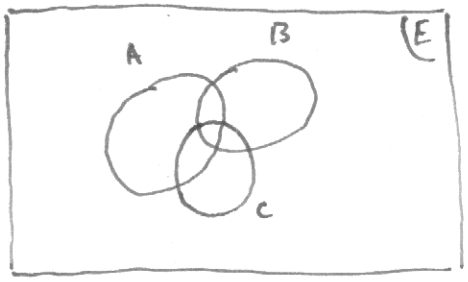
Zagaza 1.

Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E.
On veut prouver que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

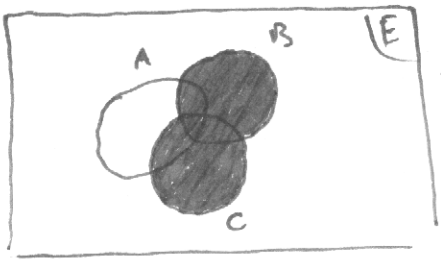
1/ Avec des diagrammes de Venn.

Déjà, je commence par faire remarquer que c'est complètement stupide, car un diagramme ne prouve rien. Mais bon, allons-y.

Supposons que la situation est la suivante :

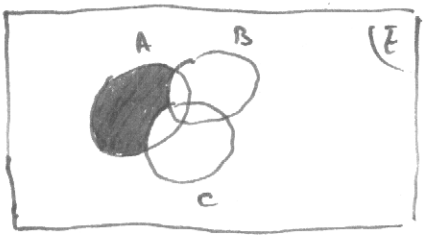


On a alors :



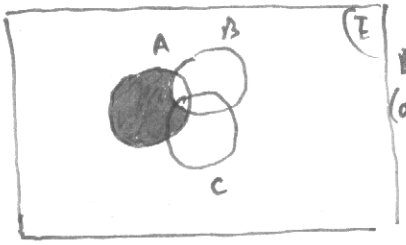
■ : $(B \cup C)$
□ : $(B \cup C)^c$

et

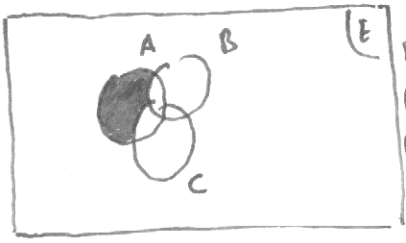


■ : $A \setminus (B \cup C)$ (qui est $A \cap (B \cup C)^c$ par définition)

D'autre part :

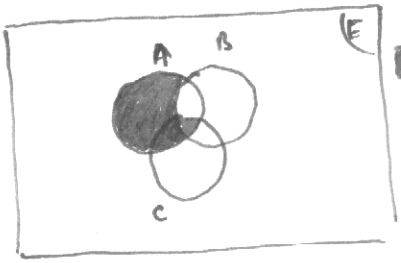


■ : $(A \setminus B)$ et (qui est $A \cap B^c$ par définition)



■ $(A \setminus B) \setminus C$ (qui est $(A \setminus B) \cap C^c$ par définition)

"On voit bien sur le dessin" que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.
Si j'étais le prof, je lui demanderais ensuite de dessiner $A \setminus (B \setminus C)$, juste pour voir si elle a compris ce qu'elle fait. Auquel cas, on doit obtenir ça :



■ : $A \setminus (B \setminus C)$

On voit bien que ce n'est pas la même chose, dans ce cas particulier, que $(A \setminus B) \setminus C$.

2/ Par un raisonnement rigoureux.

On prouve que $A\setminus(B\cup C) \subset (A\setminus B)\setminus C$ et que $(A\setminus B)\setminus C \subset A\setminus(B\cup C)$.

• Soit $x \in A\setminus(B\cup C)$.

Alors $x \in A$ et x n'est pas dans $B\cup C$. Ça veut dire que x n'est pas dans B et x n'est pas dans C.

Donc $x \in A\setminus B$ (car $x\in A$ et $x\notin B$)

et $x \in (A\setminus B)\setminus C$ (car $x\in(A\setminus B)$ et $x\notin C$).

D'où $A\setminus(B\cup C) \subset (A\setminus B)\setminus C$.

• Réciproquement, soit $x \in (A\setminus B)\setminus C$.

