\ y(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{3t}, \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

◆ SDL.2 (Système linéaire homogène trigonalisable)

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 5x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

◇ [Divers/edosyslin1exo.tex/div:71]

On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, que l'on trigonalise au moyen de $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

et $T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On remplace le système $X' = AX = PTP^{-1}X$ en $W' = TW$ où $W = P^{-1}X$. Cela donne

$$\begin{cases} w'_1 = 4w_1 + 2w_2 \\ w'_2 = 4w_2. \end{cases}$$

On en déduit $w(t) = w_0 e^{4t}$ et $v' - 4v = 2w_0 e^{4t}$, donc, après résolution, $v(t) = v_0 e^{4t} + 2w_0 t e^{4t}$.

Enfin, de $X = PW$ on tire $x = v + w$ et $y = v - w$, soit

$$\begin{cases} x(t) = (\lambda + \mu) e^{4t} + 2\mu t e^{4t} \\ y(t) = (\lambda - \mu) e^{4t} + 2\mu t e^{4t}. \end{cases}$$

◆ SDL.3 (Système linéaire non homogène)

(**)

Résoudre sur \mathbb{R} le système différentiel de variable t

$$\begin{cases} 2x' + y' - 3x - y = t, \\ x' + y' - 4x - y = e^t. \end{cases}$$

◇ [Divers/edosyslin1exo.tex/edo:2]

On commence par résoudre l'équation homogène : en posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ on est amené à résoudre le système équivalent $X = AX$. On diagonalise

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

donc en posant $Y = P^{-1}X$ on a $Y' = DY$ soit $Y = \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} \\ \beta e^t \end{pmatrix}$, soit en revenant

à $X = PY : X = \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} \\ -\frac{3}{2}\alpha e^{-t} + \beta e^t \end{pmatrix}$. Ayant une base (u, v) de solutions de l'équation homogène, on fait varier la constante pour trouver une solution

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda u + \mu v$ qui satisfasse l'équation complète, ce qui donne après calcul

$\lambda' = t e^t - e^{2t}$ et $\mu' = \frac{3}{2} t e^{-t} - \frac{1}{2}$ et, après intégration de ces équations de

$$\text{sup : } \begin{cases} x(t) = t - 1 - \frac{1}{2} e^t + \lambda e^{-t} \\ y(t) = -4t + 1 - \frac{1}{2} t e^t - \frac{5}{2} \lambda e^{-t} + \mu e^t, \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

◆ SDL.4

Résoudre sur \mathbb{R} le système différentiel

$$\begin{cases} x' = \frac{tx + y}{1 + t^2}, \\ y' = \frac{-x + ty}{1 + t^2}. \end{cases}$$

INDICATION : On montrera que x et y sont deux fois dérivables et on calculera x'' et y'' .

◇ [Divers/edosyslin1exo.tex/edo:3]

$$x'' = y'' = 0 \text{ donc } \begin{cases} x(t) = \lambda t + \mu, \\ y(t) = -\mu t + \lambda. \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

◆ SDL.5

Résoudre sur \mathbb{R} le système différentiel $\begin{cases} (\text{sh } 2t) x' = (\text{ch } 2t) x - y, \\ (\text{sh } 2t) y' = -x + (\text{ch } 2t) y, \end{cases}$ sachant qu'il existe une solution telle que $xy = 1$.

◇ [Divers/edosyslin1exo.tex/edo:4]

\mathbb{R}^2 .

On montre que $x^2 - 2x^2 \text{ch } 2t + 1 = 0$, puis $\begin{cases} x(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t} \\ y(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^t. \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$

◆ SDL.6

Résoudre sur \mathbb{R} le système différentiel d'inconnue x, y, z (la variable t) :

$$\begin{cases} x' = y + t^2, \\ y' = y + 2z + t^2, \\ z' = 2x - 2y. \end{cases}$$

◇ [Divers/edosyslin1exo.tex/edo:5]

où

$(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x(t) = \lambda e^t + \mu \cos 2t + \nu \sin 2t - (t^2 + 2t - 2), \\ y(t) = \lambda e^t + 2\nu \cos 2t - 2\mu \sin 2t - (t^2 + 2t + 2), \\ z(t) = -(2\mu + \nu) \cos 2t + (\mu - 2\nu) \sin 2t - (t^2 + 2t + 2). \end{cases}$$

◆ SDL.7

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système différentiel

$$\frac{dX}{dt} = AX.$$

En déduire $\exp(A)$.

◇ [Divers/edosyslin1exo.tex/edo:22]

On effectue un changement de variable évident en posant $u = x_1 + x_3$ et $v =$

$x_1 - x_3$, et on obtient le système $\begin{cases} u' = 6u \\ v' = 2v \end{cases}$ qui se résout en

$$u = \lambda e^{6t}, \quad v = \mu e^{2t}$$

et donc $x_1 = \alpha e^{6t} + \beta e^{2t}, \quad x_3 = \alpha e^{6t} - \beta e^{2t}$.

On fait de même pour x_2 et x_4 :

$$x_2 = \gamma e^{6t} + \delta e^{2t}, \quad x_4 = \gamma e^{6t} - \delta e^{2t}.$$

La solution du système donné avec condition initiale $(x_i(0))_i$ est donc

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{6t} + e^{2t} & 0 & e^{6t} - e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{6t} + e^{2t} & 0 & e^{6t} - e^{2t} \\ e^{6t} - e^{2t} & 0 & e^{6t} + e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{6t} - e^{2t} & 0 & e^{6t} + e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{pmatrix}.$$

On sait par ailleurs qu'elle s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{pmatrix}.$$

ce qui permet de conclure que

$$e^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^6 + e^2 & 0 & e^6 - e^2 & 0 \\ 0 & e^6 + e^2 & 0 & e^6 - e^2 \\ e^6 - e^2 & 0 & e^6 + e^2 & 0 \\ 0 & e^6 - e^2 & 0 & e^6 + e^2 \end{pmatrix}.$$

◆ SDL.8

Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = 2y + z + \cos t - \sin t \\ y' = x + 2y + z \\ z' = 2x - y + z - \cos t + \sin t \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = y(0) = z(0) = 0$.

◇ [Divers/edosyslin1exo.tex/edo:31]

◆ SDL.9

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = \frac{tx}{1+t^2} + \frac{y}{1+t^2} - \frac{3t}{1+t^2}, \\ y' = \frac{ty}{1+t^2} - \frac{x}{1+t^2} + \frac{2t^2-1}{1+t^2}. \end{cases}$$

◇ [Rec01/edosyslin1-r1.tex/edo-r:5]

◆ SDL.10

Résoudre $X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Mines MP – 2001

TPE MP – 2001

◊ [Rec01/edosyslin1-r1.tex/edo-r:14]

◆ **SDL.11** ENS Ulm MP – 2002
 Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue, T-périodique telle que : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t) \in S_n^+(\mathbb{R})$ et

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} \text{Ker } A(t) = \{0\}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et T périodique.
 Montrer qu'il existe une unique solution continue, T périodique, à l'équation $X' = AX + f$.

◊ [Rec02/edosyslin1-r2.tex/edo-r:2:2]

◆ **SDL.12** X PC – 2002
 On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x(2 - y) \\ y' = y(x - 3). \end{cases}$$

1) Démontrer l'existence d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $x(t)$ et $y(t)$ soient solutions de ce système et $f(x(t), y(t)) = 0$.
 2) On considère des conditions initiales $x(0) \in]0; 3[$ et $y_0 \in]2; 4[$. Les solutions $x(t)$ et $y(t)$ sont définies sur $]0; \alpha[$, avec $\alpha = +\infty$ ou bien $x^2(\alpha) + y^2(\alpha) \geq M^2$, où M est une constante arbitrairement grande.
 Montrer qu'il existe $t_1 \in]0; \alpha[$ tel que $x(t_1) = 3$.

INDICATION : Poser $t_1 = \inf \{t \in]0; \alpha[; x(t) \leq 3\}$, montrer que x et y ne s'annulent pas sur $]0; \alpha[$, étudier les variations de $x, y, 2 - x$ et $x - 3$ et vérifier que $x(t_1) = 3$.

◊ [Rec02/edosyslin1-r2.tex/edo-r:2:12]

Cf. RMS 2002.

◆ **SDL.13** CCP MP – 2002
 Soit A une matrice diagonalisable. Soit α une valeur propre de A. B étant une matrice colonne donnée, on considère le système différentiel

$$\frac{dX}{dt} = AX + e^{\alpha t} B.$$

Montrer que cette équation admet une solution du type $X = e^{\alpha t} (Ct + D)$.

◊ [Rec02/edosyslin1-r2.tex/edo-r:2:7]

On commence par récrire l'équation sous forme diagonale, puis on a n équations différentielles scalaires du premier ordre à coefficients constants et second membre blabla.

◆ **SDL.14** Mines MP – 2003
 Résoudre $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) - z(t) \\ z'(t) = -x(t) + 2y(t) + 2z(t). \end{cases}$

◊ [Rec03/edosyslin1-r3.tex/r3:383]

◆ **SDL.15** TPE PC – 2003
 On note $A = \text{AntiDiag}(1, \dots, 1)$.

1) Trouver les valeurs propres de A. Est-elle diagonalisable ?
 2) On considère le système différentiel suivant, où k est un paramètre réel et $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} x'_1 = kx_1 + x_n \\ \vdots \\ x'_i = kx_i + x_{n-i+1} \\ \vdots \\ x'_n = kx_n + x_1 \end{cases}$$

Résoudre ce système.

◊ [Rec03/edosyslin1-r3.tex/r3:106]

1) Les vecteurs du style $(0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0)$ sont propres pour la valeur

propre 1 ; ceux du style $(0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0)$ sont associés à la valeur propre -1 . Au total, il y en a n , donc A est diagonalisable.

◆ **SDL.16** (*) CCP MP – 2003
 On considère le système $\mathcal{S} : \begin{cases} x' = 5x + 4y + e^t \\ y' = 4x + 5y + 1 \end{cases}$.

1) Trouver λ tel que $x + \lambda y$ soit solution d'une équation différentielle facilement résoluble.
 2) Résoudre les équations pour les valeurs de λ trouvées.
 3) En déduire les solutions de \mathcal{S} .

◊ [Rec03/edosyslin1-r3.tex/r3:318]

◆ **SDL.17** CCP PC – 2003
 Résoudre le système $\begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases}$.

◊ [Rec03/edosyslin1-r3.tex/r3:277]

◆ **SDL.18** (★★) Navale MP – 2003
 On pose

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt) dt \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt) dt$$

Trouver un système différentiel liant u et v ; en déduire les valeurs de u et v .

◊ [Rec03/edosyslin1-r3.tex/r3:129]

On dérive sous le signe somme puis l'on intègre par parties chacune des deux fonctions. On trouve alors

$$\begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2(1+x^2)} & -\frac{1}{2(1+x^2)} \\ \frac{1}{2(1+x^2)} & \frac{x}{2(1+x^2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(x) \\ -v(x) \end{pmatrix},$$

ce qui est un rien moche...

Posons plutôt $f = u + iv$. On trouve alors

$$f'(x) = \frac{-x+i}{2(x^2+1)} f(x).$$

Une primitive de $\frac{-x+i}{2(x^2+1)}$ est $x \mapsto -\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{i}{2} \text{Arc tan } x$.

Cela donne donc

$$f(x) = \frac{A}{\sqrt{x^2+1}} e^{-i \text{Arc tan}(x)/2}.$$

avec $A = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Enfin,

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\text{Arc tan } x}{2}\right) &= \frac{1 + \cos(\text{Arc tan } x)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ \sin^2\left(\frac{\text{Arc tan } x}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(\text{Arc tan } x)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \end{aligned}$$

donc, en prenant la racine et en transformant l'exponentielle complexe en sinus et cosinus :

$$\begin{aligned} u(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}+1}}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \\ v(x) &= \text{sgn}(x) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

◆ **SDL.19** CCP PC – 2004
 Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + \text{Id} = 0$.

1) Montrez que n est pair.
 2) Pour $n = 2$, trouver un endomorphisme vérifiant $f^2 + \text{Id} = 0$.
 3) Montrez qu'il n'existe aucune base de $E = \mathbb{R}^{2n}$ dans laquelle la matrice M de f soit triangulaire.
 4) Dans cette question, $E = \mathbb{R}^{2n}$. Trouver les solutions de $\frac{dX}{dt}(t) = AX(t)$, où A est une matrice vérifiant $A^2 + \text{I}_{2n} = 0$.

◊ [Rec04/edosyslin1-r4.tex/r4:425]

1) On passe aux matrices et on vérifie que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; le spectre de M contient au plus i et $-i$; de plus, la trace de M est réelle, donc chaque valeur propre a la même multiplicité, donc n est pair.

2) Rotation d'angle $\pi/2$.

3) Sinon, le polynôme caractéristique serait scindé dans \mathbb{R} , mais $\text{Sp}_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

4) On sait que $X(t) = \exp(tA) \cdot X_0$ et $\exp(tA) = \cos(t) \text{I}_n + \sin(t) A$. Mais comment l'expliquer ? Le plus simple est de diagonaliser dans \mathbb{C} .

◆ **SDL.20** (*) CCP PC – 2004
 Résoudre $\begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - z \\ z' = -x - 2y + z. \end{cases}$

◇ [Rec04/edosyslin1-r4.tex/r4:92]

◆ SDL.21	(★)	Mines PC – 2005
Résoudre le système $\begin{cases} x' = 4y - x \\ y' = 4x - z \\ z' = -y + 4z. \end{cases}$		

◇ [Rec05/edosyslin1-r5.tex/r5:16]

Cette matrice est diagonalisable :

$$D = \text{diag}(3, \sqrt{21}, -\sqrt{21})\dots$$

◆ SDL.22	(★)	Mines PC – 2005
Résoudre le système $\begin{cases} x' = 2x - y + 7z \\ y' = 10x - 5y + z \\ z' = 4x - 2y + 2z. \end{cases}$		

◇ [Rec05/edosyslin1-r5.tex/r5:110]

Équations différentielles non linéaires

◆ EDNL.1

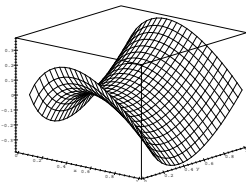
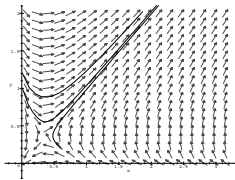
Résoudre, sur tout intervalle de \mathbb{R} , l'équation différentielle $y' = \frac{\ln x + 1}{\ln y + 1}$.

◇ [Divers/equadiffexo.tex/edo:17]

C'est une équation à variables séparables, donc

$$\int (\ln y + 1) dy = \int (\ln x + 1) dx$$

d'où l'équation des courbes intégrales : $y \ln y - x \ln x = C^{\text{te}}$. Le portrait de phase ainsi que quelques courbes intégrales sont représentés ci-dessous, avec l'allure de la fonction intégrale première :



◆ EDNL.2 (Application à la diffusion)

(**)

Une sphère de matière à dissoudre (style aspirine) de rayon $R_0 = 1$ mm, de masse molaire $M = 78$ g, de densité $d = 1,2$ et de produit de solubilité $K_s = 10^{-6} \text{ mol l}^{-1}$ est immergée dans le solvant, donc le coefficient de diffusion est $D = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$. Quel est le temps nécessaire à la dissolution totale ?

INDICATION : Avant toute chose, on écrira soigneusement les hypothèses physiques retenues, qui permettent d'écrire une équation différentielle approchée.

◇ [Divers/equadiffexo.tex/edo:28]

On suppose le verre infiniment grand et la diffusion suffisamment rapide pour être en régime stationnaire. Alors on a, en notant $c(r, t)$ la concentration molaire d'aspirine,

$$\Delta c = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rc) = 0$$

ce qui conduit à la solution générale $c(r, t) = a(t)/r + b(t)$. Comme à l'infini il n'y a pas d'aspirine, on en déduit $b(t) = 0$ et comme à la surface du cachet (en $r = R(t)$, donc), la concentration est identiquement égale à K_s , on a $a(t) = K_s R(t)$, donc

$$c(r, t) = \frac{K_s R(t)}{r}$$

Par ailleurs, si on note $m(t)$ la quantité de moles restant dans le cachet d'aspirine, on a

$$\frac{dm}{dt}(t) = 4\pi R^2(t) \|j(R(t), t)\|,$$

où j est le courant molaire d'aspirine, donné par la loi de diffusion de Fick

$$j(r, t) = D \nabla c(r, t),$$

soit en l'occurrence

$$\|j(R(t), t)\| = D \frac{\partial c}{\partial r}(R(t), t) = DK_s \frac{R(t)}{R(t)^2} = \frac{DK_s}{R(t)}.$$

De plus, le nombre de moles dans le cachet est relié au rayon par

$$m = \frac{\text{masse}}{M} = \frac{d \times \frac{4}{3} \pi R(t)^3}{M}.$$

On a alors (attention au signe : l'aspirine se casse de là !)

$$-\frac{d}{dt} \left[\frac{4\pi d R^3}{3M} \right] = 4\pi R(t)^2 \frac{DK_s}{R(t)}$$

donc

$$R(t) \frac{dR}{dt}(t) = -\frac{K_s DM}{d}.$$

Cela s'intègre en

$$R^2(t) = C^{\text{te}} - (2K_s DM/d)t = R_0 - \frac{2K_s DM}{d} t,$$

soit

$$R(t) = \sqrt{R_0 - \frac{2K_s DM}{d} t}.$$

◆ EDNL.3

(***)

Résoudre $y''' - 3y' + 2y = \sin x$.

◇ [Divers/equadiffexo.tex/edo:32]

On remarque que $y = e^x$ est solution de l'équation homogène. On pose ensuite $Y = \lambda e^x$ et on injecte, ce qui mène, miracle, à l'équation simple $\lambda''' + 3\lambda'' = 0$ de solution $\lambda'' = e^{-3x}$ et donc $\lambda = \frac{1}{9} e^{-3x}$ sauf qu'on se fiche du $1/9$.

Donc une autre solution est $Y = e^{-2x}$. Enfin, l'équation caractéristique étant $(X - 1)^2(X + 2)$ on essaye, pour voir, si $Y = x e^x$ ne marcherait pas : si !

On a donc la base $(e^x, x e^x, e^{-2x})$.

On cherche alors une solution particulière.

Pour cela, il faut une MVC très généralisée, ou bien poser $z = y'$ et $u = y''$. Alors on obtient

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = u \\ u' = 3z - 2y + \sin x \end{cases} \quad \text{on pose donc} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

or A est non diagonalisable, mais en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

on a

$$P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et ensuite on résout en posant

$$W = \begin{pmatrix} y \\ z \\ u \end{pmatrix} = PZ = P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = (0 \quad 0 \quad \sin x)$$

ce qui nous donne

$$W' = AW + C \quad \text{donc} \quad PZ' = APZ + C, \quad Z' = BZ + P^{-1}C$$

et donc

$$\begin{cases} a' = -2a + \frac{1}{9} \sin x, \\ b' = b - 3c + \frac{1}{3} \sin x, \\ c' = c - \frac{1}{9} \sin x. \end{cases}$$

La première équation a pour solution $a = -\frac{1}{45} \cos x + \frac{2}{45} \sin x + \lambda e^{-2x}$.

La troisième donne $c = \frac{1}{18} \cos x + \frac{1}{18} \sin x + \mu e^x$.

La deuxième s'écrit $b' = b - \frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{6} \sin x - 3\mu e^x$ et admet pour solution $b = -\frac{1}{6} \sin x - 3\mu x e^x + \nu e^x$.

On récrit ensuite

$$\begin{pmatrix} y \\ z \\ u \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{45} \cos x + \frac{2}{45} \sin x + \lambda e^{-2x} \\ -\frac{1}{6} \sin x - 3\mu x e^x + \nu e^x \\ \frac{1}{18} \cos x + \frac{1}{18} \sin x + \mu e^x \end{pmatrix}$$

et donc

$$y = \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{10} \sin x + \lambda e^{-2x} + (4\mu + \nu - 3\mu x) e^x.$$

Facile, non ?

◆ EDNL.4

Résoudre l'équation différentielle $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

◇ [Divers/equadiffexo.tex/edo:35]

On pose $z = y'' + y$, alors $z'' + z = 0$ donc $z = A \cos x + B \sin x = y'' + y$.

◆ EDNL.5

(***)

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables, vérifiant $f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

◇ [Divers/equadiffexo.tex/edo:49]

$$f_{\lambda, \mu}(t) = \sqrt{t} \cdot \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) \right).$$

On réinjecte, alors f vérifie une équation d'Euler $t^2 y'' + y$. On peut chercher une solution sous la forme d'une puissance (complexe ici) ou effectuer le changement de variable $t = e^x$. On trouve alors

On réinjecte et on trouve que $\lambda = \sqrt{3}\mu/2$.

Les solutions sont donc les $t \mapsto \lambda \sqrt{t} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t - \frac{\pi}{6}\right)$.

◆ EDNL.6 (Équation de Riccati)

On considère l'équation différentielle

$$y' = x^2 + y^2, \tag{E}$$

où y est une fonction réelle inconnue de la variable réelle x . Soit ϕ une solution maximale de (E) et I son intervalle ouvert de définition.

1) Montrer que ϕ est strictement croissante.

2) On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $\phi(x_0) > 0$. Montrer que, pour $x \geq x_0$ et $x \in I$, on a : $\frac{\phi'(x)}{[\phi(x)]^2} \geq 1$.

En déduire que l'intervalle I est majoré.

3) Que peut-on dire de I s'il existe $x_1 \in I$ tel que $\phi(x_1) < 0$?

4) Montrer que I est borné.

5) Déterminer l'image de I par ϕ .

6) Combien existe-t-il de solutions maximales impaires ?

◇ |Divers/equadiffexo.tex/edo:56|

1) ϕ' est à valeurs positives et s'annule, au plus, une seule fois (en 0), donc ϕ est strictement croissante.

2) $\phi(x_0) > 0$ et ϕ est croissante, donc ne s'annule pas sur $[x_0; +\infty[\cap I$.

Ainsi, on peut calculer $\frac{\phi'(x)}{[\phi(x)]^2} = 1 + \left(\frac{x}{\phi(x)}\right)^2 \geq 1$.

□ Soit $x \in I$. En intégrant cette inégalité entre x_0 et x , on voit que $x \mapsto x + 1/\phi(x)$ est décroissante et donc

$$x \leq x_0 + \frac{1}{\phi(x_0)} - \frac{1}{\phi(x)} \leq x_0 + \frac{1}{\phi(x_0)}$$

Conclusion :

$$I \text{ est majoré et } I \subset \left[x_0; x_0 + \frac{1}{\phi(x_0)} \right].$$

3) On suppose $\phi(x_1) < 0$; par croissance, la fonction ϕ ne s'annule pas sur $] -\infty; x_1] \cap I$ et la fonction $x \mapsto x + 1/\phi(x)$ y est définie et décroissante.

Ainsi, pour tout $x \in] -\infty; x_1] \cap I$, on a $x \geq x_1 + \frac{1}{\phi(x_1)} - \frac{1}{\phi(x)} \geq x_1 + \frac{1}{\phi(x_1)}$:

I est minorée.

4) ► **Supposons que I n'est pas borné.** On peut supposer par exemple que I n'est pas majoré, c'est-à-dire que I est de la forme $I =]a; +\infty[$. Alors, d'après la question 2, ϕ est à valeurs négatives sur I; comme elle est croissante, elle admet une limite (négative) en $+\infty$. D'après l'équation (E), on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi'(x) = +\infty$ et, par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = +\infty$: **contradiction.**

De même, on trouve une contradiction en supposant que I n'est pas minoré et en regardant la limite de ϕ en $-\infty$. ◀

Conclusion : I est bornée, et il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $I =]a; b[$.

5) Notons $J = \phi(I)$. On sait, d'après le cours, que I est un intervalle ouvert, que nous noterons $I =]a; b[$, où $(a, b) \in \mathbb{R}$. Puisque ϕ est croissante, elle admet une limite en b . Si cette limite n'était pas $+\infty$, ϕ' admettrait donc une limite finie en b ; d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , on pourrait prolonger ϕ sur $]a; b]$, ce qui est en contradiction avec le caractère maximal de la solution.

◆ **EDNL.7**
Résoudre l'équation différentielle $y'' = 2y^3$ vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$.

◇ |Divers/equadiffexo.tex/edo:57|

Comme en physique, on multiplie par y' et on intègre : $y'^2 = y^4 + C^{16}$ et la constante vaut 0.

► **Si y s'annulait**, alors y' s'annulerait au même point donc on aurait $y \equiv 0$: **impossible.** ◀

Ainsi, y ne s'annule pas.

On en déduit $\left(\frac{y'}{y^2}\right)^2 = 1$ et par continuité $\frac{y'}{y^2} = 1$ donc $y(x) = \frac{1}{1-x}$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow b^-} \phi(x) = +\infty$.

De même, on obtient une contradiction si ϕ admet une limite finie en a , donc $\lim_{x \rightarrow a^+} \phi(x) = -\infty$.

Conclusion :

$$\phi(I) = \mathbb{R}.$$

6) Soit ψ une solution maximale impaire. Alors ψ est définie sur un voisinage de 0 et, comme toute les fonctions dérivables impaires, vérifie $\psi(0) = 0$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles d'ordre 1 assure l'unicité d'une solution maximale vérifiant la condition initiale $\psi(0) = 0$. Ainsi, *il existe au plus une solution maximale impaire.*

Il reste à démontrer qu'il en existe au moins une. On considère donc la solution maximale vérifiant $\psi(0) = 0$ (seule candidate raisonnable), donc l'existence est assurée par le même théorème de Cauchy-Lipschitz. Cette solution maximale est, d'après la question 4, définie sur un intervalle $]a; b[$ avec $a < 0 < b$. Il nous faut donc vérifier maintenant que : 1° on a $b = -a$ et 2° la fonction ψ est impaire, c'est-à-dire $\psi(-x) = -\psi(x)$ pour tout $x \in]a; b[$.

– Posons $\alpha = \max(b, -a)$. On peut par exemple supposer que $\alpha = b$, c'est à dire que $-a \leq b$. On définit alors la fonction Ψ sur $] -b; b[$ par

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in [0; b[\\ -\psi(-x) & \text{si } x \in] -b; 0] \end{cases}$$

La fonction Ψ est alors impaire, continue et l'on vérifie aisément qu'elle est dérivable en 0 (et donc sur $] -b; b[$) et qu'elle est solution de (E). Comme $\Psi(0) = 0$ et que ψ est la solution maximale vérifiant $\psi(0) = 0$, on en déduit que Ψ est une restriction de ψ , et donc que $] -b; b[\subset]a; b[$ donc $a \leq -b$. Puisque l'on avait supposé $-a \leq b$, on en déduit que $b = -a$. Cette conclusion resterait vraie si l'on avait supposé $\alpha = -a$.

– Avec les notations précédentes, les fonctions Ψ et ψ sont définies sur le même intervalle $] -b; b[$ et vérifient $\psi(0) = \Psi(0) = 0$, donc elles sont égales; par construction, Ψ est impaire, donc ψ est impaire.

On a donc démontré qu'il existe au moins une solution maximale impaire.

Il existe une et une seule solution maximale impaire.

La solution maximale est donc

$$y: \begin{cases}] -\infty; -1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1-x} \end{cases}$$

◆ **EDNL.8 (Korteweg-de Vries)**
On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) = 0.$$

1) On suppose que cette équation admet des solutions de la forme $u(x, t) = \phi(x - Vt)$ pour $V > 0$. Ces solutions sont elles toutes de classe \mathcal{C}^∞ ?

2) Ecrire un système différentiel d'ordre 1, $X'(s) = \Psi(X(s))$ vérifié par

$$X(s) = \left[\phi(s); \frac{d\phi}{ds}(s) \right].$$

En déduire l'existence de solutions.

3) On recherche les fonctions ϕ nulles à l'infini ainsi que leurs dérivées. Montrer qu'une telle fonction vérifie une équation du premier ordre de la forme

$$\left(\frac{d}{ds}\phi(s)\right)^2 = F(\phi(s)).$$

Résoudre et discuter...

◇ |Divers/equadiffexo.tex/div:114|

◆ **EDNL.9**
Étudier les solutions maximales de $y'' + |y| = 0$ en fonction des conditions initiales $y(0) = a$ et $y'(0) = 0$.

◇ |Divers/equadiffexo.tex/div:133|

Si $a > 0$, alors la solution vaut $a \cos x$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et ensuite $\alpha \operatorname{ch} x + \beta \operatorname{sh} x$, où les constantes sont déterminées par le caractère deux fois dérivable.

Si $a < 0$, une solution en $y = a \operatorname{ch}(x)$.

◆ **EDNL.10 (Dérivée de Schwarz)** (*) Mines MP – 1997

Si f est un \mathcal{C}^3 -difféomorphisme de \mathbb{R} , on pose

$$S(f) = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

- Exprimer $S(g \circ f)$ à l'aide de $S(g)$ et $S(f)$.
- Résoudre l'équation $S(f) = 0$.

Remarque On peut montrer que si $ad - bc \neq 0$, alors $S\left(\frac{af+b}{cf+d}\right) = S(f)$.

◇ |Rec00/equadiff-r0.tex/edo:55|

1) f étant un \mathcal{C}^3 difféomorphisme, on sait que f' ne s'annule pas et $S(f)$ est donc bien définie. Un calcul bourrin montre que

$$S(g \circ f) = f'^2(S(g) \circ f) + S(f).$$

2) On pose $\phi = f''/f'$. Alors $S(f) = 0$ si et seulement si ϕ est solution de l'équation différentielle non linéaire $y' = \frac{1}{2}y^2$ c'est-à-dire $\left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{x}{2} + C^{16}$. Les solutions maximales sont donc $y = 0$ (définie sur \mathbb{R} tout entier) et les $y = -\frac{2}{x-C}$, définies sur $] -\infty; C[$ ou sur $] C; +\infty[$.

] C; +\infty[.

Pour la solution sur \mathbb{R} , on en déduit $f(x) = \lambda x + \mu$ avec $\lambda \neq 0$. Pour les solutions sur $] -\infty; C[$ ou sur $] C; +\infty[$, on en déduit

$$f(x) = -\frac{\lambda}{x-C} + \mu$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

On peut résumer la situation en disant que d'une manière générale on a des **homographies** $f: x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, qui sont telles que $ad - bc \neq 0$.

◆ **EDNL.11** (***) ENSI P

Résoudre l'équation différentielle $2xyy' = x^2 + y^2$ avec la condition initiale $y(1) = 2$.

◇ |Rec00/equadiff-r0.tex/edo:27|

$$f: \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x}. \end{cases}$$

On pense à poser $z = y^2$ ce qui donne $xz' = x^2 + z$, dont une solution évidente est $z = x^2$. Or les solutions de l'équation homogène $xz' = z$ sont les $x \mapsto \lambda x$, donc la solution de l'équation est $x \mapsto x^2 + \lambda x$ sur \mathbb{R}^{*+} ou \mathbb{R}^{*-} . Comme $y(1) = 2$, on en déduit $z(1) = 4$ donc $\lambda = 3$, on peut donc résoudre l'équation sur \mathbb{R}^{*+} et on a la solution

C'est bien sûr un morceau d'hyperbole d'équation

$$y^2 - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}.$$

◆ **EDNL.12** (*) Centrale MP – 2000

Existe-t-il des solutions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} de l'équation différentielle : $y' + 2\sqrt{y} = 0$? Y a-t-il unicité de solution à un problème de Cauchy donné ?

