

## Cycle Préparatoire Intégré SIAE

### Programme des Enseignements de Mathématiques

Les trois premières années de la formation SIAE ont pour but d'offrir aux étudiants une base solide en Sciences Physiques et en Mathématiques. Pour cette dernière matière, le programme des enseignements suit de près les programmes français des classes de première année MPSI et de deuxième année PSI, réparti trois années.

Les Bulletins Officiels de l'Éducation Nationale dans lesquels ces programmes sont parus sont la référence sur les notions à acquérir et la démarche suivie. Ces documents étant d'un volume conséquent, leurs grandes lignes sont présentées ici, ainsi que la manière dont les notions sont réparties sur les trois années.

## 1 Objectifs de Formation

À la sortie du lycée, les Mathématiques sont généralement vues comme un outil de calcul qui peut être appliqué à la résolution de problèmes concrets une fois ceux-ci modélisés. À SIAE, ce point de vue est évidemment conservé et la maîtrise des outils techniques constitue un des objectifs de formation ; mais les Mathématiques sont aussi enseignées comme une matière à part entière, avec son vocabulaire et ses méthodes propres. L'accent est mis particulièrement sur la logique, le raisonnement et la rigueur, qui sont des qualités indispensables à un scientifique en général, et un ingénieur en particulier.

N'importe quel livre sérieux de Mathématiques de premier cycle universitaire présentera les mêmes définitions et théorèmes que le cours dispensé par l'enseignant. Mais ce dernier doit apporter une valeur ajoutée par rapport au support écrit, pour atteindre les objectifs de formation suivants :

- Développer en même temps l'intuition et l'esprit de rigueur. Ainsi, les définitions et théorèmes sont présentés précisément, mais sont aussi analysés pour expliquer de quelle manière ils peuvent être interprétés intuitivement. Acquérir cette démarche, qui mène de l'intuition à des propositions précises sur lesquelles il est possible de travailler, constitue un des objectifs de formation fondamentaux.
- Développer l'esprit critique des étudiants, en particulier par l'étude d'exemples et surtout de contre-exemples, pour mettre en valeur l'importance des hypothèses dans un énoncé mathématique.
- Être capable de réagir dans des situations nouvelles, pour lesquelles le cours n'est pas directement applicable.
- Acquérir une vue d'ensemble des Mathématiques : bien qu'elles soient compartimentées en grandes branches (algèbre, analyse, géométrie), celles-ci s'intersectent très fortement. L'accent doit être mis sur les connexions entre les notions étudiées, surtout en dernière année de cycle préparatoire.

Ces recommandations sont implémentées dans la présentation du cours magistral. Mais, de manière plus importante, elles le sont aussi dans le choix des exercices et devoirs en temps libre, en nombre conséquent, et qui permettent à l'étudiant d'expérimenter pour maîtriser par son implication personnelle.

Le programme présenté dans ce document est donc une liste de points à couvrir, en suivant les recommandations précédentes.

## 2 Mathématiques Élémentaires (Année 0)

Pendant cette année d'études, la majorité du temps de cours est consacrée à l'apprentissage de la langue française. Le cours de Mathématiques est doté de 3 heures de cours magistral et 2 heures de travaux dirigés.

L'objectif principal est de consolider les notions acquises au lycée, et d'uniformiser les niveaux des élèves, disparates du fait des programmes qui diffèrent suivant les provinces chinoises. Il s'agit aussi d'une introduction à l'activité mathématique et à la rigueur.

### 2.1 Suites numériques et fonctions

*La définition par  $\epsilon$  des limites est présentée, mais sa maîtrise est reléguée aux deux années suivantes. Il s'agit avant tout d'être capable de calculer des limites simples, et de savoir utiliser le calcul différentiel pour l'étude de fonctions.*

- Ensemble des suites réelles, suites monotones, majorées, minorées.
- Limites, opérations sur les limites, limites usuelles, théorèmes d'existence (suites et fonctions).
- Limites et continuité. Image d'un intervalle par une application continue. Introduction à la notion de bijection.
- Dérivation : dérivation en un point, fonction dérivée, dérivation des sommes, produits, quotients, composées, réciproques. Lien entre variations et signe de la dérivée.
- Fonctions usuelles : puissance, logarithme, exponentielle, trigonométriques et réciproques. Croissances comparées des fonctions logarithmiques, puissances et exponentielles.

