Chapitre 6 : Champs de tenseurs dans les variétés

Léo Bernus

19 mars 2020

Table des matières

Les variétés sont des espaces différents, a priori, des espaces vectoriels. En effet, la notion de distance entre deux points ne peut plus s'appréhender par l'algèbre linéaire ni donc par la norme de vecteurs. Nous connaissons l'exemple des surfaces régulières : sur une sphère comme la Terre, tracer une ligne droite qui transperce le sol entre Paris et Moscou n'a pas grand intérêt pour savoir quelle longueur de rail il faudra pour relier ces deux villes. Cependant, localement, les rails sont droits : on peut faire de l'algèbre linéaire dans le plan tangent.

Ce genre de considération est encore plus important en relativité générale, car l'espace-temps est une variété intrinsèquement courbée : contrairement aux surfaces de $\mathbb{R}^3$, l'espace-temps n'a pas à être considéré comme plongé dans un espace euclidien, sa métrique (ou sa première forme fondamentale) est un objet intrinsèque attaché à l'espace-temps. On ne peut donc pas "visualiser" la variété comme une surface plongée dans un espace plus gros puisque l'on vit littéralement dedans ! Tout ce que l'on peut faire (en relativité générale), c'est de prédire les résultats des expérimentations d'un observateur – ce qui est l'essence même de la physique.

Il existe aussi d'autres applications à la physique. Par exemple, dès lors qu'un système dynamique à n degrés de liberté a une intégrale première f, alors cela veut dire que si y est une solution de l'équation différentielle qui définit le système dynamique en question, nous avons $f(y) = cst$. Pour peu que f soit une fonction suffisamment régulière, cela définit une sous-variété par submersion. La plupart des équations différentielles n'étant pas solubles explicitement, les mathématiciens s'intéressent à donner des propriétés géométriques des solutions. Par exemple, savoir que les solutions vivent dans telle variété et non telle autre peut donner des contraintes intéressantes.

Nous allons donc donner quelques propriétés utiles sur ce type d'espace qu'on appelle variétés différentiables.

Pour rédiger ce chapitre, j'ai abondamment utilisé les ouvrages suivants que je recommande aux étudiants qui veulent approfondir les notions abordées :

1. L'excellent polycopié de cours d'Éric Gourgoulhon de relativité générale disponible ici https://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relatM2.pdf ou sur sa page internet https://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/ Ce cours n'est pas un cours sur les tenseurs à proprement parler mais les objets sont introduits de façon intuitives et géométriques sans pour autant perdre trop de rigueur mathématique, bien que l'objet du cours traite plus de la physique de la relativité que des mathématiques. C'est tout le talent pédagogique d'Éric Gourgoulhon.

2. Le livre de "relativité restreinte" d'Éric Gourgoulhon, aux éditions du CNRS. Ce livre exhaustif épuise absolument tout ce qu'on peut faire dans l'espace de Minkowski. La relativité restreinte y est traitée avec des systèmes de coordonnées quelconques, ce qui a poussé Éric Gourgoulhon à expliciter toutes les mathématiques nécessaires... y compris la notion de connexion affine ! La plupart des notions abordées dans ce cours peuvent se retrouver dans le livre d'Éric Gourgoulhon. Même s'il se restreint au cas de l'espace de Minkowski, sa formulation est si élégante que la généralisation aux variétés différentielles quelconques ne pose aucun problème. Les développement du cours sur le champ électromagnétiques sont tous tirés de cet ouvrage.

3. Le polycopié de cours de géométrie différentielle de Frédéric Helein est relativement complet et bien rédigé. Il va plus loin que nous sur certaines notions (l'image réciproque des formes différentielles est plus approfondie). Il est disponible ici https://webusers.imj-prg.fr/~frederic.helein/cours/sdem1.pdf ou sur sa page internet https://webusers.imj-prg.fr/~frederic.helein/cours.html.

4. Le livre très (trop ?) complet de relativité générale de Norbert Strauman, aux éditions Springer, qui contient des chapitres entiers sur les aspects mathématiques de la géométrie différentielle. Assez difficile à lire, je le recommande pour les lecteurs ambitieux.

Les deux derniers cours sont à un niveau plus avancé que l'introduction que nous proposons ici, nous encourageons les étudiants motivés à les consulter pour aller plus loin.

1 Champ de vecteurs dans les variétés

1.1 Qu'est-ce qu'une variété ?

Une variété est un espace qui ressemble localement à $\mathbb{R}^n$. On dit alors que la variété est de dimension n. Pour éviter les pathologie, les mathématiciens utilisent souvent la définition suivante

Définition 1.1. *Une variété différentielle $\mathcal{M}$ de dimension n est un espace topologique muni d'un atlas, c'est-à-dire d'un ensemble de cartes locales $\phi_i : \mathcal{V}_i \subset \mathcal{M} \to \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^n$ où $i \subset I$ tel que :*

1. *I est dénombrable.*
2. *$\forall i \in I, \mathcal{V}_i \subset \mathcal{M}$ est ouvert et $\bigcup_{i\in I} \mathcal{V}_i = \mathcal{M}$.*
3. *ϕ_i est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. Donc $\mathcal{U}_i$ est ouvert.*
4. *Si $\mathcal{V}_{ij} = \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j \neq \emptyset$, alors $\phi_{ij} = \left(\phi_j \circ \phi_j^{-1}\right)\Big|_{\phi_i(\mathcal{V}_{ij})}$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\phi_i(\mathcal{V}_{ij})$ dans $\phi_j(\mathcal{V}_{ij})$.*

On dit que la variété est de classe $\mathcal{C}^k$ si les cartes et les applications de recollement ϕ_{ij} le sont.

Nous représentons symboliquement les applications de recollement figure 1, ainsi que la notion d'atlas figures 2 et 3.

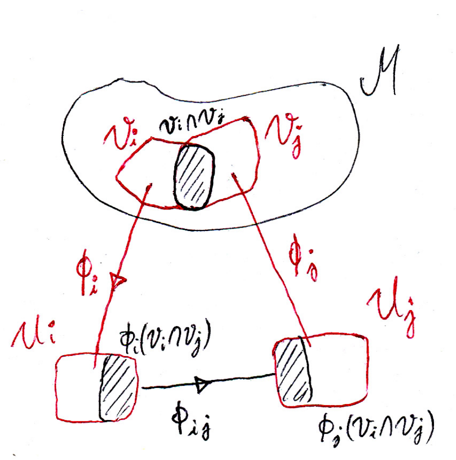

FIGURE 1 – Application de recollement entre $\phi_i(\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j)$ et $\phi_j(\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j)$.