Alors $x\in A\setminus B$ et $x\notin C$. La première relation dit que $x\in A$ et $x\notin B$.

Donc x est dans A, mais pas dans B ni dans C,

x est dans A, mais pas dans $B\cup C$

x est dans $A\setminus(B\cup C)$.

et $(A\setminus B)\setminus C \subset A\setminus(B\cup C)$

3/ Par le calcul

$$\begin{aligned} A\setminus(B\cup C) &= A\cap(B\cup C)^c && \text{(définition de } \setminus\text{)}\\ &= A\cap(B^c\cap C^c) && \text{(loi de De Morgan)}\\ &= (A\cap B^c)\cap C^c && \text{(associativité de } \cap\text{)}\\ &= (A\setminus B)\cap C^c && \text{(définition de } \setminus\text{)}\\ A\setminus(B\cup C) &= (A\setminus B)\setminus C && \text{(définition de } \setminus\text{).} \end{aligned}$$

4/ Avec les fonctions caractéristiques.

Si $\Omega\subset E$, on note χ_Ω la fonction caractéristique de Ω. Par définition:

$$\forall x\in E,\quad \chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\in\Omega \\ 0 & \text{si } x\notin\Omega. \end{cases}$$

On rappelle les propriétés qu'on va utiliser: si Ω_1 et Ω_2 sont deux sous-ensembles de E, alors:

(1) $\chi_{\Omega_1\cap\Omega_2} = \chi_{\Omega_1}\cdot\chi_{\Omega_2}$

(2) $\chi_{\Omega_1^c} = 1-\chi_{\Omega_1}$

(3) $\chi_{\Omega_1\cup\Omega_2} = \chi_{\Omega_1}+\chi_{\Omega_2}-\chi_{\Omega_1\cap\Omega_2} = \chi_{\Omega_1}+\chi_{\Omega_2}-\chi_{\Omega_1}\chi_{\Omega_2}$

On a:

$$\begin{aligned}
\chi_{A\setminus(B\cup C)} &= \chi_{A\cap(B\cup C)^c} && \text{(définition de } \setminus\text{)}\\
&= \chi_A \cdot \chi_{(B\cup C)^c} && \text{(propriété (1))}\\
&= \chi_A \cdot (1 - \chi_{B\cup C}) && \text{(propriété (2))}\\
&= \chi_A \left(1 - \chi_B - \chi_C + \chi_B \chi_C\right) && \text{(propriété (3))}\\
&= \chi_A (1-\chi_B) + \chi_A \chi_C (\chi_B - 1) && \text{(on développe)}\\
&= \chi_A \chi_{B^c} - \chi_A \chi_C \chi_{B^c} && \text{(propriété (2))}\\
&= \chi_A \chi_{B^c} (1 - \chi_C) && \text{(on factorise)}\\
&= \chi_{A\cap B^c} \cdot \chi_{C^c} && \text{(propriétés (1) et (2))}\\
&= \chi_{A\setminus B} \cdot \chi_{C^c} && \text{(définition de } \setminus\text{)}\\
&= \chi_{(A\setminus B)\cap C^c} && \text{(propriété (1))}\\
\chi_{A\setminus(B\cup C)} &= \chi_{(A\setminus B)\setminus C} && \text{(définition de } \setminus\text{).}
\end{aligned}$$

$A\setminus(B\cup C)$ et $(A\setminus B)\setminus C$ ont la même fonction caractéristique, donc ils sont égaux. C'est vraiment passionnant.

Zagaza 2.

On a un ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et deux relations ρ et τ sur A, définies par leurs graphes Γ_ρ et Γ_τ :

$$\Gamma_\rho = \{ (x,y) \in A^2 \mid |(x-2)(y-2)| \leq 1 \}$$

$$\Gamma_\tau = \{ (x,y) \in A^2 \mid 2x \geqslant 3y \} = \{ (x,y) \in A^2 \mid 3y - 2x \leqslant 0 \}.$$

Pour chaque $(x,y) \in A^2$, on vérifie s'il est dans Γ_ρ ou Γ_τ.
Le plus simple est de faire un tableau ; dans chaque case, on calcule $|(x-2)(y-2)|$ et $3y-2x$

x \ y	1	2	3	4	5
1	$1_\times$	$0_\times$	$1_\times$	2	3
2	$0_\times$	$0_\times$	$0_\times$	$0_\times$	$0_\times$
3	$1_\times$	$0_\times$	$1_\times$	2	3
4	2	$0_\times$	2	4	6
5	3	$0_\times$	3	6	9