### 2.2 Calcul Intégral

*On se contente d'une approche intuitive de l'intégration, vue comme une solution au problème de calcul de l'aire délimitée par le graphe d'une fonction continue. En admettant la relation de Chasles et l'inégalité de la moyenne, il est possible de présenter rigoureusement le lien entre intégration et dérivation. Il s'agit surtout de savoir calculer efficacement des primitives.*

- Intégrale d'une fonction continue et aire. Sommes de Riemann.
- Linéarité, croissance, relation de Chasles, inégalité de la moyenne.
- Lien entre dérivation et intégration. Calculs de primitives : primitives usuelles, intégration par parties, changements de variables.

### 2.3 Introduction aux Structures Algébriques

*La rencontre avec l'algèbre est souvent traumatisante pour les élèves et il s'agit ici de la faciliter, en présentant le vocabulaire relatif aux structures et l'intuition derrière le raisonnement par récurrence. Ces notions seront revues l'année suivante de manière plus étoffée.*

- Vocabulaire relatif aux ensembles (appartenance, inclusion), applications, logique.
- Raisonnement par récurrence
- Groupes, anneaux, corps, formule du binôme dans un anneau.

## 2.4 Nombres Complexes

La construction de  $\mathbb{C}$  à partir de  $\mathbb{R}^2$  est utilisée comme prétexte pour une première construction mathématique rigoureuse, et pour mettre en œuvre le vocabulaire du cours sur les structures algébriques (associativité, commutativité, neutre, groupe, corps, etc.).

- L'ensemble  $\mathbb{C}$  et sa structure de corps commutatif. Point de vue géométrique.
- Formes canonique et trigonométrique d'un nombre complexe. Exponentielle complexe.
- Racines carrées d'un nombre complexe. Résolution d'équations polynomiales de degré 2 à coefficients complexes.
- Racines de l'unité. Structure de groupe.

## 2.5 Géométrie dans le plan et l'espace

Il est attendu des étudiants de lycée qu'ils aient une idée intuitive des géométries plane et spatiale. Cette partie introduit ces notions de manière plus rigoureuse, à partir des ensembles  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  qu'on munit d'une structure algébrique d'espace vectoriel. Le vocabulaire et les techniques de l'algèbre linéaire (colinéarité, coplanarité, combinaison linéaire, bases) sont introduits pour aider la transition vers l'année suivante, où l'on étudie la structure abstraite d'espaces vectoriel.

- Bases, repères, produit scalaire, déterminant, barycentre.
- En dimension 2 : Droites, cercles, équations cartésiennes, translations, rotations, homothéties, réflexions. Lien avec les nombres complexes. Repère polaire.
- En dimension 3 : Produit vectoriel, plans, droites, sphères, cercles, équations cartésiennes.

## 2.6 Courbes planes

- Étude des arcs paramétrés et polaires : Recherche d'invariances, tangente (points réguliers et singuliers), branches infinies.
- Lien avec la cinématique.

## 2.7 Équations Différentielles Linéaires

On se contente de l'étude des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 ou 2 ; dans ce dernier cas, le second membre est du type exponentielle-polynôme uniquement.

- Équations «  $y' = ay + b$  » avec  $a$  et  $b$  continues sur un intervalle  $I$ .
- Équations «  $ay'' + by' + c = P e_{\alpha}$ , » avec  $a, b, c$  et  $\alpha$  dans  $\mathbb{C}$  et  $P$  fonction polynomiale.
- Structure algébrique de l'ensemble des solutions.

## 2.8 Coniques

Les coniques sont étudiées comme lignes de niveau de l'application  $M \mapsto \frac{MF}{MH}$ , où  $F$  est le foyer et  $H$  la projection sur la directrice.

- Vocabulaire : foyer, directrice, excentricité, ellipse, parabole, hyperbole.
- Équations cartésiennes dans différents repères. Équations réduites.
- Représentations paramétrique et polaire.
- Coniques : Foyer secondaire. Définition bifocale, et équivalence avec la définition comme ligne de niveau.

## 2.9 Activités algorithmiques

*Les algorithmes doivent être traités en liaison avec le cours, au moment propice.*

- Suites récurrentes.
- Calcul approché des zéros d'une fonction : dichotomie.
- Calculs approchés d'intégrales.
- Calculs approchés de réels remarquables ( $e$ ,  $\pi$ ).