◊ [Rec00/equadiif-r0.tex/edo:50]
 Si y est solution de cette équation, alors elle vérifie également l'équation différentielle $y^2 = 4y$ et elle est toujours positive.

Sur un intervalle où y s'annule, elle vérifie également $\frac{y'}{2\sqrt{y}} = -1$ donc $\sqrt{y} = -t + C^{\mathbb{R}}$ donc $y = (K - t)^2$, et ceci sur l'intervalle $[-\infty; K]$ (c'est

une demi-parabole).
 Ensuite, puisque y est décroissante et positive, si elle est encore définie, elle ne peut être que nulle. Or justement, en reoiliant cette demi-parabole et la fonction nulle sur $[K; +\infty]$, on a bien une fonction de classe \mathcal{C}^1 qui vérifie l'équation différentielle proposée.
 En conclusion, il n'y a unicité que si $y(t_0) = \alpha > 0$. Si $y(t_0) = 0$, il y a une infinité de solutions; si $y(t_0) < 0$, il n'y a aucune solution.

◆ **EDNL.13** (★★★) ENS Lyon MP – 2000
 1) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une application minorée. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(f'(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
 2) Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 et minorée. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathbb{R}^p telle que la suite $(df(a_n))$ tende vers 0.

◊ [Rec00/equadiif-r0.tex/edo:51]
 1) Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors $\inf |f'(\mathbb{R})| > 0$, donc f' est de signe constant et non intégrable ce qui montre que f n'est pas minoré.
 2) On suppose que $\nabla f(a) \neq 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}^p$. Considérons maintenant l'équation différentielle autonome

$$x' = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$$

Pour une condition initiale $x(0)$ donnée, il existe une unique solution maximale; celle-ci est d'ailleurs définie sur \mathbb{R} car le membre de droite est toujours défini et de norme 1. Alors, la fonction $t \mapsto f(x(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 et minorée de 0; on applique le résultat précédent : il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\frac{d}{dt}(f(x(t_n))) = \|\nabla f(x(t_n))\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On a ensuite équivalence entre $\nabla f(a) = 0$ et $df(a) = 0$.

◆ **EDNL.14** (★★) ENS PC – 2005
 Soient u et v deux applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^∞ , et telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u''(t) = v(u(t)).$$

 1) On suppose que v est à valeurs strictement positives. Combien u peut-elle présenter de zéros?
 2) On suppose cette fois que $v(0) = 0$, $v(t) \cdot t \leq 0$ et $|v(t) \cdot t| \geq t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Combien u peut-elle présenter de zéros?

◊ [Rec00/equadiif-r0.tex/r0:30]
 1) $u'' > 0$ donc u est convexe, donc u peut s'annuler au plus deux fois (on peut également appliquer Rolle deux fois pour trouver une contradiction si u s'annule au moins trois fois). On peut même remarquer que tous les cas sont possibles, en prenant la fonction $v \equiv 1$, alors u est une parabole qui peut bien s'annuler 0, 1 ou 2 fois.
 2) L'idée est que u est « plus contrainte qu'un cosinus ».
 Supposons donc que u n'est pas la fonction nulle. Alors il existe un réel t^* en lequel u ne s'annule pas. Sans perdre de généralité (on peut changer u en $-u$ et conserver un problème similaire), on peut supposer que $u(t^*) > 0$. Sur un intervalle I maximal contenant t^* et sur lequel u est positive, u est donc concave; alors $I \neq \mathbb{R}$ (sinon u serait constante non nulle, ce qui n'est pas possible) et on peut donc trouver un point t_0 d'annulation de u ; en ce point, la dérivée est non nulle (par concavité).
 On remarque au passage que, là où u est à valeurs positives, elle est concave, et à où elle est négative, elle est convexe.
 Montrons que : si t_0 est un zéro de u , alors il existe un autre zéro $t_1 > t_0$ tel que $t_1 - t_0 \leq \pi$. (Et de même à gauche.)
 On suppose par exemple que u est à valeurs positives au voisinage à droite de t_0 .
 Notons ϕ une fonction vérifiant $\phi'' - \phi = 0$, et ayant même valeur et même dérivée en t_0 que u , autrement dit

$$\phi(t) = u(t_0) \cdot \sin(t - t_0).$$

 Enfin, notons $Z = \phi - u$; travaillons alors sur un intervalle partant de t_0 sur lequel u reste positive, mais de largeur inférieure à π .

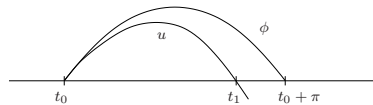
– 1^{er} solution :
 Alors $Z'' = \phi'' - u'' = \phi - v \circ u(t) \geq u(t) - \phi(t) = Z$.
 Si l'on résout l'inéquation différentielle

$$Z'' - Z \geq 0$$

 à partir de la variation de la constante, et en tenant compte de $Z(0) = Z'(0) = 0$, on trouve, en notant $g = Z'' - Z \geq 0$:

$$Z(t) = \int_0^t \sin(t-s) g(s) ds \geq 0$$

 ce qui prouve que la courbe représentative de u est en dessous de celle de ϕ et donc que doit s'annuler sur $[t_0; t_0 + \pi]$.
 – 2^e solution : On note $f = \begin{vmatrix} \phi & u \\ \phi' & u' \end{vmatrix}$, alors $f' = u(-\phi - v \circ \phi) \geq 0$ et $f(0) = 0$ donc f est à valeurs positives, ...
À FINIR !!!



On peut bien évidemment faire de même à gauche etc.
 Conclusion : u s'annule une infinité de fois, et ses zéros sont éloignés d'au plus π .

◆ **EDNL.15** ENS ULC MP – 2001
 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{++}$ telle que, pour tout $x \geq 2$, $f(x) = 1$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note u l'unique solution, sur \mathbb{R}^+ , de l'équation différentielle $u'' = \alpha f \circ u$, et vérifiant $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.
 1) Quel est le nombre de zéros de u ?
 2) On note x_1 le premier zéro de u strictement positif. Que vaut $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} x_1$?
 3) Équivalent de x_1 ?

◊ [Rec01/equadiif-r1.tex/edo-r:8] Faire des dessins.
 ◆ **EDNL.16** ENS ULC MP – 2001
 Montrer qu'il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ vérifiant (on note $u = (u_1, u_2, u_3)$) :

$$\begin{cases} u' + u \wedge u' = -u \wedge (u_3 e_3) \\ u(0) = U_0 \text{ avec } \|U_0\| = 1 \end{cases} \text{ et } e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

 INDICATION : u est de norme constante.
 Trouver une équation vérifiée par u_3 ; en déduire

$$\langle U_0 | e_3 \rangle > 0 \implies \forall t \in \mathbb{R}, \langle u(t) | e_3 \rangle > 0, \quad u_3 > 0.$$

 Quelle est la limite de u en $[t \rightarrow \infty]$?

◊ [Rec01/equadiif-r1.tex/edo-r:11]
 ◆ **EDNL.17** (★) TPE MP – 2001
 Trouver l'ensemble des fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = 0$.

◊ [Rec01/equadiif-r1.tex/edo-r:10] sh. Tout pris en compte, ne restent que les cos et sh : $f = \lambda \cos + \mu \text{sh}$.
 On commence par remarquer que f est forcément de classe \mathcal{C}^4 sur \mathbb{R} , et Une autre façon est de décomposer f en une partie paire et une partie impaire, ce qui est plus astucieux!

◆ **EDNL.18** (★★★) Mines MP – 2001
 On considère l'équation différentielle $2y'' = e^y$.
 1) On suppose $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Trouver la solution maximale.
 2) On suppose $y(0) = y'(0) = 0$. Montrer que la solution maximale est paire. La déterminer.

◊ [Rec01/equadiif-r1.tex/edo-r:15] (en tenant compte de $y(0) = 0$) et donc, sur l'intervalle maximal $] -\infty; 2[$:
 1) On multiplie par y' pour obtenir $2y'y'' = y'e^y$, qu'on intègre en $(y')^2 = e^y$ (la constante est nulle car $y'(0) = 1$). Enfin, par continuité de y' et puisque l'exponentielle ne change pas de signe et que $y'(0) > 0$, on trouve

$$y' = e^{y/2},$$

 On divise par le second membre : $y' e^{-y/2} = 1$ ce que l'on intègre en

$$e^{-y/2} = -\frac{x}{2} + 1$$

 2) On pose $\tilde{y} : x \mapsto y(-x)$. Alors \tilde{y} et y vérifient la même équation différentielle et les mêmes conditions initiales donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, elles sont égales (et définies sur le même intervalle).

◆ **EDNL.19** TPE MP – 2001
 Résoudre $(y + 2x)y + (2x + y)y' = 0$.
 ◊ [Rec01/equadiif-r1.tex/edo-r:17]

◆ **EDNL.20** TPE MP – 2002
 Résoudre $y'' = 2y^3$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.

◊ [Rec02/equadiif-r2.tex/edo-r:14] La solution maximale est donc
 Comme en physique, on multiplie par y' et on intègre : $y'^2 = y^4 + C^{\mathbb{R}}$ et la constante vaut 0.
 ► Si y s'annulait, alors y' s'annulerait au même point donc on aurait $y \equiv 0$: impossible. ◀
 Ainsi, y ne s'annule pas.
 On en déduit $\left(\frac{y'}{y^2}\right)^2 = 1$ et par continuité $\frac{y'}{y^2} = 1$ donc $y(x) = \frac{1}{1-x}$.

◆ **EDNL.21** X MP – 2003

- 1) Résoudre $z' = k^2 + z^2$ avec la condition initiale $z(t_0) = 0$ et $k > 0$.
 2) Soit $f, g :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues, dérivables et $F, G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continues. On suppose

$$\forall x \in]a; b[\quad \begin{cases} f'(x) = F(x, f(x)) \\ g'(x) = G(x, g(x)). \end{cases}$$

On suppose de plus qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = g(c)$, et que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x, y) < G(x, y)$.
 Comparer f et g sur $]a; b[$.

- 3) On note ϕ la solution maximale de $\begin{cases} y' = t + y^2 \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$ pour $t_0 > 0$; notons $I =]\alpha(t_0); \beta(t_0)[$ son intervalle de définition.
 Montrer que $\beta(t_0) < +\infty$ et donner un majorant de $\beta(t_0)$.
 4) Trouver un équivalent de $\beta(t_0) - t_0$ et de $\alpha(t_0) - t_0$ quand $t_0 \rightarrow +\infty$.
 5) Allure des solutions ?

◇ [Rec03/equdiff-r3.tex/r3:230]

À FINIR !!!

On a une équation autonome non linéaire.

◆ **EDNL.22** Mines MP – 2003

Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle

$$x^2 y' + y + y^2 = 0$$

vérifiant la condition initiale $y(0) = -1$.

◇ [Rec03/equdiff-r3.tex/r3:214]

◆ **EDNL.23** Centrale MP – 2004

Notons $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = e^{-xt} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que θ est définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 et que I est impaire.
 2) Montrer que $I = \mathbb{R}$.
 3) Montrer que θ tend vers une limite finie λ et que $1 \leq \lambda \leq 1 + \frac{1}{e}$.
 4) Montrer que l'on a

$$\theta(t) = \lambda - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \underset{t \rightarrow +\infty}{o} (t e^{-2\lambda t}).$$

◇ [Rec04/equdiff-r4.tex/r4:264]

3)

1)

2)

4)

Calcul différentiel

Fonctions de plusieurs variables

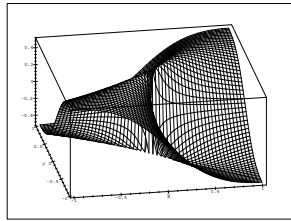
◆ DIF.1 (Limite double)

Posons, pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ existent, mais pas $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:1]



Voici l'allure de la fonction :

◆ DIF.2 (Limite double)

Posons maintenant, pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \begin{cases} y + x \sin(1/y) & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Montrer que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ existent, mais pas $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} f(x, y)$.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:2]

◆ DIF.3 (Limite double)

Posant, pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} + y \sin(1/x) & \text{si } xy \neq 0, \\ 0 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} f(x, y)$ existe, mais ni $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ni $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:3]

◆ DIF.4 (Limite double)

Posant, pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

montrer que les limites pointées $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ existent, mais ne sont pas égales.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:4]

◆ DIF.5

Calculer si elle existe la limite en $(0, 0)$ de

$$(x, y) \mapsto \frac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}. \quad (\star)$$

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:5]

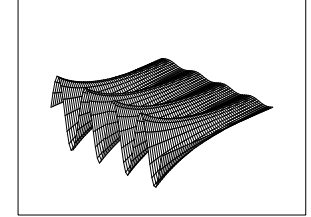
On la réécrit $\frac{\sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x-y}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{x+y}{2}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1$.

◆ DIF.6

Trouver les extrema locaux de $(x, y) \mapsto e^{x \sin y}$ sur \mathbb{R}^2 .

Même question si pour la restriction de cette fonction à $[0; 1] \times [0; 2\pi]$.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:6]



Les points critiques sont en $(0, n\pi)$. On calcule alors $r = 0, s = \cos n\pi$ et $t = 0$. Donc $s^2 - rt > 0$: il n'y a pas d'extremum.

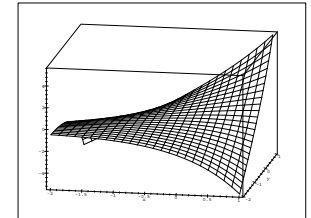
En revanche, si on travaille sur un fermé, il faut vérifier s'il n'y a pas d'extremum sur le bord!

◆ DIF.7

Trouver les extrema locaux de $(x, y) \mapsto x e^y + y e^x$.

(*)

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:7]



Il faut alors résoudre $x e^{1/x} + e^x = 0$ avec $y = 1/x$ et bien sûr $x < 0$. Or $x \mapsto x e^{1/x} + e^x$ est strictement croissante sur $] -\infty; 0 [$, ce qui montre qu'elle s'annule au plus en un point, or elle s'annule en $x = -1$; avec $y = -1$ on calcule $s^2 - rt = \frac{-3}{e^2} < 0$: pas d'extremum local.

◆ DIF.8

Étudier la continuité de f , l'existence et la continuité des dérivées partielles, avec

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin|xy|}{|x|+|y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:8]

On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 1$ si $x \neq 0$, pareil pour $(0, y)$, et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Ainsi les dérivées partielles existent sur \mathbb{R}^2 mais $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Pas de continuité en $(0, 0)$.

◆ DIF.9

Étudier la continuité de f , l'existence et la continuité des dérivées partielles, avec

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - r^2 & \text{si } r = \sqrt{x^2 + y^2} > 1 \\ 0 & \text{si } r \leq 1. \end{cases}$$

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:9]

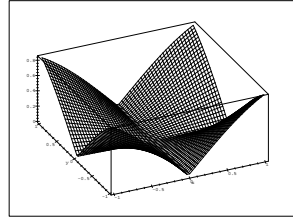
$\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}) \cup \{(0, 1), (0, -1)\}$ mais n'est continue que sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$.

◆ DIF.10

Étudier la continuité de f , l'existence et la continuité des dérivées partielles, avec $f(x, y) = \sin|xy|$.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:10]

C'est continu sur \mathbb{R}^2 , mais $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}^*)$.



Voici l'allure :

◆ **DIF.11 (Norme non différentiable en 0)** (**) Soit N une norme sur \mathbb{R}^n . Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:11]

On suppose que N est différentiable en 0, ce qui veut dire qu'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$N(h) = L(h) + \|h\| \varepsilon(h).$$

Alors $N(-h) = N(h) = -L(h) + \|h\| \varepsilon(-h)$

donc $2N(h) = \|h\| [\varepsilon(h) + \varepsilon(-h)]$

donc $\frac{N(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$,

ce qui est en contradiction avec l'équivalence des normes.

◆ **DIF.12** Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. On pose $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Montrer que F est différentiable et calculer sa différentielle.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:12]

car on est en dimension finie, donc

On calcule $F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{x} \wedge f(\mathbf{h}) + \mathbf{h} \wedge f(\mathbf{x}) + \mathbf{h} \wedge f(\mathbf{h})$

$d_{\mathbf{x}}F(\mathbf{h}) = \mathbf{x} \wedge f(\mathbf{h}) + \mathbf{h} \wedge f(\mathbf{x})$.

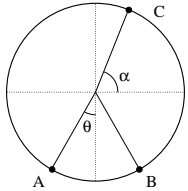
or $\|\mathbf{h} \wedge f(\mathbf{h})\| \leq \|\mathbf{h}\| \cdot \|f(\mathbf{h})\| \leq \|\mathbf{h}\|^2 \|f\| = o(\mathbf{h})$

◆ **DIF.13 (Triangle inscrit maximal)** (**) Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:13]

On a plusieurs solutions. La plus simple est sans doute de prendre pour coordonnées $A(1,0)$, $B(\cos \theta, \sin \theta)$, $C(\cos \psi, \sin \psi)$ et de calculer $\mathcal{S} = \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Une autre solution simple est la suivante : on oriente le cercle ainsi :



On a alors

$$A = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

et donc la surface est

$$2\mathcal{S} = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 2 \sin \theta & \cos \alpha + \sin \theta \\ 0 & \sin \alpha + \cos \theta \end{vmatrix} = 2 \sin \theta (\sin \alpha + \cos \theta).$$

On cherche les extrema par rapport à α :

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha} = 0 \implies \cos \alpha = 0 \implies \alpha = \frac{\pi}{2}$$

puisque la valeur $-\pi/2$ est manifestement un minimum.

Enfin, on calcule l'extremum par rapport à θ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} &= 2 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 2 \cos \theta + 2(2 \cos^2 \theta - 1) \\ &= 4 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 2, \end{aligned}$$

or $X^2 + \frac{X}{2} - \frac{1}{2} = (X - \frac{1}{2})(X + 1)$ donc les solutions sont $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et on retrouve le triangle équilatéral et $\cos \theta = -1$ et on trouve un triangle nul.

◆ **DIF.14** \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont deux cercles tangents extérieurement en 0, et de rayons R et R' . M est un point de \mathcal{C} et M' un point de \mathcal{C}' . Calculer l'aire maximale du triangle (OMM') .

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:14]

Les rayons n'ont aucune influence intéressante, et que les cercles soient tangents extérieurement ou intérieurement, ça ne change rien (faire un zoli dessin

et se souvenir de la géométrie !)

On est donc ramené au problème précédent **DIF.13**.

◆ **DIF.15** On considère l'application « déterminant »

$$\det: \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto \det A. \end{cases}$$

Montrer que cette application est différentiable et calculer sa différentielle.

INDICATION : On calculera les dérivées partielles.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:15]

Si on forme $\tilde{A} = {}^t \text{com} A = (M_{ji})_{ij}$, transposée de la comatrice, on obtient

On a

$$\det A = \sum_{j=1}^n A_{ij} M_{ij}$$

$$d \det A \cdot H = \sum_{i,j} H_{ij} M_{ij} = \sum_{i,j} H_{ij} \tilde{A}_{ji} = \text{tr} H \cdot \tilde{A}.$$

ce qui montre que

$$\partial \det A_{ij}(A) = M_{ij}, \quad \text{mineur d'indice } (i, j).$$

◆ **DIF.16** Trouver les extrema locaux de

$$f: \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + \cos(x^2 + y^2).$$

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:16]

Le seul point critique est $(0, 0)$, et on peut écrire au voisinage de $(0, 0)$:

$$f(x, y) = 1 + x^2 + y^2 + o(x^2 + y^2)$$

ce qui montre que la différentielle est nulle et que $s^2 - rt < 0$: c'est un extremum, et c'est même un minimum local.

◆ **DIF.17 (Fonctions C-dérivables)** (**) Montrer qu'une fonction dérivable en un point $z \in \mathbb{C}$ est \mathbb{R}^2 -différentiable et que ses dérivées partielles vérifient les relations de Cauchy.

Montrer que la différentielle de f est alors une similitude du plan. En déduire que l'image par f holomorphe d'un « quadrillage » est un « treillis » à angle droit.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:17]

◆ **DIF.18** Étudier la continuité de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-xy}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = -y. \end{cases}$$

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:23]

Continue en $(0, 0)$ mais discontinue en $(x, -x)$.

◆ **DIF.19** (**) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x, y) = y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$. Prolonger la fonction à \mathbb{R}^2 par continuité. Étudier alors les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f en $(0, 0)$. La fonction f est-elle différentiable ?

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:24]

On a, au voisinage de $y = 0$, $f(x, y) = o(y)$ pour tout x donc f est continue en posant $f(x, 0) = 0$. Alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur \mathbb{R}^2 . De même,

si $x \neq 0$. En revanche, en $(0, 0)$ on calcule directement $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

On peut enfin calculer calmement

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin \frac{x}{y} - x \cos \frac{x}{y}$$

se prolonge par continuité en $(0, 0)$ mais pas en $(x, 0)$ car le cos n'a pas de limite

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1.$$

◆ **DIF.20 (Utilisation de coordonnées polaires)** (**) Trouver $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^2 , telle que

$$f(x, y) \left(x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) + x^2 + y^2 = 0.$$

On pourra utiliser des coordonnées polaires.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:25]

On reconnaît dans la parenthèse le produit scalaire de (x, y) avec le gradient de f , ce qui en polaire donne $r \frac{\partial f}{\partial r}$. L'équation en polaire est donc, en posant $\tilde{f}(r, \theta) = f(r \cos \theta, y \sin \theta)$:

$$\tilde{f}(r, \theta) \left(r \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) \right) + r^2 = 0.$$

La variable θ n'intervient pas dans cette équation différentielle. On cherche donc une solution de la forme

$$\tilde{f}(r, \theta) = g_\theta(r).$$

L'équation sur g est alors

$$x g g' + x^2 = 0$$

donc $g g' + x = 0$ donc $(g^2)' = -2x$ donc $g_\theta(x) = \sqrt{\kappa_\theta - x^2}$.

Ainsi les solutions sont de la forme

$$f(r, \theta) = \sqrt{\kappa_\theta - r^2}$$

où $\theta \mapsto \kappa_\theta$ est une fonction quelconque de classe \mathcal{C}^1 au moins et strictement positive.

◆ DIF.21

(★★)

Différentiabilité de $(x, y) \mapsto f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$. Dérivées partielles à l'origine ?

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:27]

Cf. récolte 2002 : **DIF.45** page 713.

Posons $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nt^2}}{n^2}$. Cette série de fonctions converge uniformément sur \mathbb{R} . Elle est donc continue.

On peut vérifier ensuite que $\|g'_n\|_{\infty} = \sqrt{2}/e^2 n^{3/2}$ donc la série des dérivées converge uniformément sur \mathbb{R} , g est donc dérivable terme à terme et de classe \mathcal{C}^1 . De plus $g'(0) = 0$.

On a enfin $f(x, y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ qui est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = 0$$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = 0.$$

Enfin, on calcule, en posant $h(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et $f(x, y) = \tilde{f}(h)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = g'(h) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n}. \end{aligned}$$

Cette dernière série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ donc est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Comme $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq |g'(x)|$ et que g' est continue et $g'(0) = 0$, on en

déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$.

De même $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Conclusion :

f est différentiable.

◆ DIF.22

(★★)

On pose $f(x, y) = \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}$. Étudier la continuité et la différentiabilité de f sur \mathbb{R} . La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^2 ? (On calculera les dérivées secondes en $(0, 0)$.)

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:28]

(Voir aussi l'exercice **DIF.35**.)

On pose $f(0, 0) = 0$.

On vérifie que f est continue en 0, que les dérivées partielles existent

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

que f est différentiable à l'origine $df(0, 0) = 0$, mais que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -\frac{1}{6} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{1}{6}.$$

f est donc \mathcal{C}^1 mais pas \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .

◆ DIF.23 (Régression linéaire)

(★★)

On se donne n couples (x_i, y_i) de \mathbb{R}^2 . On cherche la droite D d'équation $y = ax + b$ minimisant les incertitudes quadratiques sur y , c'est-à-dire telle que

$$\mu(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

soit minimale.

On posera $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, $\bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ et $\bar{x}\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

On suppose que tous les couples ne sont pas sur la même droite verticale.

1) Montrer que $\bar{x}^2 \neq \bar{x}^2$.

2) Trouver la droite D optimale (droite de **régression linéaire**).

3) Résoudre le problème de minimisation des incertitudes quadratiques sur x (on notera D' la droite d'équation $x = a'y + b'$ et on supposera que les couples ne sont pas sur la même droite horizontale).

4) Montrer que la quantité

$$r \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{x^2 - \bar{x}^2} \sqrt{y^2 - \bar{y}^2}},$$

appelée **coefficient de corrélation**, vérifie $r^2 = aa'$ et $-1 < r < 1$.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:32]

1) On a $n\bar{x}^2 = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2 \leq n\bar{x}^2$ avec égalité si et seulement si le

vecteur X est proportionnel au vecteur 1, c'est-à-dire si tous les x_i sont égaux, ce qui est exclu.

2) On minimise μ en annulant les dérivées partielles, et on trouve

$$a(x^2 - \bar{x}^2) = \bar{x}y - \bar{x}\bar{y}$$

et

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

soit

$$a = \frac{\bar{x}y - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

3) De la même façon, on trouve, en échangeant les rôles de x et y :

$$a' = \frac{\bar{x}y - \bar{x}\bar{y}}{\bar{y}^2 - \bar{y}^2} \text{ et } b' = \bar{x} - a'\bar{y}.$$

On a donc $r = \frac{\bar{x}y - \bar{x}\bar{y}}{\sigma(x)\sigma(y)}$. En posant $x' = x - \bar{x}$ et $y' = y - \bar{y}$, on a donc

$$r = \frac{\bar{x}'y'}{\sqrt{x'^2 y'^2}}$$

qui est bien dans $[-1; 1]$ en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec égalité à 1 ou -1 si et seulement si il y a proportionnalité entre le vecteur x' et le vecteur y' , c'est-à-dire si et seulement si les couples (x_i, y_i) sont liés de manière affine.

◆ DIF.24

(★★)

Soit E un \mathbb{R} -e.v. normé. On note $\Phi = \|\cdot\|$ la norme sur E.

1) Montrer que Φ n'est pas différentiable en 0.

2) On suppose que E = ℓ^1 , ensemble des suites réelles $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ absolument convergentes, muni de $\Phi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Montrer que Φ n'est différentiable en aucun point.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:33]

1) Si Φ était différentiable, elle admettrait des dérivées directionnelles ; or si on regarde en 0 la dérivée directionnelle par rapport à un vecteur quelconque non nul, on a un problème car $t \mapsto |t|$ n'est pas dérivable.

2) Soit $a \in E$, et supposons que Φ est différentiable en a . On a alors la formule de Taylor

$$\Phi(a + h) - \phi(a) = d\Phi(a).h + \|h\| \varepsilon(h)$$

où ε est une fonction tendant vers 0 en 0.

– On suppose la suite a stationnaire en 0. On définit $(h^p)_{p \in \mathbb{N}}$ où

$$h_n^p = \frac{1}{2^n} \text{ si } n \geq p, 0 \text{ sinon. On vérifie que}$$

$$\Phi(a \pm h^p) - \Phi(a) = \|h^p\|$$

En ajoutant ces deux formules et en divisant par $\|h^p\|$, on obtient $\varepsilon(h^p) - \varepsilon(-h^p) = 2$ ce qui est une contradiction puisque

$$h^p \xrightarrow{p \rightarrow 0} 0.$$

– Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire en 0, on pose $h_n^p = a_n$ si $n < p$. On vérifie que

$$\Phi(a - h^p) - \Phi(a) = \|h^p\|$$

et

$$\Phi(a - 2h^p) - \Phi(a) = 0$$

donc $\varepsilon(-h^p) + \varepsilon(-2h^p) = 1$, ce qui est à nouveau absurde.

◆ **DIF.25 (Extremum en dimension infinie)** (★★★)
 On note E l'ensemble des suites réelles de limite nulle, muni de la norme du sup $\|\cdot\|_\infty$. Étudier les extrema de la fonction

$$\Phi : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(x_n)}{2^n}.$$

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:34]

On vérifie que la différentielle de Φ est bien

$$d\Phi_x(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n \sin(x_n)}{2^n}$$

qui est nulle quand tous les x_n sont de la forme $k\pi$. Φ est donc maximale si tous les x_n sont de la forme $2k_n\pi$ (et le maximum est donc bien atteint, par exemple en la suite nulle) et minimale si tous les x_n sont de la forme $(2k_n + 1)\pi$, ce qui n'est pas compatible avec la limite nulle de x , donc le minimum n'est certainement pas atteint.

◆ **DIF.26 (Contre-exemple à Schwarz)** (*)
 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction π -périodique de classe \mathcal{C}^2 . On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$g(x, y) = g(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^2 f(\theta).$$

- Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(0, y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, 0)$ en fonction de f .
- En déduire les valeurs de $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0)$.
- En déduire un exemple pour lequel ces dérivées croisées sont distinctes.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/cd:37]

On trouve $\frac{\partial g}{\partial x}(0, y) = -y g'(\frac{\pi}{2})$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, 0) = x g'(0)$.

◆ **DIF.27**
 On pose $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$.

- Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine admet un minimum relatif strict en 0.
- Montrer que f n'admet pas de minimum local en $(0, 0)$.

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/div:26b]

simplement le signe de f dans \mathbb{R}^2 permet de bien visualiser les choses.

- $f(x, mx) = x^2(m - x)(m - 3x)$ qui est bien positif sur un voisinage de 0 (au moins sur $]-m/3; m/3[$). D'ailleurs, un joli dessin montrant
- Sur la parabole $y = 2x^2$, f est toujours négative.

◆ **DIF.28 ($\partial f / \partial y = 0$ mais f dépend de y)**
 On pose $L = \mathbb{R}^+ \times \{0\}$ et on définit f sur $\mathbb{R}^2 \setminus L$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que :

- f est de classe \mathcal{C}^1 (et même \mathcal{C}^2 !);
- $\partial f / \partial y$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus L$.
- f n'est pas indépendant de y .

◇ [Divers/calculdiffexo.tex/div:27b]

2)

3)

◆ **DIF.29 (Noyau de la chaleur)** (★★) X PC – 2005
 Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , telle que f , f' et f'' tendent vers 0 en $\pm\infty$.

- Montrer que f est bornée sur \mathbb{R} .
- On définit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \sqrt{t}) e^{-y^2/2} dy.$$

Montrer que u est définie sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 par rapport à t et de classe \mathcal{C}^2 par rapport à x .

- Montrer que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

◇ [Rec00/calculdiff-r0.tex/div:180]

◆ **DIF.30** (★★★) X PC – 2005
 1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = 6x^2 - 3xy + y^2 + 5.$$

Donner une expression de ∇f . L'application $X \mapsto \nabla f(X)$ est-elle injective ? Surjective ?

2) Soit $p \in \{1, 2, 3\}$ (pour respecter le programme!) et soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe et de classe \mathcal{C}^1 , telle que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{\|x\|} \right| = +\infty.$$

Montrer que l'application $\nabla f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ est bijective.

◇ [Rec00/calculdiff-r0.tex/div:143]

1) Bijective.

2) Montrons la surjectivité. L'hypothèse de convexité montre que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

(Pour $p = 1$ on en a besoin, pour $p = 2$ ou 3 , si la limite était $-\infty$, ça irait aussi — on n'oublie pas que le complémentaire d'une boule est convexe par arc donc cette limite est bien définie pour $p \geq 1$.)