Calcul de $|(x-2)(y-2)|$.
On garde les cases où c'est inférieur à 1.

x \ y	1	2	3	4	5
1	1	4	7	10	13
2	$-1_\times$	2	5	8	11
3	$-3_\times$	0	3	6	9
4	$-5_\times$	$-2_\times$	1	4	7
5	$-7_\times$	$-4_\times$	$-1_\times$	2	5

Calcul de $3y-2x$.
On garde les cases où le résultat est négatif.

La matrice de ρ est obtenue en faisant un tableau similaire, où on met des "1" dans les bonnes cases, et des "0" dans les mauvaises :

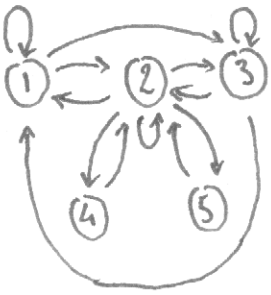
$$\text{Mat}\,\rho = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Même chose :

$$\text{Mat}\,\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La représentation graphique de ρ est obtenue en représentant les entiers 1 à 5, et en reliant deux entiers x et y par une flèche de x vers y si $(x,y) \in \Gamma_\rho$.

On obtient :



- ρ n'est pas réflexive car $(5,5) \notin \Gamma_\rho$.
- ρ est symétrique car :

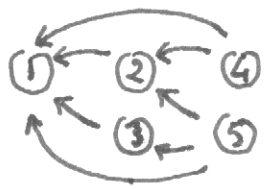
$\forall (x,y) \in A^2$, $(x,y) \in \Gamma_\rho \iff |(x-2)(y-2)| \leq 1$

$\iff |(y-2)(x-2)| \leq 1$

$\iff (y,x) \in \Gamma_\rho$.

- ρ n'est pas antisymétrique, car $(1,2) \in \Gamma_\rho$, $(2,1) \in \Gamma_\rho$, mais $1 \neq 2$.
- ρ n'est pas transitive, car $(1,2) \in \Gamma_\rho$, $(2,5) \in \Gamma_\rho$ mais $(1,5) \notin \Gamma_\rho$.

Même chose pour représenter τ.



- τ n'est pas réflexive car $(1,1) \notin \Gamma_\tau$
- τ n'est pas symétrique car $(2,1) \in \Gamma_\tau$ mais $(1,2) \notin \Gamma_\tau$
- Pour l'antisymétrie, c'est un peu moins trivial. On prend $(x,y) \in A^2$ et on suppose que $(x,y) \in \Gamma_\tau$ et $(y,x) \in \Gamma_\tau$.

Ça signifie : $3y \leq 2x$ et $3x \leq 2y$

D'où $3y \leq 2x \leq 2 \cdot \frac{3x}{3} \leq 2 \cdot \frac{2y}{3} = \frac{4y}{3}$.

et $9y \leq 4y$ et $y \leq 0$, ce qui est impossible.

Donc "$(x,y) \in \Gamma_\tau$ et $(y,x) \in \Gamma_\tau$" est fausse et l'implication

"$(\text{?}(x,y) \in \Gamma_\tau$ et $(y,x) \in \Gamma_\tau) \Longrightarrow x=y$"

est vraie. Ainsi, τ est antisymétrique.

- τ est transitive puisque si $(x,y) \in \Gamma_\tau$ et $(y,3) \in \Gamma_\tau$, alors :

$3y \leq 2x$ et $3 \cdot 3 \leq 2y$

puis $3 \cdot 3 \leq 2y = 2 \cdot \frac{3y}{3} \leq 2 \cdot \frac{2x}{3} = \frac{4x}{3} \leq 2x$.

D'où $(x,3) \in \Gamma_\tau$.