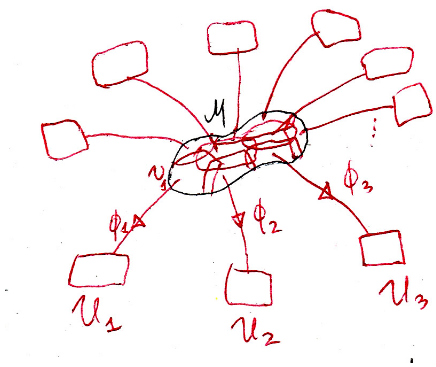

FIGURE 2 – Représentation d'un atlas de $\mathcal{M}$.

1.2 Construction géométrique de l'espace tangent

Pour construire l'espace tangent en un point de la variété, il faut que les cartes soient différentiables et qu'on puisse passer d'une carte à l'autre de façon différentiable en tout point d'intersection ; alors seulement on dit que la variété est différentiable. Voyons comment construire l'espace tangent. Remarquons pour commencer que nous avons déjà rencontré des variétés différentiables dotées d'atlas : les surfaces régulières par immersion en sont un exemple explicite, et la définition des variétés différentiables n'est qu'une extension de cette définition. Par ailleurs, en raison de la courbure de la surface, les vecteurs tangents sortent de celle-ci, de telle sorte qu'il est impossible de relier deux points de la surface par un vecteur dans l'espace tangent. Nous avons besoin de courbes paramétrées $\gamma : I \to \mathcal{M}, \lambda \mapsto \gamma(\lambda) = \mathcal{P}(\lambda) \in \mathcal{M}$. Localement, on peut disposer d'une carte et donc d'un système de coordonnées pour repérer $\mathcal{P}(\lambda)$. Par abus de langage, on décrira donc localement γ par n fonctions différentiables dont on indexera le numéro de la composante par l'indice : $x^\mu = \gamma^\mu(\lambda)$. De façon plus rigoureuse, tant que $\gamma(\lambda) \in \mathcal{V}_i \subset \mathcal{M}$, on a $\gamma(\lambda) = \phi_i^{-1}(\gamma^1(\lambda), \ldots, \gamma^n(\lambda))$. De même, très souvent, nous identifierons la carte ϕ_i par son système de coordonnées $(x^k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ que nous noterons plus simplement (x^k). Dans cette notation, le fait que k varie de 1 à n, la dimension de la variété, est implicite.

Prenons un champ scalaire différentiable sur $\mathcal{M}$: c'est une fonction qui à un point de $\mathcal{M}$ associe un réel. Voyons comment varie f au voisinage de $\mathcal{P}$ le long de l'arc γ. On a

$$f(\gamma(\lambda + \varepsilon)) = f(\gamma(\lambda)) + \varepsilon \frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda) \frac{\partial f}{\partial x^j}(\gamma(\lambda)) + o(\varepsilon) \tag{1}$$

Désormais, nous adoptons la convention d'Einstein : à chaque fois qu'un indice se répète une fois en haut et une fois en bas, nous effectuons la sommation sur cet indice : $a^k b_k = \sum_{k=1}^n a^k b_k$ par convention. Ici il faut donc faire implicitement

$$\frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda) \frac{\partial f}{\partial x^j}(\gamma(\lambda)) = \sum_{j=1}^n \frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda) \frac{\partial f}{\partial x^j}(\gamma(\lambda)) \tag{2}$$

Pour les deux équations précédentes, nous avons utilisé le fait que $f \circ \gamma = f \circ \phi_i^{-1} \circ \tilde{\gamma}$ où $\tilde{\gamma} = (\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$ sont les n fonctions qui permettent de représenter γ dans la carte ϕ_i. En vérité, les

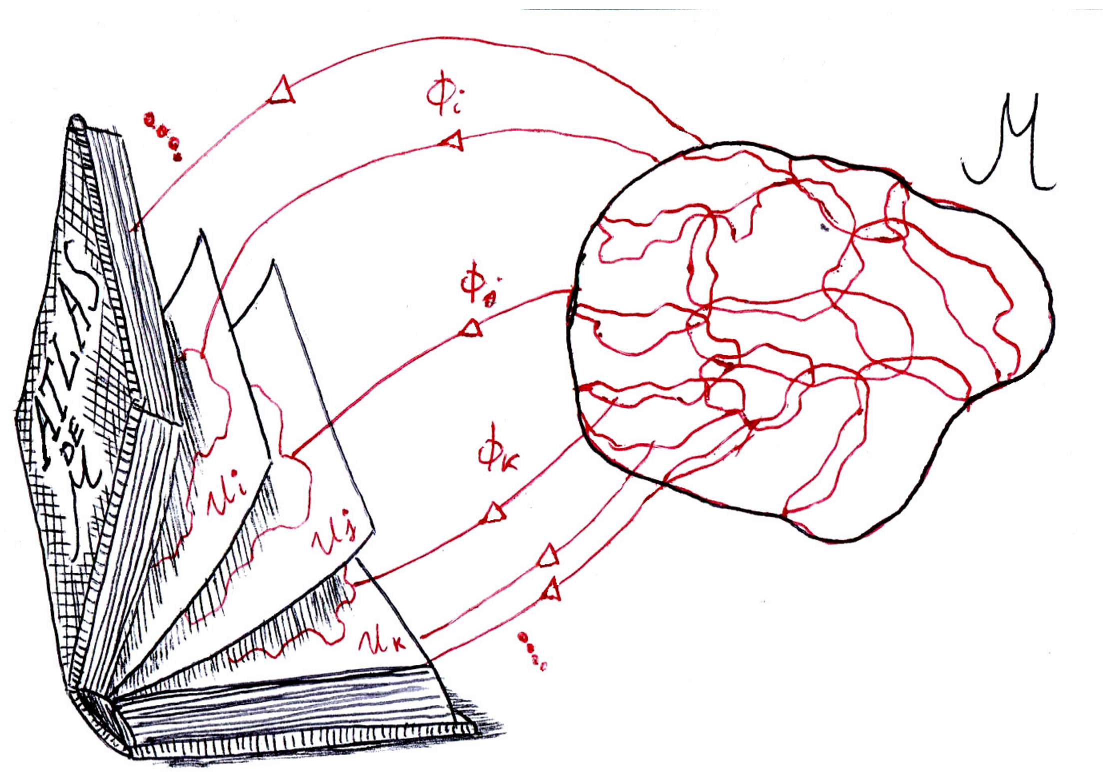

FIGURE 3 – Nous avons fait une représentation plus métaphorique pour illustrer le choix de ce nom. L'idée est de disposer d'une liste finie exhaustive de cartes qui recouvrent toute la variété. Si le nombre de cartes est infini mais dénombrables, il faut simplement imaginer un livre avec un nombre infini de pages.