## 3 Mathématiques Supérieures (Année 1)

Cette année voit le niveau d'abstraction et les exigences de rigueur fortement augmenter. Certaines notions présentées au début d'année ont déjà été étudiées antérieurement et sont surtout le prétexte pour expliquer comment des notions intuitives peuvent être traitées rigoureusement.

En analyse, l'objectif majeur (et très ambitieux) est la maîtrise de la notion rigoureuse de limite et l'utilisation d' $\epsilon$ , en s'aidant de l'intuition acquise l'année précédente.

La dotation horaire est de 5 heures de cours et 4 heures de travaux dirigés.

### 3.1 Fondements des mathématiques

- Logique et connecteurs. Raisonnement par contraposée, par l'absurde.
- Vocabulaire de la théorie des ensembles : Ensembles, éléments, appartenance, parties d'un ensemble, inclusion, union, intersection, complémentaire.
- Produits cartésiens.
- Fonctions et applications : domaine de définition, composition, injections, surjections, bijections, réciproque d'une bijection.
- Relations d'ordre et d'équivalence.

### 3.2 Ensembles finis

*L'étude débute avec  $\mathbb{N}$  à partir de sa structure d'ensemble ordonné dans lequel toute partie non vide a un élément minimal, pour développer les théorèmes de récurrence. Les notions nouvelles d'injection, surjection, bijection, sont ensuite mises en pratique pour l'étude des ensembles finis et les calculs de cardinaux. Ces résultats ont déjà été étudiés avant et sont revisités de manière rigoureuse, avec l'aide de l'intuition acquise par le passé.*

- Théorèmes de récurrence (simple, double, forte).
- Notations  $\Sigma$  et  $\Pi$ .
- Ensembles finis et cardinaux : cardinal d'un sous-ensemble, d'une union, d'une intersection. Image d'un ensemble fini par une application.
- Cardinaux classiques : nombre d'applications entre ensembles finis, nombre d'injections d'un ensemble fini dans un autre, nombre de parties d'un ensemble fini. Formule du binôme.

### 3.3 Structures algébriques

*Révision du programme de l'année précédente.*

### 3.4 Arithmétique des entiers

À nouveau, des notions déjà étudiées dans les classes précédentes, revues sous le jour de la théorie des groupes.

- Divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ . Théorème de division euclidienne.
- Sous-groupes de  $\mathbb{Z}$ . PGCD et PPCM. Théorèmes de Bezout et Gauss.
- Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers.
- Congruences, anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

### 3.5 Algèbre linéaire

- Espaces vectoriels, sous-espaces, sous-espace engendré par une partie, somme et somme directe, supplémentaires, applications linéaires, noyau, image, projecteurs, symétries.
- Théorie de la dimension : Familles libres et liées, bases. Espaces de dimension finie. Calculs de dimensions. Rang d'une famille de vecteurs.
- Rang d'une application linéaire entre espaces de dimensions finies. Théorème du rang.
- Matrices : Structure de  $M_{n,p}(\mathbb{K})$ , correspondances entre matrices et applications linéaires en dimension finie, matrices inversibles, rang d'une matrice, calculs d'inverses par la méthode du pivot.
- Déterminants : Applications multilinéaires, déterminants, caractérisation des familles libres, des matrices inversibles et des isomorphismes en dimension finie. Formules de Cramer et de la comatrice.

### 3.6 Polynômes et Fractions Rationnelles

La construction des anneaux de polynômes est faite sur un corps  $\mathbb{K}$ , qui sera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  dans toutes les applications.

- Algèbre  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes sur un corps  $\mathbb{K}$ .
- Degré, valuation, sous-espaces  $\mathbb{K}_p[X]$ .
- Arithmétique élémentaire : divisibilité, division euclidienne.
- Fonctions polynomiales : racines, factorisation, dérivation et racines multiples, polynômes scindés. Théorème de d'Alembert.
- Fonctions symétriques des racines.
- Arithmétique avancée : PGCD, PPCM, théorèmes de Bezout et de Gauss. Décomposition en produits d'irréductibles.
- Corps des fractions  $\mathbb{K}(X)$  : Décomposition en éléments simples. Division suivant les puissances croissantes.

### 3.7 Espaces Euclidiens et Géométrie

Cette année, on se contente de l'étude des espaces préhilbertiens réels de dimension finie.