Enfin on étudie $\rho \circ \tau$. Par définition :

$$\Gamma_{\rho\circ\tau} = \{ (x,z) \in A^2 \mid \exists\, y \in A \quad (x,y) \in \Gamma_\tau \text{ et } (y,z) \in \Gamma_\rho \}.$$

On peut essayer de tester à la main toutes les possibilités. C'est très drôle et intéressant. Ou bien on peut aller plus vite avec les matrices de ρ et τ. On note $R = \mathrm{Mat}\,\rho$ et $T = \mathrm{Mat}\,\tau$, calculées précédemment. Par définition,

$$\forall (x,y) \in A^2 \qquad R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \Gamma_\rho \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin \Gamma_\rho \end{cases} \qquad T(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \Gamma_\tau \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin \Gamma_\tau. \end{cases}$$

Le produit matriciel TR est défini par :

$$\forall (x,z) \in A^2 \qquad (TR)(x,z) = \sum_{y \in A} \underbrace{T(x,y)\, R(y,z)}_{\geqslant 0}$$

donc : $\forall (x,z) \in A^2$ $\Big[(TR)(x,z) = 0 \iff (\forall y \in A \quad T(x,y) R(y,z) = 0)$

$\iff (\forall y \in A \quad T(x,y) = 0 \text{ ou } R(y,z) = 0)$

$\iff (\forall y \in A \quad (x,y) \notin \Gamma_\tau \text{ ou } (y,z) \notin \Gamma_\rho)$

$\iff \text{Non}\,(\exists y \in A \quad (x,y) \in \Gamma_\tau \text{ et } (y,z) \in \Gamma_\rho)$

$\iff \text{Non}\,((x,z) \in \Gamma_{\rho\circ\tau})\Big]$

et $\forall (x,y) \in A^2 \Big[(TR)(x,y) \neq 0 \iff (x,z) \in \Gamma_{\rho\circ\tau}. \Big]$

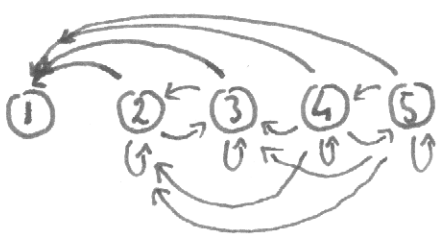
Donc on calcule TR et on cherche les coefficients non nuls :

$$TR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où $\mathrm{Mat}\,\rho\circ\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- $\rho\circ\tau$ n'est pas réflexif car $(1,1) \notin \Gamma_{\rho\circ\tau}$
- $\rho\circ\tau$ n'est pas symétrique car $(1,2) \notin \Gamma_{\rho\circ\tau}$ et $(2,1) \in \Gamma_{\rho\circ\tau}$.
- $\rho\circ\tau$ n'est pas antisymétrique car $(2,3) \in \Gamma_{\rho\circ\tau}$ et $(3,2) \notin \Gamma_{\rho\circ\tau}$ mais $3 \neq 2$.

Graphe de $\rho\circ\tau$:



.

• ρ_{oz} est transitive. Je ne vais pas de manière simple de le prouver, à part en testant toutes les possibilités :

$(5,5) \in \Gamma_{\rho oz}$ et $(5,5) \in \Gamma_{\rho oz}$ et $(5,5) \in \Gamma_{\rho oz}$
$(5,4) \in \Gamma_{\rho oz}$ $(5,4) \in \Gamma_{\rho oz}$
$(5,3) \in \Gamma_{\rho oz}$ $(5,3) \in \Gamma_{\rho oz}$
$(5,2) \in \Gamma_{\rho oz}$ $(5,2) \in \Gamma_{\rho oz}$
$(5,1) \in \Gamma_{\rho oz}$ $(5,1) \in \Gamma_{\rho oz}$

donc $\forall x \in A$, $((5,5) \in \Gamma_{\rho oz}$ et $(5,x) \in \Gamma_{\rho oz}) \Rightarrow (5,x) \in \Gamma_{\rho oz}$.

$(5,4) \in \Gamma_{\rho oz}$ et $(4,5) \in \Gamma_{\rho oz}$ et $(5,5) \in \Gamma_{\rho oz}$
$(4,4) \in \Gamma_{\rho oz}$ $(5,4) \in \Gamma_{\rho oz}$
$(4,3) \in \Gamma_{\rho oz}$ $(5,3) \in \Gamma_{\rho oz}$
$(4,2) \in \Gamma_{\rho oz}$ $(5,2) \in \Gamma_{\rho oz}$
$(4,1) \in \Gamma_{\rho oz}$ $(5,1) \in \Gamma_{\rho oz}$

donc $\forall x \in A$, $((5,4) \in \Gamma_{\rho oz}$ et $(4,x) \in \Gamma_{\rho oz}) \Rightarrow (5,x) \in \Gamma_{\rho oz}$.

etc...