dérivées partielles de f de l'équation ci-dessus sont les dérivées partielles de la fonction $f \circ \phi_i^{-1}$. Lorsque cela ne présentera pas d'ambiguïté, nous identifierons γ et $\tilde{\gamma}$, ainsi que f et $f \circ \phi_i^{-1}$ dans les notations. En effet, comme les cartes sont des difféomorphismes, nous savons d'après le chapitre 3 que nous pouvons effectuer le changement de variables sans problème. Le terme différentiel de cette équation peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)\frac{\partial f}{\partial x^j}(\lambda) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}(\mathcal{P}(\lambda)) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} f(\mathcal{P}(\lambda)) \tag{3}$$

où l'on a posé $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(\gamma(\lambda)) = \overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}'(\lambda) = \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}/\mathrm{d}\lambda$. Considérons $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(\mathcal{P}(\lambda))$ comme un objet agissant sur f :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(\mathcal{P}(\lambda))f = D_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}} f = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\gamma} \tag{4}$$

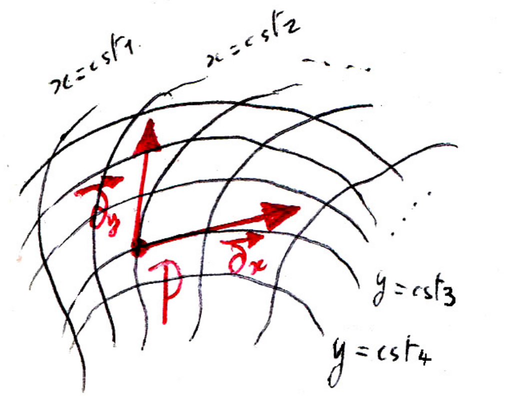

FIGURE 4 – Représentation de la base naturelle. On voit que les vecteurs de la base naturelle sont tangents au lignes des coordonnées.

c'est-à-dire que $\vec{\boldsymbol{v}}(f)$ est la dérivée de f le long de l'arc γ dont la tangente est $\vec{\boldsymbol{v}}$ en $\mathcal{P} = \gamma(\lambda)$. Dans le système de coordonnées (x^k) cela devient tout simplement

$$\vec{\boldsymbol{v}}(f) = v^k \partial_k f \tag{5}$$

Pour établir une base, naturellement adaptée à (x^k), de l'espace vectoriel dans lequel vivent les vecteurs, voyons ce qui se passe si on prend les lignes définies par toutes les coordonnées constantes sauf une, par exemple la première : $x^1 = \lambda$, x^k =constante pour tout $k \geq 1$. Alors l'action du vecteur vitesse associé à cette courbe sur un champ scalaire est

$$\vec{\boldsymbol{v}}_1(f) = \partial_1 f \tag{6}$$

Nous notons par convention $\vec{\boldsymbol{\partial}}_1$ ce vecteur, qui se définit par son action sur f : $\vec{\boldsymbol{\partial}}_1(f) = \partial_1 f$. De même, on peut définir $\vec{\boldsymbol{\partial}}_k$ pour tout k entre 1 et n. Cet ensemble, $(\vec{\boldsymbol{\partial}}_k)$, est ce qu'on appelle la **base naturelle** de l'espace tangent, associée à la carte (x^k). Nous avons représenté la base naturelle dans le cas d'une surface régulière figure 4. Notez que si l'on note $\psi = \phi_i^{-1}$, alors nous avons tout simplement

$$\vec{\boldsymbol{\partial}}_k = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}\psi}}{\partial x^k} \tag{7}$$

ce qui montre que la définition est cohérente avec celle des vecteurs de base de l'espace tangent d'une surface, associée à un paramétrage régulier. Le fait qu'on utilise un système de coordonnées, ou une carte, sous-entend toujours implicitement que nous disposons localement d'un paramétrage régulier qui établit un difféomorphisme entre un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}$. Comme ce sera toujours le cas, sauf exception signalée, nous n'en ferons plus mention.

La base naturelle nous permet de définir l'espace tangent en tout point. Cependant c'est insatisfaisant car en ces termes, l'espace tangent n'apparaît pas comme un objet intrinsèque attaché à la variété en un point, c'est-à-dire indépendant du choix de la carte. Il faut revenir à une définition plus générale qui peut être la suivante, s'inspirant de la définition des vecteurs de l'équation (4) qui elle, est indépendante du choix de la carte.

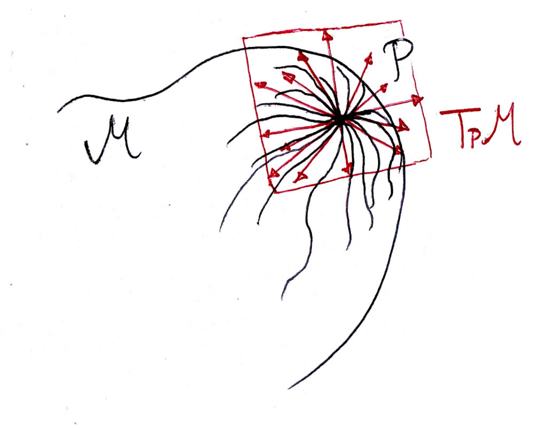

FIGURE 5 – Représentation de l'espace tangent en un point comme classe d'équivalence de courbes régulières admettant une tangente en un point.

Définition 1.2. *Soit $\mathcal{M}$ une variété différentiable de dimension n. Soit $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$. On définit l'espace tangent à $\mathcal{M}$ en $\mathcal{P}$ comme étant la classe d'équivalence des arcs réguliers qui passent par $\mathcal{P}$ – et qui donc admettent un vecteur tangent en $\mathcal{P}$.*

Une représentation de l'espace tangent est faite figure 5.

1.3 Construction algébrique de l'espace tangent

Il existe un point de vue plus algébrique mais équivalent à celui-ci. Celui-ci consiste à voir les vecteurs en un point donné comme des applications linéaires sur les champs scalaires évalués en ce point. Plus précisément, on a :

Définition 1.3. *Soit $\mathcal{M}$ une variété différentiable, soit $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$, soient f et g deux champs scalaires qui sont définis sur un voisinage de $\mathcal{P}$. On dit que $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ est un vecteur de $T_{\mathcal{P}}\mathcal{M}$ s'il est une dérivation en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, l'ensemble des fonctions qui sont définies sur un voisinage de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ est une application linéaire de $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ dans $\mathbb{R}$ satisfait la règle de Leibniz*

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(fg)(\mathcal{P}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(f)(\mathcal{P}))g(\mathcal{P}) + f(\mathcal{P})\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(g)(\mathcal{P}) \tag{8}$$

À partir de cette définition, on voit immédiatement que les dérivations des fonctions constantes sont nulles : $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(1) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}(1 \times 1) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}(1) + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}(1) = 2\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(1)$, d'où $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(1) = 0$, puis par linéarité, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(c) = 0$. On montre ensuite que $\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i$ est bien une dérivation. À partir de cette définition intrinsèque nous pouvons de plus montrer que c'est une base. Nous avons d'abord besoin d'un lemme.

