

Étude d'une transformation intégrale

On note \mathcal{E} l'ensemble des applications $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ telles que pour tout $s > 0$, la fonction $u \mapsto \frac{f(u)}{u+s}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* . Si $f \in \mathcal{E}$, on définit

$$\forall s > 0 \quad \widehat{f}(s) = \int_0^\infty \frac{f(u)}{u+s} du$$

On note \mathcal{L} l'espace vectoriel des applications continues et intégrables sur \mathbb{R}_+^* .

Enfin, par définition, on dit qu'une fonction f , définie sur \mathbb{R}_+^* , admet un développement limité en $+\infty$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ si, et seulement si, il existe des scalaires a_0, \dots, a_n tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Remarquez que ceci équivaut à dire que $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ a un DL à l'ordre n en 0.

Première partie : Étude de \mathcal{E}

1. Montrer que \mathcal{E} est un \mathbb{C} -espace vectoriel, non réduit à $\{0\}$, et stable par $f \mapsto |f|$.
2. Comparer, pour l'inclusion, les espaces \mathcal{L} et \mathcal{E} .
3. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. Déterminer pour quelles valeurs de α la fonction $u \mapsto u^{\alpha-1}$

f_α est dans \mathcal{E} . Prouver alors que \widehat{f}_α est proportionnelle à f_α . Le coefficient de proportionnalité sera exprimé sous forme d'une intégrale, qu'on n'essaiera pas de calculer.

Deuxième partie : Propriétés de \widehat{f}

Dans toute cette partie, $f \in \mathcal{E}$ est fixée.

1. Montrer que \widehat{f} est continue sur \mathbb{R}_+^* .
2. Étude de \widehat{f} en $+\infty$.
 - (a) Étudier l'existence d'une limite pour \widehat{f} en $+\infty$ et donner sa valeur si elle existe.
 - (b) On suppose de plus que $f \in \mathcal{L}$. Étudier l'existence de $\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{f(u)}{1 + \frac{u}{s}} du$ et donner sa valeur si elle existe.
À quelle condition ce résultat permet-il d'obtenir un équivalent de \widehat{f} en $+\infty$? Dans ce cas, donner cet équivalent.
 - (c) Donner des conditions suffisantes sur f , qui assurent que \widehat{f} a un développement limité à tout ordre en $+\infty$. Dans ce cas, donner ce développement ; donner aussi un exemple de fonction qui satisfait ces conditions.
Indication : On pourra remarquer que pour u et s strictement positifs et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{u+s} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{u^k}{s^{k+1}} + (-1)^n \left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{1}{u+s}$$

3. Soit $a > 0$. Montrer que pour tout $h \in]-a; a[$, on a

$$\widehat{f}(a+h) = \sum_{p=0}^\infty (-h)^p \int_0^\infty \frac{f(u)}{(u+a)^{p+1}} du$$

Que peut-on en déduire sur la régularité de \widehat{f} ?

Troisième partie : Expression de \widehat{f} comme transformée de Laplace

On note \mathcal{F} l'espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R}_+^* , telles que pour tout $x > 0$, la fonction $u \mapsto e^{-xu} f(u)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* . Si $f \in \mathcal{F}$, on pose

$$\forall x > 0 \quad Lf(x) = \int_0^\infty e^{-xu} f(u) du$$

Lf est appelée *transformée de Laplace de f* .

1. Transformée de Laplace d'un élément de \mathcal{E} .
 - (a) Soit $x > 0$. Justifier l'existence de $M(x) = \sup_{u>0} (e^{-xu} (1+u))$ et comparer $M(x_1)$ et $M(x_2)$ lorsque $0 < x_1 < x_2$.
 - (b) Montrer que $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$.
 - (c) Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que Lf est continue sur \mathbb{R}_+^* et étudier son comportement en $+\infty$.
 - (d) Si $f \in \mathcal{E}$, donner une condition suffisante pour que Lf ait une limite finie en 0^+ . Donner un exemple de fonction réelle $f \in \mathcal{E}$ telle que $\lim_{0^+} Lf = +\infty$.
2. Soit $f \in \mathcal{E}$. On se propose de calculer la double transformée de Laplace de f .
 - (a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-xu} f(u) du$$

Justifier l'existence de cette fonction et montrer qu'elle est continue sur \mathbb{R}_+^* . Quel est le lien entre la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la transformée de Laplace de f ?

- (b) Soient $0 < a < b$ des réels et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour $s > 0$,

$$\int_a^b e^{-sx} g_n(x) dx = e^{-sa} \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-au} \frac{f(u)}{u+s} du - e^{-sb} \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-bu} \frac{f(u)}{u+s} du$$

En déduire
$$\int_a^b e^{-sx} Lf(x) dx = e^{-sa} \int_0^\infty e^{-su} \frac{f(u)}{u+s} du - e^{-sb} \int_0^\infty e^{-bu} \frac{f(u)}{u+s} du$$

- (c) Montrer que $\lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^b e^{-sx} Lf(x) dx$ existe, et la calculer.
- (d) Montrer que $Lf \in \mathcal{F}$ et que sa transformée de Laplace est \widehat{f} .
- (e) Application : Soit $\alpha \in]0; 1[$. En considérant la fonction f_α définie à la question **I.3**, montrer que

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) = \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du$$

On rappelle que $\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$

Quatrième partie : Calcul de $\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du$

1. Si $\alpha \in]0; 1[$ et $\lambda \in]-\pi; \pi[$, justifier l'intégrabilité sur \mathbb{R}_+^* de $u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{ue^{i\lambda} + 1}$.