Zagara 3.

$p = 97$ est un nombre premier donc $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$

et $|(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times| = 96$.

On note $b = 8$ et $H = \langle b \rangle$ le sous-groupe de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ engendré par b.

On sait alors que $|H| = \min\{ n \in \mathbb{N}^* \mid b^n = 1\ [97] \}$ et que

$$H = \{ 1, b, \dots, b^{|H|-1} \}.$$

Donc pour déterminer H, il suffit de trouver $|H|$, en calculant par exemple les puissances successives de b dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. On calcule :

$b = 8\ [97]$ $b^2 = 64\ [97] = -33\ [97]$ $b^4 = (-33)^2\ [97] = 9 \times 121\ [97]$
$= 9 \times 24\ [97] = 3 \times 72\ [97]$
$= 3 \times (-25)\ [97] = -75\ [97]$
$b^4 = 22\ [97]$

$b^8 = (22)^2\ [97] = 4 \times 121\ [97] = 4 \times 24\ [97] = 96\ [97] = -1\ [97]$.

$b^{16} = 1\ [97]$

On sait alors que $|H| \mid 16$. Mais b, b^2, b^4, b^8 sont différents de $1\ [97]$

donc $|H| = 16$.

Finalement, $H = \{ 1, 8, -33, 27, 22, -18, -47, 12, -1, -8, 33, -27, -22, 18, 47,$
$1 \quad b \quad b^2 \quad b^3 \quad b^4 \quad b^5 \quad b^6 \quad b^7 \quad b^8 \quad b^9 \quad b^{10} \quad b^{11} \quad b^{12} \quad b^{13} \quad b^{14} \quad b^{15}$
calculés modulo 97.

$$H = \{\pm 1, \pm 8, \pm 12, \pm 18, \pm 22, \pm 27, \pm 33, \pm 47\}.$$

On prend $g = 9$ et on calcule gH. Il suffit de multiplier tout par 9 et de réduire modulo 97 :

$9 \times 1 = 9 \ [97]$ $\quad 9 \times 8 = 72 = -25 \ [97]$ $\quad 9 \times 12 = 11 \ [97]$ $\quad 9 \times 18 = -32 \ [97]$

$9 \times 22 = 4 \ [97]$ $\quad 9 \times 27 = -48 \ [97]$ $\quad 9 \times 33 = 6 \ [97]$ $\quad 9 \times 47 = 35 \ [97]$.

$$gH = \{\pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 11, \pm 25, \pm 33, \pm 35, \pm 48\}.$$

Pour le reste de l'exercice, je ne comprends pas ce dont il s'agit.

Zagaza 3

On a l'automate fini et défini par l'alphabet $\{a, b\}$

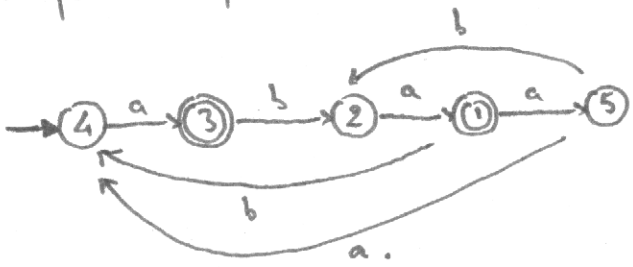
les états $\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$

les entrées $\{q_4\}$

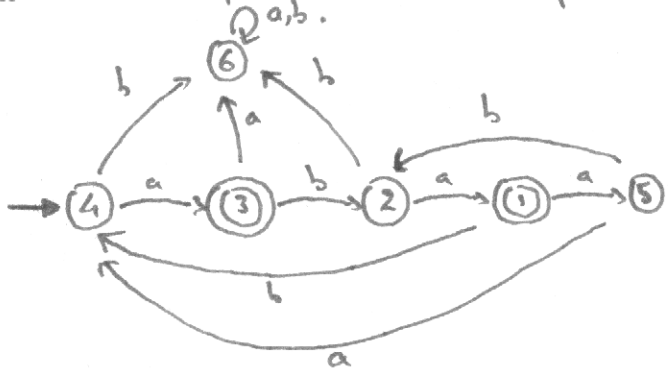
les sorties $\{q_1, q_3\}$

les transitions $\{(1,5,a), (1,4,b), (2,1,a), (3,2,b)$
$(4,3,a), (5,2,b), (5,4,a)\}$.