Lemme 1.1. *Soit f un champ scalaire défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Si f est différentiable sur une boule ouverte B centrée en $x_0 \in U$, alors il existe n fonctions f_i telles que*

$$\forall x \in B, f(x) = f(x_0) + f_i(x)(x^i - x_0^i) \tag{9}$$

Démonstration. Un calcul direct d'intégration montre que

$$f_i(x) = \int_0^1 \partial_i f(tx^1 + (1-t)x_0^1, \dots, tx^n + (1-t)x_0^n) \, \mathrm{d}t \tag{10}$$

convient. □

Théorème 1.1. *$(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i)$ est une base de $T_\mathcal{P}\mathcal{M}$.*

Démonstration. C'est une famille libre : en effet, s'il existe n scalaires α^k tels que $\alpha^k \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k = 0$, en appliquant ce vecteur à $f = x^j$, on obtient $\alpha^j = 0$ pour tout j.

C'est une famille génératrice : soit $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in T_\mathcal{P}M$. On note $a^s = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}(x^s)$. Posons $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} - a^k \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k$. Soit un champ scalaire défini au vosinage de $\mathcal{P}$. Soit U une boule ouverte de $\phi_i(\mathcal{P}) = (x^k_\mathcal{P})$. Alors dans cette boule ouverte, d'après le lemme, tout champ scalaire s'exprime ainsi : $f(x^k) = f(x^k_\mathcal{P}) + (x^k - x^k_\mathcal{P})f_i(x^k)$. De cette sorte, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{y}}(f) &= (x^k - x^k_\mathcal{P})\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(f_k) + f_k \overrightarrow{\boldsymbol{v}}(x^k - x^k_\mathcal{P}) - (x^k - x^k_\mathcal{P})a^s\partial_s f_k - f_k a^s \partial_s(x^k - x^k_\mathcal{P}) && (11) \\ &= (x^k - x^k_\mathcal{P})\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(f_k) + f_k a^k - (x^k - x^k_\mathcal{P})a^s\partial_s f_k - f_k a^k && (12) \end{aligned}$$

que l'on doit évaluer en $x^k_\mathcal{P}$, ce qui donne 0. On en déduit $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$, soit $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = a^k \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k$, d'où le résultat. □

On a donc construit de façon intrinsèque l'espace tangent à travers la notion de dérivation abstraite en un point, et en montrant que $(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k)$ était une base de l'ensemble des dérivations en $\mathcal{P}$, on a montré que ce point de vue était équivalent à celui de la classe d'équivalence des arcs paramétrés passant par $\mathcal{P}$. Cela montre d'ailleurs que l'espace tangent est de dimension n, la même dimension que $\mathcal{M}$, comme on pouvait s'y attendre.

Remarquons qu'en principe, à ce stade nous ne devrions pas noter $\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k$ mais $\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k(\mathcal{P})$ car les vecteurs sont toujours définis localement sur l'espace tangent en un point. Nous choisissons d'alléger les notations et de sous-entendre la dépendance en $\mathcal{P}$ de $\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k$. De toute manière, nous serons souvent amenés à considérer plutôt des champs de vecteurs que des vecteurs en un point : tout comme sur les surfaces régulières, on peut généraliser la notion de fibré tangent et considérer des champs de vecteurs.

Définition 1.4. *Le fibré tangent de $\mathcal{M}$, noté $T\mathcal{M}$, est l'ensemble des champs de vecteurs sur $\mathcal{M}$:*

$$T\mathcal{M} = \{(x, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) | x \in \mathcal{M}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in T_x\mathcal{M}\}. \tag{13}$$

1.4 Transformation contravariante des coordonnées par changement de carte

Les vecteurs sont des objets intrinsèques. Ils ne dépendent pas de la carte, puisqu'ils sont définis ou bien par un arc paramétré intrinsèque passant par un point, ou bien par leur action de dérivation sur les champs scalaires en un point donné (les deux points de vue étant équivalents). L'équivalence du point de vue algébrique et géométrique implique que pour établir des propriétés algébriques sur les vecteurs, on pourra toujours se référer à leur action sur un champ scalaire. Par exemple, voyons comment varient les coordonnées d'un vecteur lorsque l'on passe d'une carte à l'autre. Soient deux cartes (x^i) et (X^i) qui se recoupent sur $\mathcal{M}$. Comme $\vec{\boldsymbol{v}}$ est un objet intrinsèque, il doit pouvoir s'exprimer dans les deux cartes

$$\vec{\boldsymbol{v}} = v^i \frac{\vec{\boldsymbol{\partial}}}{\partial x^i} = V^i \frac{\vec{\boldsymbol{\partial}}}{\partial X^i} \tag{14}$$

Nous savons que là où les cartes se recoupent, l'application de recollement est un difféomorphisme. Nous pouvons donc écrire la règle de la chaîne

$$\frac{\partial}{\partial X^i} = \frac{\partial x^j}{\partial X^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{15}$$

et par l'équivalence de la définition géométrique des vecteurs à celle de leur action sur les champs scalaires, nous pouvons en déduire

$$\frac{\vec{\boldsymbol{\partial}}}{\partial X^i} = \frac{\partial x^j}{\partial X^i} \frac{\vec{\boldsymbol{\partial}}}{\partial x^j} \tag{16}$$

soit

$$\vec{\boldsymbol{v}} = V^i \frac{\partial x^j}{\partial X^i} \frac{\vec{\boldsymbol{\partial}}}{\partial x^j} \tag{17}$$

Par unicité de la décomposition sur la base, il vient

$$v^i = V^j \frac{\partial x^i}{\partial X^j} \tag{18}$$

ceci est la loi de transformation des vecteurs par changement de carte. Comme elles varient de façon contraire aux coordonnées de la carte, on dit que ces coordonnées sont "contravariantes". Certains anciens ouvrages définissent les vecteurs comme des tableaux de chiffres qui se transforment selon cette loi. C'est le cas du (néanmoins merveilleux) livre de théorie classique des champs de Landau & Lifchitz. Le caractère géométrique et intrinsèque des vecteurs y est moins évident qu'ici, où la loi de transformation des coordonnées est déduite de la définition intrinsèque des vecteurs.