□ Soit $y \in \mathbb{R}^p$. On définit la fonction

$$\phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \\ \begin{cases} x \mapsto f(x) - \langle y, x \rangle \end{cases}$$

et on vérifie aisément (Cauchy-Schwarz) que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \phi(x) = +\infty.$$

ϕ étant continue, elle admet donc (classique) un minimum absolu en un point x_0 , et en ce point, on a $\nabla \phi = 0$ donc $\nabla f = y$. □

Montrons l'injectivité.

► Supposons que $\nabla f(a) = \nabla f(b)$ avec $a \neq b$. Alors, sur le segment $[a; b]$, la restriction ψ de f est strictement convexe et a la même dérivée en a et b — son expression étant donnée par

$$\psi(a) = \frac{\langle \nabla f(a), b - a \rangle}{\|b - a\|}.$$

La dérivée étant croissante, elle est donc constante sur $[a; b]$ donc ψ est affine : **contradiction**. ◀

◆ **DIF.31** (★★) Centrale PC – 1998
 On pose $f(x, y) = \max(|x|, |y|)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$.

- Étudier la continuité de f ;
- Déterminer le plus grand ouvert de \mathbb{R}^2 sur lequel f est de classe \mathcal{C}^1 .

◇ [Rec00/calculdiff-r0.tex/cd:21]

On note $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus$ (les diagonales). Sur Ω , f est de classe \mathcal{C}^∞ .

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^{*+}$, et considérons le point (x_0, x_0) . On calcule

$$\frac{f(x, x_0) - f(x_0, x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ 1 & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

donc f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x . Ni par rapport à y , et pareil par symétrie sur les autres branches.

En $(0, 0)$, $f(0, 0) = 0$ et $f(x, 0) = |x|$ donc f n'admet toujours pas de dérivée partielle par rapport à x en ce point.

En conclusion, Ω est le plus grand ouvert sur lequel f est de classe \mathcal{C}^1 .

◆ **DIF.32** (★★) Centrale MP – 2000
 On considère un vrai triangle ABC et la fonction f définie sur la plan par

$$f(M) = d(M, AB) \cdot d(M, AC) \cdot d(M, BC).$$

Montrer que f admet un maximum à l'intérieur du triangle ABC et caractériser géométriquement le point M_0 où f est maximale.

INDICATION : On aura tout intérêt à travailler avec des coordonnées barycentriques.

◇ [Rec00/calculdiff-r0.tex/supp-r0:1]

L'existence d'un maximum pour f dans le triangle résulte du théorème de Weierstrass sur les applications continues sur un compact. Si un point M a pour coordonnées cartésiennes (x, y) et pour coordonnées barycentriques u, v, w (vérifiant donc $u + v + w = 1$), alors u, v et w sont des fonctions affines de x et y (voir cours). La droite AB a pour équation $w = 0$, donc il existe un réel α tel que $d(A, AB) = \alpha |w|$. On fait de même pour les deux autres droites, ce qui montre que f est de la forme

$$f(M) = \varepsilon |uvw|.$$

Lorsque M se balade dans le triangle, ses coordonnées barycentriques décrivent tous les triplets de réels positifs et de somme 1. Le maximum du produit est donc obtenu pour $u = v = w = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire au niveau du centre de gravité du triangle.

◆ **DIF.33** (★★) X MP – 1988
 Pour tout $z = x + iy$ du plan complexe, on note $z^n = P_n(x, y) + iQ_n(x, y)$, définissant ainsi deux familles de polynômes à deux indéterminées $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 Calculer la borne supérieure et la borne inférieure de $P_n + Q_n$ sur la boule unité fermée.

◆ **DIF.41** X MP – 2002
 On pose $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \|x\|$.
 1) ϕ est-elle différentiable ? Est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?
 2) Soient A, B, C trois points du plan non alignés. On définit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \begin{cases} M \mapsto MA + MB + MC. \end{cases}$$

a) Que peut-on dire du minimum de f ?
 b) Cas particulier : ABC est un triangle équilatéral.

◇ [Rec02/calculdiff-r2.tex/diff-r2:10]

◆ **DIF.42** Mines MP – 2002
 (Sans préparation.) Soit (ABCD) un tétraèdre dont les côtés AB, AC et AD sont deux à deux perpendiculaires, et tel que AB = 3 et CD = $\sqrt{2}$. Déterminer

$$\inf(BD^6 + BC^6 - AC^6 - AD^6).$$

◇ [Rec02/calculdiff-r2.tex/diff-r2:11]

◆ **DIF.43** Centrale MP – 2002
 On pose $F(x, y) = \int_0^\pi \ln(x + y \cos t) dt$ pour tous x et y réels.
 1) Donner le domaine de définition de F . Étudier sa différentiabilité.
 2) Donner une expression simplifiée de F sur $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < y < x\}$.

◇ [Rec02/calculdiff-r2.tex/diff-r2:7]

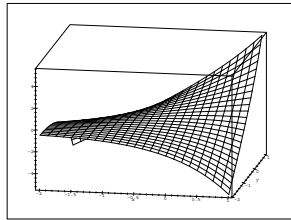
◆ **DIF.44** Centrale PC – 2002
 On note $f : [-1; 1] \times [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x e^y + y e^x$.
 Étude des extrema de f .
Cours : énoncé du théorème de Schwarz.

◇ [Rec02/calculdiff-r2.tex/diff-r2:3]

On sait que f atteint son maximum et son minimum sur $F = [-1; 2]^2$. Si f admet un extremum sur $\Omega = \overset{\circ}{F}$, alors c'est un point critique.

La recherche des points critiques se fait en résolvant $x e^{1/x} + e^x = 0$ avec $y = 1/x$ et bien sûr $x < 0$. Or $x \mapsto x e^{1/x} + e^x$ est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$, ce qui montre qu'elle s'annule au plus en un point, or elle s'annule en $x = -1$; avec $y = -1$. Il n'y a donc pas de point critique dans Ω .

Puisque f atteint tout de même son maximum et son minimum, il faut simplement étudier f sur la frontière $F \setminus \Omega$.



◆ **DIF.45** (★★★) CCP PC – 2002
 Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

◇ [Rec02/calculdiff-r2.tex/diff-r2:1]

Posons $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nt^2}}{n^2}$. Cette série de fonctions converge uniformément sur \mathbb{R} . Elle est donc continue.

On peut vérifier ensuite que $\|g'_n\|_{\infty} = \sqrt{2}/e^2 n^{3/2}$ donc la série des dérivées converge uniformément sur \mathbb{R} , g est donc dérivable terme à terme et de classe \mathcal{C}^1 . De plus $g'(0) = 0$.

On a enfin $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ qui est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = 0$$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = 0.$$

Enfin, on calcule, en posant $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $f(x, y) = \tilde{f}(h)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = g'(h) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n}. \end{aligned}$$

Cette dernière série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ donc est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ De même $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Conclusion : f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

Comme $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq |g'(x)|$ et que g' est continue et $g'(0) = 0$, on en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$.

On peut ne montrer le résultat que sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ au prix de moins d'efforts, puisque l'on majore g'_n par un terme en e^{-nt^2}/n et que l'on a convergence sur tout compact ne contenant pas 0.

◆ **DIF.46** CCP MP – 2002
 Notons $D = \mathcal{B}(0; 1)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 dans \mathbb{C} . On choisit une application u telle que

$$u \in \mathcal{C}^0(\overline{D}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad u(0) = 0.$$

Notons ∂D la frontière de D ; on suppose que pour tout $z \in \partial D$, on a $u(z) = 0$.
 Montrer qu'il existe $z_0 \in D$ tel que

$$\Delta U(z_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z_0) = 0.$$

◇ [Rec02/calculdiff-r2.tex/diff-r2:2]

◆ **DIF.47** CCP PC – 2002
 Notons f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue.
 2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f et montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 .
 3) f est-elle de classe \mathcal{C}^2 ?
 4) Conclusion ?

◇ [Rec02/calculdiff-r2.tex/diff-r2:4]

f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ d'après les théorèmes généraux.

On commence par montrer que $|x^2 - y^2| \leq x^2 + y^2$ ce qui montre que f est continue en 0 donc sur \mathbb{R}^2 .

On calcule les dérivées partielles de f , et on trouve que, pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \frac{x^4 - y^4 - 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Les inégalités

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq 6|y| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 6|x|$$

combinées au fait que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

montrent que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur \mathbb{R}^2 . Donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

Maintenant,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = x,$$

donc les dérivées partielles suivantes existent et valent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1.$$

On en conclut que f n'est pas de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de $(0, 0)$.

◆ **DIF.48** S¹ Cyr MP – 2002
 Trouver les extrema de la fonction $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$.

◇ [Rec02/calculdiff-r2.tex/diff-r2:5]

◆ **DIF.49** (★★) S¹ Cyr MP – 2002
 On pose $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x + a \sin y, y + b \sin x)$.
 Montrer que f est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 si et seulement si $|ab| < 1$.

◇ [Rec02/calculdiff-r2.tex/diff-r2:6]

Le jacobien vaut $\begin{vmatrix} 1 & a \cos y \\ -b \cos x & 1 \end{vmatrix} = 1 + ab \cos x \cos y$ et ne s'annule en aucun point de \mathbb{R}^2 si et seulement si $|ab| < 1$.

On montre ensuite directement que, sous ces conditions, f est bijective.

Injectivité : Si $f(x, y) = f(x', y')$, en utilisant le fait que \sin est 1-lipschitzienne, on trouve en combinant les deux équations :

$$|x - x'| \leq ab |y - y'|$$

ce qui n'est possible que si $x = x'$ et par suite $y = y'$.

Surjectivité : Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On cherche (x, y) tel que $f(x, y) = (\alpha, \beta)$. On prend la deuxième équation, que l'on injecte dans la première, et alors x doit vérifier

$$g_\beta(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} x + a \sin(\beta - b \sin x) = 0.$$

Or il est aisé de montrer que $g - \text{Id}$ est ab -lipschitzienne, donc $g' > 1 - ab$ donc g est surjective (étude élémentaire). Ainsi, il existe un x tel que $g_\beta(x) = 0$, et on

trouve l'y correspondant.

◆ **DIF.50** TPE MP – 2002

Étudier les extrema de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

◇ [Rec02/calculdiff-r2.tex/diff-r2:8]

◆ **DIF.51** ENS MP – 2003

On note

$$E = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) ; \forall(x, t) \in \mathbb{R}^2, f(t, x + 2\pi) = f(t, x)\}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $P \in \mathbb{C}[X]$ pour que, pour tout $f_0 \in \mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, il existe $f \in E$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & f(0, x) = f_0(x), \\ \frac{\partial f}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot f. \end{cases}$$

◇ [Rec03/calculdiff-r3.tex/r3:271]

◆ **DIF.52** ENS MP – 2003

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ un polynôme non nul. Montrer que $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) ; P(M) = 0\}$ est un fermé d'intérieur vide. Est-ce encore vrai sur \mathbb{R} ?

◇ [Rec03/calculdiff-r3.tex/r3:312]

fermé. Il faut ensuite montrer que $dP_M \neq 0 \dots$

L'application $P : M \mapsto P(M)$ est continue et $E = P^{-1}(\{0\})$ est donc un **À FINIR !!!**

◆ **DIF.53** ENS MP – 2003

On considère $g_a(x) = e^a \left(1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2}\right)$ et on note \mathcal{P}_a son graphe.

- 1) Que vaut $\bigcup_{a \in \mathbb{R}} \mathcal{P}_a$?
- 2) Montrer que, si $a \neq b$, alors $\mathcal{P}_a \cap \mathcal{P}_b = \emptyset$.
- 3) Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{*+}$, on note $a(x, y)$ l'unique réel a tel que \mathcal{P}_a passe par (x, y) . L'application $(x, y) \mapsto a(x, y)$ est-elle continue ?

◇ [Rec03/calculdiff-r3.tex/r3:311]

◆ **DIF.54** Centrale MP – 2003

On pose $f(x, y) = (y-x)^3 - 6xy$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; -1 \leq x \leq y \leq 1\}$. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur Δ et les calculer.

◇ [Rec03/calculdiff-r3.tex/r3:451]

il faut donc calculer sur les bords, ce qui est facile, on trouve un maximum en haut à gauche, un minimum sur les autres angles. Par compacité, le max et le min absolus existent, ce sont donc eux.

(Cf. **DIF.37 page 712**)
Les seuls points critiques sont $(0, 0)$ et $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Aucun n'est à l'intérieur de Δ ,

◆ **DIF.55** Centrale MP – 2003

On se place dans \mathbb{R}^n muni de sa base canonique (e_1, \dots, e_n) et de son produit scalaire canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle **fonction primitive** une fonction $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et un entier $j \in [1 ; n]$ tels que

$$\forall i \neq j \quad \langle g(x) | e_i \rangle = x_i \quad \text{et} \quad \langle g(x) | e_j \rangle = \phi(x).$$

- 1) Écrire la matrice jacobienne d'une fonction primitive f . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un \mathcal{C}^1 difféomorphisme.
- 2) Application à $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x + xy + 2y, x + xy). \end{cases}$
 - a) Trouver un ouvert Ω , voisinage de $(0, 0)$, sur lequel f soit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.
 - b) Trouver des \mathcal{C}^1 -difféomorphismes g_1 et g_2 primitifs tels que $f = g_2 \circ g_1 \circ s$ avec $s(x, y) = (y, x)$ et

$$g_1(x, y) = (u(x, y), y) \quad g_2(x, y) = (x, v(x, y)).$$

- 3) Dans le cas général, si $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) \neq 0$, trouver des \mathcal{C}^1 -difféomorphismes primitifs g_1 et g_2 tels que $f = g_2 \circ g_1$.

- 4) Que dire si $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = 0$?

◇ [Rec03/calculdiff-r3.tex/r3:147]

suffisante.

- 1) $f(x) = (x_1, \dots, x_{j-1}, \phi(x), x_{j+1}, \dots, x_n)$. Le jacobien vaut $J_f(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)$. La condition nécessaire est bien sûr $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) \neq 0$ et miracle en plus, l'injectivité est alors montrée localement, donc c'est une condition

- 2) Le jacobien vaut $J = f(x, y) = -2 - x - 2y$, donc $\Omega = \mathcal{B}(2; \frac{2}{3})$. On injecte pour trouver $u(y, x) = x + xy + 2y$, on inverse et on obtient v . **À FINIR !!!**

◆ **DIF.56** Centrale MP – 2003

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . On pose

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq y \quad \phi(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

- 1) Montrer que $\phi(x, y) = \int_0^1 f'((1-t)x + ty) dt$. En déduire que ϕ est prolongeable en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 .
- 2) Calculer $J_{pq} = \int_0^1 (1-t)^p t^q dt$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
En déduire l'expression de $\frac{\partial^{p+q} \phi}{\partial x^p \partial x^q}(a, a)$.
- 3) On prend $f = \sin$. Représenter les courbes de niveau $\phi(x, y) = 0$. Trouver les extremums de ϕ .

◇ [Rec03/calculdiff-r3.tex/r3:242]

et en remarquant que $(1-t)a + ta = a = C^{\mathbb{C}}$, que

- 1) $\int_0^1 f'(x + t(y-x)) dt = \frac{1}{y-x} [f(y) - f(x)]$.

- 2) Une récurrence montre que $J_{pq} = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$ sauf erreur bête.

On en déduit, puisque

$$\frac{\partial^{p+q} \phi}{\partial x^p \partial x^q}(x, y) = \int_0^1 (1-t)^p t^q f^{(p+q+1)}((1-t)x + ty) dt,$$

$$\frac{\partial^{p+q} \phi}{\partial x^p \partial x^q}(a, a) = \int_0^1 (1-t)^p t^q f^{(p+q+1)}(a) dt = f^{(p+q+1)}(a) J_{pq}.$$

- 3) Les courbes de niveau sont des droites de pente 1.

◆ **DIF.57** TPE PC – 2003

Quels sont les extrema de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 15y - 12x$?

◇ [Rec03/calculdiff-r3.tex/r3:406]

◆ **DIF.58** CCP MP – 2003

On pose $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

- 1) Étudier les extrema locaux de f par la méthode générale.
- 2) Retrouver ce résultat par des considérations géométriques.

◇ [Rec03/calculdiff-r3.tex/r3:88]

Le graphe de f est celui de $r \mapsto \sqrt{4 - r^2}$ qui subit une rotation.

◆ **DIF.59** CCP MP – 2003

On définit, sur \mathbb{R}^2 , $f(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x - y}$ si $x \neq y$.

- 1) Montrer que f est prolongeable en une fonction \tilde{f} continue sur \mathbb{R}^2 .
- 2) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

◇ [Rec03/calculdiff-r3.tex/r3:98]

On a l'astuce classique :

$$f(x, y) = - \int_0^1 \sin(tx + (1-t)y) dt,$$

ce qui montre que les dérivées partielles de tous ordres existent et sont continues, donc \tilde{f} est \mathcal{C}^∞ .

◆ **DIF.60** CCP MP – 2003

On définit f sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.

- 1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- 2) Étudier l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 sur \mathbb{R}^2 .

◇ [Rec03/calculdiff-r3.tex/r3:213]

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

- 1) En coordonnées polaires, $f(x, y) = r \cos \theta \sin \theta$ ce qui suffit à montrer

2)

◆ **DIF.61** (★★) CCP PC – 2003

On définit $f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{y^n + x^n}$.

- 1) Définir et représenter le domaine \mathcal{D}_f de définition de f .
- 2) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D}_f et s'aidant de la série $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^n}$.
- 3) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

◇ [Rec03/calculdiff-r3.tex/r3:171]

2) On a $f(x, y) = g(x/y)$.

1) Il faut $|y| > 1$ ou $y \neq 0$ et $|x| < 1$.

◆ **DIF.62** (★★) CCP PC – 2003

On définit

$$f: (\mathbb{R}^+)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- 1) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
- 2) Trouver les extrema locaux éventuels.
- 3) Montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{*+} \quad (x > A \text{ ou } y > A) \Rightarrow f(x, y) \leq \frac{1}{A}.$$

En déduire que f admet un unique extremum local.

◇ [Rec03/calculdiff-r3.tex/r3:226]

et on trouve que $f(1, 1)$ est un maximum valant $1/8$.

1) Continue (passer en polaire par exemple).

3) Inégalité évidente. On a un maximum local et de plus

2) Le seul point critique est en $(1, 1)$. On effectue un DL de $f(1+X, 1+Y)$

à FINIR !!!

◆ **DIF.63** (♣) ENS Lyon MP – 2004

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . On note $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$, et on suppose, pour tout $x \notin \mathcal{D}$, $f(x, y) = y^2 - x^2$. On cherche à montrer qu'il existe un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en lequel **grad** $f(x, y) = \mathbf{0}$.

- 1) Montrer le résultat dans le cas où, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) > 0$.
- 2) On suppose que **grad** f ne s'annule pas. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$\phi_\varepsilon: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$p \longmapsto p + \varepsilon \frac{\mathbf{grad} f(p)}{\|\mathbf{grad} f(p)\|^2}.$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{R}^2$, $f(\phi_\varepsilon(p)) \geq f(p) + \frac{\varepsilon}{2}$. En déduire le résultat voulu pour le cas général.

◇ [Rec04/calculdiff-r4.tex/r4:195]

◆ **DIF.64 (Th. du maximum harmonique)** X MP – 2004

Soient $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta > 0$. On note $\mathcal{B}(A; \delta)$ la boule ouverte de centre A et de rayon δ , $\overline{\mathcal{B}}(A; \delta)$ la boule fermée, et $S(A; \delta) = \mathcal{B}(A; \delta) \setminus \overline{\mathcal{B}}(A; \delta)$. Enfin, on note \mathcal{H} l'ensemble des fonctions $f: \overline{\mathcal{B}}(A; \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ continues, de classe \mathcal{C}^2 et de laplacien nul sur $\mathcal{B}(A; \delta)$.

- 1) Vérifier que $(x, y) \mapsto x^3 - 3xy^2$ appartient à \mathcal{H} .
- 2) Soit g une fonction continue sur $\overline{\mathcal{B}}(A; \delta)$, de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathcal{B}(A; \delta)$ et telle que $\Delta g > 0$ sur $\mathcal{B}(A; \delta)$. Montrer que g n'a pas d'extremum local sur $\mathcal{B}(A; \delta)$.
- 3) Soit $f \in \mathcal{H}$. Montrer que f admet un maximum sur $\overline{\mathcal{B}}(A; \delta)$. Montrer qu'il est atteint sur $S(A; \delta)$.

◇ [Rec04/calculdiff-r4.tex/r4:274]

1) T.

2)

3) $\overline{\mathcal{B}}(A; \delta)$ étant compact, f atteint un maximum. Celui-ci ne peut pas être sur $\mathcal{B}(A; \delta)$, mais pourquoi? Approcher f par $f_\varepsilon = f + \varepsilon g$ où $g: (x, y) \mapsto x^3 - 3xy^2$ est de laplacien > 0 ?

à FINIR !!!

◆ **DIF.65** (★★★) X MP – 2004

Montrer que les points M , intérieurs au triangle (ABC) , tels que $MA \cdot MB \cdot MC$ soit maximal, sont situés sur un côté.

◇ [Rec04/calculdiff-r4.tex/r4:278]

Il suffit de vérifier qu'aucun point intérieur n'est singulier — ce qui est faux, il peut être minimal, par exemple dans un triangle équilatéral pour le centre de gravité.

◆ **DIF.66** (★★) X MP – 2004

Soit (ABC) un triangle du plan \mathcal{P} . On définit

$$f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$M \longmapsto d(M; AB) \cdot d(M; AC) \cdot d(M; BC).$$

- 1) Montrer que f admet deux extrema et les atteint.
- 2) Situer le lieu des points où ces maxima sont atteints.

◇ [Rec04/calculdiff-r4.tex/r4:199]

◆ **DIF.67** (♣) X MP – 2004

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^2 . On note $f = (f_1, \dots, f_n)$. On suppose que la jacobienne de f est une matrice orthogonale et on définit les coefficients α_{ijk} par

$$\forall (i, j, k) \in [1; n]^3 \quad \alpha_{ijk} = \sum_{p=1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}.$$

- 1) Soient $i, j, k \in [1; n]$. Montrer que $\alpha_{ijk} = 0$.
- 2) Montrer que f est une isométrie affine, c'est-à-dire qu'il existe $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$ tels que : $f(x) = Ax + B \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

◇ [Rec04/calculdiff-r4.tex/r4:187]

2) On a donc, en revenant aux vecteurs :

1) Notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = df_x \cdot e_i$$

et que df_x est une isométrie (un endomorphisme orthogonal), alors les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont orthogonaux entre eux :

$$\forall i, j \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \delta_{ij}.$$

Comme f est de classe \mathcal{C}^2 , on peut dériver, ce qui donne

$$\forall i, j, k \quad \alpha_{ijk} + \alpha_{jik} = 0,$$

D'après Schwarz, on a $\alpha_{ijk} = \alpha_{ikj}$. En jouant avec ces relations et leurs équivalents (en échangeant les rôles de i, j, k), on trouve que les α_{ijk} sont tous nuls.

$$\forall i \in [1; n] \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x) = 0.$$

Or la famille $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^n , donc les vecteurs

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)$$

sont tous nuls ! Ainsi, les vecteurs $V_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont constants, donc l'application

$$x \longmapsto f(x) - \sum_{i=1}^n x_i V_i$$

est constante (toutes ses dérivées sont nulles), et $x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i V_i$ est bien une isométrie (la famille (V_1, \dots, V_n) est une base orthonormée puisque $V_i = df_x \cdot e_i$) donc f est une isométrie affine.

◆ **DIF.68 (Prolongement analytique)** (★★★) Centrale MP – 2004

On pose $\theta(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \pi x}$.

- 1) Donner l'ensemble de définition de θ et montrer que θ est de classe \mathcal{C}^∞ sur cet ensemble.
- 2) a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([n_0; +\infty[; \mathbb{C})$. Montrer que

$$\sum_{n=n_0}^N f(n) = \int_{n_0}^N f(t) dt + \int_{n_0}^N (t - [t]) f'(t) dt.$$

- b) En déduire un équivalent de θ au voisinage de 0.
- 3) Peut-on définir $\tilde{\theta}(x + iy) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \pi(x+iy)}$ pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$? Si oui, en posant $f(x, y) = \tilde{\theta}(x + iy)$, la fonction f ainsi définie est-elle de classe \mathcal{C}^∞ ?

◇ [Rec04/calculdiff-r4.tex/r4:268]

◆ **DIF.69** (**) Centrale PC – 2004

Étudier l'existence et les valeurs des éventuels extrema des fonctions suivantes :

- 1) $f(x, y) = \sqrt{1 - 4x^2 - y^2}$;
- 2) $g(x, y) = xy^2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$;
- 3) $h(x, y) = \int_0^1 (\ln t - xt - y)^2 dt$.

◇ [Rec04/calculdiff-r4.tex/r4:59] problème de projection orthogonale !
Les deux premières se font avec du calcul différentiel, mais la dernière est un

◆ **DIF.70** (***) Centrale PC – 2004
(Avec Maple)

On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. On définit sur D la fonction f donnée par

$$f : (x, y) \mapsto x + y - (x^2 + xy + y^2).$$

- 1) Montrer que $f \geq 0$. Déterminer les points d'annulation de f .
- 2) Montrer que f admet un maximum sur D et déterminer les points où celui-ci est atteint.
- 3) Avec Maple ou Mathematica, en utilisant `plot3d` et `piecewise`, tracer $z = f(x, y)$ sur $[0; 1]^2$ en prolongeant f en posant $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \in [0; 1]^2 \setminus D$.

◇ [Rec04/calculdiff-r4.tex/r4:71]

1) $x^2 + 2x + y^2 = (x + y)^2 \leq x + y$ et $-xy \leq 0$, donc $x^2 + xy + y^2 \leq x + y$ et donc $f(x, y) \geq 0$. Il y a égalité si $xy = 0$ et $x + y = 1$, c'est-à-dire pour $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

2) D est compact et f est continue, donc atteint son maximum. On calcule les dérivées partielles, $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2x - y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - x - 2y$, qui

s'annulent toutes deux pour $x = y = 1/3$. Le maximum vaut alors $1/3$.

Mais il faut vérifier ce qui arrive sur ∂D . Si $x = 0$, $f(0, y) = y - y^2$ et donc le maximum est $1/4$. De même si $y = 0$. Enfin, si $x = 1 - y$, on a $f(1 - y, y) = y(1 - y)$ dont le maximum est encore $1/4$.

Ainsi, il n'y a pas d'autre maximum qu'au point $(1/3, 1/3)$.

3) Arg.

◆ **DIF.71** (**) TPE PC – 2004

Étudier les extrema relatifs puis globaux de

$$f : [0; \pi]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \sin(x) \sin(y) \sin(x + y).$$

◇ [Rec04/calculdiff-r4.tex/r4:144]

◆ **DIF.72** (**) CCP PC – 2004

On considère un triangle de côtés x , y et z , dont le périmètre est fixé et égal à $2p$. Quelles sont les valeurs de x , y et z pour que le triangle soit d'aire maximale ? Quelle est alors cette l'aire ?

INDICATION : On pourra utiliser, après l'avoir démontrée, la formule de Héron :

$$\mathcal{S} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

◇ [Rec04/calculdiff-r4.tex/r4:48]

◆ **DIF.73** (*) CCP PC – 2004

On pose $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, t) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

- 1) f est-elle continue ?
- 2) Est-elle de classe \mathcal{C}^1 ? De classe \mathcal{C}^2 ?

◇ [Rec04/calculdiff-r4.tex/r4:86]

◆ **DIF.74** (*) CCP MP – 2004

On pose $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} \sin \theta$.

- 1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- 2) Montrer que f admet des dérivées partielles.

◇ [Rec04/calculdiff-r4.tex/r4:149]

◆ **DIF.75** (**) CCP PC – 2005

On définit $u_n(x, y) = \frac{x^n}{1 + y^{2n}}$.

- 1) Trouver le domaine de convergence \mathcal{D} de la série $\sum u_n$. Tracer le graphe de \mathcal{D} . Montrer que c'est un ouvert.
- 2) On pose $f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y)$. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur \mathcal{D} .

◇ [Rec05/calculdiff-r5.tex/r5:119]

2) Application du théorème de dérivation des séries de fonctions d'une variable, il suffit de montrer la convergence normale (version locale).

1) Il faut et il suffit que $|x| < y^2$. C'est évidemment un ouvert.

◆ **DIF.76** (**) ENSTIM PC – 2005

On pose $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Peut-on prolonger f par continuité ? Si oui, ce prolongement est-il de classe \mathcal{C}^1 ?

◇ [Rec05/calculdiff-r5.tex/r5:145]

◆ **DIF.77 (Fonctions homogènes)** (***) IIE PC – 2005

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On dit que f est **homogène** si et seulement si il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\lambda > 0$ et tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \phi(\lambda) f(x, y, z).$$

- 1) Montrer que si f est homogène, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\phi : \lambda \mapsto \lambda^\alpha$.
- 2) Montrer que f est homogène si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = \alpha f.$$

◇ [Rec05/calculdiff-r5.tex/r5:147]

Équation de Laplace

◆ **DIF.78**

On considère une plaque métallique carrée, de côté 1, dont la température est maintenue, grâce à un thermostat, à une température $T_0 = 0$, tandis que le troisième côté est maintenu à la température $T_1 = 1$. À l'état d'équilibre, la température vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

En supposant que la température $T(x, y)$ peut s'écrire sous la forme $T(x, y) = X(x)Y(y)$, calculer la température en tout point de la plaque.

◇ [Divers/laplacienexo.tex/cd:19]

Les conditions limites peuvent s'écrire par exemple

$$T(0, y) = T(1, y) = T(x, 0) = 0 \text{ et } T(x, 1) = T_1.$$

L'équation de Laplace s'écrit alors

$$X''Y + XY'' = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}.$$

Chaque membre est donc constant ; notons $-\lambda\lambda$ cette valeur. Alors

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad Y'' - \lambda^2 Y = 0,$$

ce qui donne $X = a_1 \cos \lambda x + b_1 \sin \lambda x$ et $Y = a_2 \cosh \lambda y + b_2 \sinh \lambda y$.

Une solution possible est alors

$$T(x, y) = (a_1 \cos \lambda x + b_1 \sin \lambda x) \cdot (a_2 \cosh \lambda y + b_2 \sinh \lambda y),$$

et les conditions aux bords de température nulle nous enseignent que $a_1 = a_2 = 0$ et $\lambda = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi

$$T(x, y) = B \sin k\pi x \operatorname{sh} k\pi y$$

est une solution qui convient tout à fait.

Une solution plus générale est donc

$$T(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\pi x) \operatorname{sh}(k\pi y)$$

ce qui donne

$$T_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \operatorname{sh} k\pi) \sin k\pi x.$$

En d'autres termes, $B_k \operatorname{sh} k\pi$ est la k -ième coefficient de Fourier sinusoïdal, et

$$B_k \operatorname{sh} k\pi = 2 \int_0^1 T_1 \sin k\pi x \, dx = \frac{2T_1(1 - \cos k\pi)}{k\pi},$$

et donc

$$B_k = \frac{2T_1(1 - \cos k\pi)}{k\pi \operatorname{sh} k\pi}.$$

Au total,

$$T(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2T_1(1 - \cos k\pi)}{k\pi \operatorname{sh} k\pi} \sin(k\pi x) \operatorname{sh}(k\pi y).$$

◆ **DIF.79 (Les polynômes sont harmoniques sur \mathbb{C})**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) \longmapsto P(x + iy). \end{cases}$ Montrer que $\Delta f = 0$.