- Produits scalaires, Cauchy-Schwarz, norme euclidienne, relation du parallélogramme.

- Orthogonalité : familles orthogonales, familles orthonormées, procédé de Schmidt, projection orthogonale sur un sous-espace, symétries orthogonales, réflexions. Application aux problèmes de minimisation quadratique.
- Automorphismes orthogonaux et groupe orthogonal. Structure en dimensions 2 et 3.
- Isométries affines du plan et de l'espace.

### 3.8 Suites et fonctions

*Outre la maîtrise de la notion de limite, un temps important est consacré aux notations de Landau et aux méthodes d'obtentions de développements asymptotiques, indispensables pour l'étude des séries et des intégrales généralisées en classe de Mathématiques Spéciales.*

- L'ensemble  $\mathbb{R}$  : Propriété de la borne supérieure, partie entière d'un réel, développement dans une base, densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .
- Suites. Reprise des notions de base : limites, suites extraites, suites monotones, théorèmes d'existence de limite, théorème de Bolzano-Weierstraß.
- Comparaison des suites : Notations de Landau  $o$ ,  $O$  et  $\sim$ . Règles d'utilisation. Méthodes d'accélération de convergence d'une suite.
- Suites récurrentes linéaires.
- Continuité. Reprise des notions de base : limites, fonctions monotones, théorèmes d'existence de limites, fonctions continues, prolongements par continuité. Grands théorèmes : fonctions continues sur un segment, différentes versions du théorème des valeurs intermédiaires, image d'un intervalle par une application continue monotone, caractérisation des injections continues sur un intervalle, continuité de l'inverse.
- Notations de Landau et développements asymptotiques.
- Dérivabilité. Reprise des notions de base. Théorèmes de Rolle, des accroissements finis, lien entre dérivation et variations. Espaces  $\mathcal{C}^n$ . Théorèmes de Taylor. Inégalité de Taylor-Lagrange.
- Fonctions usuelles. Reprise des notions de base. Utilisation de Taylor-Lagrange pour obtenir les développements en série entière usuels.
- Développements limités. Règles de calcul. Développements limités des fonctions usuelles.
- Convexité. Inégalités de convexité ; croissance des « fonctions pentes. » Régularité des fonctions convexes. Caractérisation de la convexité et des points d'inflexions pour les fonctions deux fois dérivables.

### 3.9 Intégration

*Le point de vue adopté est celui d'une intégrale de type Riemann sur les fonctions continues par morceaux à valeurs réelles, construite à partir de fonctions en escalier.*

- Construction de l'intégrale. Propriétés fondamentales : relation de Chasles, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne.
- L'intégrale, fonction de sa borne supérieure, d'une fonction continue sur un intervalle, est une primitive. Existence de primitives. Lien entre dérivation et intégration pour les fonctions  $\mathcal{C}^1$ .

- Calcul intégral : théorèmes d'intégration par parties et de changement de variable. Formule de Taylor avec reste intégral.
- Exemples d'études de fonctions définies par une intégrale à paramètre, ou de suites d'intégrales.
- Méthode de calculs approchés d'intégrales : rectangles, trapèzes, Simpson.

### 3.10 Fonctions de deux variables

*Il s'agit d'une introduction aux fonctions de plusieurs variables et on ne soulève pas de difficultés théoriques, en particulier pour le calcul d'intégrales doubles.*

- Parties ouvertes. Application d'un ouvert du plan vers un  $\mathbb{R}$ -espace de dimension finie. Applications partielles. Limites. Continuité.
- Dérivées partielles, fonctions  $\mathcal{C}^1$ , gradient, matrice jacobienne. Dérivation d'une composée.
- Extrema locaux. Dérivées secondes, fonctions  $\mathcal{C}^2$  et théorème de Schwarz.
- Calculs d'intégrales doubles, changements de variables, théorème de Fubini.

### 3.11 Activités algorithmiques

*Ces activités sont réparties sur l'année, suivant l'état d'avancement du cours.*

- Méthodes de points fixes pour la résolution numérique d'équation : Newton, sécante.
- Étude de suites et de leur comportement. Accélération de convergence par des calculs de développements asymptotiques.
- Arithmétique : algorithme d'Euclide, décomposition d'entiers en produits de facteurs premiers.
- Calculs approchés d'intégrales.