1.5 Exercices-exemples

1. $\mathbb{R}^3$ est une variété différentiable dont la carte constituée des coordonnées cartésiennes $(x^i) = (x, y, z)$ est un atlas. Les vecteurs de la base naturelle sont $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{\boldsymbol{\partial}}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{\boldsymbol{\partial}}_y = (0, 1, 0)$, $\vec{\boldsymbol{\partial}}_z = (0, 0, 1)$. Comme $\mathbb{R}^3$ est plat et centré en 0, c'est un espace vectoriel et pour les coordonnées cartésiennes, les vecteurs de base ne varient pas. Il se trouve qu'on a ici $\vec{\boldsymbol{\partial}}_i = \vec{\boldsymbol{e}}_i$ où $\vec{\boldsymbol{e}}_i$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Bien entendu ça n'est pas le cas en général.
2. On définit les coordonnées sphériques sur $\mathbb{R}^3 \backslash (\mathbb{R} \vec{\boldsymbol{\partial}}_z)$ (on modifie l'origine de l'ensemble de φ pour avoir tous les méridiens) :

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \tag{19}$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi \tag{20}$$

$$z = r \cos\theta \tag{21}$$

pour $r > 0$, $0 < \theta < \pi$, et alternativement $0 < \varphi < 2\pi$ puis $-\pi < \varphi < \pi$. Calculer les coordonnées de $\vec{\boldsymbol{\partial}}_r$, $\vec{\boldsymbol{\partial}}_\theta$, $\vec{\boldsymbol{\partial}}_\varphi$ en fonction des vecteurs de la base naturelle des coordonnées

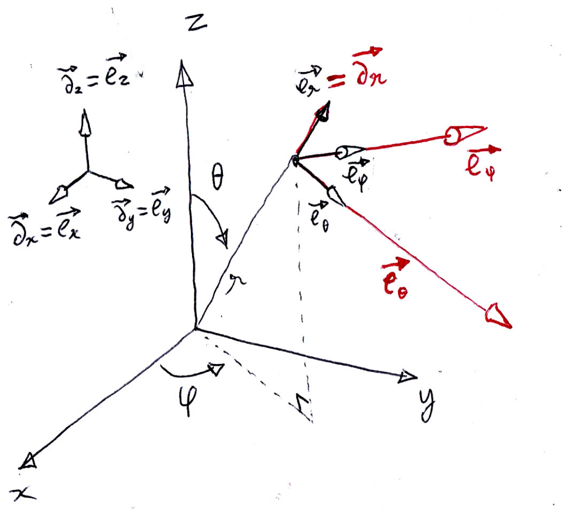

FIGURE 6 – Coordonnées sphériques. En rouge, les vecteurs de la base naturelle. On voit qu'ils ne sont pas égaux aux vecteurs de la base orthonormée locale.

cartésiennes, puis des vecteurs de la base orthonormée locale des coordonnées sphériques. Commenter.

Solution : on étudie l'action de chacun de ces vecteurs sur un champ scalaire quelconque. Ou, plus rapidement, on utilise la règle de la chaîne. Par exemple :

$$\partial_r = \partial_r x \partial_x + \partial_r y \partial_y + \partial_r z \partial_z = \sin\theta\cos\varphi\partial_x + \sin\theta\sin\varphi\partial_y + \cos\theta\partial_z \tag{22}$$

d'où

$$\vec{\boldsymbol{\partial}}_r = \sin\theta\cos\varphi\vec{\boldsymbol{\partial}}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{\boldsymbol{\partial}}_y + \cos\theta\vec{\boldsymbol{\partial}}_z \tag{23}$$

De même on a

$$\vec{\boldsymbol{\partial}}_\theta = r\cos\theta\cos\varphi\vec{\boldsymbol{\partial}}_x + r\cos\theta\sin\theta\vec{\boldsymbol{\partial}}_y - r\sin\theta\vec{\boldsymbol{\partial}}_z \tag{24}$$

$$\vec{\boldsymbol{\partial}}_\varphi = -r\sin\theta\sin\varphi\vec{\boldsymbol{\partial}}_x + r\sin\theta\cos\varphi\vec{\boldsymbol{\partial}}_y \tag{25}$$

On remarque que

$$\vec{\boldsymbol{\partial}}_r = \vec{\boldsymbol{e}}_r, \quad \vec{\boldsymbol{\partial}}_\theta = r\vec{\boldsymbol{e}}_\theta, \quad \vec{\boldsymbol{\partial}}_\varphi = r\sin\theta\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi \tag{26}$$

Ainsi la base naturelle n'est pas nécessairement orthonormée. Nous avons déjà rencontré cela dans les surfaces régulières, où les vecteurs de base de l'espace tangents formés par les dérivées partielles du paramétrage par rapport aux deux coordonnées n'étaient pas nécessairement orthonormés. On représente les coordonnées sphériques et les différentes bases figure 6.

2 Dualité : formes linéaires et espace cotangent

2.1 Construction de l'espace dual

À tout espace vectoriel on peut faire correspondre un espace dual, l'ensemble des formes linéaires sur cet espace. L'espace tangent ne fait pas exception à cette règle, ainsi :

Définition 2.1. *On note $T_x^*\mathcal{M}$ l'espace cotangent à $\mathcal{M}$ en x, l'ensemble des formes linéaires sur $T_x\mathcal{M}$.*

Et de même on peut définir des champs de formes linéaires sur $\mathcal{M}$.

Définition 2.2. *Le fibré cotangent de $\mathcal{M}$, noté $T^*\mathcal{M}$, est l'ensemble des champs formes linéaires sur $\mathcal{M}$:*

$$T^*\mathcal{M} = \{(x, \underline{\boldsymbol{\omega}}) | x \in \mathcal{M}, \underline{\boldsymbol{\omega}} \in T_x^*\mathcal{M}\} \tag{27}$$

Vous devez commencer à comprendre les choix de nos notations. Tous les éléments en gras sont des éléments du fibré. S'il y a une flèche au dessus, ce sont des vecteurs. S'ils sont soulignés, ce sont des formes linéaires.

Essayons de construire une base de $T_x^*\mathcal{M}$. La forme linéaire la plus élémentaire par rapport à la base naturelle a déjà été définie dans le chapitre sur les bases du calcul différentiel :

Définition 2.3. *Soit $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in T_x\mathcal{M}$. On représente $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ dans sa base naturelle : $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = v^i \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i$. On appelle k-ème projecteur, ou forme coordonnée k, et on note $\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k$, la forme linéaire dont le graphe est*

$$\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = v^k \tag{28}$$

Nous avons notamment $\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k \left(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_s\right) = \delta_s^k$ qui vaut 1 si $k = s$, 0 sinon. Essayons d'en donner une interprétation géométrique. Voyons encore une fois comment varie un champ scalaire localement le long d'un arc. Si nous notons symboliquement

$$\gamma(\lambda + \varepsilon) = P + \delta\overrightarrow{\boldsymbol{P}} + o(\|\delta\overrightarrow{\boldsymbol{P}}\|) = \gamma(\lambda) + \varepsilon\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}'(\lambda) + o(\varepsilon) \tag{29}$$

nous avons

$$\begin{aligned} f(P + \delta\overrightarrow{\boldsymbol{P}}) &= f(P) + \varepsilon\gamma^{i'}(P)\partial_i f(P) + o(\varepsilon) && (30)\\ &= f(P) + \varepsilon\partial_i f(P)\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i(\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}'(\lambda)) + o(\varepsilon) && (31)\\ &= f(P) + \partial_i f(P)\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i(\delta\overrightarrow{\boldsymbol{P}}) + o(\varepsilon) && (32) \end{aligned}$$

nous retrouvons le résultat classique que pour un champ scalaire, $\mathrm{d}f = \partial_i f \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i$. Les formes coordonnées vont donc indiquer quelles sont les variations de la coordonnée considérée lorsqu'un point varie localement. De même que les vecteurs de la base naturelle, les formes coordonnées dépendent de la carte. Nous représentons figure 7 l'action des formes coordonnées sur la variation locale d'un arc paramétré.