On peut le représenter ainsi :



Il est presque déterministe : il suffit de lui ajouter un état "poubelle" pour tenir compte des transitions qui ne sont pas définies. Voici la version déterministe :



On note, pour $i \in \{1,2,3,4,5\}$, X_i le langage reconnu si on démarre à l'état i, par l'automate $\mathcal{A}$. Le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est X_4, puisque 4 est l'état initial.

On a successivement :

$X_4 = aX_3$ car $4 \xrightarrow{a} 3$ est la seule transition à partir de 4.

$X_3 = bX_2 + 1$ car $3 \xrightarrow{b} 2$ est la seule transition à partir de 3 et 3 accepte le mot vide.

$X_2 = aX_1$ car $2 \xrightarrow{a} 1$ est la seule transition à partir de 2.

$X_1 = aX_5 + bX_4 + 1$ car on a deux transitions à partir de 1 : $1 \xrightarrow{a} 5$, $1 \xrightarrow{b} 4$ et 1 accepte le mot vide.

$X_5 = aX_4 + bX_2$ car on a deux transitions à partir de 5 : $5 \xrightarrow{a} 4$, $5 \xrightarrow{b} 2$

On écrit le système et on essaie de le résoudre :

$$\begin{cases} X_1 = & & bX_4 + aX_5 + 1 \\ X_2 = aX_1 & & \\ X_3 = & bX_2 & + 1 \\ X_4 = & aX_3 & \\ X_5 = & bX_2 + aX_4 & \end{cases}$$

On commence par remplacer X_2 par aX_1 partout :

$$\begin{cases} X_1 = & & bX_4 + aX_5 + 1 \\ X_2 = aX_1 & & \\ X_3 = baX_1 & & + 1 \\ X_4 = & aX_3 & \\ X_5 = baX_1 & & + aX_4 \end{cases}$$

Puis on remplace X_3 par $baX_1 + 1$ partout :

$$\begin{cases} X_1 = & & bX_4 + aX_5 + 1 \\ X_2 = aX_1 & & \\ X_3 = baX_1 & & + 1 \\ X_4 = abaX_1 & & + a \\ X_5 = baX_1 & + aX_4 & \end{cases}$$

Puis on remplace X_4 par $abaX_1 + a$:

$$\begin{cases} X_1 = babaX_1 & & + aX_5 + ba + 1. \\ X_2 = aX_1 & & \\ X_3 = baX_1 & & \\ X_4 = abaX_1 & & + a \\ X_5 = (ba + a^2ba)X_1 & & + a^2 \end{cases}$$

Enfin, on remplace X_5 par $(ba + a^2ba)X_1 + a^2$:

$$\begin{cases} X_1 = (baba + aba + a^3ba)X_1 & & + a^3 + ba + 1. \\ X_2 = aX_1 & & \\ X_3 = baX_1 & & \\ X_4 = abaX_1 & & + a \\ X_5 = (ba + a^2ba)X_1 & & + a^2 \end{cases}$$

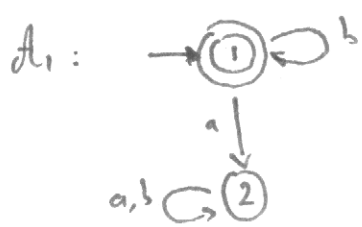
On sait alors (théorème du cours) que : $X_1 = (baba + aba + a^3ba)^* (a^3 + ba + 1)$

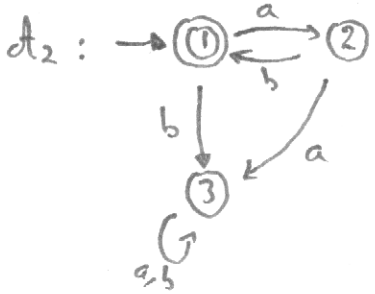
d'où $X_4 = abaX_1 = aba\,(baba + aba + a^3ba)^* (a^3 + ba + 1)$