◇ [Divers/laplacienexo.tex/cd:26]

C'est vrai pour toute fonction puissance de z ...◆ **DIF.80 (Laplacien en polaire)**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On pose $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

- Calculer $\frac{\partial g}{\partial \rho}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.
- Exprimer Δ en fonction des dérivées de g .

◇ [Divers/laplacienexo.tex/cd:29]

On trouve *in fine* $\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.◆ **DIF.81**

Trouver toutes les applications $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que l'application

$$\phi : \begin{cases} [a; b]^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \int_x^y f(t) dt \end{cases}$$

soit harmonique, c'est-à-dire vérifie

$$\Delta \phi(x, y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2.$$

◇ [Divers/laplacienexo.tex/cd:22]

 $f(x) = ax + b$.

On calcule que $\Delta \phi = f'(x) - f'(y)$, il faut donc que f' soit constante, donc

◆ **DIF.82 (Laplacien en dimension n)**

(**)

Soit f une application de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^{n+} dans \mathbb{R} . On définit $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}).$$

Calculer le laplacien de F en fonction de f .

◇ [Divers/laplacienexo.tex/cd:35]

Après calculs (cf. Schwartz par exemple), on a

$$\Delta F = \frac{n-1}{r} f'(r) + f''(r).$$

◆ **DIF.83 (Les isométries préservent le laplacien)**

Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une isométrie. On note ϕ sa partie linéaire.

- Montrer que la matrice jacobienne de Φ est constante, et vaut $\text{mat}_{\text{can}} \phi$.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Montrer que

$$(\Delta f) \circ \Phi = \Delta(f \circ \Phi).$$

◇ [Divers/laplacienexo.tex/cd:36]

◆ **DIF.84**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. On définit $\phi : \begin{cases} (\mathbb{R}^*)^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \longmapsto f\left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right). \end{cases}$ Déterminer les fonctions f telles que $\Delta \phi = 0$.

Centrale MP – 2001

◇ [Rec01/laplacien-r1.tex/dif-r:6]

Formes différentielles

◆ **DIF.85**

Intégrer les fonctions $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2+x}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2+y}{x} \end{cases}$
- $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+y)^2} \end{cases}$
- $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1-y}{(x+y+1)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2+x}{(x+y+1)^2} \end{cases}$

◇ [Divers/formesdiffexo.tex/cd:30]

La première définit une forme qui n'est pas fermée... et donc pas exacte.

Pour la seconde, on trouve $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$.Pour la troisième $f(x, y) = \frac{y-1}{(x+y+1)^2}$.◆ **DIF.86**

Déterminer les fonctions $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{1}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{x}{y^2} \end{cases}$
- $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\ln x + y - 1}{x^2 y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\ln x}{xy^2} \end{cases}$

Résoudre l'équation différentielle $(x \ln x) y' + (\ln x + y - 1) y = 0$.

◇ [Divers/formesdiffexo.tex/cd:31]

1) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x/y$.2) $f(x, y) = -\frac{\ln x}{xy} + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{\ln x}{\lambda x - 1}$.◆ **DIF.87**

On considère la forme différentielle suivante

TPE MP – 2002

$$\omega = y(1+x)e^{-y} dx + x(1-y)e^{-y} dy.$$

- ω est-elle fermée ?
- Trouver une fonction $\phi(x, y)$ qui ne dépende que de x telle que $\omega_1(x, y) = \phi(x, y) \omega(x, y)$ soit fermée.
- ω_1 est-elle exacte ? Trouver $f(x, y)$ telle que $\omega = df$.

◇ [Rec02/formesdiff-r2.tex/dif-r:2:9]

1) On pose $L_1 = y(1+x)e^{-y}$ et $L_2 = x(1-y)e^{-y}$. On s'aperçoit que

$$\frac{\partial L_1}{\partial y} = (1-y)(1+x)e^{-y}$$

tandis que $\frac{\partial L_2}{\partial x} = (1-y)e^{-y}$.La forme ω n'est donc pas fermée.2) On pose donc $\omega_1 = \phi \omega$, et

$$\frac{\partial \phi \omega}{\partial x} = (1-y)e^{-y}(x\phi' + \phi).$$

Il reste à résoudre $x\phi' + \phi = 1+x$ ce qui mène

$$\phi = \frac{A}{x} + \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2}.$$

3) ω_1 est fermée sur \mathbb{R}^2 qui est étoilé, elle est donc exacte. Il ne reste qu'à l'intégrer.

Divers

◆ **DIV.1** (♣) Donner différentes méthodes pour montrer que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ admet un prolongement de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

- ◇ [Divers/diversexo.tex/div-1] 2) C'est la T.F. d'une fonction à support borné.
 1) Utiliser un DSE. 3) En intégrant $\int_0^1 \cos(xt) dt$.

◆ **DIV.2 (Bibliophile)** Un bibliophile possède une édition du théâtre de Racine en trois volumes. Chaque volume a 5cm d'épaisseur pour le papier, plus 5mm pour chaque battant de couverture. Un vermisseau grignote l'intérieur des bouquins. Il va de la première page du premier tome à la dernière page du dernier tome, en ligne droite. Quelle distance a-t-il parcouru ?

◇ [Divers/diversexo.tex/div-182] Une fois 5 cm plus quatre fois 5mm, soit 7cm.

◆ **DIV.3 (Partition de \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^3 en cercles)** (♣) ENS Ulm MP – 2001
 1) Donner une CNS simple pour que, dans le plan, deux cercles se rencontrent.
 2) Existe-t-il une partition de \mathbb{R}^2 en cercles non triviaux ?
 3) Montrer qu'il existe une partition de \mathbb{R}^3 en cercles.
 INDICATION : On construira une famille $(\mathcal{C}_i)_i$ de cercles disjoints telle que toute sphère non réduite à un point, de centre O, rencontre $\bigcup_i \mathcal{C}_i$ en exactement deux points.

- ◇ [Rec01/divers-r1.tex/div-r-1] point. Celui-ci ne saurait appartenir à aucun cercle...
 1) La distance entre leurs centres est inférieure à la somme de leurs rayons.
 2) Non. Par l'absurde : supposons une telle partition réalisée. Choisissons un cercle, notons R son rayon. Il contient d'autres cercles (au moins deux !), mais ceux-ci ne peuvent tous avoir leur rayon plus grand que R/2, sinon ils se rencontrent d'après la question précédente. On choisit donc un deuxième cercle, de rayon $R_2 < R/2$. Ceci amorce une récurrence qui donne une suite de cercles « inclus » les uns dans les autres et dont le rayon tend vers 0. L'intersection de ces disques fermés correspondants, intersection de fermés décroissant dont le rayon tend vers 0, est donc un point. Celui-ci ne saurait appartenir à aucun cercle...
 Remarque : le résultat est inchangé si l'on prend des « cercles topologiques », c'est-à-dire des courbes fermées simples (démonstration délicate : théorème de Jordan + lemme de Zorn...cf. Halmos).
 3) (Cf. Halmos, §12.G p.311.) On prend la famille de cercles dans le plan $\mathcal{O}xy$, de rayons 1, centrés en $4k + 1$ pour $k \in \mathbb{Z}$. (Faire un dessin). Alors toute sphère de centre 0 rencontre cette famille en deux points exactement (plusieurs cas possible, cf le dessin que vous avez fait). Enfin, il suffit de montrer qu'une sphère privée de deux points est partitionnable en cercles. Il suffit de la découper en tranches bien orientées.

◆ **DIV.4 (Analyse numérique)** (★★★) ENS ULC MP – 2001
 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$.
 1) Montrer qu'il existe une unique fonction u telle que $u'' = f$ et $u(0) = u(1) = 0$.
 2) On pose $A_n = n^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $F_n = \begin{pmatrix} f(\frac{1}{n}) \\ \vdots \\ f(\frac{n-1}{n}) \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe un unique vecteur colonne $U_n \in \mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $A_n U_n = F_n$.
 3) On définit la fonction v_n par $v_n(0) = v_n(1) = 0$, $v_n(k/n) = U_n^k$ et v_n affine entre ces points. Montrer que $v_n \xrightarrow{C.V.U.} u$.

- ◇ [Rec01/divers-r1.tex/div-r-3] obtient la relation de récurrence $D_n = 2D_{n-1} + D_{n-2}$ ce qui permet de montrer par récurrence que $D_n > 0$ avec $D_2 = 3$ et $D_3 = 4$.
 1) On connaît u à une fonction affine près, qui est ensuite déterminée par deux points.
 2) Il suffit de montrer que A est inversible. Or si on note $D_n = \det A$, on
 3) On utilise l'uniforme continuité de f . La matrice A_n fait apparaître des différences secondes, qui se rapprochent de la dérivée seconde.

◆ **DIV.5** (♣) ENSAI MP – 2001
 Montrer, au moyen d'un argument simple, que \sin n'est pas une fonction polynôme.

◇ [Rec01/divers-r1.tex/div-r-2] Si $\deg P = n$, alors la dérivée $(n + 1)$ -ième de P est nulle.

◆ **DIV.6 (Pavages)** X MP – 2001
 Soit C un convexe polygonal fermé de \mathbb{R}^2 . Pour tout groupe d'isométries positives A, on dit que (C, A) est un **pavage** si et seulement si :
 1) $\forall a, b \in A, (a \neq b) \Rightarrow a(\overset{\circ}{C}) \cap b(\overset{\circ}{C}) = \emptyset$;
 2) $\bigcup_{a \in A} a(C) = \mathbb{R}^2$.
 Trouver une condition sur C pour qu'il existe une isométrie positive A telle que (A, C) soit un pavage.

◇ [Rec01/divers-r1.tex/div-r-4]

◆ **DIV.7** ENS Ulm MP – 2001
 Sur un cube unité, étudier le nombre de chemins de longueur donnée n d'un sommet à un autre (formule, équivalent quand $[n \rightarrow \infty]$).

◇ [Rec01/divers-r1.tex/div-r-5]

◆ **DIV.8** Mines MP – 2002
 On définit par récurrence une suite de triangles dans le plan complexe :
 – T_0 est le triangle dont les sommets ont pour affixe 0, $1 + ix$ et $1 - ix$.
 – Le triangle T_n étant connu, le triangle T_{n+1} a pour sommets les pieds des hauteurs issues des sommets du triangle T_n .
 Un des sommets de T_n appartient donc à l'axe des réels. On note z_n son affixe. On pose enfin $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.
 Étudier le domaine de définition de f , puis sa continuité et sa dérivabilité.

◇ [Rec02/divers-r2.tex/div-r-2-1]

◆ **DIV.9** ENS LC MP – 2003
 Pour tout $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$P_\sigma = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n$$
.
 On note $E = \{\sigma \in \mathbb{R}^n ; P_\sigma \text{ est scindé}\}$. Pour tout $p \in [1; n]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\Sigma_p(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}$$
.
 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 (a) $\forall \tau \in \mathfrak{S}_n, f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$;
 (b) il existe une fonction continue $g : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = g(\Sigma_1(x), \dots, \Sigma_n(x))$$
.

- ◇ [Rec03/divers-r3.tex/r3-196] $x = (x_1, \dots, x_n)$ ne dépend que des fonctions symétriques de x (les $\Sigma_i(x)$).
 Il faut donc montrer qu'une fonction continue complètement symétrique de La démonstration de (b) \Rightarrow (a) est immédiate.

◆ **DIV.10 ($f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$)** (♣) ENS Lyon MP – 2004
 Soit $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$ continue et bijective. On admet qu'il existe $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}, f(e^{2i\pi t}) = e^{2i\pi F(t)}$.
 1) Montrer que F est injective.
 2) Montrer que F est bijective.

◇ [Rec04/divers-r4.tex/r4-272]

◆ **DIV.11 (Fonctions homotopes)** (♣) ENS Ulm MP – 2004
 Soit X un compact de \mathbb{C}^n . On note $C(X)$ le \mathbb{C} -e.v. des applications continues de X dans \mathbb{C} . Soient $f, g \in C(X)$, ne s'amalant pas. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
 (a) il existe $h \in C(X)$ tel que $e^h = f/g$;
 (b) il existe $F : X \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ continue telle que, pour tout $x \in X : \begin{cases} F(x, 0) = f(x) \\ F(x, 1) = g(x) \end{cases}$.

◇ [Rec04/divers-r4.tex/r4-273]

(a) \Rightarrow (b) ; il suffit de poser $F(x, t) = e^{(1-t)h(x)}g(x)$.

(b) \Rightarrow (a) On pose $G(x, t) = \frac{F(x, t)}{g(x)}$. Ainsi, pour tout $x \in X$, on a $G(x, 1) = 1$.

L'idée est maintenant que le compact $K = G(X \times [0; 1])$ se contracte en $\{1\}$: on peut donc relever l'angle sans difficulté technique (faire un dessin) et noter

$$G(x, t) = \rho(x, t) e^{i\theta(x, t)} = e^{\tilde{h}(x, t)}.$$

(Pour cela, à $x \in X$ fixé, on considère le chemin continu $t \mapsto G(x, t)$ qui relie $G(x, 0)$ à 1, et on prend le logarithme « local » de $G(x, t)$, ce qui montre la continuité locale de \tilde{h} .)

On pose alors $h(x) = \tilde{h}(x, 0)$ puisque $G(x, 0) = \frac{f(x)}{g(x)} = e^{\tilde{h}(x, 0)}$.

◆ **DIV.12**

X PC – 2005

Soit $[a; b]$ un segment. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit une subdivision

$$\sigma = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b).$$

1) On note S_σ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^2([a; b], \mathbb{R})$ telles que les restrictions de f aux segments $[x_i; x_{i+1}]$ soient des polynômes de degré au plus 3, pour $i = 0, \dots, n-1$.

Quelle est la structure de S_σ ? Quelle est sa dimension ?

2) On note $T_\sigma = \{f \in S_\sigma; \forall i \in [0; n] \quad f(x_i) = 0\}$.

Structure et dimension de T_σ ?

3) On définit l'application $\phi: \begin{cases} T_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ f \longmapsto (f'(a), f'(b)). \end{cases}$

Montrer que ϕ est bijective.

INDICATION : (Donnée avec l'énoncé)

Calculer $\int_a^b (f''(t))^2 dt$.

◇ [Rec05/divers-r5.tex/r5-44]

Troisième partie

Géométrie

Arcs et courbes

Courbes planes — équations implicites

◆ **ARC.1**
 Notons \mathcal{E} l'ellipse du plan euclidien \mathbb{R}^2 définie par l'équation $x^2 + 5y^2 = 5$. Déterminer l'ensemble des centres des cercles passant par 0 et tangents à \mathcal{E} .

◇ [Divers/courbesexo.tex/crb:3]
 On paramètre \mathcal{E} sous la forme

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x = \sqrt{5} \cos \theta, \\ y = \sin \theta. \end{cases}$$

Soit M le point de paramètre θ . Il existe un seul cercle tangent à \mathcal{E} en M et passant par 0, son centre Ω est à l'intersection de la médiatrice de [OM], dont l'équation est (en prenant la distance à O est la distance à M :

$$x^2 = y^2 = (x - \sqrt{5} \cos \theta)^2 + (y - \sin \theta)^2,$$

et de la normale en M à \mathcal{E} , d'équation

$$-\sqrt{5} \sin \theta (x - \sqrt{5} \cos \theta) + \cos \theta (y - \sin \theta) = 0,$$

ce qui donne en résolvant le système

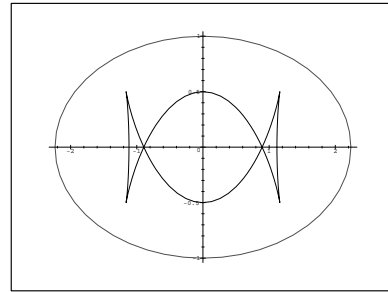
$$x_\Omega = \frac{9 \cos \theta - 4 \cos^3 \theta}{2\sqrt{5}} = \frac{6 \cos \theta - \cos 3\theta}{2\sqrt{5}},$$

$$y_\Omega = \frac{-3 \sin \theta + 4 \sin^3 \theta}{2} = -\frac{\sin 3\theta}{2}.$$

Les fonctions x et y étant π -antipériodiques, x étant paire et y impaire, on se contente de l'étude sur $[0, \pi/2]$:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x'	0	+	0	-
x	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\nearrow \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$	$\searrow \frac{2}{\sqrt{5}}$	0
y	0	$\searrow -\frac{1}{2}$	$\nearrow 0$	$\nearrow \frac{1}{2}$
y'	-	0	+	0

L'ellipse et la courbe ainsi obtenue sont représentés ci-dessous :



◆ **ARC.2** (**) Trouver l'ensemble des courbes orthogonales en tous points à la famille de paraboles $\{P_\alpha ; \alpha \in \mathbb{R}\}$ où P_α est la courbe $P_\alpha : y^2 = \alpha x \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
 On pensera aux équations différentielles autonomes...

◇ [Divers/courbesexo.tex/crb:4]

On trouve des ellipses.

◆ **ARC.3** On se donne une plaque carrée de côté a . Déterminer l'ensemble des points qui sont plus près du bord que du centre de la plaque.

◇ [Divers/courbesexo.tex/crb:11]

Quatre morceaux de paraboles.

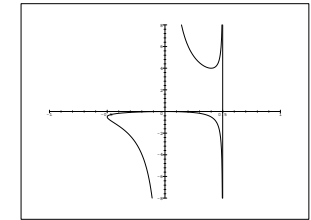
◆ **ARC.4** (*) Montrer que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ est tangente à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si et seulement si $a^2u^2 + b^2v^2 = w^2$.

◇ [Divers/courbesexo.tex/crb:29]

Arcs paramétrés plans — cartésiens

◆ **ARC.5**
 Tracer l'arc paramétré $\Gamma : \begin{cases} x = \frac{t}{t^2 + 1}, \\ y = \frac{t^2}{t - 1}. \end{cases}$ Déterminer les coordonnées du point double. Montrer que les tangentes en ce point sont orthogonales.

◇ [Divers/arcplancartexo.tex/crb:8]



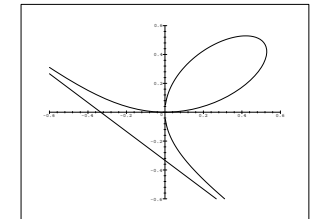
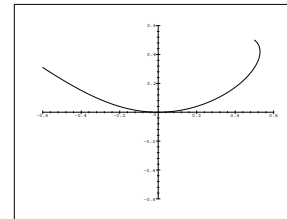
Asymptote verticale $x = 1/2$.

◆ **ARC.6**
 Tracer la courbe $\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^3} \\ y = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$.

◇ [Divers/arcplancartexo.tex/crb:7]

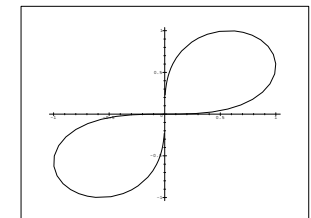
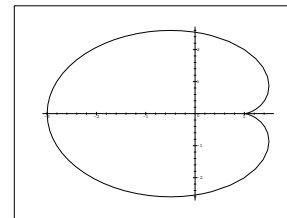
On note que $x(1/t) = y(t)$, on fait donc l'étude dans $[-1; 1]$, ce qui donne la figure suivante :

puis on effectue la symétrie par rapport à la première bissectrice, ce qui donne enfin (avec une asymptote gentiment dessiné par Maple à qui l'on n'avait rien demandé) :



◆ **ARC.7 (Cardioïde, folium de Descartes)**
 Tracer les arcs dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos 2t, \\ y(t) = 2 \sin t + \sin 2t, \end{cases}$ et $\begin{cases} x(t) = \frac{4t}{3+t^4}, \\ y(t) = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{t^3}{3+t^4}. \end{cases}$

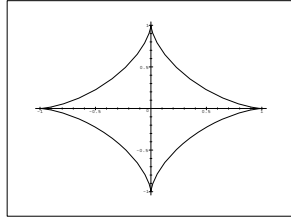
◇ [Divers/arcplancartexo.tex/crb:14]



La dernière est un folium de Descartes. On notera que $x(\sqrt{3}/t) = y(t)$ ce qui donne une symétrie supplémentaire par rapport à la première bissectrice.

◆ **ARC.8 (Astroïde)**
 Tracer l'arc de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = \sin^3 t, \\ y(t) = \cos^3 t. \end{cases}$

◇ [Divers/arcplancartexo.tex/crb:15]

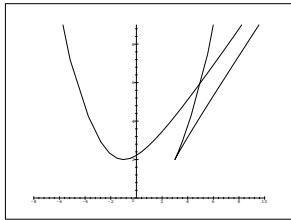


◆ ARC.9

Étudier et tracer la courbe d'équation paramétrée

$$x = t^2 + \frac{2}{t}, \quad y = t^2 + \frac{1}{t^2}.$$

◇ [Divers/arcplancartexo.tex/crb:18]

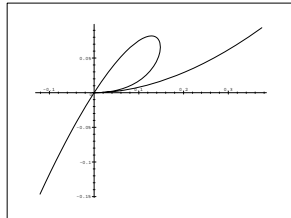
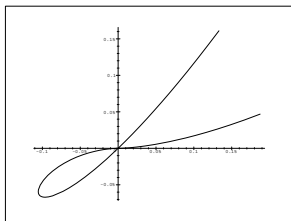


Une asymptote d'équation $y = x$, une parabole asymptote $y = x^2/4$, un point double de coordonnées $(5, 6)$. En $t = 1$, point de rebroussement de 1^{re} espece (les deux premières dérivées libres sont d'ordre 2 et 3) avec tangente de pente $4/3$.

◆ ARC.10 (Points de rebroussement)

Étudier les courbes $\mathcal{C} : \begin{cases} x = t^3 + t^4, \\ y = t^5 + t^6 \end{cases}$ et $\mathcal{C}' : \begin{cases} x = t^3 + t^2, \\ y = t^5 + t^4. \end{cases}$

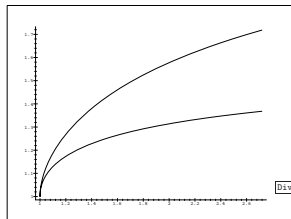
◇ [Divers/arcplancartexo.tex/crb:20]



◆ ARC.11

Étudier la courbe paramétrée par $\begin{cases} x = \exp(t^4) \\ y = e^t - t \end{cases}$.

◇ [Divers/arcplancartexo.tex/crb:21]



Divers/arcplancartexo.tex

◆ ARC.12

Tracer la courbe d'équation $\begin{cases} x(t) = t \ln(t) \\ y(t) = \ln(t)/t. \end{cases}$

◇ [Divers/arcplancartexo.tex/div:59]

◆ ARC.13

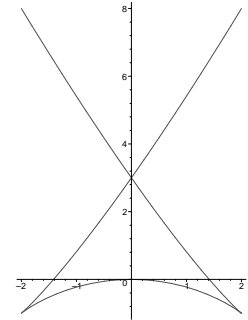
Tracer la courbe d'équation $\begin{cases} x(t) = t^3 + 1 - \frac{1}{t+3} \\ y(t) = 3t^2 + 2 - \frac{2}{t+3}. \end{cases}$

◇ [Divers/arcplancartexo.tex/div:60]

◆ ARC.14

Tracer $\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = t^4 - 2t^2. \end{cases}$

◇ [Divers/arcplancartexo.tex/div:190]



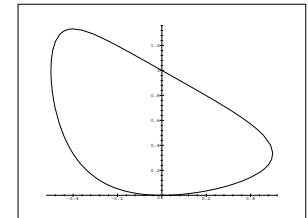
◆ ARC.15

On considère l'arc

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2 + 1}, \\ y(t) = \frac{1}{t^2 + t + 1}. \end{cases}$$

Construire l'arc et calculer les points doubles. Soient trois points M_1, M_2 et M_3 de paramètres respectifs t_1, t_2 et t_3 . Donner une conditions nécessaire et suffisante sur ces paramètres pour que les trois points de l'arc soient alignés.

◇ [Rec00/arcplancart-r0.tex/crb:1]



Exo bizarre. Voici la courbe :

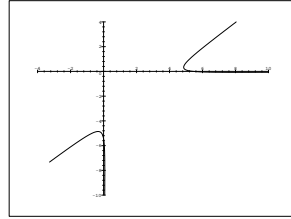
◆ ARC.16

Étudier la courbe paramétrée $\Gamma : \begin{cases} x(\lambda) = (\lambda + 1)e^{1/\lambda}, \\ y(\lambda) = (\lambda - 1)e^{-1/\lambda}. \end{cases}$

Centrale PC - 2001

Rec01/arcplancart-r1.tex

◇ [Rec01/arcplancart-r1.tex/geo-r:7]



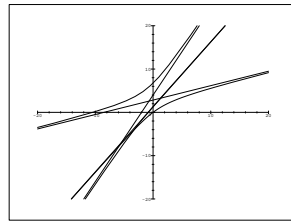
Il est difficile de représenter cette courbe en MAPLE car les échelles ne sont pas bonnes. En voici néanmoins un graphique approximatif.

◆ **ARC.17**

CCP PC – 2001

Étudier l'arc paramétré
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} + \frac{3}{t-1}, \\ y(t) = \frac{2}{t} + \frac{3}{t+1} + \frac{1}{t-1}. \end{cases}$$

◇ [Rec01/arcplancart-r1.tex/crb:33]



◆ **ARC.18**

CCP PC – 2001

Construire l'arc paramétré
$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1-t^2}, \\ y(t) = \frac{t^2}{1-t^2}. \end{cases}$$

◇ [Rec01/arcplancart-r1.tex/crb:35]

C'est une hyperbole d'équation $(y + \frac{1}{2})^2 - x^2 = \frac{1}{4}$.

◆ **ARC.19**

Centrale PC – 2002

Notons \mathcal{P} la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Soit \mathcal{C} un cercle de centre Ω .

1) Montrer que
$$\begin{cases} x = a + c \left(1 + \frac{1}{u}\right) \\ y = b - ic \left(1 - \frac{1}{u}\right) \end{cases}$$
 est une équation paramétrique de \mathcal{C} .

2) À l'aide de $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}$, déterminer l'ensemble des centres des triangles équilatéraux inscrits dans \mathcal{P} .

◇ [Rec02/arcplancart-r2.tex/geo-r:12]

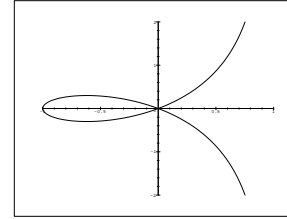
◆ **ARC.20**

TPE PC – 2002

Soit $a \geq 0$. Tracer la courbe
$$\begin{cases} x(t) = \frac{a(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \\ y(t) = \frac{at(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \end{cases}$$
.

◇ [Rec02/arcplancart-r2.tex/geo-r:10]

En prenant $a = 1$ (puisque ce n'est qu'un rapport d'échelle) :



◆ **ARC.21**

(*)

IEE – 2002

- Exprimer, pour tout $\theta \in]-\pi; \pi[$, $\cos \theta$ et $\sin \theta$ en fonction de $\tan \theta/2$.
- P désigne un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ que l'on suppose orthonormé et direct. On note f l'application de \mathbb{R}^2 dans P définie par :

$$f(x) = O + \frac{2x}{1+x^2} \mathbf{i} + \frac{1-x^2}{1+x^2} \mathbf{j}.$$

Montrer que f est injective. Expliciter $f(\mathbb{R})$.

- E désigne un espace affine euclidien orienté de dimension 3 rapporté à un repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ que l'on suppose orthonormé et direct. On note F l'application de \mathbb{R}^2 dans E définie par :

$$F(x, y) = O + \frac{2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + (1 - x^2 - y^2) \mathbf{k}}{1 + x^2 + y^2}.$$

Montrer que F est injective. Expliciter $F(\mathbb{R}^2)$.

- (sic) On note $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ définie par

$$G(x, y) = O + \frac{2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + (1 - x^2 - y^2) \mathbf{k}}{1 + x^2 + y^2}.$$

On note F^{-1} l'application réciproque de la bijection F . Ainsi, F^{-1} est définie sur $F(\mathbb{R}^2)$ et est à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer, lorsqu'elle est définie, la quantité $(F^{-1} \circ G)(x, y)$.

◇ [Rec02/arcplancart-r2.tex/geo-r:21]

- On pose $t = \tan \theta/2$; alors les relations classiques sont

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}.$$

- $f(\mathbb{R})$ est le demi-cercle unité ouvert de droite.

-

◆ **ARC.22**

CCP MP – 2003

Étudier, au point $t = 1$, la courbe

$$x(t) = \int_0^t \frac{u^2 - 1}{1 + u^2} du, \quad y(t) = \int_0^t \frac{u^2 - 1}{1 + u^3} du$$

◇ [Rec03/arcplancart-r3.tex/r3:62]

◆ **ARC.23**

CCP MP – 2003

Étude de la courbe
$$\begin{cases} x(u) = \frac{u}{u+1} \\ y(u) = \frac{-1}{u^2+1} \end{cases} \quad \text{pour } u > 0.$$

◇ [Rec03/arcplancart-r3.tex/r3:128]

◆ **ARC.24**

CCP MP – 2003

Étude et tracé de
$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \frac{\sin t}{2 + \cos t} \end{cases}$$
.

◇ [Rec03/areplancart-r3.tex/r3:157]

◆ **ARC.25** CCP MP – 2003

Étudier la courbe $\begin{cases} x(u) = \frac{u-1}{u}, \\ y(u) = \frac{u^2}{u+1}, \end{cases}$ pour $u \in]0; +\infty[$.

◇ [Rec03/areplancart-r3.tex/r3:202]

◆ **ARC.26** CCP PC – 2003

Étudier la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = e^{t^2} - t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \\ y(t) = e^{2t} - t. \end{cases}$$

◇ [Rec03/areplancart-r3.tex/r3:364]

◆ **ARC.27** Centrale PC – 2004

(**) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ de graphe (\mathcal{C}) . Soit $M(x, f(x))$ un point de (\mathcal{C}) . On note P le point d'intersection de la tangente en M à \mathcal{C} et de l'axe Oy . On suppose que **OP** admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$. Montrer que la courbe admet une asymptote en $+\infty$ (on cherchera à résoudre $f(x) - xf'(x) = g(x)$).

◇ [Rec04/areplancart-r4.tex/r4:81]

◆ **ARC.28 (Étude d'un point singulier)** CCP MP – 2004

(**) Étudier, au point de paramètre $t = 1$, la courbe Γ paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \int_1^t \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} du \\ y(t) = \int_1^t \frac{u^2 - 1}{u^3 + 1} du. \end{cases}$

◇ [Rec04/areplancart-r4.tex/r4:256]

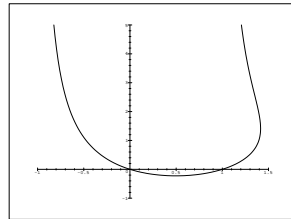
Simple exercice de DL.

Arcs paramétrés plans — équation polaire

◆ **ARC.29**

Tracer la courbe d'équation polaire $\rho = 1 + \tan \theta$.