On pose alors
$$\gamma(\alpha, \lambda) = e^{i\lambda\alpha} \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{ue^{i\lambda} + 1} du$$

2. Montrer que pour $\alpha \in]0; 1[$, la fonction $\lambda \mapsto \gamma(\alpha, \lambda)$ est constante sur $]-\pi; \pi[$. En particulier,

$$\forall \alpha \in]0; 1[\quad \forall \lambda \in]-\pi; \pi[\quad \gamma(\alpha, \lambda) = \gamma(\alpha, -\lambda)$$

3. Montrer alors $\forall \alpha \in]0; 1[\quad \forall \lambda \in]-\pi; \pi[\quad \gamma(\alpha, \lambda) \sin \lambda \alpha = \sin \lambda \int_0^\infty \frac{u^\alpha}{1 + 2u \cos \lambda + u^2} du$

En déduire $\forall \alpha \in]0; 1[\quad \forall \lambda \in]-\pi; \pi[\quad \gamma(\alpha, \lambda) \sin \lambda \alpha = \int_{\cotan \lambda}^\infty \frac{(u \sin \lambda - \cos \lambda)^\alpha}{u^2 + 1} du$

4. En introduisant une suite d'éléments dans $]0; \pi[$ qui converge vers π , montrer que

$$\forall \alpha \in]0; 1[\quad \forall \lambda \in]-\pi; \pi[\quad \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{ue^{i\lambda} + 1} du = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} e^{-i\lambda\alpha}$$

En déduire la valeur des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du \quad (\alpha \in]0; 1]) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

Étude de Gamma

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction Γ et de l'utiliser pour calculer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\ln \tan x) dx$ sous forme de la somme d'une série. On donne la formule suivante, appelée développement eulérien du sinus; elle sera prouvée lorsqu'on étudiera les séries de Fourier :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \sin z = \lim_{n \rightarrow \infty} z \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

Première partie

Pour tout entier n non nul, on pose

$$u_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (k+x)}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction qu'on note u .
2. Si $x > 0$, montrer que la fonction $t \longmapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* . On pose alors

$$\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

3. Montrer que Γ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et donner ses deux premières dérivées sous la forme d'une intégrale.
4. Montrer que $\ln \circ \Gamma$ est bien définie et convexe.
5. Montrer que $\forall x > 0 \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

En déduire une relation entre $\Gamma(n+x)$ et $\Gamma(x)$ lorsque $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, donner la valeur de $\Gamma(n)$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Soient $x \in]0; 1[$ et $n \geq 2$ un entier.

(a) Montrer que $\ln \Gamma(n) - \ln \Gamma(n-1) \leq \frac{\ln \Gamma(n+x) - \ln \Gamma(n)}{x} \leq \ln \Gamma(n+1) - \ln \Gamma(n)$

En déduire une relation entre $(n-1)^x (n-1)!$, $n^x (n-1)!$ et $\Gamma(n+x)$.

(b) Montrer alors $\frac{n}{n+x} \Gamma(x) \leq u_n(x) \leq \Gamma(x)$

7. En déduire que $u = \Gamma$.
8. Démontrer la formule des compléments :

$$\forall x \in]0; 1[\quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

En déduire $\Gamma(\frac{1}{2})$ et la valeur de $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

9. On définit $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad g_n = \ln u_n$

et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \begin{cases} g_1 & \text{si } n = 1 \\ g_n - g_{n-1} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

- (a) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n \geq 1}$ converge; sa limite est notée γ .

(b) Prouver que $\forall x > 0 \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \sum_{n=1}^\infty v'_n(x)$

- (c) En déduire une relation entre γ et $\Gamma'(1)$.

Deuxième partie

1. Montrer que la série $\left(\left(s \longmapsto \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* . On pose alors

$$\forall s > 0 \quad L(s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

2. Montrer que la série $\left(\left(\frac{(-1)^n}{2n+1} X^{2n+1}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; 1]$. Donner sa somme, à l'aide d'une fonction usuelle (justifier particulièrement l'égalité en 1) et en déduire $L(1)$.
3. Si $s > 0$, on pose

$$\forall x > 0 \quad h_s(x) = \frac{\ln x}{x^s}$$

Étudier les variations de h_s et montrer en particulier qu'elle admet un unique maximum, atteint en un point $x_s > 0$.

Étudier alors les variations de la fonction $s \longmapsto x_s$.

4. Montrer que L est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et exprimer sa dérivée comme somme d'une série.

5. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $s > 0$, justifier l'existence de $\int_0^\infty e^{-nt} t^{s-1} dt$ et donner sa valeur à l'aide de la fonction Γ .

6. Prouver que $\forall s > 0 \quad L(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} t^{s-1} dt$

7. Montrer que $L\Gamma$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et que

$$\forall s > 0 \quad (L\Gamma)'(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-t} \ln t}{1+e^{-2t}} t^{s-1} dt$$

8. En évaluant cette relation en 1 et à l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\ln \tan x) dx = -\gamma \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$$