Théorème 2.1. $(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k)$ *est une base de $T^*\mathcal{M}$.*

Démonstration. C'est une famille libre. En effet, s'il existe n scalaires a_k tels que $a_k\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k = \underline{\mathbf{0}}$, alors en appliquant cette forme à $\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_s$, on trouve $a_s = 0$. D'autre part on sait que la dimension de $T^*\mathcal{M}$ est n. $(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k)$ est une famille libre de n éléments de $T^*\mathcal{M}$, c'est donc une base. □

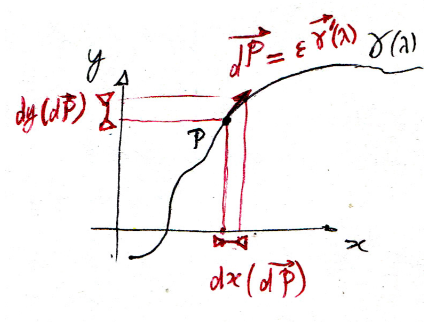

FIGURE 7 – Action des formes coordonnées sur la variation locale d'un arc paramétré. Au vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{d}}P$, elles associent les variatons induites sur chaque coordonnée de la carte choisie.

Pour toute forme linéaire $\underline{\boldsymbol{\omega}}$, dès lors qu'on se donne une carte (x^k), il existe n unique champs scalaires ω_k tels que $\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_k \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k$. Par exemple, la différentielle d'un champ scalaire est une forme linéaire : $\mathrm{d}f = \partial_i f \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i$. Son application sur un champ vectoriel est tout simplement la dérivée de f le long de ce champ, mais c'est aussi égal au champ vectoriel appliqué à ce champ : $\mathrm{d}f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) = D_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}} f = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}(f)$. Attention cependant, la réciproque est fausse : toute forme linéaire n'est pas nécessairement la différentielle d'un champ scalaire. Nous y reviendrons au chapitre suivant pour voir à quelle condition une forme différentielle (objet plus général) est la différentielle d'une autre.

2.2 Transformation covariante des coodonnées par changement de carte

Il est naturel de se demander comment varient les composantes d'une forme linéaire lorsqu'on change de carte via l'application de recollement. Considérons deux cartes (x^k) et (X^k) dont les ensembles images ont une intersection non vide et ouverte. Sur ce domaine, l'application de recollement est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme, on peut donc considérer sans danger que chaque coordonnée X^i est une fonction différentiable de x^j et que la donnée des n fonctions $X^i(x^j)$ constitue bien un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme qui n'est autre que l'application de recollement. Dans ce cas, on a

$$\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}^i(x^j) = \frac{\partial X^i}{\partial x_j} \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^j \tag{33}$$

De même, on sait que toute forme linéaire se décompose de façon unique sur chaque base. Comme elle est définie de façon intrinsèque, on a nécessairement

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_k \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k = \Omega_m \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}^m = \Omega_m \frac{\partial X^m}{\partial x_q} \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^q \tag{34}$$

d'où l'on déduit

$$\omega_k = \Omega_m \frac{\partial X^m}{\partial x_k} \tag{35}$$

C'est ainsi que se transforment les composantes d'une forme linéaire. On constate que la loi est contraire à celle des vecteurs. Comme les composantes des formes linéaires varient en même temps que les coordonnées de la carte, on dit qu'elles sont "covariantes".

3 Les tenseurs en toute généralité

3.1 Prélude : dual du dual

En guise de préliminaire, posons nous une question absurde en apparence : quel est l'espace dual de $T^*\mathcal{M}$? Quel est le dual du dual ? En fait on peut identifier $T^{**}\mathcal{M}$ à $T\mathcal{M}$. En effet, un vecteur peut également se considérer comme forme linéaire sur l'espace dual en considérant le graphe de $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ à l'envers :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{\boldsymbol{v}}} \in T^{**}\mathcal{M} : T^*\mathcal{M} &\to \mathbb{R} \\ \underline{\boldsymbol{\omega}} &\mapsto \underline{\boldsymbol{\omega}}\left(\vec{\boldsymbol{v}}\right) \end{aligned} \tag{36}$$

Cela revient à écrire $\underline{\vec{\boldsymbol{v}}} = \left\langle \cdot, \vec{\boldsymbol{v}} \right\rangle$. On voit le lien avec les notations de la mécanique quantique qui identifient un "vecteur d'état" avec son action sur les formes linéaires : $\vec{\boldsymbol{\psi}} = |\psi>$. Il est évident que défini ainsi, $\underline{\vec{\boldsymbol{v}}}$ a toutes les bonnes propriétés d'un objet de $T^{**}\mathcal{M}$ (on peut s'amuser à refaire toutes les démonstrations de l'algèbre linéaire classique "à l'envers"). On identifiera désormais $T^{**}\mathcal{M}$ et $T\mathcal{M}$. Rappelons les trois points de vue équivalents que nous avons vus jusqu'ici pour considérer un vecteur :

1. Un vecteur est la tengante d'une courbe en un point (point de vue géométrique).
2. Un vecteur se définit par son action sur un champ scalaire en un point (point de vue algébrique).
3. Un vecteur se définit par son action sur une forme linéaire en un point (point de vue dual du dual).

3.2 Fugue : construction des tenseurs

Définition 3.1. *Une forme multilinéaire de rang s est une application de $(T_x\mathcal{M})^s$ dans $\mathbb{R}$ linéaire par rapport à chacun de ses arguments :*

$$\boldsymbol{\omega} : T_x\mathcal{M} \times \ldots \times T_x\mathcal{M} \to \mathbb{R}, \left(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_s\right) \mapsto \boldsymbol{\omega}\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_s\right) \tag{37}$$

Et de là nous sommes armés pour définir ce qu'est un tenseur en toute généralité :

Définition 3.2. *Un tenseur de type (r, s), ou r fois contravariant et s fois covariant, est une forme multilinéaire définie sur $(T_x^*\mathcal{M})^r \times (T_x\mathcal{M})^s$. On note $T_x\binom{r}{s}\mathcal{M}$ l'ensemble des tenseurs de type (r, s) au point $x \in \mathcal{M}$, et tout simplement $T_s^r\mathcal{M}$ l'ensemble des champs de tenseurs de type (r, s). $k + s$ est ce qu'on appelle le rang du tenseur.*

Remarques

1. Un vecteur est un tenseur de type $(1, 0)$.
2. Une forme linéaire est un tenseur de type $(0, 1)$.
3. Par convention, un champ scalaire est un champ tensoriel de type $(0, 0)$.
4. Le terme "rang d'un tenseur" est ambigu. En effet, il ne faut pas confondre le rang d'un tenseur qui dépend de son type, avec le rang d'un tenseur au sens rang d'une application linéaire, c'est-à-dire la dimension de l'espace image. Par exemple, la forme linéaire nulle définie sur $(T_x\mathcal{M})^{10000}$ a un rang de 10000 au sens défini plus haut, mais comme son espace image est le singleton 0, son rang au sens de l'algèbre linéaire classique est 0.