◇ [Divers/arcplanpolexo.tex/crb:36]



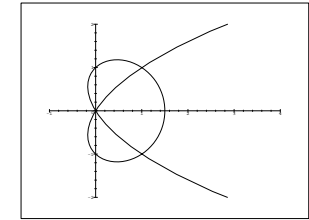
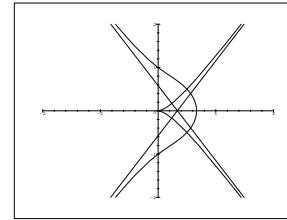
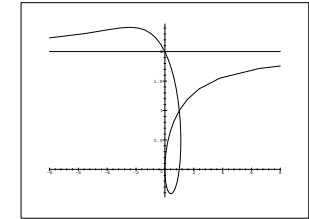
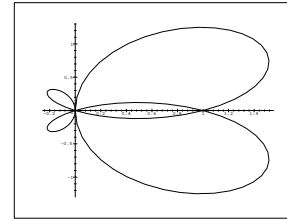
Voici le bout du haut. Il manque le bout du bas...

◆ **ARC.30**

Tracer les arcs dont les équations polaires sont

$$\rho = \cos \theta + \sin 2\theta \quad \rho = \frac{1 + \cos \theta}{1 + 2 \cos \theta} \quad \rho = 1 + \tan \frac{\theta}{2} \quad \rho = \frac{1 + 2 \cos \theta}{1 + \cos \theta}.$$

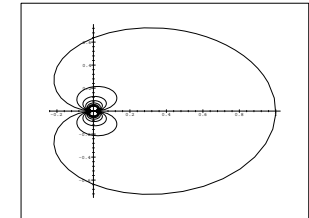
◇ [Divers/arcplanpolexo.tex/crb:13]



◆ **ARC.31**

Tracer la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{\sin \theta}{\theta}$.

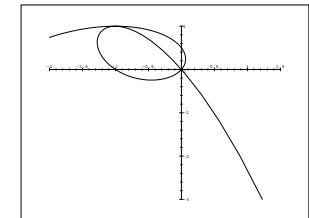
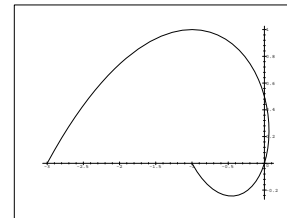
◇ [Divers/arcplanpolexo.tex/crb:17]



◆ **ARC.32**

Courbe $\rho = \frac{1 - 2 \cos t}{1 + \sin t}$.

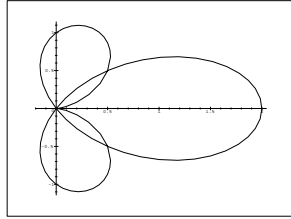
◇ [Divers/arcplanpolexo.tex/crb:19]

pour $t \in [0; \pi]$:et pour $t \in [-\pi; \pi]$ ou $[0; 2\pi]$:

◆ **ARC.33**

Étudier la courbe d'équation polaire $\rho = \cos t - \cos 2t$.

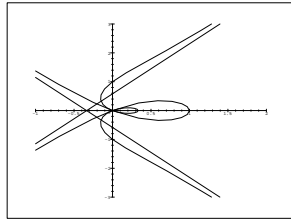
◇ [Divers/arcplanpolexo.tex/crb:22]



◆ ARC.34

Tracer la courbe de représentation polaire $\rho = \frac{\cos 2t}{2 \cos t - 1}$.

◇ [Divers/arcplanpolexo.tex/crb:23]

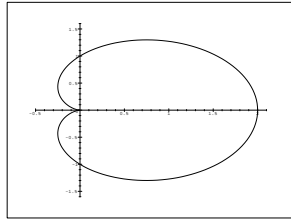


◆ ARC.35 (Cardioïde)

CCP PC – 2001

Étude de la courbe $\rho = 1 + \cos \theta$. Vecteur dérivé ? Tangentes ?

◇ [Rec01/arcplanpol-r1.tex/geo-r:5]



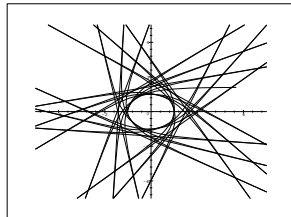
◆ ARC.36

(**)

CCP MP – 2001

Étudier la courbe $\rho = 1/\sin(\theta/\sqrt{2})$.

◇ [Rec01/arcplanpol-r1.tex/geo-r:3]



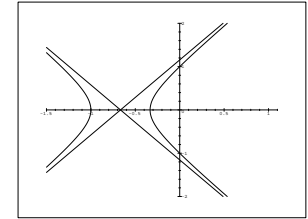
On n'a représenté ici que $\theta \in [0; 22\pi]$, mais il est clair que ça peut continuer longtemps à cause du fait que $1/\sqrt{2}$ et π sont incommensurables.

◆ ARC.37

Mines PC – 2002

La courbe $r(\theta) = \frac{1}{1 - 2 \cos \theta}$ admet-elle une asymptote pour $\theta = \pi/3$?

◇ [Rec02/arcplanpol-r2.tex/geo-r:6]



Cela en a bien l'air.

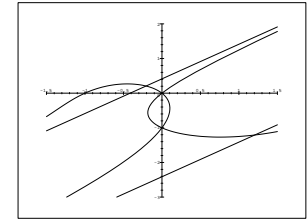
◆ ARC.38

(*)

Centrale MP – 2002

Étudier la courbe $\rho = \frac{1 - 2 \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$.

◇ [Rec02/arcplanpol-r2.tex/geo-r:17]

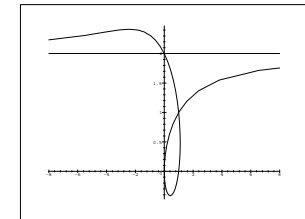


◆ ARC.39

Télécom INT MP – 2002

Tracer $\rho(\theta) = 1 + \tan \frac{\theta}{2}$. Branches infinies ?

◇ [Rec02/arcplanpol-r2.tex/geo-r:22]

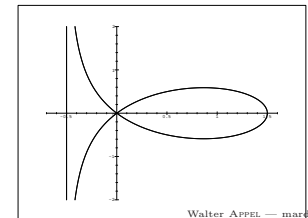


◆ ARC.40

TPE PC – 2002

Tracer l'arc paramétré $\rho = \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}$. Calculer l'aire de la boucle.

◇ [Rec02/arcplanpol-r2.tex/geo-r:20]



◆ **ARC.41** Centrale PC – 2003
Tracer la courbe $\rho(\theta) = \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta}$.

◇ [Rec03/areplanpol-r3.tex/r3:34]

◆ **ARC.42** Mines PC – 2003
Étude de la courbe $\rho = \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$.

◇ [Rec03/areplanpol-r3.tex/r3:396]

◆ **ARC.43** INT MP – 2003
Tracer la courbe paramétrée en coordonnées polaires $\begin{cases} \rho(t) = t^2 \\ \theta(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$.

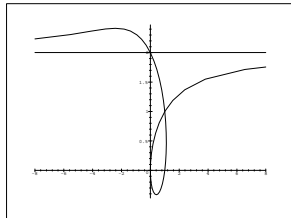
◇ [Rec03/areplanpol-r3.tex/r3:279]

◆ **ARC.44** CCP MP – 2003
Étudier la courbe $\rho = \frac{1 - 2 \cos t}{\sin t}$.

◇ [Rec03/areplanpol-r3.tex/r3:23]

◆ **ARC.45** CCP MP – 2003
Étude de la courbe $\rho = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$.

◇ [Rec03/areplanpol-r3.tex/r3:204]



◆ **ARC.46** Mines PC – 2004 (*)
Étude de $\rho = (a^2 + b^2) \frac{x \cos \theta \sin \theta}{a \cos \theta + b \sin \theta}$.

◇ [Rec04/areplanpol-r4.tex/r4:39]

◆ **ARC.47** ENSEA MP – 2004 (**)
Étudier $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$.

◇ [Rec04/areplanpol-r4.tex/r4:208]

Arcs paramétrés de l'espace

◆ **ARC.48**
On note Γ la courbe d'équation cartésienne dans \mathbb{R}^3

$$\Gamma : \begin{cases} xy = 1, \\ z = \sqrt{2} \ln x. \end{cases}$$

Calculer l'abscisse curviligne en tout point de Γ , en choisissant pour origine le point M d'abscisse 1.

◇ [Divers/arcespaceexo.tex/crb:6]

◆ **ARC.49 (Loxodromie)**
On considère l'arc paramétré

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t / \operatorname{ch} pt \\ y(t) = \sin t / \operatorname{ch} pt \\ z(t) = \operatorname{th} pt. \end{cases}$$

1) Montrer que Γ est entièrement incluse dans une surface \mathcal{S} simple.
2) Montrer que l'angle que fait Γ avec les méridiennes de \mathcal{S} (les courbes de \mathcal{S} de rapport $x/y = C^{\text{te}}$) est une constante.

◇ [Divers/arcespaceexo.tex/crb:41]

1) On vérifie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$: \mathcal{S} est une sphère.

2) On paramètre la sphère par

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x(t) = \cos u / \operatorname{ch} v \\ y(t) = \sin u / \operatorname{ch} v \\ z(t) = \operatorname{th} v. \end{cases}$$

et on note que les méridiens sont caractérisés par $v = C^{\text{te}}$. Le cosinus de l'angle est, après calculs (longs), $\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}$.

◆ **ARC.50** CCP PT – 2001
On considère l'arc Γ paramétré par $\alpha(t) = (\cos 2t, \sqrt{2} \sin 2t, \cos 2t)$ pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

1) Calculer le vecteur tangent, paramétrer normalement Γ , calculer la longueur totale ℓ de l'arc.
2) Trouver le repère de Frenet $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$, calculer la courbure et la torsion.
3) Trouver le plan osculateur en $s = \ell/4$.
4) On pose $p(a, 0, -a)$. Calculer la distance de p à la droite tangente à $s(t)$.

◇ [Rec01/arcespace-r1.tex/geo-r:6]

La torsion est nulle. La courbe est tracée sur une sphère ou dans un plan.

◆ **ARC.51** Mines PC – 2003
Soit \mathcal{C} la courbe paramétrée par

$$x = \frac{t}{1+t^2} \quad y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad z = \frac{1}{1+t^2}$$

1) Montrer que \mathcal{C} est une courbe plane.
2) Identifier la nature de cette courbe.

◇ [Rec03/arcespace-r3.tex/r3:397]

Manifestement, $2z - y = 1$, donc \mathcal{C} appartient au plan $\mathcal{P} : 2z - y = 1$.

On met dans le plan une nouvelle coordonnée normalisée $v = \frac{z}{\sqrt{5}}$, et la courbe a pour équation $x^2 + 5v^2 = 1$: \mathcal{C} est une ellipse.

Propriétés métriques des arcs

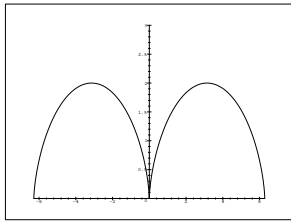
◆ MET.1 (Cycloïde)

On considère l'arc

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = t - \sin t, \\ y(t) = 1 - \cos t. \end{cases}$$

Étudier et tracer Γ . Déterminer le repère de Frenet et la courbure en tout point de Γ . Calculer la longueur d'une « arche » et l'aire délimitée par une arche et l'axe ($\mathcal{O}x$).

Voici deux arches représentées, correspondant à $t \in [-2\pi; 2\pi]$.



1^{re} méthode

$$|c(s)| = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds},$$

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{f}'(t)\| = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

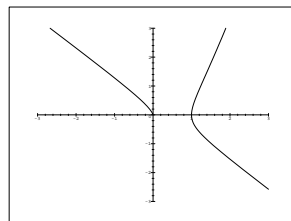
De plus

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{f}'(t)}{\|\mathbf{f}'(t)\|} = \frac{1}{2 \sin(t/2)} \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(t/2)}{\cos(t/2)} \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$$

◆ MET.2

Étudier l'arc $\begin{cases} x(t) = \frac{e^t}{1+t} \\ y(t) = \frac{t e^t}{1+t} \end{cases}$. On précisera ses points d'inflexion.

[Divers/arcmetriqueexo.tex/crb:26]



◆ MET.3

Tracer la courbe $\rho = \frac{1}{\cos^3 \theta/3}$, et calculer la longueur totale de la « boucle ».

d'où

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(t/2) \\ -\sin(t/2) \end{pmatrix}$$

et

$$|c(t)| = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right\| = \frac{1}{4 \sin(t/2)}$$

2^e méthode

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{\text{dét}(\mathbf{f}', \mathbf{f}'')}{\|\mathbf{f}'\|^3} \\ &= \frac{\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t}{(2 \sin(t/2))^3} \\ &= -\frac{1}{4 \sin(t/2)}. \end{aligned}$$

$$c(t) = -\frac{1}{4 \sin(t/2)}$$

Quant à la longueur, elle vaut

$$\mathcal{L} = \int_{\Gamma} ds = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{dt} dt = \int_0^{2\pi} 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8.$$

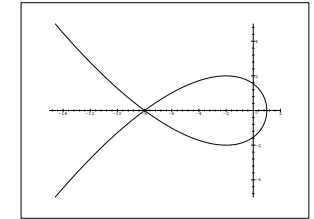
[Divers/arcmetriqueexo.tex/crb:24]

On calcule l'abscisse curviligne $s'^2 = \rho^2 + \rho'^2 = \cos^{-8} \frac{\theta}{3}$. D'où

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\theta} \cos^{-4} \frac{t}{3} dt = \int_0^{\theta/3} \frac{3}{\cos^4 u} du \\ &= 3 \int_0^{\tan \theta/3} (1+t^2) dt = 3 \tan \frac{\theta}{3} + \tan^3 \frac{\theta}{3}. \end{aligned}$$

La boucle a une longueur pour θ variant de $-\pi$ à π donc

$$L = 2s(\pi) = 12\sqrt{3}.$$



◆ MET.4

Déterminer le rayon de courbure de la courbe $\mathcal{E} : 3x^2 + y^2 = 1$ aux points d'intersection de \mathcal{E} et des axes $\mathcal{O}x$ et $\mathcal{O}y$.

INDICATION : On ne cherchera pas à donner un paramétrage normal explicite — il n'existe pas de telle formule — mais on se contentera d'un paramétrage aisé à manipuler et des formules de dérivation composée, conjointement avec des développements limités.

[Divers/arcmetriqueexo.tex/crb:10]

On reconnaît une ellipse. On donne un paramétrage

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t \quad \text{et} \quad y(t) = \sin t.$$

On a alors le vecteur tangent

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} \sin^2 t + \cos^2 t}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

tandis que $ds = \sqrt{\frac{1}{3} \sin^2 t + \cos^2 t} dt$. On sait de plus que la courbure est donnée par

$$c(s) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|,$$

et

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds}.$$

On effectue alors un développement limité à l'ordre 1 pour obtenir

$$\mathbf{T}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} + o(t) \\ 1 + o(t) \end{pmatrix}$$

et donc

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, $ds/dt(0) = 1$ donc

$$c(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad R(0) = \sqrt{3}.$$

De même

$$c\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \quad \text{et} \quad R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

◆ MET.5

Déterminer les coordonnées du centre de courbure en tout point des arcs paramétrés suivants :

$$\Gamma_1 : \rho = e^\theta, \quad \Gamma_2 : \rho = 1 + \cos \theta.$$

Quelle est la longueur de la courbe Γ_2 pour $t \geq 0$?

[Divers/arcmetriqueexo.tex/crb:9]

gueur d'un tour, le tour suivant fait ℓ/e et donc la longueur totale est

On notera que la spirale est invariante par rotation/réduction. Si ℓ est la lon-

$$\ell \sum_{e^n} \frac{1}{e^n} = \frac{\ell}{1-1/e}.$$

◆ MET.6

Représenter la courbe d'équation $\mathcal{E} : x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$. Calculer l'aire de la boucle formée.

[Divers/arcmetriqueexo.tex/crb:5]

Vue la forme de l'équation, on est tenté de passer en polaire. Alors $x^2 = y^2 = \rho^2$ et $x = \rho \cos \theta$, ce qui donne

De plus en $\frac{\pi}{2}$, ρ devient $-\infty$. Bien, mais a-t-on une direction asymptotique ? Pour cela, on calcule $x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta$ dans la même limite, et là miracle, $x(\theta) \rightarrow -a$. Donc on peut tracer la droite $x = -a$ comme asymptote.

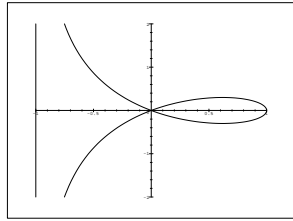
$$\rho \cos \theta \rho^2 = a(2x^2 - y^2 - x^2) = a\rho^2(2 \cos^2 \theta - 1).$$

Ensuite $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ donc $(2 \cos^2 \theta - 1) = \cos 2\theta$, ce qui

$$\rho \cos \theta = a \cos 2\theta \quad \text{donc} \quad \rho(\theta) = a \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}.$$

Comme $M(\theta) = M(\theta + \pi)$ et $M(-\theta)$ est la symétrique par rapport à $\mathcal{O}x$ de $M(\theta)$, on étudie juste sur $]0; \pi/2[$.

On note que ρ s'annule en $\theta = \frac{\pi}{4}$, alors qu'elle est parfaitement continue. La courbe admet donc en 0 une tangente d'angle $\pi/4$, ainsi que celle d'angle $-\pi/4$ par symétrie.



L'aire de la boucle $\theta \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\rho(\theta)} r \, dr \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \rho^2(\theta) \, d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2 \theta} \, d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2 \cos^2 \theta - 1)^2}{\cos^2 \theta} \, d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4 \cos^2 \theta - 4 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \, d\theta \\ &= a^2 \left[\sin 2\theta - 2\theta + \tan \theta \right]_0^{\pi/4} = 2a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

◆ MET.7

Tracer l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) = t^2 \ln t, \\ y(t) = t (\ln t)^2. \end{cases}$

Calculer la longueur de la « boucle » et son aire (on utilisera la formule de Green-Riemann).

◇ [Divers/arcmetriqueexo.tex/crb:37]

◆ MET.8 (Longueur minimale si courbure majorée) (**)

Soit Γ un arc fermé, birégulier. On suppose que le rayon de courbure de Γ en tout point est supérieur à une constante positive r . Donner une minoration de la longueur de l'arc. Étudier les cas d'égalité.

◇ [Divers/arcmetriqueexo.tex/crb:38]

On prend un paramétrage normal s ; puisque Γ est birégulier, on peut également prendre un paramétrage par l'angle de relèvement $\alpha = \alpha(s)$. Alors on a par exemple

$$\int_0^\ell c(s) \, ds = \int_0^a \frac{d\alpha}{ds} \, ds = \alpha(\ell) - \alpha(0) = 2k\pi,$$

où k est le « nombre de tours ».

On en déduit puisque $k \geq 1$ (car la fonction $s \mapsto c(s)$ est strictement positive, que

$$\frac{\ell}{r} \geq \int_0^\ell c(s) \, ds \geq 2\pi$$

et donc $\ell \geq 2\pi r$.

Il n'y a égalité que si le rayon de courbure est constant; le centre de courbure est $\Omega(s) = M(s) + rN$ donc

$$\frac{d\Omega}{ds} = \frac{dM}{ds} + r \frac{dN}{ds} = \mathbf{T} + r \left(-\frac{\mathbf{T}}{r} \right) = \mathbf{0},$$

ce qui montre que le centre de courbure est fixe, et Γ est un cercle.

(On peut aussi écrire les deux formules de Frenet, en déduire une équation différentielle sur \mathbf{T} , la résoudre, puis trouver l'équation générale d'un cercle.)

◆ MET.9

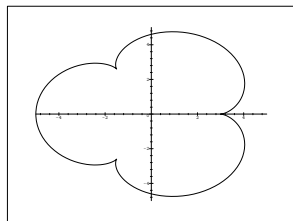
CCP PC – 2001

Tracer $\begin{cases} x(t) = 4 \cos t + \cos(4t), \\ y(t) = 4 \sin t - \sin(4t). \end{cases}$ Calculer la longueur de la courbe.

◇ [Rec01/arcmetrique-r1.tex/crb:34]

Après calculs et utilisation de formules trigonométriques, on obtient

$$\mathcal{L} = 8 \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{5t}{2} \right| dt = 32.$$



◆ MET.10

CCP MP – 2001

Étudier la courbe $\rho = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$. Tracer son graphe. Calcul de l'aire entre l'asymptote et la courbe.

◇ [Rec01/arcmetrique-r1.tex/geo-r:15]

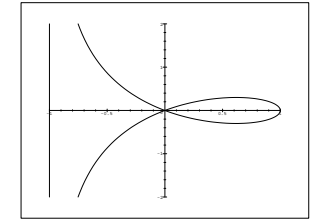
$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \text{ donc } (2 \cos^2 \theta - 1) = \cos 2\theta, \text{ ce qui}$$

$$\rho \cos \theta = \cos 2\theta \text{ donc } \rho(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}.$$

Comme $M(\theta) = M(\theta + \pi)$ et $M(-\theta)$ est le symétrique par rapport à θx de $M(\theta)$, on étudie juste sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

On note que ρ s'annule en $\theta = \frac{\pi}{4}$, alors qu'elle est parfaitement continue. La courbe admet donc en 0 une tangente d'angle $\pi/4$, ainsi que celle d'angle $-\pi/4$ par symétrie.

De plus en $\frac{\pi}{2}^-$, ρ devient $-\infty$. Bien, mais a-t-on une direction asymptotique? Pour cela, on calcule $x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta$ dans la même limite, et là miracle, $x(\theta) \rightarrow -a$. Donc on peut tracer la droite $x = -1$ comme asymptote.



◆ MET.11 (Centres de courbure d'une ellipse) (*)

TPE MP – 2001

Trouver le lieu des centres de courbure de la courbe $\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

◇ [Rec01/arcmetrique-r1.tex/geo-r:13]

On reconnaît une ellipse. On la paramètre donc plutôt en $x = a \cos t$ et $y = b \sin t$, puis on calcule la courbure avec la formule

$$c(t) = \frac{\det(f'(t), f''(t))}{\|f'(t)\|^3},$$

$$\begin{cases} x(t) = a \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \cos^3 t \\ x(t) = b \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \sin^3 t, \end{cases}$$

et l'on obtient, tous calculs faits et après simplification :

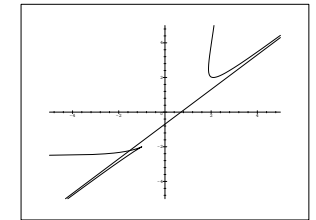
c'est-à-dire une astéroïde aplatie.

◆ MET.12

CCP PC – 2001

On définit l'arc paramétré $\Gamma \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \ln(2+t), \\ y(t) = t + \frac{1}{t}. \end{cases}$ Étudier et tracer Γ . Points stationnaires? Points d'inflexion? Branches infinies?

◇ [Rec01/arcmetrique-r1.tex/geo-r:2]



◆ MET.13

CCP PC – 2002

On pose $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\text{Arc sin } \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

- 1) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
- 2) Évaluer le rayon de courbure de la courbe \mathcal{C} représentative de f , au point d'abscisse 0.

◇ [Rec02/arcmetrique-r2.tex/geo-r2:11]

◆ MET.14

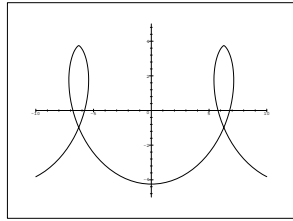
CCP PC – 2002

Tracer l'arc $\begin{cases} x(t) = t + \sin t + 4 \sin(t/2) \\ y(t) = \frac{3}{4} - \cos t - 4 \cos(t/2) \end{cases}$. Quelle est la courbure maximale?

◇ [Rec02/arcmetrique-r2.tex/geo-r2:23]

On a représenté ici $t \in [-4\pi; 4\pi]$.

La courbure devient infinie.



◆ **MET.15** CCP MP – 2002
 On note Γ l'arc paramétré par

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t), \\ y(t) = \cos t \sin t. \end{cases}$$

Calculer la longueur L de Γ entre les deux points de rebroussement.

◆ [Rec02/arcmetrique-r2.tex/geo-r2:25]

◆ **MET.16** Centrale PC – 2003
 Représenter l'arc paramétré

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = t + \sin t - 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ y(t) = 3 + \cos t + 4 \cos\left(\frac{t}{2}\right), \end{cases} \quad t \in [0; 4\pi].$$

Calculer la longueur de Γ ainsi que sa courbure en tout point birégulier.

◆ [Rec03/arcmetrique-r3.tex/r3:112]

◆ **MET.17** Centrale PC – 2003
 On munit \mathbb{R}^2 de sa structure euclidienne canonique et de sa base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t) = (t, 0)$. Soit $a > 0$.
 Déterminer un arc Γ de classe \mathcal{C}^1 , régulier, décrit par le point $P(t)$ tel que $P(0) = (0, a)$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
 – la longueur du segment $[P(t), M(t)]$ est égale à $a > 0$;
 – La droite $(P(t), M(t))$ est tangente à Γ en tout point.

INDICATION : On pourra utiliser l'angle $\phi(t)$ entre ε_1 et le vecteur $\overrightarrow{P(t)M(t)}$.

◆ [Rec03/arcmetrique-r3.tex/r3:187]

◆ **MET.18** TPE MP – 2003
 On note $\Gamma : xy = 1$. La normale à la courbe en M coupe Γ en N . Montrer que le centre de courbure C en M est barycentre des points M et N avec des coefficients à déterminer.

◆ [Rec03/arcmetrique-r3.tex/r3:219]

◆ **MET.19** CCP MP – 2003
 Tracer la courbe $\rho = 1 + \cos \theta$. Calculer sa longueur.

◆ [Rec03/arcmetrique-r3.tex/r3:249]

◆ **MET.20** Centrale PC – 2004 (*)
 Tracer l'arc paramétré Γ et calculer sa longueur :

$$\forall t \in [0; 2\pi] \quad \begin{cases} x(t) = t^2 \cos t - 2t \sin t \\ y(t) = t^2 \sin t + 2t \cos t. \end{cases}$$

◆ [Rec04/arcmetrique-r4.tex/r4:42]

◆ **MET.21** Centrale PC – 2004 (**)
 Déterminer la courbe \mathcal{F}_a définie par le projeté orthogonal de l'origine du repère au cercle de centre $A(a, 0)$ et de rayon $a > 0$. Calculer sa longueur.

◆ [Rec04/arcmetrique-r4.tex/r4:83]

◆ **MET.22 (Développée de la cycloïde)** Mines MP – 2004 (*)
 On considère l'arche de cycloïde Γ définie par

$$\forall t \in [0; 2\pi] \quad \begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

- 1) Tracer Γ .
- 2) Déterminer la longueur de Γ .
- 3) Tracer la développée de Γ .

◆ [Rec04/arcmetrique-r4.tex/r4:201]

◆ **MET.23** Centrale PC – 2005 (*)
 On note Γ l'arc paramétré par $M(t) : \begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3. \end{cases}$
 Calculer la courbure en tout point où la courbe est birégulière.

◆ [Rec05/arcmetrique-r5.tex/r5:42] Conclusion : $c(t) = \frac{1}{6|t|(1+t^2)^{3/2}}$.
 La courbure est une fonction paire ici ; on considère uniquement $t > 0$. On obtient

$$ds = 6t\sqrt{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

On en déduit

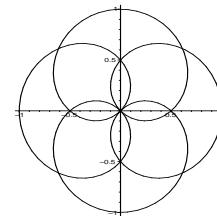
$$c(t) = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{N} = \frac{dt}{ds} \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{6t(1+t^2)^{3/2}}.$$

Remarque : on pouvait aussi employer la formule de bourrin.

◆ **MET.24** CCP PC – 2005 (*)
 Tracer la courbe polaire d'équation $\rho(\theta) = \cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)$ et montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0; \frac{3\pi}{4}]$.
 Montrer que la courbe a la même longueur que l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

◆ [Rec05/arcmetrique-r5.tex/r5:518] La fonction $\theta \mapsto \cos(\theta/3)$ est 3π -périodique mais, par les symétries du cosinus, on n'étudie que sur $[0; 3\pi/4]$. Cependant, la courbe entière est définie pour un intervalle d'une longueur de 6π (!!), il faudra faire des symétries par rapport aux deux axes et à la seconde diagonale.

Le dessin est joli :
`polarpplot(cos(2*t/3), t=0..6*Pi, color=black, numpoints=200);`



On trouve alors

$$\mathcal{L} = \int_0^{6\pi} \sqrt{\cos^2\left(\frac{2\theta}{3}\right) + \frac{4}{9} \sin^2\left(\frac{2\theta}{3}\right)} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \sqrt{9 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} dt$$

ce qui est bien la même chose que la longueur de l'ellipse, que l'on paramètre astucieusement par

$$\begin{cases} x(t) = 3 \sin t \\ y(t) = 2 \cos t \end{cases}$$

valant

$$\mathcal{L}' = \int_0^{2\pi} \sqrt{9 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} dt.$$

◆ MET.25

(★)

Centrale PC – 2005

On considère un espace vectoriel euclidien E de dimension 2, muni d'un repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ et d'une base tournante $(O, \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))$ en fonction de l'angle t .

Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ et $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On note $D(t)$ la droite définie par $x \cos t + y \sin t = f(t)$ et $P(t)$ le projeté orthogonal de O sur $D(t)$. On définit le point $M(t)$ par $\mathbf{PM}(t) = g(t) \mathbf{v}(t)$.

- 1) Calculer la distance de $P(t)$ à O .
- 2) Donner une condition pour que la courbe, lieu de $M(t)$, soit toujours tangente à $D(t)$ en $M(t)$.

◇ [Rec05/arcmetrique-r5.tex / r5:76]

Nappes et surfaces

◆ SUR.1 (Les normales coupent Oz ⇔ révolution)

Soit \mathcal{S} une surface d'équation $z = f(x, y)$.

- 1) Montrer que \mathcal{S} est de révolution si et seulement si en tout point M, la normale à \mathcal{S} en M est parallèle ou sécante à Oz.
- 2) Que dire d'une surface \mathcal{S} telle que toutes les normales sont concourantes ?

◇ [Divers/surfacesexo.tex/crb:27]

1) Il y a équivalence entre les énoncés :

(a) La normale en M est parallèle ou sécante à Oz

(b) $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

(c) $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$

(d) $f = f(\rho)$.

2) C'est une sphère.

◆ SUR.2 (Contour apparent)

Notons \mathcal{S} la surface d'équation cartésienne $z^2 - x^2 - y^2 = 1$.

- 1) Reconnaitre \mathcal{S} .
- 2) Soit D la droite d'équations : $2x + y = 0, z = 0$. Déterminer les points M de \mathcal{S} tels que le plan tangent à \mathcal{S} en M est parallèle à D. (Contour apparent de \mathcal{S} dans la direction de D)

◇ [Divers/surfacesexo.tex/crb:28]

1) Hyperboloïde de révolution à deux nappes.

2) On prend le vecteur directeur $\mathbf{u} = (-1 \ 2 \ 0)$, on écrit ensuite que

$\mathbf{N} \cdot \mathbf{u} = 0$ on est donc dans le plan $y = x/2$, on pose $\rho = \sqrt{\frac{5}{4}}x$, ce qui donne une coordonnée normée, et on trouve $z^2 = 1 + 5y^2$ soit $z^2 - \rho^2 = 1$: c'est une hyperbole.