Le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est $L = aba\,(baba + aba + a^3ba)^* (a^3 + ba + 1)$

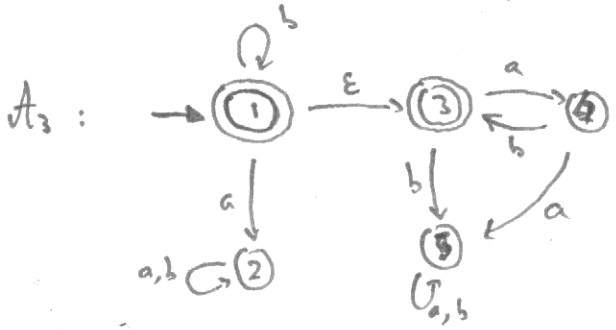
On peut vérifier, à titre d'exemple, que $aba^4ba^2ba = aba \cdot a^3ba \cdot aba \cdot 1$ est accepté, et que ba^3 est refusé.

On note $L_0 = \{ a b^n (ab)^m \mid m, n \in \mathbb{N} \}$ et on cherche un automate qui reconnait L_0.
On remarque que $L_0 = a L_1 L_2$ avec $L_1 = \{ b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ et $L_2 = \{ (ab)^n \mid n \in \mathbb{N} \}$.
Construire des automates qui acceptent L_1 et L_2 est évident :

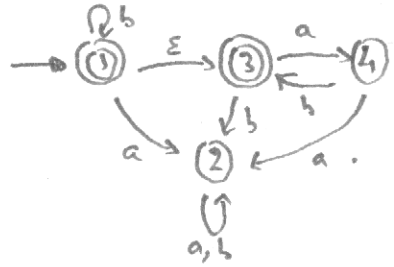




On obtient un automate acceptant $L_1 L_2$ en reliant $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ par une ε-transition entre l'état final de $\mathcal{A}_1$ et l'état initial de $\mathcal{A}_2$:



Mais on préfère avoir une version déterministe de cet automate. On commence par remarquer que 2 et 5 sont des états "poubelle", donc $\mathcal{A}_3$ est équivalent à $\mathcal{A}_4$:



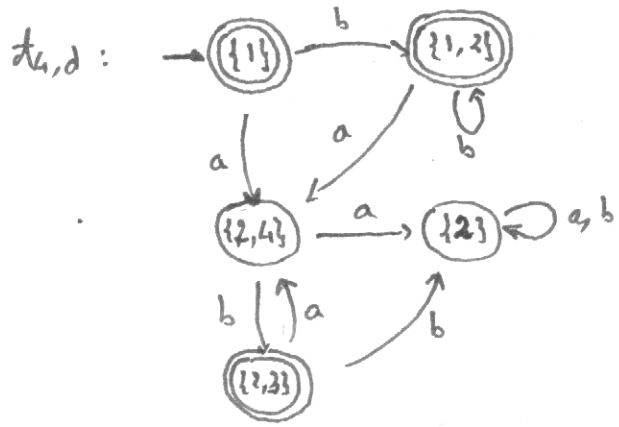
Il reste à supprimer l'ε-transition. On utilise la méthode (probablement étudiée en cours) :

Etats	a	b
{1}	{2,4}	{1,2}
{2,4}	{2}	{2,3}
{2}	{2}	{2}
{2,3}	{2,4}	{2}
{1,2}	{2,4}	{1,2}

car à partir de 1, avec un a, on peut aller en 2 ou en 4 (avec ε-transition par 3)
avec un b, on peut aller en 1 ou en 2 (avec ε-transition par 3).

Même raisonnement.

D'où une version déterministe de $\mathcal{A}_4$:



$\mathcal{A}_{4,d}$ reconnaît $L_1 L_2 = \{ b^n (ab)^m \mid m,n \in \mathbb{N} \}$. Pour reconnaître $L_0 : a L_1 L_2$, il suffit de laisser passer un a et d'envoyer b à la poubelle $\{2\}$ si le mot commence par b. Ceci nous donne un automate $\mathcal{A}$ qui reconnaît L_0 :