Avant de trouver une base de l'ensemble des tenseurs, nous avons besoin de définir le produit tensoriel.

Définition 3.3. *Le produit tensoriel de deux tenseurs de types (r, s) et (p, q) est un tenseur de type $(r+p, s+q)$ défini ainsi. Soient $\boldsymbol{\omega} \in T^r_s\mathcal{M}$, $\boldsymbol{\mu} \in T^p_q\mathcal{M}$. On note $\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\mu}$ le produit tensoriel de $\boldsymbol{\omega}$ et $\boldsymbol{\mu}$ qui vérifie*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\mu} : (T^*\mathcal{M})^r \times (T\mathcal{M})^s \times (T^*\mathcal{M})^p \times (T\mathcal{M})^q \to \mathbb{R} \\ \left(\underline{\boldsymbol{\omega}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{\omega}}_r, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s, \underline{\boldsymbol{\omega}}_{r+1}, \ldots, \underline{\boldsymbol{\omega}}_{r+p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{s+1}, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{s+q}\right) \mapsto \boldsymbol{\omega}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{\omega}}_r, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s\right) \boldsymbol{\mu}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{r+1}, \ldots, \underline{\boldsymbol{\omega}}_{r+p}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{s+1}, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{s+q}\right)\end{gathered} \tag{38}$$

Remarques

1. Exemple : pour $\underline{\boldsymbol{\omega}}, \underline{\boldsymbol{\mu}} \in T^*\mathcal{M}$, on a

$$\forall \overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in T\mathcal{M}, (\underline{\boldsymbol{\omega}} \otimes \underline{\boldsymbol{\mu}})\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) = \underline{\boldsymbol{\omega}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right) \underline{\boldsymbol{\mu}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) \tag{39}$$

2. Autre exemple : le tenseur $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \otimes \underline{\boldsymbol{u}}$ est défini sur $T^*\mathcal{M} \times T\mathcal{M}$:

$$\forall (\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \overrightarrow{\boldsymbol{\beta}}) \in T^*\mathcal{M} \times T\mathcal{M}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \otimes \underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \overrightarrow{\boldsymbol{\beta}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}\right) \underline{\boldsymbol{u}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}}\right) = \underline{\boldsymbol{\alpha}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) \underline{\boldsymbol{u}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}}\right) \tag{40}$$

   Et on peut combiner ainsi à l'infini toute sortes de formes, vecteurs, tenseurs. La seule limite est votre imagination !

3. Attention : $\otimes$ ne commute pas ! Par exemple, dans $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$, $\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}} \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{y}} - \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{y}} \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}} \neq \mathbf{0}$. En effet, deux vecteurs non colinéaires et non nuls $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ ont un déterminant non nul dans $\mathbb{R}^2$, donc

$$\left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}} \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{y}} - \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{y}} \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}\right)\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) = u^x v^y - u^y v^x \neq 0 \tag{41}$$

   En toute généralité, deux tenseurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ ne vérifient pas nécessairement $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a}$.

Désormais nous avons suffisamment d'outils pour déterminer une base de $T^r_s\mathcal{M}$.

Théorème 3.1. *Munissons $\mathcal{M}$ d'une carte (x^k). Alors*

$$\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_r} \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_s}\right)_{(i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s) \in [\![1, n]\!]^{r+s}} \tag{42}$$

est une base de $T^r_s\mathcal{M}$.

Démonstration. On constate tout simplement qu'on a

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_r} \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_s}\left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{p_1}, \ldots, \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{p_r}, \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{q_1}, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{q_s}\right) = \prod_{k=1}^{r} \prod_{m=1}^{s} \delta^{p_k}_{i_k} \delta^{q_m}_{j_m} \tag{43}$$

De là, prouver que la famille proposée est libre et génératrice est évident. □

Ainsi, dans une base naturelle, on pourra définir les coordonnées d'un tenseur comme ses composantes sur la base :

$$\boldsymbol{T} = T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_r} \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_s} \tag{44}$$

Il faut prendre garde à ne pas oublier qu'avec la convention de sommation des indices répétés en haut et en bas, cette équation sous entend une $(r+s)$-uple somme qui s'écrirait, sans cette convention :

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_r=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_s=1}^{n} T^{i_1 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s} \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_r} \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_1} \otimes \dots \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_s} \tag{45}$$

Les scalaires $T^{i_1 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s}$ sont les composantes de $\boldsymbol{T}$ dans la carte (x^k). En particulier, on a

$$T^{i_1 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s} = \boldsymbol{T}\left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{p_1}, \dots, \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{p_r}, \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{q_1}, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{q_s}\right) \tag{46}$$

Sur les tenseurs de rang 1, on vérifie en effet que pour $\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_k \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k$, on a bien

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_m\right) = \omega_k \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k \left(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_m\right) = \omega_k \delta^k_m = \omega_m \tag{47}$$

et pour $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = v^k \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k$, on a bien

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^m\right) = \underline{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}\left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^m\right) = \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^m\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) = \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^m\left(v^k \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k\right) = v^k \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^m\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k\right) = v^k \delta^m_k = v^m \tag{48}$$

Exercice Soient r formes linéaires $\underline{\boldsymbol{\omega}}^a = \omega^a_k \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k$, $a \in [\![1, r]\!]$, et s vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_b = v^k_b \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k$, $b \in [\![1, s]\!]$, et soit un tenseur de type (r, s) avec les mêmes notations que précédemment : $\boldsymbol{T} = T^{i_1 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s} \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_r} \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_1} \otimes \dots \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_s}$. Calculer $\boldsymbol{T}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^1, \dots, \underline{\boldsymbol{\omega}}^r, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s\right)$ en fonction des coordonnées de chaque objet.