## 4 Mathématiques Spéciales (Année 2)

En algèbre, une partie conséquente du temps est consacrée à la révision des notions étudiées en Mathématiques Supérieures, en essayant de les faire agir ensemble. Ceci prépare à la théorie de la réduction des endomorphismes, dans laquelle se mélangent espaces vectoriels, matrices, polynômes et déterminants.

En analyse, tous les types d'échanges de limites sont étudiés au cours des différents chapitres. Les théorèmes de Lebesgue sont présentés et admis dans une théorie de l'intégration généralisée aux intervalles quelconques.

### 4.1 Révisions d'algèbre

*Révision globale du cours de l'année précédente. Quelques notions simples de dualité (dual, bases duale et préduale) sont introduites.*

## 4.2 Réduction des endomorphismes

*La théorie de la réduction est uniquement étudiée dans le cadre des  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels.*

- Sous-espaces stables. Polynômes d'endomorphismes. Idéal des polynômes annulateurs et polynôme minimal.
- Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres. Endomorphismes diagonalisables, trigonalisables.
- Caractérisation des endomorphismes diagonalisables et trigonalisables par le polynôme minimal.
- Diagonalisation et trigonalisation simultanée.

## 4.3 Espaces préhilbertiens

*Le vocabulaire général des espaces préhilbertiens (réels et complexes) est présenté dans ce chapitre, jusqu'aux notions d'orthogonalité et de projection orthogonale (incluse). L'étude de l'adjoint est réservée au cas des espaces euclidiens.*

- Vocabulaire : formes bilinéaires, sesquilinéaires, symétriques, à symétrie hermitienne, etc.
- Produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme euclidienne ou hermitienne. Identités de polarisation.
- Orthogonalité. Orthogonalisation de Schmidt. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Existence de bases orthonormées en dimension finie (cas euclidien et hermitien).
- Endomorphismes des espaces euclidiens : automorphismes orthogonaux, projections orthogonales, symétries orthogonales, réflexions.
- Adjoint dans un espace euclidien. Théorème spectral. Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles. Application à la réduction des coniques et des quadriques.
- Géométrie euclidienne. Orientation de l'espace. Orientation d'un hyperplan par un vecteur normal. Produit vectoriel en dimension 3.
- Géométrie euclidienne en dimensions 2 et 3 : étude des automorphismes orthogonaux.

## 4.4 Courbes planes

*Le chapitre de Mathématiques Élémentaires est revu avec l'aide des développements limités, qui permettent de classer les points singulier et l'étude de la concavité d'une courbe.*

- Révision du chapitre précédemment étudié.
- Classification des points singuliers. Concavité au voisinage d'un point régulier.

## 4.5 Topologie des espaces vectoriels normés

*En vue du cours de calcul différentiel et du cycle ingénieur où les étudiants étudieront l'analyse fonctionnelle, les objets fondamentaux en topologie sont étudiés dans le cadre des espaces normés.*

- Normes, distances, boules, ouverts, fermés, adhérence, intérieur.

- Suites à valeurs dans un espace normé. Convergence. Caractérisation séquentielle des fermés. Suites de Cauchy.
- Fonctions définies sur une partie d'un espace normé, prenant ses valeurs dans un espace normé. Limites, continuité. Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite en un point adhérent.
- Compacité. Fonctions continues sur un compact.
- Normes équivalentes. Interprétation géométrique et séquentielle.
- Caractérisation de la continuité des applications linéaires et multilinéaires.
- Cas de la dimension finie : équivalence des normes, caractérisation des compacts, complétude, continuité des applications linéaires et multilinéaires.

#### 4.6 Séries numériques

- Convergence, divergence. Opérations sur les séries.
- Séries à termes positifs. Caractérisation de la convergence par le fait que les sommes partielles sont majorées. Théorèmes de comparaisons. Théorème de d'Alembert.
- Séries de référence : séries géométriques et de Riemann.
- Convergence absolue. Théorèmes de comparaisons.
- Séries alternées : théorème de convergence des séries alternées et majoration du reste.
- Sommation des relations de comparaison. Obtention de développements asymptotiques et amélioration de la convergence. Application : formule de Stirling.