◆ SUR.3

Soit $\mathcal{S} : \begin{cases} x = \cos u - v \sin u, \\ y = \sin u + v \cos u, \\ z = v. \end{cases}$ Quels sont les points singuliers de \mathcal{S} ? Donner une équation cartésienne de \mathcal{S} .

◇ [Divers/surfacesexo.tex/crb:25]

On calcule

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\sin u - v \cos u \\ \cos u - v \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors un vecteur normal est $\mathbf{N} = (-v, \cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u)$, et $\|\mathbf{N}\|^2 = 1 + 2v^2 \neq 0$, donc il n'y a pas de points singuliers.

On vérifie par ailleurs que $x^2 + y^2 = 1 + v^2 = 1 + z^2$ donc : $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$.

◆ SUR.4

Soit \mathcal{S} la surface d'équation $x^3 - 3xy + 2z = 0$. Donner l'équation du plan tangent à \mathcal{S} en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Intersection de \mathcal{S} avec ce plan tangent ?

◇ [Divers/surfacesexo.tex/crb:16]

◆ SUR.5

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des points M de la surface

$$\mathcal{S} : xy = az$$

tels que le plan tangent à \mathcal{S} est tangent au cercle d'équation

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

◇ [Divers/surfacesexo.tex/crb:12]

◆ SUR.6

TPE MP – 2001

On note \mathcal{S} la surface engendrée par les points M définis par $x = \text{sh } u, y = \text{sh } v$ et $z = u + v$, pour (u, v) parcourant \mathbb{R}^2 . Montrer que tout point de \mathcal{S} est régulier et calculer le plan tangent en un point $M \in \mathcal{S}$.

◇ [Divers/surfacesexo.tex/geo-r:16]

◆ SUR.7

Soit \mathcal{E} un ellipsoïde dont les axes sont pris comme axes de coordonnées. Si $M \in \mathcal{E}$, alors la normale à \mathcal{E} en M coupe les plans principaux en des points P, Q, R. Montrer que les distances MP, MQ et MR sont en rapport constant (indépendant de M).

◇ [Divers/surfacesexo.tex/crb:39]

◆ SUR.8

CCP PC – 2005

Dans l'espace affine \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé, on définit la surface \mathcal{S} d'équation cartésienne :

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Trouver les points de \mathcal{S} en lesquels le plan tangent coupe les axes des coordonnées en trois points équidistants du centre O.

◇ [Rec00/surfaces-r0.tex/r0:31]

◆ SUR.9

On considère la surface $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$.

Trouver l'équation de la surface engendrée par les droites tangentes à \mathcal{S} et coupant orthogonalement l'axe Oz.

◇ [Rec00/surfaces-r0.tex/div:146]

\mathcal{S} est la sphère de centre $(1, 0, 0)$ et de rayon 1. Une droite \mathcal{D} orthogonale à Oz est du type

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ z = c. \end{cases}$$

(Il faut bien sûr $c \in [-1; 1]$). On fait ensuite un dessin dans le plan horizontal de cote c, et on trouve les pentes (opposées) des deux droites passant par 0 et

tangentes au cercle de centre 1 et de rayon $\sqrt{1 - c^2}$:

$$\sqrt{1 - c^2} c \pm cy = 0$$

ce qui est plus joli une fois élevé au carré ; on obtient alors

$$\mathcal{E} : (1 - z^2) x^2 - x^2 y^2 = 0.$$

◆ SUR.10

Centrale PC – 2001

On munit \mathbb{R}^3 d'un repère orthonormé $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. On note D : $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$ et $\Delta : \begin{cases} x = 1 \\ y = -z \end{cases}$.

- 1) Trouver D_θ (resp. Δ_θ), image par la rotation d'angle θ autour de \mathbf{k} de D (resp. Δ).
- 2) Soit \mathcal{S} d'équation $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, D_θ et Δ_θ sont contenues dans \mathcal{S} .
- 3) Donner l'équation du plan tangent P à \mathcal{S} en $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
- 4) Montrer que $P \cap \mathcal{S}$ est réduit à l'intersection de deux droites.

◇ [Rec01/surfaces-r1.tex/geo-r:19]

◆ SUR.11

TPE MP – 2001

Étudier dans \mathbb{R}^3 la nappe d'équation $xy + yz + zx = 0$.

◇ [Rec01/surfaces-r1.tex/geo-r:9]

◆ SUR.12

TPE MP – 2002

Soit \mathcal{S} la surface d'équation $2x^2 + 3yz - 4z - 1 = 0$.

Trouver les plans tangents à \mathcal{S} contenant la droite d'équation $\begin{cases} y - 2 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$.

◇ [Rec02/surfaces-r2.tex/geo-r:2:3]

◆ SUR.13

X PC – 2003

Dans \mathbb{R}^3 on considère la surface $\mathcal{S} : 2x^2 - y^2 + z^2 = 1$ et le plan P : $2x - y = 0$. Trouver les points M de \mathcal{S} tels que le plan tangent en M à \mathcal{S} soit parallèle à P.

◇ [Rec03/surfaces-r3.tex/r3:343]

◆ SUR.14

Centrale PC – 2003

On note $\begin{cases} \mathcal{S}_1 : e^{x+y} + y - z^2 = 0 \\ \mathcal{S}_2 : x^2 + y + z = 1. \end{cases}$ On définit enfin $\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ et $A(0, 0, 1) \in \mathcal{C}$.

Déterminer la tangente à \mathcal{C} en A.

◇ [Rec03/surfaces-r3.tex/r3:437]

◆ **SUR.15** TPE MP – 2003
 On définit la surface Σ par le paramétrage

$$x = u \cos v \quad y = u \sin v \quad z = u.$$

- 1) Reconnaître cette surface.
- 2) Tracer les courbes Γ sur Σ telles que le segment de la tangente en M à Γ défini entre M et l'intersection de la tangente avec xOy soit de longueur constante.

◇ [Rec03/surfaces-r3.tex/r3:150]

◆ **SUR.16** TPE MP – 2003
 On note $S : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$. Déterminer les plans tangents à S et parallèles au plan d'équation $x + 4y + 6z = 0$.

◇ [Rec03/surfaces-r3.tex/r3:387]

◆ **SUR.17** Centrale PC – 2005 (★)
 On définit la surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 = 2z\}$.

- 1) Plans tangents à S parallèles à xOy ?
- 2) On définit la courbe

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in S ; x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0\}.$$
 Quelle est la tangente à Γ à l'origine ?
- 3) Recherche de courbes orthogonales à quelque chose...

◇ [Rec05/surfaces-r3.tex/r5:97]

◆ **SUR.18** Centrale PC – 2005 (★★)
 On considère un contour (C) de longueur ℓ et (D) une droite de l'espace. On construit la surface (S) par rotation de (C) autour de (D) . Montrer que l'aire de la surface obtenue est :

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_0^\ell f(s) \, ds,$$

où s est un paramétrage normal et $f(s)$ est la distance de $M(s)$ à la droite (D) .
 Application : on considère un tore obtenu par rotation du cercle du plan Oxz , de centre $A(a, 0, 0)$ et de rayon $r < a$, autour de l'axe porté par \mathbf{u}_z . Calculer l'aire de ce tore.

◇ [Rec05/surfaces-r5.tex/r5:100]

◆ **SUR.19** Centrale PC – 2005 (★)
 On considère la surface $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; xyz = 1\}$. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$.

- 1) Déterminer le plan tangent à \mathcal{S} en M_0 .
- 2) Déterminer la projection orthogonale de O sur ce plan.
- 3) Question « trop étrange pour être retenue »...

◇ [Rec05/surfaces-r5.tex/r5:115]

◆ **SUR.20** CCP PC – 2005
 On travaille dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 .

- 1) Équation paramétrique de la droite passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\mathbf{v}(a, b, c)$?
- 2) On considère la surface $(\mathcal{S}) \quad x^3 + y^3 - \alpha^2 z = 0$ (où $\alpha > 0$). Quelles sont les droites incluses dans (\mathcal{S}) ?
- 3) Donner l'équation des plans tangents à (\mathcal{S}) et passant par l'origine.

◇ [Rec05/surfaces-r5.tex/r5:24]

◆ **SUR.21** CCP PC – 2005 (★)
 Soit une surface (S) d'équation $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$.
 Soit un plan d'équation $(P) \quad x + y - z + M = 0$.
 Étudier l'intersection de S et P en fonction de la valeur de M .

◇ [Rec05/surfaces-r5.tex/r5:505]
 (S) est un sphère de centre $A(-1, 2, 0)$ et de rayon 3.
 On cherche $d(A, P) = \frac{|-1+2-0+M|}{\sqrt{3}} = \frac{|1+M|}{\sqrt{3}}$.
 Si $\frac{|1+M|}{\sqrt{3}} > 3$ alors l'intersection est vide.

Si $\frac{|1+M|}{\sqrt{3}} = 3$ alors P est tangente à S .

Si $\frac{|1+M|}{\sqrt{3}} < 3$, l'intersection est un cercle de rayon $\sqrt{3^2 - d(A, P)^2}$ et de centre $p_P(A)$.

Géométrie affine

◆ **AFF.1** (**) Soient A, B, C trois points non alignés du plan. Déterminer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées barcentriques (α, β, γ) dans le repère affine (A, B, C) vérifient

$$\alpha\beta\|\mathbf{AB}\|^2 + \beta\gamma\|\mathbf{BC}\|^2 + \gamma\alpha\|\mathbf{CA}\|^2 = 0.$$

INDICATION : On prendra un point quelconque O comme origine du repère puis on choisira O avec soin pour simplifier les calculs.

◇ [Divers/affineexo.tex/aff:3] angle (ABC).
Il faut donc prendre O centre du cercle de rayon R circonscrit au tri-

◆ **AFF.2** ($f^p = \text{Id} \Rightarrow f$ a un point fixe) Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ affine telle qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $f^p = \text{Id}$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

◇ [Divers/affineexo.tex/aff:4]

◆ **AFF.3** (1 non valeur propre \Rightarrow pt fixe unique) Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension finie et $f \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ affine. Montrer que f admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de la partie linéaire ϕ de f .

◇ [Divers/affineexo.tex/aff:5]

◆ **AFF.4** On fixe un repère $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ d'un espace affine de dimension 3. Déterminer les expressions analytiques des applications suivantes :

- Symétrie de base le plan d'équation $x + 2y + z = 1$ et de direction $\text{Vect}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.
- Symétrie de base la droite d'équations $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + z + 2 = 0, \end{cases}$ de direction le plan vectoriel d'équation $3x + 3y - 2z = 0$.

◇ [Divers/affineexo.tex/aff:6]

$$1) \begin{cases} 2x' = x - 2y - z + 1 \\ 2y' = -x - z + 1 \\ 2z' = -x - 2y + z + 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x' = -5x - 3y + 2z - 3 \\ 2y' = 3x + y - 2z - 1 \\ z' = -3x - 3y + z - 3 \end{cases}$$

◆ **AFF.5** On fixe un repère $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ d'un espace affine de dimension 3. Reconnaitre l'application ayant l'expression analytique suivante :

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y + 2z - 4 \\ y' = -2x - 3y - 2z + 4 \\ z' = 4x + 8y + 5z - 8. \end{cases}$$

◇ [Divers/affineexo.tex/aff:7] Affinité de base $\mathcal{S} : x + 2y + z = 2$, de direction $\text{Vect}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$, de rapport 3. Chercher les points fixes de f et étudier $\overrightarrow{\text{MM}'}$.

◆ **AFF.6** (Symétrie-translation) (*) Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine. On dit que f est une **symétrie-translation** s'il existe une symétrie s et une translation t telles que $f = s \circ t = t \circ s$.

- Soient s une symétrie de base \mathcal{B} de direction $\vec{\mathcal{F}}$, et t une translation de vecteur \vec{u} . Montrer que $s \circ t = t \circ s \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \vec{\mathcal{B}}$.
- Soit f une symétrie-translation. Montrer que le couple (s, t) tel que $f = s \circ t = t \circ s$ est unique.
- Soit f affine quelconque. Montrer que f est une symétrie-translation si et seulement si $f \circ f$ est une translation
- En déduire que le produit d'une symétrie par une translation quelconques est une symétrie-translation.
- AN : décomposer l'application f d'expression analytique dans un repère $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$:

$$\begin{cases} x' = (x - 2y - 2z + 1)/3 \\ y' = (-2x + y - 2z + 2)/3 \\ z' = (-2x - 2y + z - 1)/3. \end{cases}$$

◇ [Divers/affineexo.tex/aff:8] $\mathcal{B} = \{3(x+y+z) = 1\}$, $\vec{\mathcal{F}} = \text{Vect}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$, $9\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3$.

◆ **AFF.7** On se donne un triangle (ABC) du plan et on note A', B', C' les milieux des côtés BC, CA et AB respectivement. On note G le barycentre du triangle. M étant un point quelconque du plan, on définit P, Q, R comme les symétriques de M par rapport à A', B' et C'. Montrer que les droites AP, BQ, CR et GM sont concourantes. (On pourra montrer que G est un point particulier pour (APM).)

◇ [Divers/affineexo.tex/aff:9] le centre de gravité de (APM) donc I est le milieu de [AP]. De la même façon faire un beau dessin. On note h l'homothétie de centre G et de rapport 1/2. Alors $h(A) = A'$, $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$. On note I = h(M). Aors G est pour [BQ] et [CR]. Donc les quatre droites concourent en I.

◆ **AFF.8** Déterminer l'intersection des trois plans suivants :

$$\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x + y - 2 = 2 \\ 4x - 3y + z - 4 \end{cases}$$

◇ [Divers/affineexo.tex/aff:10] Alors on y va pédestrement et on trouve

$$\begin{cases} x = (z + 1)/5 \\ y = (3z + 8)/5 \end{cases}$$

On résout par exemple avec les formules de Cramer et là on voit que ça ne marche pas car le déterminant est nul. ce qui est manifestement une droite.

◆ **AFF.9** (Homographies laissant un disque invariant) (***) Trouver le groupe des homographies — c'est-à-dire des applications de \mathbb{C} dans \mathbb{C} du type $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ laissant le cercle unité invariant. Déterminer le groupe des homographies laissant invariant le disque unité

$$\mathcal{G} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}.$$

◇ [Divers/affineexo.tex/div:19] On caractérise d'abord le fait que le cercle unité soit invariant. Si a est non nul, on peut supposer sans restriction $a = 1$. On écrit alors $b = B e^{i\beta}$, $c = C e^{i\gamma}$ et $d = D e^{i\delta}$. Pour tout $z = e^{i\theta}$, on doit avoir $|f(z)| = 1$ ce qui donne

$$|1 + B e^{i(\beta-\theta)}|^2 = |C + D e^{i(\delta-\gamma-\theta)}|^2$$

et donc, après développement en partie réelle carrée et imaginaire carrée :

$$1 + B^2 + 2B \cos(\beta - \theta) = C^2 + D^2 + 2CD \cos(\delta - \gamma - \theta)$$

Cela nous donne donc par liberté de la famille $(\theta \mapsto 1, \theta \mapsto \cos \theta)$:

$$1 + B^2 = C^2 + D^2 \quad B = CD \quad \beta = \delta - \gamma.$$

Ajoutons à la première équation le terme 2B, alors

$$1 + 2B + B^2 = C^2 + 2CD + D^2$$

$(1 + B)^2 = (C + D)^2$ donc $1 + B = 1 + CD = C + D$.

De cette dernière équation, on tire que l'un au moins de C ou D est égal à 1. On devrait trouver $z \mapsto e^{i\alpha} \frac{z + b}{bz + 1}$, où $|b| < 1$ pour garder le disque invariant, et $|b| > 1$ pour échanger l'intérieur et l'extérieur.

▲ FINIR !!!

◆ **AFF.10** CCP MP – 2000 Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension 3 (ou autre...). Déterminer les applications affines de \mathcal{E} dans lui-même qui vérifient : tout point M $\in \mathcal{E}$ est le milieu du segment $[f(M), f^2(M)]$.

◇ [Rec00/affine-r0.tex/aff:1] $E = F \oplus G = \text{Ker}(\phi - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\phi + 2 \text{Id})$.

- En utilisant un point O $\in \mathcal{E}$ quelconque et la propriété $\mathbf{O}f(\mathbf{O}) + \mathbf{O}f^2(\mathbf{O}) = 0$ on obtient

$$2\mathbf{OM} = \mathbf{f}(\mathbf{O})\mathbf{f}(\mathbf{M}) + \mathbf{f}^2(\mathbf{O})\mathbf{f}^2(\mathbf{M}).$$

Si on note ϕ la partie linéaire de f , on obtient alors

$$\phi^2 + \phi - 2 \text{Id} = (\phi - \text{Id}) \circ (\phi + 2 \text{Id}) = 0.$$

On a donc classiquement

- Si l'on note p la projection sur F parallèlement à G, on a $\phi = p - 2(\text{Id} - p) = 3p - 2 \text{Id}$.
- Il faut maintenant chercher un point fixe. Or la partie linéaire est composée d'une homothétie de rapport -2 et de l'identité. On fait alors un crobard et on se doute qu'il faut poser I le barycentre de $(O, \frac{2}{3})$ et de $(f(O), \frac{1}{3})$. Donc f est une affinité d'axe (I, F), de direction G et de rapport -2 . (Cas particulier : identité, homothétie de rapport -2).

◆ **AFF.11** CCP PC – 2001 On considère la transformation qui à un point M du plan associe le point I(M) tel que : O, M et I(M) sont alignés, et $\overrightarrow{\text{OM}} \cdot \overrightarrow{\text{OI}}(M) = k \in \mathbb{R}^*$. Que décrit I(M) lorsque M décrit une droite ? un cercle passant pas O ? Un cercle quelconque ? Une ellipse ?

Cette équation admet une racine double si et seulement si son discriminant est nul, c'est-à-dire

$$\frac{u^2 w^2}{b^4} - \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} \right) \left(\frac{w^2}{b^2} - v^2 \right) = 0,$$

soit, en développant et simplifiant :

$$\frac{w^2}{a^2 b^2} = \frac{v^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2},$$

ce que l'on écrira plutôt

$$\boxed{w^2 = a^2 u^2 + b^2 v^2.}$$

Supposons maintenant que l'on ait deux droites d'équation $ux + vy + w = 0$ et $u'x + v'y + w' = 0$ qui soient tangentes à l'ellipse, et qui soient de plus orthogonales. Alors le produit de leurs pentes est égal à -1 , ce qui nous donne $uu' + vv' = 0$. On peut de plus choisir une normalisation telle que $u^2 + v^2 = 1$ et $u'^2 + v'^2 = 1$. Les solutions du problème

$$\begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}$$

sont données par (inverser une matrice par la comatrice...)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{uw' - u'w} \begin{pmatrix} vw' - v'w \\ -uw' + u'w \end{pmatrix}$$

On peut alors calculer $(x^2 + y^2)$:

$$\begin{aligned} (u'v - uv')^2 (x^2 + y^2) &= (wv' - w'v)^2 + (w'u - wu')^2 \\ &= w^2 \underbrace{(v'^2 + u'^2)}_1 + w'^2 \underbrace{(v^2 + u^2)}_1 - 2ww' \underbrace{(uv' + v'u)}_0 \\ &= w^2 + w'^2 \end{aligned}$$

$$= a^2 (u^2 + u'^2) + b^2 (v^2 + v'^2).$$

Or, on peut remarquer que $u^2 + u'^2$ est justement égal au carré du déterminant $u'v - uv'$: en effet la différence vaut

$$\begin{aligned} \delta &= u^2 + u'^2 - u'^2 v^2 - u^2 v'^2 + 2uu'vv' \\ &= u^2(1 - v'^2) + u'^2(1 - v^2) + 2uu'vv' \\ &= 2u^2 u'^2 + 2uu'vv' \\ &= 2uu'(uu' + vv') = 0 \end{aligned}$$

et de même, $v^2 + v'^2 = (u'v - uv')^2$, ce qui donne au total

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2 + b^2.}$$

◆ AFF.22

Mines MP – 2002

Soit \mathcal{P} une parabole d'axe Ox et de sommet O , d'équation $y^2 = 2px$. Déterminer le lieu Γ des projections orthogonales de O sur les tangentes à \mathcal{P} .

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:8]

◆ AFF.23

Centrale PC – 2002

Notons \mathcal{P} la parabole de paramétrage $y^2 = 2px$ dans le plan euclidien E_2 muni du repère $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ orthonormé.

- 1) Montrer qu'un cercle \mathcal{C} de centre M et de rayon R admet un paramétrage de la forme

$$\begin{cases} x = a + c \left(u + \frac{1}{u} \right) \\ y = b - ic \left(u - \frac{1}{u} \right) \end{cases} \quad \text{où } u \in \mathbb{C} \text{ et } |u| = 1.$$

- 2) En utilisant $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$, déterminer l'ensemble des points, centres des triangles équilatéraux construits sur \mathcal{P} .

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:24]

◆ AFF.24

Centrale MP – 2002

Soient D et P une droite et un plan de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Soit $k \in \mathbb{R}^{*+}$. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $d(M, D) = k d(M, P)$.

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:9]

◆ AFF.25

Mines MP – 2002

Soient A, B, C trois points du plan. On repère un point M du plan par ses coordonnées (x, y) dans le repère $(A, \mathbf{AB}, \mathbf{AC})$, et à ses coordonnées barycentriques (α, β, γ) par rapport à ABC .

- 1) Expliciter le passage de (x, y) à (α, β, γ) , ainsi que le passage inverse.
- 2) Comment traduire (à l'aide d'un déterminant) le fait que trois points M_1, M_2 et M_3 soient alignés ?
- 3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M_1 \in (AB)$, $M_2 \in (AC)$ et $M_3 \in (BC)$ soient alignés.

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:29]

◆ AFF.26

CCP PC – 2002

Montrer que la droite tangente à la courbe définie ci-dessous passe par le point $A(-2, -1, 3)$:

$$\mathcal{S} \quad \begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 18 \\ xy + yz + xz = 17 \end{cases}$$

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:30]

◆ AFF.27

CCP PC – 2002

Symétrique du plan $3x + 4y + z = -6$ par rapport au plan $x + y + z = 1$?

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:2]

◆ AFF.28

CCP PC – 2002

Considérons une spirale logarithmique d'équation polaire $\rho = e^{k\theta}$. Déterminer les lieux du projeté orthogonal de l'origine O sur les tangentes à la spirale.

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:5]

◆ AFF.29

Télécom INT PC – 2002

Considérons une hyperbole équilatère \mathcal{H} . Montrer que, si A, B, C appartiennent à \mathcal{H} , alors l'orthocentre du triangle (ABC) appartient à \mathcal{H} .

La réciproque (si l'orthocentre de tout triangle de \mathcal{H} appartient à \mathcal{H} , alors \mathcal{H} est équilatère) est-elle vraie ?

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:19]

◆ AFF.30

Centrale PC – 2002

On se place dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3.

- 1) Quelle est la composée de deux demi-tours par rapport à deux droites affines parallèles ?
- 2) Même question avec deux droites affines sécantes.
- 3) Étude du cas de deux droites affines non coplanaires à partir d'un exemple. On note $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ un repère orthonormal de E et on considère les points $A(0, 0, -2)$ et $B(0, 1, -1)$.
 - a) Démontrer l'existence et l'unicité d'un demi-tour f tel que $f(O) = A$ et $f(B) = B$.
 - b) Notons $g : E \rightarrow E$ l'application qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x, -y, 2 - y)$. Reconnaître g .
 - c) Reconnaître $f \circ g$.

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:15]

◆ AFF.31

CCP MP – 2002

On note $E = \mathbb{R}^3$ en tant qu'espace vectoriel euclidien orienté. Soit $a \in E$. On définit $\phi : x \mapsto a \wedge (a \wedge x)$.

- 1) Montrer que ϕ est un endomorphisme.
- 2) Déterminer $\text{Ker } \phi$ et $\text{Im } \phi$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés. ϕ est-elle diagonalisable ?

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:13]

◆ AFF.32

CCP PC – 2002

Soit ABC un triangle équilatéral dont le cercle circonscrit est de rayon 1. Trouver les points M tels que $AM \times BM \times CM = 1$. On utilisera les affixes complexes dans un repère judicieux.

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:14]

◆ AFF.33

Centrale MP – 2002

On note \mathcal{P} la parabole d'équation $y = x^2$. Soit $M_0(x_0, 0)$ (avec $x_0 > 0$) un point de l'axe (Ox) . On note H_1 le pied de la normale à \mathcal{P} passant par P_0 , et $M_1(x_1, 0)$ le projeté de H_1 sur Ox .

- 1) Faire un dessin. Montrer l'existence et l'unicité de H_1 et montrer que $x_1 < x_0$.
- 2) On note f l'application qui à x_0 associe x_1 . On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
- 3) Donner un équivalent de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:16]

◆ AFF.34

TPE MP – 2002

Soit p une rotation vectorielle de E_3 , d'axe D et d'angle θ . Soit $f \in O(E_3)$. On pose $g = f \circ p \circ f^{-1}$.

- 1) Démontrer que p est une rotation vectorielle.
- 2) Déterminer son angle et son axe.

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:18]

◆ **AFF.35** Centrale MP – 2002
Soient \mathcal{H} une hyperbole équilatère de centre O, M un point de \mathcal{H} , \mathcal{C} le cercle passant par O et tangent à \mathcal{H} en M.

- 1) Existence et unicité de \mathcal{C} .
- 2) Soient P et P' les deux autres points de $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}$. Montrer que $(PP') \perp (OM)$ et que l'image de O par la réflexion d'axe (PP') est sur \mathcal{H} .

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:26]

◆ **AFF.36** X PC – 2002
Dans le plan (xOy) , un disque de rayon a posé sur la droite $y = 0$ roule sans glisser sous la droite $y = 2a$. Déterminer le lieu des points M décrits par le point B initialement en $(0, 2a)$. Calculer la longueur de l'arc entre deux points de rebroussement.

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:27] C'est une jolie cycloïde.

◆ **AFF.37** Centrale MP – 2002
Soit \mathcal{C} un cône de révolution de demi-angle au sommet $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ dans un espace affine euclidien de dimension 3. Déterminer l'ensemble des points de l'espace par lesquels on peut mener à \mathcal{C} deux plans tangents perpendiculaires.

◇ [Rec02/affine-r2.tex/geo-r2:28]

◆ **AFF.38 (Miroir parabolique)** (**) Centrale PC – 2003
On considère la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$. Soit D une droite parallèle à Oy, qui coupe \mathcal{P} en M. Notons Δ la droite symétrique de D par rapport à la normale à P en M.

- 1) Quel est le point fixe de Δ quand D varie ?
- 2) Interprétation géométrique et optique ?

◇ [Rec03/affine-r3.tex/r3:347] Il s'agit de la focalisation par un miroir parabolique.

On note $M(a, a^2)$ un point de la parabole, \mathbf{v} le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et \mathbf{u} un vecteur directeur de la normale à la parabole, donc porté par $\text{grad} F(a, a^2)$, où F est une équation cartésienne de la parabole :

$$F(x, y) = y - x^2.$$

Ainsi, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2a \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche le vecteur directeur du rayon réfléchi, c'est-à-dire le seul vecteur normé \mathbf{w} vérifiant $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ et qui ne soit pas égal à \mathbf{u} . Notant $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, cette dernière condition s'écrit simplement $\alpha \neq 0$. Enfin, l'égalité scalaire est

$$\beta - 2\alpha a = 1,$$

et la condition de normalisation $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ donnent l'équation

$$\alpha[4a + (1 + 4a^2)\alpha] = 0.$$

Puisque l'on demande $\alpha \neq 0$, cela revient à dire que

$$\alpha = -\frac{4a}{1 + 4a^2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1 - 4a^2}{1 + 4a^2}.$$

Enfin, ce rayon réfléchi coupe l'axe (Oy) en un point $F(0, y)$ tel que $\det(\text{MF}, \mathbf{w}) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} a & -4a \\ a^2 - y & 1 - 4a^2 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne (avec $a \neq 0$, cas trivial) $y = -1/4 = C^{\text{bc}}$.

◆ **AFF.39** (**) Centrale MP – 2004
On note \mathcal{C} la courbe d'équation $x^2 + y^2 + 1$.

- 1) Montrer que

$$\begin{cases} x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y = \frac{2t}{1 + t^2} \end{cases}$$

fournit une représentation paramétrique injective de \mathcal{C} privé du point $B(-1, 0)$.

- 2) On note $A = (0, 1)$ et $A' = (0, -1)$. Soit $M_0 \in \mathcal{C} \setminus \{A, A', B\}$ de paramètre t_0 . On note M_1 le point de \mathcal{C} qui vérifie : l'axe des abscisses, la tangente à \mathcal{C} en M_0 et la droite (AM_1) sont concourantes. Exprimer le paramètre t_1 de M_1 en fonction de t_0 . On notera $t_1 = f(t_0)$.
- 3) Étudier la suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de paramètres $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définis par $t_{n+1} = f(t_n)$.

◇ [Rec04/affine-r4.tex/r4:211]

◆ **AFF.40 (Transformations conformes)** (**) Centrale PC – 2004
On considère $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, Quelle est l'image par f du cercle trigonométrique ?

$$z \mapsto \frac{1}{1 + z + z^2}.$$

On considère $g : z \mapsto \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Quelle est l'image par g de la couronne $\{z \in \mathbb{C} ; 1 \leq |z| \leq 2\}$?

◇ [Rec04/affine-r4.tex/r4:14]

◆ **AFF.41** Centrale PC – 2004
Soient \mathcal{E} un plan affine euclidien et $r > 0$. Soient A et A' deux points de \mathcal{E} tels que $\|\mathbf{AA}'\| = 2r$. On note $C = \mathcal{C}(A, 3r)$ et $C' = \mathcal{C}(A', r)$.

- 1) Représenter ces deux cercles sur une même figure.
- 2) Soit $M \in \mathcal{E}$. Discuter de la valeur de $d(M; C)$ en fonction de la position de M.
- 3) Déterminer l'ensemble des points de \mathcal{E} tels que $d(M; C) = d(M; C')$ et le représenter sur la figure.

◇ [Rec04/affine-r4.tex/r4:25]

◆ **AFF.42 (Géométrie du triangle)** (**) Centrale PC – 2004
Soit E un plan affine euclidien. On considère trois points non alignés A, B et C. On note \mathcal{T} le triangle (ABC) .

- 1) On note G l'isobarycentre de A, B et C ; on note O le centre du cercle circonscrit à (ABC) . Trouver une démonstration de la construction géométrique de G et O.
- 2) On note H le point défini par $\mathbf{OH} = \mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC}$. Montrer que H est l'orthocentre de (ABC) . Montrer que H, G et O sont alignés.
- 3) On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On définit l'isobarycentre I du système de points pondérés $(A; a)$, $(B; b)$ et $(C; c)$. Montrer que I est le point d'intersection des bissectrices.

On rappelle que la bissectrice de sommet A est dirigée selon le vecteur $\frac{\mathbf{AB}}{\|\mathbf{AB}\|} + \frac{\mathbf{AC}}{\|\mathbf{AC}\|}$.

- 4) Trouver tous les triangles de E tels que, parmi les quatre points O, H, G et I, deux au moins soient confondus.