#### 4.7 Intégration et dérivation

*Il s'agit de revoir ces théories dans le cadre des fonctions définies sur un segment, à valeurs dans un espace normé.*

- Vecteur dérivé. Fonction dérivée. Dérivée d'une somme, d'une composée, d'une application multilinéaire continue composée par des fonctions dérivables.
- Inégalité des accroissements finis. Fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$ . Inégalité de Taylor-Lagrange.
- Intégration. Construction de l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un intervalle compact par l'intégrale des fonctions en escalier : densité de  $\mathcal{C}([a; b])$  dans  $\mathcal{C}_{pm}([a; b])$ . Propriétés élémentaires : relation de Chasles, linéarité, inégalité de la moyenne.
- Dérivation et intégration, intégration par parties, changement de variables : généralisation aux fonctions régulières par morceaux.
- Continuité, dérivation d'une intégrale fonction d'un paramètre (dérivation sous l'intégrale). Théorème de Fubini (intégration sur un produit d'intervalles compacts).

#### 4.8 Suites et séries de fonctions

- Modes de convergence : convergences simple, uniforme, normale (pour les séries).
- Théorème d'échange des limites pour une suite de fonctions convergeant uniformément.
- Échange d'une limite et d'une intégrale (cas d'un intervalle compact).
- Dérivation d'une limite.
- Densité dans  $\mathcal{C}([a; b])$  des fonctions polynomiales. Densité dans  $\mathcal{C}^{2\pi}$  des polynômes trigonométriques.

## 4.9 Séries entières

- Lemme d'Abel. Rayon de convergence. Dérivation et intégration terme-à-terme.
- Fonctions développables en série entière.
- Opérations sur les fonctions développables en série entière : somme, produit, composition.

## 4.10 Séries de Fourier

*Le cadre est celui des fonctions continues par morceaux,  $2\pi$ -périodiques.*

- Coefficients de Fourier. Série de Fourier. Noyaux de Dirichlet et de Fejér. Théorème de Fejér.
- Approche hilbertienne. Inégalité de Bessel. Lemme de Riemann-Lebesgue. Théorème de Parseval.
- Théorème de convergence normale pour la série de Fourier d'une fonction continue,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.
- Théorème de Jordan-Dirichlet : convergence ponctuelle pour la série de Fourier d'une fonction dérivable par morceaux.

## 4.11 Intégrale généralisée

*Cette partie construit l'intégrale généralisée des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque. Les théorèmes de Lebesgue sont donnés, sans preuve, pour l'étude des intégrales à paramètres.*

- Fonctions positives intégrables. Théorèmes de comparaisons.
- Fonctions à valeurs complexes intégrables. Fonctions à valeurs complexes dont l'intégrale converge (semi-intégrables). Théorèmes de comparaisons. Intégration des relations de comparaison.
- Théorèmes de Lebesgue : convergence monotone, convergence dominée, convergence normale en norme  $L^1$ .
- Intégrales à paramètres : théorèmes de continuité et de dérivation sous l'intégrale.

## 4.12 Équations différentielles

*Le cadre est celui des équations linéaires vectorielles «  $x' = a(x) + b$  ». Les équations non linéaires sont étudiées au besoin pendant le cycle ingénieur.*

- Vocabulaire. Structure de l'espace des solutions. Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.
- Cas où l'espace d'arrivée est de dimension finie. Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène. Systèmes fondamentaux et caractérisation par le Wronskien.
- Méthodes de résolution pratiques : systèmes à coefficients constants. Utilisation du Wronskien pour obtenir une nouvelle solution si l'on a suffisamment de solutions « évidentes. »
- Cas des équations linéaires scalaires. Système linéaire équivalent.

## 4.13 Calcul différentiel

*Les notions de topologie sont mises en application pour l'étude rigoureuse des fonctions définies sur un espace normé de dimension finie, à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Pour l'étude des intégrales multiples, tous les résultats sont admis.*

- Applications d'un ouvert dans un espace normé. Applications coordonnées, applications partielles.
- Limites et continuité. Dérivées partielles. Différentielle. Fonctions  $\mathcal{C}^1$  et caractérisation par l'existence et la continuité des dérivées partielles.
- Matrice jacobienne. Déterminant jacobien.
- Difféomorphismes. Caractérisation par le jacobien. Caractérisation des difféomorphismes parmi les applications  $\mathcal{C}^1$  injectives à l'aide du Jacobien. Points critiques.
- Applications  $\mathcal{C}^2$ . Théorème de Schwarz. Matrice Hessienne. Application à l'étude des points critiques.
- Intégrales multiples. Théorème de Fubini. Théorème du changement de variable.