◇ [Rec04/affine-r4.tex/r4:103]

- 1) 3)
- 2) $\mathbf{OH} = 3\mathbf{OG}$ donc O, G et H sont alignés. 4)

◆ **AFF.43** (*) Centrale PC – 2004
On note $E = \mathbb{R}^3$ que l'on munit du produit scalaire canonique. On note Γ la courbe d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \\ 2y - 2y = 3. \end{cases}$$

- 1) Quelle est la nature de Γ ?
- 2) Que dire de la surface \mathcal{S} obtenue par révolution de Γ autour de (Oz) ?

◇ [Rec04/affine-r4.tex/r4:110]

◆ **AFF.44** Centrale PC – 2004
Dans un repère orthonormé, on considère l'hyperbole H d'équation $xy = k$ avec $k \in \mathbb{R}^+*$. Soit A \in H et B son symétrique par rapport à O. Le cercle de centre A passant par B coupe l'hyperbole en trois autres points M_1, M_2 et M_3 . Déterminer l'isobarycentre de $M_1M_2M_3$. En déduire que $(M_1M_2M_3)$ est un triangle équilatéral.

◇ [Rec04/affine-r4.tex/r4:34]

On écrit les coordonnées x_1, x_2 et x_3 de chacun des 3 points qui appartiennent à H donc $y_i = \frac{k}{x_i}$. Comme on est sur le cercle, on écrit $\|\mathbf{AB}\| = \|\mathbf{AM}_i\|$, ce qui donne 3 fois la même équation du 4^e degré qu'on sait scinder puisqu'on a la certitude qu'il y a bien 4 points donc 4 racines distinctes. On simplifie le polynôme par le monôme $(X + X_A)$ comme on sait que $X_B = -X_A$ est solution évidente. Alors on est supposé reconnaître, à un facteur près égal à 1 si on normalise le polynôme, deux des fonctions symétriques du polynôme de degré 3. On doit alors trouver $G = A$. Ensuite, on est supposé conclure avec une vague histoire de médianes et de médianes confondues ce qui impliquerait $M_1M_2M_3$ équilatéral. **À FINIR !!!**

◆ **AFF.45** (*) TPE PC – 2004
Dans le plan affine réel, on considère le triangle ABC.

A' est un point de (BC) , B' est un point de (AC) , C' est un point de (AB) . A₁ est le milieu de $[AA']$, B₁ est le milieu de $[BB']$, C₁ est le milieu de $[CC']$. Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si A₁, B₁ et C₁ sont alignés

◊ [Rec04/affine-r4.tex/r4:408]

On suppose que le triangle n'est pas plat (sinon tout est aligné).
On se place alors dans le repère cartésien $(A, \mathbf{AB}, \mathbf{AXC})$. On note ainsi les coordonnées des points :

$$\begin{array}{ccc} A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A' \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix} & B' \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} & C' \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \\ A_1 \begin{pmatrix} a/2 \\ (1-a)/2 \end{pmatrix} & B_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ b/2 \end{pmatrix} & C_1 \begin{pmatrix} c/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

On en déduit alors qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) A', B', C' sont alignés ;
 (b) $\det(\mathbf{A}'\mathbf{B}', \mathbf{A}'\mathbf{C}') = 0$;
 (c) $\begin{vmatrix} -a & c-a \\ b+a-1 & a-1 \end{vmatrix} = 0$;
 (d) $\begin{vmatrix} 1-a & c-a \\ b+a-1 & a \end{vmatrix} = 0$;
 (e) $4 \det(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_1\mathbf{C}_1) = 0$;
 (f) A_1, B_1, C_1 sont alignés.

◆ **AFF.46 (Orthoptique d'une parabole)** (★) CCP PC – 2004
 Trouver l'**orthoptique** d'une parabole, c'est-à-dire l'ensemble des points par lesquels on peut mener deux tangentes orthogonales à cette parabole.

◊ [Rec04/affine-r4.tex/r4:91]

(Cf. **AFF.21** pour l'orthoptique d'une ellipse.)

C'est une droite ! Pour le prouver, on va commencer par paramétrer la parabole par $y = \alpha x^2$ avec $\alpha > 0$.

Un point $M(x, y)$ du plan admet une tangente à la parabole en un point $T(\lambda, \alpha\lambda^2)$ de la parabole si et seulement si la pente du vecteur \mathbf{MT} est égale à la pente de la parabole, $2\alpha\lambda$, c'est-à-dire si

$$(\alpha\lambda^2 - y) = 2\alpha\lambda(\lambda - x)$$

et donc

$$\alpha\lambda^2 - 2\alpha\lambda x + y = 0.$$

λ ne peut être racine réelle de cette équation du deuxième degré que si $\Delta = 4\alpha^2 - 4\alpha y \leq 0$, c'est-à-dire si et seulement si (x, y) est situé sous la parabole.

Ensuite, dans ces conditions, on a même deux racines réelles ; on veut de plus que les pentes des deux tangentes aient un produit égal à -1 , c'est-à-dire que $2\alpha\lambda \cdot 2\alpha\lambda' = -1$; or le produit de racines est donné par « c/a », c'est-à-dire par y/α . On en déduit que $y = -1/4\alpha$.

Ainsi, la droite d'équation $y = -1/4\alpha$ est l'orthoptique de la parabole (la réciproque étant immédiate).

◆ **AFF.47** (★★) CCP PC – 2004
 On considère les deux droites

$$D_1 : 2x + 3y - z + 1 = x - y + 2z + a = 0$$

et

$$D_2 : 2x - y + 1 = z + 2bx - 2 = 0.$$

Pour quelles valeurs de a et b ces deux droites sont-elles coplanaires ? Donner dans ce cas l'équation du plan qui les contient.

◊ [Rec04/affine-r4.tex/r4:13]

◆ **AFF.48** (★★) CCP PC – 2004
 Condition nécessaire et suffisante pour que z , z^2 et z^5 soient alignés.

◊ [Rec04/affine-r4.tex/r4:407]

◆ **AFF.49** (★★) CCP PC – 2004
 Dans le plan euclidien muni d'une base orthonormée, on considère une parabole \mathcal{P} d'équation $y^2 = 2px$ avec $(p > 0)$.
 Le foyer F a pour coordonnées $(p/2, 0)$.
 La droite de pente $\lambda \neq 0$ passant par F coupe \mathcal{P} en deux points P_λ et Q_λ .
 Trouver le lieu des centres du cercle circonscrit au triangle $OP_\lambda Q_\lambda$.
 On utilisera la somme et le produit des ordonnées de P_λ et Q_λ sans chercher à expliciter les coordonnées de ces points.

◊ [Rec04/affine-r4.tex/r4:416]

◆ **AFF.50** (★★) CCP PC – 2005
 Soient A, B, C, D des points non coplanaires de l'espace. Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des réels différents de -1 .
 On définit les quatre points K, L, M, N par les relations

$$\mathbf{KA} + \alpha \mathbf{KB} = \mathbf{0} \quad \mathbf{LB} + \beta \mathbf{LC} = \mathbf{0} \quad \mathbf{MC} + \gamma \mathbf{MD} = \mathbf{0} \quad \mathbf{ND} + \delta \mathbf{NA} = \mathbf{0}.$$

1) Donner les équations cartésiennes dans le repère $(A, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD})$ des plans (KCD) , (LDA) , (MAB) et (NCD) .
 2) À quelle condition sur α, β, γ et δ les quatre plans sus mentionnés ont-ils un point commun ?

◊ [Rec05/affine-r5.tex/r5:126]

Quatrième partie

Informatique

Informatique

◆ INF.1 ENS Ulm MP – 2002

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme de degré n , représenté par le vecteur $[a_0, \dots, a_n]$.

- 1) Donner un algorithme pour calculer $P(X+1)$.
- 2) En étudiant la complexité, sachant que pour tout $i \in [1, n]$, on a $|a_i| \leq 2^m$ et que le coût de la multiplication de deux membres de m et n bits est $O(m \times n)$.
- 3) En utilisant l'idée que $P = a_0 + XQ(X)$ avec $\deg Q = n-1$, donner un meilleur algorithme et préciser sa complexité.
- 4) Transformer l'algorithme en récursivité terminale, puis en algorithme itératif.

◇ [Rec02/info-r2.tex/mod-r2:2]

◆ INF.2 ENS Cachan MP – 2002

Soient L_1 et L_2 deux langages rationnels reconnus par des automates déterministes possédant respectivement m_1 et m_2 états. Trouver n tel que

$$(|L_1|_n = |L_2|_n) \implies (L_1 = L_2),$$

où $|L|_n$ est l'ensemble des mots de L de longueur plus petite que n .

INDICATION : $(L_1 \setminus L_2) \cap (L_2 \setminus L_1)$ est-il rationnel ? (Oui.)

◇ [Rec02/info-r2.tex/mod-r2:1]

◆ INF.3 ENS MP – 2003

Soit $G = (S, A)$ un graphe. À chaque arête $a \in A$ est affectée une bande passante $b(a)$. Soit R un ensemble de chemins du graphe. On cherche à affecter un débit λ_r pour tout chemin $r \in R$ sans dépasser la bande passante, c'est-à-dire

$$\forall a \in A \quad \sum_{\substack{r \in R \\ (a \in R)}} \lambda_r \leq b(a).$$

- 1) Proposer un algorithme réalisant une telle affectation.
- 2) Quelle est sa complexité ?
- 3) Un des buts recherchés est de maximiser le débit total. Quels sont les problèmes liés à cette maximalisation ?
- 4) Une allocation « équitable au sens min-max » est une configuration maximisant le débit minimal λ_{\min} . Étudier les propriétés d'une telle configuration et proposer un algorithme renvoyant une allocation « équitable au sens min-max ».
- 5) Y a-t-il unicité d'une telle allocation ?
- 6) Quelles remarques vous inspire ce dernier résultat ?

◇ [Rec03/info-r3.tex/r3:63]

◆ INF.4 ENS MP – 2003

- 1) Donner un algorithme de tri d'un ensemble à n éléments.
- 2) Donner un minorant du nombre C_n de comparaisons à effectuer pour trier n éléments.
- 3) Ce minorant est-il atteint pour $n = 3$?
- 4) En utilisant uniquement $\text{sort}(a, b)$ où a et b sont deux variables mutables, et qui renvoie (a, b) de telle sorte que $a = \min(a, b)$ et $b = \max(a, b)$, donner un algorithme optimal triant 4 éléments.
- 5) En suivant la même idée, donner un algorithme triant $n = 4k$ éléments.

◇ [Rec03/info-r3.tex/r3:416]

◆ INF.5 ENS MP – 2003

On étudie des graphes connexes non orientés, aux arêtes pondérées, de la forme $G = (S, A, \omega)$ où $A \subset S \times S$ et $\omega : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) Trouver un algorithme prenant en argument un sous-ensemble d'arêtes $H \subset A$ sans cycle, une arête $a \in A$, et qui renvoie vrai si et seulement si, en ajoutant a à H , on n'a toujours pas de cycle.
- 2) On appelle **arbre recouvrant de G** un graphe inclus dans G , sans cycle, connexe, qui passe par tous les sommets de G . Construire un arbre recouvrant minimal (c'est-à-dire de poids minimal).

INDICATION : Notons $S = H_1 \cup H_2$ où H_1 et H_2 sont disjoints. On note m une arête de H_1 à H_2 de poids minimal. Montrer qu'il existe un arbre recouvrant minimal contenant m . Conclure.

◇ [Rec03/info-r3.tex/r3:423]

◆ INF.6 ENS Ulm/Lyon MP – 2003

Soit \mathcal{A} un alphabet comprenant deux lettres distinctes a et b . On définit une transformation $\mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ qui

- i) choisit une occurrence de ab ;
- ii) la remplace par bba .

(Si ab n'apparaît pas, le mot reste inchangé.)

- 1) Écrire un algorithme effectuant cette transformation. Écrire un algorithme effectuant son itération. Écrire un algorithme effectuant son itération jusqu'à l'arrivée d'une suite constante.
- 2) Démontrer la terminaison d'un tel algorithme. Où intervient l'importance du choix de l'occurrence de ab ?
- 3) Comment les résultats précédents sont-ils changés lorsque l'on remplace ab par $bbaa$ (et non bba) ?

◇ [Rec03/info-r3.tex/r3:285]

◆ INF.7 ENS Cachan MP – 2003

On considère l'alphabet $X = \{0, 1\}$, l'ensemble d'états $Q = \{0, \dots, n-1\}$, $I = F = \{0\}$ et les transitions

$$T = \{(i, 0, 0), (i, 0, i); 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(i, 1, i+1); 0 \leq i \leq n-2\} \cup \{(n-1, 1, 0)\}.$$

Montrer que le déterminisé de l'automate $\mathcal{A} = (X, Q, T, I, F)$ possède exactement 2^n états.

◇ [Rec03/info-r3.tex/r3:137]

◆ INF.8 ENS MP – 2003

Soit A un anneau quelconque. Soit $P \in A[X]$.

- 1) En utilisant une variante de la méthode de Hörner, trouver un algorithme pour déterminer les coefficients de $P(X+c)$.
- 2) Quelle est la complexité de cet algorithme ?
- 3) On effectue la division euclidienne $P(X) = Q(X) \cdot (X-a) + R(X)$. Montrer que la connaissance de R permet de connaître $P(a)$.
- 4) Étant donnés $(X-a)$, $(X-b)$, $(X-a)(X-b)$, déterminer $P(a)$ et $P(b)$ en n'effectuant que des divisions euclidiennes.
- 5) Soit (c_1, \dots, c_n) une famille de n éléments, avec $n > \deg P$. Déterminer une méthode pour calculer $P(c_1), \dots, P(c_n)$.

◇ [Rec03/info-r3.tex/r3:350]

◆ INF.9 ENS Cachan MP – 2003

On considère l'alphabet $X = \{a, b\}$. Soit $n \geq 1$. On note L_n l'ensemble des mots de X^* contenant un « a » en n -ième position à partir de la droite. Montrer que tout automate déterministe complet reconnaissant L_n possède au moins 2^n états.

INDICATION : Considérer $\{\delta(0, w); w \in X^* \text{ et } |w| = n\}$ et raisonner par l'absurde.

◇ [Rec03/info-r3.tex/r3:138]

◆ INF.10 ENS Cachan MP – 2003

Soit \mathcal{A} un automate. On définit $L'(\mathcal{A})$ comme l'ensemble des mots $u \in X^*$ tels que tout chemin dans \mathcal{A} partant d'un état initial et étiqueté par u aboutit à un état final. Montrer que $L'(\mathcal{A})$ est reconnaissable.

INDICATION : S'inspirer de la méthode de détermination d'un automate.

◇ [Rec03/info-r3.tex/r3:139]

◆ INF.11

ENS Cachan MP – 2003

On considère un arbre en donnant pour chaque nœud interne la liste de ses successeurs, sans notions d'ordre. Les nœuds sont numérotés de 1 (la racine) à n pour les nœuds internes, puis à partir de $n + 1$ pour les feuilles.

Chaque feuille porte un élément e_i pris dans un ensemble dont on peut comparer les éléments, mais non nécessairement les ordonner.

On demande d'écrire une fonction permettant de savoir si deux arbres sont égaux, qui prend deux arbres en argument et retourne un booléen. L'égalité de deux arbres tient compte de la structure des arbres, mais pas de l'ordre des fils de chaque nœud ; elle tient compte aussi des informations portées par les feuilles.

On demande d'écrire au préalable une fonction permettant de savoir si deux arbres possèdent les mêmes éléments sur leurs feuilles, chaque élément apparaissant le même nombre de fois sur chaque arbre.

On évaluera leur complexité en fonction du nombre de nœuds internes.

◇ [Rec03/info-r3.tex/r3:142]

◆ INF.12 (Nombres de Hamming)

ENS MP – 2004

Les **nombres de Hamming** sont les $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ pour $a, b, c \in \mathbb{N}$.

- 1) Donner les 10 premiers nombres de Hamming.
- 2) L'objectif est d'écrire une fonction donnant le n -ième nombre de Hamming.
 - a) Écrire une fonction qui teste si un nombre s'écrit sous la forme q^k , où $q, k \in \mathbb{N}$. Quelle est sa complexité ?
 - b) Écrire une fonction de n qui donne le nombre de nombres de Hamming inférieurs ou égaux à n . Quelle est sa complexité ?
 - c) Écrire une fonction qui donne le n -ième nombre de Hamming. Complexité ?

◇ [Rec04/info-r4.tex/r4:142]

◆ INF.13

ENS Cachan MP – 2004

Soit A un alphabet. Soit w un mot compressé, $w = w_1 w_2 \dots w_n$ avec

$$w_i = \begin{cases} a_j \in A & \text{ou} \\ (b_i, e_i) & \text{avec } 0 < b_i \leq e_i < i. \end{cases}$$

On définit le mot décompressé $\bar{w} = \bar{w}_1 \bar{w}_2 \dots \bar{w}_n = u_1 u_2 \dots u_n$ défini par

$$\bar{w}_i = \begin{cases} a_j & \text{si } w_i = a_j \\ u_{b_i} \dots u_{e_i} & \text{si } w_i = (b_i, e_i). \end{cases}$$

- 1) Calculer le mot w décompressé, où $w = \mathbf{a b (1, 1) (2, 3) (1, 4) c (4, 6)}$.
- 2) Majorer et minorer la taille de \bar{w} en fonction de celle de w .
- 3) Soit L un langage. Proposer un algorithme pour vérifier que $\bar{w} \in L$ sans calculer \bar{w} . L'algorithme devra avoir une complexité polynomiale par rapport à la taille de w .

◇ [Rec04/info-r4.tex/r4:241]

$$2) n \leq |\bar{w}| \leq 2^{n-1}.$$

3)

1) $\mathbf{a b a ba ababa c baababac}$.

Exercices avec Maple

Algebre

◆ **MAPLE.1 (Polynômes de Laguerre)** (**) Centrale PC – 2002

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) ; t \mapsto f^2(t)e^{-t} \in L^1(\mathbb{R}^+) \right\}.$$

1) Montrer que E a une structure d'espace préhilbertien lorsqu'il est muni de l'application bilinéaire définie par

$$\langle f|g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt.$$

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

Montrer que les L_n sont des fonctions polynômiales et appartiennent à E.

3) Expliciter L_n (utilisation de MAPLE souhaitable).

4) Calculer $\langle L_m|L_n \rangle$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

◇ [Divers/mapleexoalgebre.tex/bil-r2:11m]

1) Il faut d'abord montrer que E est un espace vectoriel, ce qui ne pose de difficulté qu'en un point. Soient $f, g \in E$. Alors $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$ et deux termes sont déjà intégrables lorsqu'on les multiplie par e^{-x} . De $(f-g)^2 \geq 0$ on tire $2fg \leq f^2 + g^2$. De $(f+g)^2 \geq 0$ on tire $-2fg \geq f^2 + g^2$ donc au total

$$|2fg| \leq f^2 + g^2$$

ce qui montre que $x \mapsto 2f(x)g(x)e^{-x}$ est intégrable. Notamment, $(f+g) \in E$, et on a montré que E est un espace vectoriel.

De plus, l'application bilinéaire est correctement définie (on vient de le montrer en sus), elle est clairement définie positive par la continuité des fonctions.

2) On utilise la formule de Leibniz de dérivation d'un produit.

3) On obtient ainsi une expression explicite :

$$L_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!(n-k)!} \binom{n!}{k!} x^k.$$

◆ **MAPLE.2** Navale MP – 2002

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) M est inversible ;
- (b) il existe une matrice O orthogonale et une matrice S symétrique à spectre inclus dans \mathbb{R}^{*+} telles que $M = OS$.

INDICATION : On pourra étudier ${}^t M \cdot M$.

2) Étudier l'unicité de la décomposition.

3) À l'aide de MAPLE, trouver cette décomposition pour une matrice 3×3 donnée.

◇ [Divers/mapleexoalgebre.tex/bil-r2:28m]

1) On suppose que $M \in GL_n(\mathbb{R})$. La matrice ${}^t M \cdot M$ est symétrique, à valeurs propres strictement positives (définie positive). On peut donc la diagonaliser via une matrice orthogonale, c'est-à-dire qu'il existe Δ diagonale à coefficients strictement positifs et $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^t M \cdot M = \Omega \Delta \Omega^{-1}$. On peut écrire $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et poser $D = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} {}^t M \cdot M &= \Omega \Delta \Omega^{-1} = (\Omega D) ({}^t D \Omega) \\ &= \underbrace{\Omega D^t \Omega^{-1}}_{=S} \underbrace{\Omega D \Omega^{-1}}_{=S} = S^t S \end{aligned}$$

On pose alors

$$S = \Omega D \Omega^{-1} \quad \text{et} \quad O = M S^{-1}.$$

On vérifie simplement que S est symétrique définie positive, que $OS = M S^{-1} S = M$ et que O est orthogonale puisque

$${}^t O \cdot O = {}^t S^{-1} M M S^{-1} = S^{-1} (SS) S^{-1} = I_n.$$

On a donc montré l'existence. La réciproque est immédiate.

2) Pour l'unicité, supposons $A = O_1 S_1 = O_2 S_2$. Alors ${}^t A \cdot A = S_1^2 = S_2^2$. Hummm, compliqué. ... (Cf Monier page 290).

◆ **MAPLE.3** S' Cyr MP – 2002

On se donne quatre réels a, b, c, d . Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose

$$\phi_1(P) = P(a) \quad \phi_2(P) = P'(b) \quad \phi_3(P) = P''(c)$$

et

$$\phi_4(P) = P'''(d).$$

À l'aide de MAPLE, donner la matrice de la base duale associée à (ϕ_1, \dots, ϕ_4) .

◇ [Divers/mapleexoalgebre.tex/al-r2:25m]

◆ **MAPLE.4** Centrale MP – 2002

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$. Soient $a < b < c$ trois réels.

1) Donner une CNS d'existence de réels A, B, C tels que, pour tout $Q \in E$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = A Q(a) + B Q(b) + C Q(c).$$

2) On prend $a = -1$ et $c = 1$. Trouver b pour que la formule précédente soit également valable pour les polynômes de degré 3.

3) Trouver des valeurs α, β, γ pour que la formule suivante fonctionne pour des polynômes de degré le plus grand possible :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = A Q(\alpha) + B Q(\beta) + C Q(\gamma).$$

On pourra utiliser MAPLE.

◇ [Divers/mapleexoalgebre.tex/al-r2:24m]

Tout d'abord, on remarque qu'il n'y a pas de problèmes de convergence des intégrales ; en fait,

$$\phi(Q) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Q(\cos(x)) dx$$

en posant $t = \cos x$. On note ϕ l'application linéaire associée.

1) Ces trois réels existent toujours. En effet, les trois formes linéaires sur $\mathbb{R}_2[X]$ $Q \mapsto Q(a)$, $Q \mapsto Q(b)$ et $Q \mapsto Q(c)$ forment une famille libre (la matrice de leur coordonnées dans la base duale de la base canonique est la matrice de Vandermonde associée à a, b et c donc inversible car $a < b < c$), c'est donc une base des formes linéaires. Comme ϕ est bien une forme linéaire, on a l'existence de A, B et C.

2) On remarque que ϕ est paire : si P est impair alors $\phi(P) = 0$. L'espace des formes linéaires paire sur $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 2 (il suffit de connaître $f(1)$ et $f(X^2)$). On remarque que $s : Q \mapsto Q(1) + Q(-1)$ et $t : Q \mapsto Q(0)$ sont paires non nulles et non colinéaires ($s(X^3) = 1 \neq 0 = t(X^3)$), c'est donc une base des formes linéaires paires. En conclusion, comme précédemment, $b = 0$ convient.

3) Guidé par la question précédente, on cherche une valeur de a pour laquelle sur $\mathbb{R}_4[X]$, ϕ est de la forme $A(Q(a) + Q(-a)) + BQ(0)$. En résolvant les systèmes associés, on trouve $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $A = B = \frac{1}{3}$. Le résultat est impossible pour $\mathbb{R}_5[X]$: la parité de ϕ impose (avec les notations de l'énoncé) $Aa^i + Bb^i + c^i = 0$ pour $i = 1, 3, 5$, le déterminant de ce système étant non nul, on aurait $A = B = C = 0$ donc $\phi = 0$. Le plus haut degré est 4.

◆ **MAPLE.5** Centrale MP – 2001

Montrer que $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ est une isométrie négative de \mathbb{R}^3 si et seulement si a, b, c sont racines de $P(x) = x^3 + x^2 = p$

avec $p \in \left[0; \frac{4}{27} \right]$. Étudier en détail le cas $p = \frac{2}{27}$.

◇ [Divers/mapleexoalgebre.tex/al-r:34m]

Il faut écrire $\det A = -1$ et ${}^t M \cdot M = I_n$, ce qui est équivalent à $a+b+c = -1$ et $ab+ac+bc = 0$, c'est-à-dire (en considérant les fonctions symétriques) qu'ils sont racines d'un polynôme

$$P = X^3 + X^2 - p.$$

De plus, pour que ce polynôme admette trois racines réelles (non forcément distinctes), il faut (étudier la fonction associée) $0 \leq p \leq \frac{4}{27}$.

◆ **MAPLE.6** Centrale MP – 2001

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}[X] ; \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0\}$.

1) Montrer que F est stable par addition et multiplication. Si $P \in F$, que peut-on dire du degré de P ?

2) Montrer que tout polynôme $P \in F$ peut s'écrire sous la forme de deux polynômes au carré. (On pourra commencer par une étude dans le cas où $\deg P = 2$.)

3) (Avec MAPLE) Exemple de décomposition en carrés d'un polynôme de degré 4 à quatre racines complexes.

◇ [Divers/mapleexoalgebre.tex/alg-r:7m]

2) On a $(X-a)(X-\bar{a}) = (X-\Re a)^2 + (\Im a)^2$. De plus,

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

ce qui permet de commencer une récurrence.

1) $\deg P$ est pair.

◆ **MAPLE.7** S¹ Cyr PC – 2002
 On pose

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} x^n & (x+1)^n & \cdots & (x+n)^n \\ (x+1)^n & (x+2)^n & \cdots & (x+n+1)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x+n)^n & (x+n+1)^n & \cdots & (x+2n)^n \end{pmatrix}.$$

Calculer (avec MAPLE) $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ et Δ_3 .
 En déduire une conjecture sur Δ_n .

◇ [Divers/mapleexoalgebre.tex/al-r2:14m]
 On effectue quelques calculs, on voit que ça avance très vite, on songe à de la factorielle, mais ça n'est pas assez, donc de la factorielle à un certain puissance, puis puissance n , puis puissance $n+1$ et là ça marche au signe près, on ajoute du $(-1)^{n(n+1)/2}$.
 Si on note V le déterminant de Vandermonde, le résultat est

$$(-1)^{n(n+1)/2} V(0, 1, \dots, n)^2 \prod_{k=0}^n C_n^k.$$

On calcule $D_n P^{-1} = ((x+i)^j)$ et donc

$$\Delta_n = (-1)^{n(n+1)/2} V(x, x+1, \dots, x+n) V(0, 1, \dots, n) \prod_{k=0}^n C_n^k,$$

mais la formule de V montre que ça ne dépend pas de x , le résultat final est

$$\Delta_n = (-1)^{n(n+1)/2} (n!)^{n+1}.$$

L'idée consiste à remarquer que $(X^n, \dots, (X+n)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice de passage dans la base canonique P est $(C_n^k i^{n-j})$, son déterminant est

◆ **MAPLE.8** Centrale MP – 2002
 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a + \frac{1}{a} & a^2 + \frac{1}{a^2} \\ a + \frac{1}{a} & 1 & a + \frac{1}{a} \\ a^2 + \frac{1}{a^2} & a + \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{C}^*$.

- Donner une condition sur a pour que A soit diagonalisable. (On pourra utiliser MAPLE).
- Calculer la matrice de passage de A à la matrice diagonale.

◇ [Divers/mapleexoalgebre.tex/red-r2:38m]

◆ **MAPLE.9** Centrale PC – 2002
 On pose $M(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta & 0 \end{pmatrix}$ où $\theta \in [0; 2\pi]$. Le but de l'exercice est de trigonaliser M , c'est-à-dire de l'écrire sous la forme $M = PRP^{-1}$ où $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et R est diagonale ou triangulaire supérieure.

- Pourquoi peut-on se restreindre à $]0; \pi[$?
- Calculer le polynôme caractéristique de M (MAPLE).
- Dans quel cas les valeurs propres sont-elles simples ?
- Exprimer alors R et P .
- Terminer l'exercice.

◇ [Divers/mapleexoalgebre.tex/red-r2:18m]

- Périodicité et parité de sinus, et le fait que le cas $\theta = 0$ est trivial.
- On trouve $(X + \sin \theta)(X + \sin 2\theta)(X - \sin \theta - \sin 2\theta)$.
 En fait, on peut remarquer que $-\sin \theta$ et $-\sin 2\theta$ sont valeurs propres ($A - \lambda I_3$ est clairement non inversible pour ces deux valeurs). Puisque l'on peut (au moins dans \mathbb{C}) triangulariser A , et puisque $\text{tr } A = 0$, on en déduit que le troisième valeur propre est $\sin \theta + \sin 2\theta$.
 Ainsi, dans le cas où $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \frac{\pi}{3}$, on a
$$Sp A = \{-\sin \theta, -\sin 2\theta, \sin \theta + \sin 2\theta\}$$

ce qui montre que $\chi_A = (X + \sin \theta)(X + \sin 2\theta)(X - \sin \theta - \sin 2\theta)$, et par continuité cette formule reste vraie sur \mathbb{R} .
- On demande à MAPLE les conditions pour que ces trois nombres soient distincts, grâce à l'ordre solve. On obtient, dans $]0; \pi[$:
$$\theta \notin \{0, \frac{\pi}{3}, \pi - \text{Arc tan } \sqrt{15}\}.$$

4) On peut utiliser jordan par exemple, ou bien trouver à la main les vecteurs propres : $(1, -1, 0)$ pour $\lambda = -\sin \theta$, $(0, 1, -1)$ pour $\lambda = -\sin 2\theta$ et le dernier est un peu plus compliqué : en notant $a = \sin \theta$ et $b = \sin 2\theta$, c'est

$$t \begin{pmatrix} a + b + \frac{b^2}{a}, 1 + \frac{b}{a} - \frac{a + b + \frac{b^2}{a}}{a + 2b} \end{pmatrix}$$

Ce dernier vecteur n'a de sens que si $a \neq 0$ et $a + 2b \neq 0$. Notamment, dans le cas où $\theta = \pi - \text{Arc tan } \sqrt{15}$, il n'est pas défini.

◆ **MAPLE.10** Centrale MP – 2002
 Soit $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{Q})$ telle que $M^5 = I_3$.

- Montrer que $M = I_3$.
- Trouver une matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^5 = I_3$ et $M \neq I_3$.

◇ [Divers/mapleexoalgebre.tex/red-r2:40m]

- On diagonalise dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$: $M \sim \text{diag}(\lambda, \mu, \nu)$, où $\lambda, \mu, \nu \in \Omega = \{e^{2ik\pi/5} ; k = 0, \dots, 4\}$. Or $(\det M)^5 = 1$ donc $\det M = 1$ (c'est un rationnel). Donc $\lambda = 1$ et $\nu = \bar{\mu}$. De plus $\text{tr}(M) \in \mathbb{Q}$ donc $\mu = \nu = 1$ en vertu du fait que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

sont irrationnels.
 En effet, MAPLE donne $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ce que l'on peut vérifier en

prenant le polynôme $4X^2 - 2X + 1$ et en l'appliquant au cosinus...
 Ou en revenant à la base : on remarque que $\pi = 2\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{5}$ et donc $\cos\left(2\frac{2\pi}{5}\right)^2 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)^2$. Si $x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, il vérifie $\frac{1+x}{2} = (2x^2 - 1)^2$. Cette identité marche aussi pour 0 et $\frac{2\pi}{3}$; on en déduit que 1 et $\frac{-1}{2}$ sont également solution, ce qui permet de factoriser pour obtenir $4x^2 + 2x - 1 = 0$. x devant de plus être positif, on obtient $x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

- Dans \mathbb{R} , c'est simple, on prend dans un plan une rotation d'angle $2\pi/5$ et sur une droite l'identité.

◆ **MAPLE.11** Centrale MP – 2002
 On considère $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$.

- Calculer $A \cdot {}^tA$, en déduire $\det A$ et calculer la polynôme caractéristique de A .
- A est-elle diagonalisable dans \mathbb{C} ? Si oui, fournir une base de vecteurs propres ? (On fera le lien entre A et tA .)
- Montrer qu'il existe $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & a \end{pmatrix}.$$

◇ [Divers/mapleexoalgebre.tex/red-r2:46m]

◆ **MAPLE.12** Centrale PC – 2002
 On pose $S_0 = 1, S_1 = X$ et, pour tout entier $p \geq 2$: $S_p = \prod_{k=0}^{p-1} (X + 2k)$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(S_p)_{0 \leq p \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Afficher, à l'ordinateur, les polynômes S_p pour p variant de 1 à 10.
- On note

$$f(P)(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(-2n)}{n!} x^n \quad (*)$$

- Montrer que $P(f)(x)$ existe pour tout polynôme P et tout réel x .
- Afficher à l'ordinateur les valeurs de $f(S_p)(x)$ pour p allant de 1 à 10.
- Montrer que $(*)$ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

- Trouver les valeurs propres de l'endomorphisme f .

◇ [Divers/mapleexoalgebre.tex/red-r2:30m]

- Ce sont des polynômes échelonnés.
- Et puis quoi encore !
 - Par linéarité, il suffit de le faire pour les monômes X^k : on vérifie que les séries convergent normalement.

b) On calcule $f(S_p)(x) = (-1)^p 2^p x^p$.
 c) Clair par linéarité et le fait que (S_p) est une base.

- Les valeurs propres sont $\{(-2)^p ; p \in \mathbb{N}\}$: on vérifie que f laisse $\mathbb{R}_n[X]$ invariant puis on utilise $X^p = S_p + a_{p,p-1}S_{p-1} + \dots + a_{p,0}S_0$. La matrice de f est diagonale dans la base S_p .

◆ **MAPLE.13** S¹ Cyr MP – 2003
 On donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et on cherche à déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$. Proposer une conjecture, et la démontrer.

◇ [Divers/mapleexoalgebre.tex/r3:123m]

On s'aperçoit que les coefficients divergent.
 Les valeurs propres sont $6, 2, -2 \pm 2i$. Seule 6 nous intéresse. On diagonalise,

$$P^{-1} \text{diag}(6, 0, 0, 0)P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = P^{-1} \text{diag}(6, 2, -2 + 2i, -2 - 2i)P$
 ce qui montre que les tous coefficients de A ont un terme en $\frac{6^n}{4}$, donc ils tendent bien vers $+\infty$.

et si on ne s'occupe que des valeurs liées à la valeur propre 6, on remarque que

Analyse

◆ **MAPLE.14** ENSAM PT – 2001
 On considère l'équation différentielle : $x(1+x^2)y' + (1-x^2)y = 1 - 3x^2$. Trouver les solutions sur \mathbb{R} . Tracer quelques courbes intégrales. Existe-t-il une solution continue sur \mathbb{R} ? Montrer que toutes les tangentes aux courbes intégrales à l'abscisse 2 ont un point d'intersection commun.

◇ [Divers/mapleexoanalyse.tex/edo-r:6m]

◆ **MAPLE.15** Centrale MP – 2003
 On définit la suite de nombres complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2 \\ u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) Calculer u_n pour $n \leq 10$ pour $(u_0, u_1) = (-1, -1)$ puis pour $(u_0, u_1) = (2, 1)$. Commentaires ?
 2) On définit la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ en supposant son rayon de convergence $R > 0$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f et conclure.
 3) On définit la série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} z^n$. Minorer le rayon de convergence de cette série entière. Trouver une équation différentielle vérifiée par g et conclure.

◇ [Divers/mapleexoanalyse.tex/r3:83m]

◆ **MAPLE.16** Centrale MP – 2003
 Trouver les solutions de l'équation différentielle $x(x+1)y'' + (x+1)y' - 2y = 0$.

◇ [Divers/mapleexoanalyse.tex/r3:126m]

◆ **MAPLE.17** Centrale MP – 2003
 On pose $E(t) = t^2(1-t)y''(t) - t(1+t)y'(t) + y(t)$.

1) Proposer plusieurs manières de résoudre $E(t) = 0$, et en appliquer une.
 2) Quelles solutions sont de classe \mathcal{C}^∞ pour $t > 0$?

◇ [Divers/mapleexoanalyse.tex/r3:259m]

◆ **MAPLE.18** Centrale MP – 2003
 Pour tout $x > 0$ on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt} - 1} dt$.

1) Montrer que f est continue.
 2) Développer f en série de fractions rationnelles.
 3) Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2x}$.

◇ [Divers/mapleexoanalyse.tex/r3:210m]

◆ **MAPLE.19** Centrale PC – 2003
 On pose $P(x, y) = \frac{\sin x}{\operatorname{ch} y - \cos x}$.

1) Calculer le laplacien ΔP , soit avec MAPLE, soit en posant $z = x + iy$ et $\tilde{P}(x, y) = \frac{2}{1 - e^{iz}}$.
 2) On pose $I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) dy$. Calculer $I(x)$.

INDICATION : $I(x) = 2\mathcal{I}m \int_0^{+\infty} \frac{2}{1 - e^{iz}} dy$.

3) Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $t \mapsto e^{-|t|} \phi(t)$ soit intégrable sur \mathbb{R} . Montrer que

$$(x, y) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y - t) \phi(t) dt$$

est continue.

◇ [Divers/mapleexoanalyse.tex/r3:344m]

◆ **MAPLE.20** Centrale MP – 2003
 On définit la suite de nombres complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2 \\ u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) Calculer u_n pour $n \leq 10$ pour $(u_0, u_1) = (-1, -1)$ puis pour $(u_0, u_1) = (2, 1)$. Commentaires ?
 2) On définit la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ en supposant son rayon de convergence $R > 0$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f et conclure.
 3) On définit la série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} z^n$. Minorer le rayon de convergence de cette série entière. Trouver une équation différentielle vérifiée par g et conclure.

◇ [Divers/mapleexoanalyse.tex/r3:83m]

◆ **MAPLE.21** (★★★) Centrale PC – 2004
 On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. On définit sur D la fonction f donnée par

$$f : (x, y) \mapsto x + y - (x^2 + xy + y^2).$$

1) Montrer que $f \geq 0$. Déterminer les points d'annulation de f .
 2) Montrer que f admet un maximum sur D et déterminer les points où celui-ci est atteint.
 3) Avec MAPLE ou Mathematica, en utilisant `plot3d` et `piecewise`, tracer $z = f(x, y)$ sur $[0; 1]^2$ en prolongeant f en posant $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \in [0; 1]^2 \setminus D$.

◇ [Divers/mapleexoanalyse.tex/r4:71m]

- 1) $x^2 + 2x + y^2 = (x+y)^2 \leq x+y$ et $-xy \leq 0$, donc $x^2 + xy + y^2 \leq x+y$ et donc $f(x, y) \geq 0$. Il y a égalité si $xy = 0$ et $x + y = 1$, c'est-à-dire pour $(1, 0)$ et $(0, 1)$.
 2) D est compact et f est continue, donc atteint son maximum. On calcule les dérivées partielles, $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2x - y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - x - 2y$, qui

s'annulent toutes deux pour $x = y = 1/3$. La maximum vaut alors $1/3$.
 Mais il faut vérifier ce qui arrive sur ∂D . Si $x = 0$, $f(0, y) = y - y^2$ dont le maximum est $1/4$. De même si $y = 0$. Enfin, si $x = 1 - y$, on a $f(1 - y, y) = y(1 - y)$ dont le maximum est encore $1/4$.
 Ainsi, il n'y a pas d'autre maximum qu'au point $(1/3, 1/3)$.

3) Arg.

◆ **MAPLE.22 (Polynômes de Tchebychev)** (★★) Centrale PC – 2004
 (Avec Maple)
 On définit la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes par

$$\begin{cases} T_0 = 1, & T_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}^* & T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1} \end{cases}$$

1) Montrer l'unicité d'une telle famille, trouver le degré de T_n et son coefficient dominant.
 2) Avec Maple, calculer les polynômes T_0, \dots, T_{10} et les représenter sur un même graphe.
 3) Montrer que $T_n(\cos t) = \cos(nt)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0; \pi]$.
 4) On munit $E = \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

a) On définit le polynôme $t_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$. Calculer $\|t_n\|_\infty$.
 b) Soit P un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1. Montrer que $\|P\| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ à l'aide du polynôme $P - t_n$.

5) En déduire la famille (a_0, \dots, a_n) de réels de $[-1; 1]$ qui minimise $\left\| \prod_{i=0}^n (X - a_i) \right\|_\infty$.

◇ [Divers/mapleexoanalyse.tex/r4:82m]

Cf **POL.14** pour une étude générale des polynômes et **FAM.14** page 229

- 1) $\deg(T_n) = n$ et $\operatorname{val}(T_n) = 2^n$.
 2)
 3) Récurrence immédiate.
 4) a) $\|t_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$.

b) Récurrence, en notant que $P - t_n$ est de degré $n - 1$ donc $\|P - t_n\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-2}}$ et donc $\|P\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-2}} - \|t_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$.
 5) Le polynôme est minimal pour $P = t_n$, donc les a_i sont les racines du polynôme T_n , qui s'annule en $\cos(\operatorname{Arc} \cos(nt))$.

◆ MAPLE.23

(★★)

Centrale PC – 2004

(Avec Maple)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = 4u_n - u_n^2 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Quelles sont les limites éventuelles de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- 2) Étudier les cas $a < 0$ et $a \in]4; +\infty[$.
- 3) Montrer qu'il existe une infinité de réels a telle que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit constante à partir d'un certain rang.
- 4) Avec Maple, créer un graphique avec a en abscisse et les valeurs (u_0, \dots, u_{20}) en ordonnée.
Traiter notamment les cas $a = 0, 5$, $a = 1, 5$, $a = 2, 5$.
- 5) On pose $a = 4 \sin^2(\alpha)$, où $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$.
 - a) Déterminer l'expression de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est p -périodique.

◇ [Divers/mapleexoanalyse.tex/r4:111ln]

Table des matières

I Algèbre	3
Vocabulaire ensembliste, applications	5
Dénombrement	11
Arithmétique dans \mathbb{Z}	15
Algèbre générale	23
<i>Manipulations algébriques</i>	23
<i>Groupes</i>	24
<i>Anneaux</i>	30
<i>Corps</i>	34
Polynômes	37
Fractions rationnelles	57
Espaces vectoriels	59
Applications linéaires	65
<i>Projecteurs</i>	68
<i>Endomorphismes nilpotents</i>	73
Dimension finie, rang	77
<i>Généralités</i>	77
<i>Rang</i>	82
<i>Trace</i>	88
Dualité	91
Matrices, calcul matriciel	99
<i>Équations matricielles</i>	116
Déterminants	121
<i>Généralités</i>	121
<i>Calcul de déterminants</i>	129
Diagonalisabilité d'endomorphismes et de matrices	139
<i>Polynômes d'endomorphismes</i>	139
<i>Éléments propres</i>	140
<i>Diagonalisabilité</i>	155
<i>Produits tensoriels</i>	168
Polynôme caractéristique	171
Réduction d'endomorphismes et de matrices	175
Réduction : exercices plus théoriques	199
Espaces préhilbertiens & euclidiens	215
<i>Formes bilinéaires, produits scalaires, bases orthonormées</i>	215
<i>Cauchy-Schwarz</i>	223
Familles orthogonales	225
Projections orthogonales	233
Adjoint	239
Endomorphismes symétriques — réduction	243
Endomorphismes orthogonaux (isométries)	263
<i>Géométrie euclidienne du plan et de l'espace</i>	270
Espaces hermitiens	275
Formes quadratiques	281
Réduction des coniques	285
Quadriques	287
II Analyse	289
Réels	291
Complexes, majorations, ...	295
Suites réelles ou complexes	301
Fonctions, continuité	315
<i>Fonctions usuelles (Maths. Sup)</i>	315
<i>Fonctions continues</i>	321

<i>Équations fonctionnelles</i>	327
<i>Fonctions convexes</i>	331
Fonctions dérivables	335
Développements limités	345
<i>Calculs de limites</i>	345
<i>Développements limités, équivalents</i>	347
Topologie	353
<i>Ouverts, fermés</i>	353
<i>Densité</i>	357
<i>Compacts</i>	358
Normes ; Équivalence des normes	361
Suites à valeurs dans un e.v.n.	371
Suites de Cauchy, espace complets	375
Suites définies par une relation de récurrence	381
Algèbres de Banach	391
Continuité dans un evn	393
<i>Normes linéaires subordonnées</i>	402
Sommabilité des séries	407
<i>Séries doubles, familles sommables</i>	422
Calculs de sommes de séries	425
Séries : exercices plus théoriques	435
Recherche d'équivalents de séries	449
Produits infinis	453
Suites de fonctions	455
Séries de fonctions	465
Rayon de convergence d'une série entière	493
Fonctions définies par une série entières	499
Développement en série entière	521
Séries de Fourier	533
<i>Calcul de sommes de séries</i>	533
<i>Exercices plus théoriques</i>	545
Intégrale sur un segment	553
<i>Sommes de Riemann</i>	553
<i>Formules de Taylor</i>	558
<i>Limites d'intégrales</i>	560
<i>Manipulations diverses, résultats théoriques</i>	568
<i>Calculs d'intégrales</i>	572
<i>Primitives</i>	576
Intégrale sur un intervalle non compact	581
<i>Intégrabilité</i>	581
<i>Calcul et manipulation d'intégrales</i>	586
Intégrales impropres	599
Convergence dominée,...	603
Intégrales dépendant d'un paramètre	619
Compléments de calcul intégral	657
<i>Intégrales doubles</i>	657
<i>Intégrales triples</i>	664
<i>Intégrales curvilignes & formes différentielles</i>	666
<i>Divers</i>	668
Équations différentielles linéaires	671
<i>Révision du programme de Sup</i>	671
<i>Équations linéaires scalaires d'ordre 1</i>	672
<i>Équations linéaires scalaires d'ordre 2</i>	677
Systèmes différentiels linéaires	689
Équations différentielles non linéaires	695
Calcul différentiel	703
<i>Fonctions de plusieurs variables</i>	703
<i>Équation de Laplace</i>	720
<i>Formes différentielles</i>	721
Divers	723

III Géométrie	727
Arcs et courbes	729
<i>Courbes planes — équations implicites</i>	729
<i>Arcs paramétrés plans — cartésiens</i>	729
<i>Arcs paramétrés plans — équation polaire</i>	735
<i>Arcs paramétrés de l'espace</i>	739
Propriétés métriques des arcs	741
Nappes et surfaces	749
Géométrie affine	753
IV Informatique	763
Informatique	765
Exercices avec Maple	769
<i>Algebre</i>	769
<i>Analyse</i>	773

Nombre total d'exercices : 3411

Index

	Symboles	
$A[\sqrt{d}]$	31	solution — 685
Γ (fonction d'Euler)	588, 625	Centre
δ (Dirac)	217	du cercle circonscrit 760
γ (constante d'Euler)	332, 426, 432, 586, 590, 592, 612	d'un groupe 28
π		Centrosymétrique (matrice \rightarrow) 99
irrationalité de — 605, 613		Cesàro
ζ (fonction de Riemann)	441, 486, 503	moyenne de — 301
équivalent en 1 475		d'endomorphismes 404
calcul de $\zeta(2)$ 428		théorème de — 301
		application 301, 302
	A	Cesàro (théorème de \rightarrow)
Abel		application 310, 385, 388, 439, 440, 446, 451
lemme d'— 505		Chaleur (noyau de la \rightarrow) 629, 709
transformation d'— 435		Chaos 388
Analytique		Chinois (théorème \rightarrow) 29
prolongement — 718		Choleski (décomposition de \rightarrow) 254
Anneau		Circulante (matrice \rightarrow) 125, 154, 191
de Boole 31		Cœur 85, 87
local 33		Col
Anticommutant 191		méthode du — 648
endomorphismes — 89, 151		Commutant 201, 204, 209
Antisymétrique		Compagnon
endomorphisme — 257		matrice — 193
matrice — 171, 247, 257, 260		Compagnon (matrice \rightarrow) 171, 183, 200, 213
Application		Constante d'Euler 332, 426, 432, 586, 590, 592
faiblement contractante 385		Continuité
propre 324, 393		uniforme 393
Astroïde 730, 744		Contre-exemple
Asymptotique		au th. de convergence dominée 626
développement — 644, 645		Convexe
Attraction (point d'—) 358		enveloppe — 53
Automorphisme		suite — 303, 308, 438
intérieur 213		Convolution 547, 568
		produit de — 662
	B	spectre d'un produit de — 155
Belles formules (recueil de \rightarrow) 589		Convolution (produit de \rightarrow) 623, 626
Bertrand		Courant (th. de Fischer \rightarrow) 277
série de — 435		Cyclique
Bessel		endomorphisme — 78, 82, 147, 200, 201, 204, 208, 209, 209, 213
équation de — 684		Cycloïde 741
fonction de — 521, 621, 623, 631		
Bessel (fonction de \rightarrow) 639		D
Bi-orthogonales (familles \rightarrow) 226, 231		Dérivée
Bibliophile 723		de Schwarz 698
Bloc		Déterminant
de Jordan 192		de Cauchy 133
Boole (anneau de \rightarrow) 31		Damier (matrice en \rightarrow) 105
Borel (procédé de resommation de \rightarrow) 441, 446		Darboux (théorème de \rightarrow) 340
		Décomposition
	C	de Choleski 254
Caractère 199		de Fitting 85, 87
Cardioïde 730, 737		d'Iwasawa 227, 268
Cassini (ovale de \rightarrow) 149		Demi-plan de Poincaré 26
Cauchy		Démon de minuit 38
déterminant de — 133		Densité
formule de — 503, 511		résolution par — 363
matrice de — 246		Dérangements 387
Causale		

Descartes
folium de — 730

Déterminant
 de Jacobi 131, 132, 137, 186
 de Sylvester 129
 de Zorro 135

Développement
 asymptotique 644, 645
 eulérien du sinus 537

Diamètre d'une partie 356

Diffusion 695

Dirac
 δ 217
 suite de — 462, 603, 605, 612, 613

Dirichlet
 produit de — 503

Disques
 de Gershgorin 149, 210

Divisibilité
 par 7 18

Dominante (matrice — sur les lignes) 106

Dominos (empilement) 435

Duhamel (règle de Raabe- —) 446
 applications 563

E

Égalité
 de Taylor-Lagrange 340

Empilement de dominos 435

Endomorphisme
 —s anticommutable 89, 151
 antisymétrique 257
 cyclique 78, 82, 147, 200, 201, 204, 208, 209, 209, 213
 nilpotent 73, 74
 normal 240, 241
 partiellement isométrique 243
 positif de $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ 401
 semi-simple 157, 204

Enveloppe convexe 53

Équation
 de Bessel 684
 d'Euler 688

Équation différentielle
 de Korteweg-de Vries 698

Équation différentielle
 périodique 675
 résonance 678
 relaxation 674, 677, 686

Équivalent
 de série de fonctions 465, 476–481, 483, 484, 487–490
 de la T.F. d'une fonction 628
 de ζ en 1 475

Erdős (paul) 18

Erreur (fonction d'—) 509
 erreur (fonction d'—) 644
 erf (fonction d'erreur) 644

Escarminant 134

Espace
 monogène 200

Euler
 constante d'— 332, 426, 432, 586, 590, 592, 612

développement eulérien du sinus 537
 équation d'— 688
 fonction Γ d'— 588, 625

Exacte
 suite — 67

Exemple pédagogique 428, 584

F

Faiblement contractante (application —) 385

Famille
 obtusangle 226
 positivement génératrice 61, 63

Fischer
 th. de —Courant 277

Fitting (décomposition de —) 85, 87

Folium de Descartes 730

Fonction
 de Bessel 521, 621, 623, 631, 639
 d'erreur 509
 d'erreur $\operatorname{erf}(x)$ 644
 Γ d'Euler 588, 625
 harmonique 717
 propre 324, 393
 de van der Waerden 465, 491
 ζ de Riemann 441, 486, 503

Formule
 belles —s 589
 de Cauchy 503, 511
 d'inversion de Möbius 31
 de Gutzmer 503, 511
 de Parseval (généralisée) 226
 de Rayleigh 245, 261
 sommatoire de Poisson 546
 de Stirling 429

Fresnel
 intégrale de — 646

G

Géométrie
 du triangle 760

Gausienne
 valeur de l'intégrale de la — 597, 653

Gaussienne
 T.F. de la — 527, 625, 643
 valeur de l'intégrale de la — 611, 622, 632, 638, 655, 657, 659, 663

Généralisation
 du théorème de Heine 323
 de la formule de Parseval 226
 du théorème de Rolle 335
 des sommes de Riemann 587, 594

Gershgorin
 disques de — 149, 210

Gram
 matrice de — 221, 222

Gregory (série de —) 441

Groupe
 modulaire 26
 de Prüfer 30

Gutzmer (formule de —) 503, 511

H

Hadamard
 indice d'— 106, 111, 142, 149, 210
 lemme d'— 106

Hahn-Banach 221

Hamming (nombres de —) 767

Harmonique
 fonction — 717

Heine
 généralisé 323

Hermite
 polynômes d'— 227

Hilbert
 polynômes de — 46, 49

Homographie 26, 105, 271, 698, 754

Homotopie 724

Hyperboule (volume de \mathbb{P}^n —) 664

I

Idéal
 premier 35

Idempotent
 matrice —e 202, 205

Identité
 de Lagrange 221
 de polarisation complexe 215
 du parallélogramme 375

Indice
 d'un chemin 667
 d'Hadamard 106, 111, 142, 149, 210
 de nilpotence 73

Inégalité
 de Ptolémée 295
 de Wirtinger 547, 551
 isopérimétrique 545, 549, 552, 666
 de Jensen 333

Intégrale
 de Poisson 620, 630, 634
 de Fresnel 646
 gaussienne 597, 653
 de Poisson 624
 de Wallis 412, 524, 561, 562, 664

Intégration
 des relations de comparaison 583

Intérieur
 automorphisme — 213

Irrationalité de π 605, 613

Isopérimétrique (inégalité) 545, 549, 552, 666

Iwasawa (décomposition d'—) 227, 268

J

Jacobi
 déterminant de — 131, 132, 137, 186

Jauge 361

Jensen (inégalité de —) 333

Jordan
 bloc de — 192
 lemme de — 561

L

$L_w^2(\mathbb{I})$ 582

Lagrange

identité de — 221
 polynômes de — 395

Laguerre (polynômes de —) 225, 228, 229, 769

Laplace
 transformée de — 647, 650

Lebesgue
 lemme de Riemann-Lebesgue 560

Legendre
 polynômes de — 225

Lemme
 d'Abel 505
 de factorisation 79
 d'Hadamard 106
 de Jordan 561
 de Riemann-Lebesgue 560
 de Schur 201

Limite double 302, 703

Liouville
 théorème de — 502, 503, 511

Localisation
 du spectre 142, 147, 149, 210

Logistique (pplication —) 388

Loxodromie 740

M

M (matrice de type —) 107

Möbius (formule d'inversion de —) 31

Méthode
 du col 648
 de la phase stationnaire 648

Magique (matrice —) 106

Maple 47, 52, 96, 127, 148, 161, 187, 192, 196, 206, 207, 229, 253, 265, 273, 312, 382, 388, 421, 467, 686, 719, 774, 775

Marcheur (problème du —) 321, 323

Matrice
 —s anticommutable 154
 antisymétrique 171, 247, 257, 260
 de Cauchy 246
 centrosymétrique 99
 circulante 125, 154, 191
 compagnon 171, 183, 193, 200, 213
 en damier 105
 dominante sur les lignes 106
 de Gram 221, 222
 idempotente 202, 205
 magique 106
 nilpotente 99, 110
 positive 107, 244
 —s réelles semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ 125, 210
 —s à spectres disjoints 201
 stochastique 105, 188
 de Sylvester 129
 de type M 107

Maximum
 principe du — 518
 théorème du — 717

Maximum (principe du —) 504

Mineur
 principal 255

Monogène (espace —) 200

Moyenne	
de Cesàro	301
de Cesàro	
application	301, 302
d'endomorphismes	404
de Cesàro	
application	310, 385, 388, 439, 440, 446, 451

N

Nilespace	85, 87
Nilpotence (indice de —)	73
Nilpotent	
matrice — e	99, 110
endomorphisme —	73, 74
Nombre	
de Hamming	767
de Pisot	306, 416, 431, 444
Normal (endomorphisme —)	240, 241
Norme	
subordonnée	391
Noyau	
chaleur	
de la chaleur	629, 709
de Poisson	284, 666
Noyaux itérés	85, 87

O

Obtusangle (famille —)	226
Orthocentre	760
Orthoptique	
d'une ellipse	756
d'une parabole	761
Ovale de Cassini	149

P

Paquets	442
Parallélogramme (identité du —)	375
Parseval	
formule de — généralisée	226
Partiellement isométrique (endomorphisme)	243
Pavage	724
Pfaffien	128
Phase stationnaire (méthode de la —)	648
Pirates	17
Pisot (nombre de —)	416, 431, 444
Poincaré	
demi-plan de —	26
Point	
d'attraction	358
fixe	321, 322, 381, 382, 385
Poisson	
formule sommatoire de —	546
intégrale de —	620, 624, 630, 634
noyau de —	284, 666
Polarisation	
identité de — complexe	215
Polynôme	
minimal	140
non existence d'un —	201
tel que $\mathbb{P}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$	48
tel que $\mathbb{P}(X^2) = \mathbb{P}(X) \cdot \mathbb{P}(X - 1)$	48, 51
Polynômes	

de Lagrange	395
d'Hermite	227
de Hilbert	46, 49
de Laguerre	225, 228, 229, 769
de Legendre	225
de Tchebychev	39, 52, 229, 774

Positive	
matrice —	244
Positive (matrice —)	107
Positivement génératrice (famille —)	61, 63
Prüfer (groupes de —)	30
Premier	
idéale —	35
Principal	
mineur —	255
Principe	
du maximum —	504, 518
Problème	
du marcheur	321, 323
des zouaves	292
Produit	
de Cauchy	
divergeant	412
de convolution	547, 568, 623, 626, 662
de séries	503
de Dirichlet	503
de Schur	276
Prolongement	
analytique	718
d'un opérateur continu	394
Propre	
application —	324, 393
Ptolémée (inégalité de —)	295

Q

Quotient	
de Rayleigh	245, 261

R

Réglée (surface)	287
Résolvante	147
Résonance	678
Raabe-Duhamel (règle de —)	446
applications	563
Racine	
d'une matrice positive	251, 256
Racine (Jean)	723
Racines de P'	53
Rayleigh	
formule de —	245, 261
quotient de —	245, 261
Rayon	
caractérisation du —	494
spectral	391
transformation du —	494
Règle	
de Bertrand	435
de Raabe-Duhamel	446
applications	563
Relèvement (théorème de —)	724
Relations de comparaison	
intégration des —	583

sommation des —	449
Relaxation	674, 677, 686
Relaxation vers l'équilibre	687
Résidus (théorème des —)	666, 667
Résumation	441, 446
Reste	
d'une série alternée	408, 420, 438
Résultant (de deux polynômes)	129
Ricatti (équation de —)	696
Riemann	
fonction ζ de —	441, 486, 503
sommées de — généralisée	587, 594
Rolle	
généralisé	335
Rotation	
générateur infinitésimal	184, 246

S

Série	
semi-convergente	432
Saute-moutons	180
Schur	
lemme de —	201
produit de —	276
Schwarz	
dérivée de —	698
Semi-simple (endomorphisme —)	157, 204
Série	
de Bertrand	435
de Gregory	441
Similitude	216, 265
Simultanée	
trigonalisation —	208
Sinus	
développement eulérien du —	537
$SL_2(\mathbb{Z})$	400
Solution	
causale	685
Sommation	
par paquets	442
Sous-espace caractéristique	139
Spectral	
rayon —	391
Spectre	
d'un produit de convolution	155
localisation du —	142, 147, 149, 210
Stable	
existence de s.e.v. stable par $u \in \mathcal{L}(E)$	206
Stirling (formule de —)	429
Stochastique (matrice —)	105, 188
Subordonnée (norme —)	391
Suite	
chaotique (logistique)	388
convexe	303, 308, 438
de Dirac	462
de Dirac	603, 605, 612, 613
exacte	67
Supplémentaire	
orthogonale (T.S.O)	239
Surface	
réglée	287

Sylvester	
détérinant de —	129
matrice de —	129

T

Taylor-Lagrange	
égalité de —	340
Tchebychev	
polynômes de —	39, 229
polynômes de —	52, 774
Théorème	
de Cesàro	301
application	301, 302, 310, 385, 388, 439, 440, 446, 451
chinois	29
de Darboux	340
de Hahn-Banach	221
de Heine	323
de Liouville	502, 503, 511
du maximum	504, 717
de relèvement	724
des résidus	666, 667
du supplémentaire orthogonal	239
d'approximation	
application	569
d'approximation de Weierstrass	
application	95, 455, 529, 641
Transformée	
de Fourier	
équivalent	628
de Laplace	647, 650
Transformée de Fourier	
de la dérivée f'	627
de la gaussienne $t \mapsto e^{-t^2}$	527, 643
de la gaussienne $t \mapsto e^{-t^2}$	625
de la lorentzienne $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$	622, 630, 637, 643
de la lorentzienne tronquée	633
de f à support compact	529, 641
Transformée de Laplace	
de la lorentzienne $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$	642
Transformation	
d'Abel	435
Triangle	
géométrie du triangle	760
Triangloptopie (volume du —)	665
Trigonalisation	
simultanée	208
Type	
M (matrices de —)	107
Uniforme	
continuité —	393
Union	
de sous-groupes	26, 27
V	
Valeur	
de $\int_0^{+\infty} (\sin t)/t dt$	599, 601, 632, 640-642, 652, 653, 667
de $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} (\sin t)/t dt = -\gamma$	612, 614
de l'intégrale gaussienne	611, 622, 632, 638, 655, 657, 659, 663

Valeur de $\int_0^{+\infty} (\sin t)/t dt$	624
Valuation	20
Van der Waerden (fonction de —)	465, 491
Vandermonde	
application	202, 203, 212
Vandermonde (déterminant de —)	131, 133
Variations finies	326

W

Wallis (intégrales de —)	412, 524, 561, 562, 664
Weierstrass	
théorème d'approximation de —	
application	95, 455, 529, 569, 641
Wirtinger (inégalité de —)	547, 551

Z

Zorro (déterminant de —)	135
Zouaves (problème des —)	292