Solution : c'est un exercice de calcul brutal qui utilise la multilinéarité de $\boldsymbol{T}$ par rapport à chacun de ses arguments. On pourrait tout calculer directement mais faisons d'abord avec la base de $T^r_s\mathcal{M}$. On a

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_r} \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_1} \otimes \dots \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_s}\left(\omega^1_k \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k, \dots, \omega^s_m \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^m, v^p_1 \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_p, \dots, v^q_s \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_q\right) \\
&= \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_1}\left(\omega^1_k \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k\right) \dots \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_r}\left(\omega^s_m \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^m\right) \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_1}\left(v^p_1 \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_p\right) \dots \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_s}\left(v^q_s \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_q\right) &(49)\\
&= \omega^1_k \dots \omega^r_m v^p_1 \dots v^q_s \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_1}(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k) \dots \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_r}(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^m) \dots \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_1}(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_p) \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_s}(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_q) &(50)\\
&= \omega^1_k \dots \omega^r_m v^p_1 \dots v^q_s \delta^k_{i_1} \dots \delta^m_{i_r} \delta^{j_1}_p \dots \delta^{j_s}_q &(51)\\
&= \omega^1_{i_1} \dots \omega^r_{i_r} v^{j_1}_1 \dots v^{j_s}_s &(52)
\end{aligned}$$

Connaissant l'action d'un élément de base, il suffit de faire la combinaison linéaire avec les coordonnées de $\boldsymbol{T}$, ce qui donne tout simplement

$$\boldsymbol{T}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^1, \dots, \underline{\boldsymbol{\omega}}^r, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s\right) = T^{i_1 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s} \omega^1_{i_1} \dots \omega^r_{i_r} v^{j_1}_1 \dots v^{j_s}_s \tag{53}$$

Définition 3.4. *On définit la contraction entre un tenseur de type (r, s) et un vecteur, ou une forme linéaire, le tenseur de type respectivement $(r, s-1)$ ou $(r-1, s)$ défini ainsi :*

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \dashv \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\cdot, \dots, \cdot, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \dots, \cdot) \tag{54}$$

où $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ apparaît à la $r+1$-ème postion, et

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} \dashv \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\underline{\boldsymbol{\omega}}, \dots) \tag{55}$$

Les composantes de $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \dashv \boldsymbol{T}$ sont $T^{i_1\dots i_r}{}_{kj_2\dots j_s} v^k$ et les composantes de $\underline{\boldsymbol{\omega}} \dashv \boldsymbol{T}$ sont $T^{ki_2\dots i_r}{}_{j_1\dots j_s}\omega_k$. Quitte à réordonner les indices (ou les arguments) de $\boldsymbol{T}$, on peut très bien définir la contraction sur l'argument que l'on souhaite. En fait, on peut généraliser cette définiton et contracter deux tenseurs de rangs quelconques sur les arguments que l'on souhaite, par exemple pour deux tenseurs $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{S}$ on peut très bien considérer le tenseur de composantes $T^{kmn\dots i_r}{}_{j_1\dots j_{s-1}q} S^{a_1 q}{}_{b_1 b_{c-1} kmn}$. Ici encore la seule limite est notre imagination. On peut également contracter un tenseur sur ses propres indices, par exemple considérer le tenseur de composantes $T^{ki_2\dots i_r}{}_{kj_2\dots j_s}$.

3.3 Toccata : transformation contravariante et covariante des coordonnées d'un tenseur

On peut maintenant se demander comment varient les composantes d'un tenseur quand on change de carte. Pour cela il suffit de regarder comment se transforme les vecteurs de base de $T^r_s\mathcal{M}$. Notons

$$\boldsymbol{t} = t^{i_1\dots i_r}{}_{j_1\dots j_s} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}}{\partial x^{i_r}} \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_1} \otimes \dots \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_s} \tag{56}$$

$$= T^{k_1\dots k_r}{}_{m_1\dots m_s} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}}{\partial X^{k_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}}{\partial X^{k_r}} \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}^{m_1} \otimes \dots \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}^{m_s} \tag{57}$$

$$\tag{58}$$

On cherche à exprimer, par exemple, $t^{k_1\dots k_r}{}_{m_1\dots m_s}$ en fonction de $T^{i_1\dots i_r}{}_{j_1\dots j_s}$. Pour ce faire, il suffit de se rappeler que

$$\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}}{\partial X^k} = \frac{\partial x^j}{\partial X^k} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}}{\partial x^j} \tag{59}$$

et

$$\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^j \tag{60}$$

et en injectant cela dans le deuxème membre de l'équation (57) et en identifiant aux éléments de base, on trouve la loi de transformation des coordonnées des tenseurs de type (r, s) :

$$t^{k_1\dots k_r}{}_{m_1\dots m_s} = T^{i_1\dots i_r}{}_{j_1\dots j_s} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial X^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{k_r}}{\partial X^{i_r}} \frac{\partial X^{j_1}}{\partial x^{m_1}} \cdots \frac{\partial X^{j_s}}{\partial x^{m_s}} \tag{61}$$

Ici on voit que les r premières composantes sont contravariants comme les composantes des vecteurs, et que les s dernières sont covariantes, comme les composantes des formes linéaires. Les vieux ouvrages définissent les tenseurs de type (k, s) comme des tableaux de chiffres qui se transforment selon la loi énoncée ci-dessus. Ici, nous avons déduit la loi de transformation des composantes du tenseur en partant de sa définition intrinsèque.

4 Le tenseur métrique

Une variété différentielle peut être munie d'une métrique intrinsèque qui définira le produit scalaire sur $\mathcal{M}$. Cela revient à munir $\mathcal{M}$ d'une première forme fondamentale sans que celle-ci ne soit nécessairement induite par une métrique euclidienne d'un espace plus gros [1]. Dans le cas des variétés munies de métriques, on parlera de variétés métrées, ou de variétés riemanniennes.

4.1 Propriétés du tenseur métrique

Définition 4.1. *On dit que $\mathcal{M}$ est munie d'une métrique $\boldsymbol{g}$, et l'on parle de variété riemannienne $(\mathcal{M}, \boldsymbol{g})$, si $\boldsymbol{g}$ est un champ tensoriel de type $(0,2)$ qui vérifie*

— *$\boldsymbol{g}$ est symétrique : $\forall \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in T\mathcal{M}, \boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})$.*

— *$\boldsymbol{g}$ est non dégénérée définie positive : $\forall \vec{\boldsymbol{u}} \in T\mathcal{M}, \boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{u}}) \geq 0$ et $\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{u}}) = 0 \Rightarrow \vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{0}}$.*

— *En relativité générale, on peut affaiblir l'hypothèse précédente. On travaille alors dans des variétés de dimension 4 avec des métriques qui ont une signature $(-,+,+,+)$, c'est-à-dire qu'en tout point, il existe une carte telles que les coordonnées de $\boldsymbol{g}$ soient $\operatorname{diag}(-1,+1,+1,+1)$. Nous préciserons à chaque fois si nous travaillons avec une métrique définie positive ou la métrique de la relativité générale.*

Remarques.

1. La bilinéarité de $\boldsymbol{g}$ découle immédiatement de sa nature tensorielle. Elle a donc toutes les bonnes propriétés pour être une première forme fondamentale.
2. Si $\boldsymbol{g}$ est définie positive, alors $\vec{\boldsymbol{u}} \mapsto \sqrt{\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{u}})}$ définit une norme sur $T\mathcal{M}$.
3. $\boldsymbol{g}$ définit un produit scalaire si elle est définie positive, ou ce qu'on appelle un pseudo-produit scalaire en relativité générale. Désormais le produit scalaires de vecteurs se fera toujours au sens de $\boldsymbol{g}$, c'est-à-dire que l'on aura par définition

$$\forall \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in T\mathcal{M}, \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) \tag{62}$$

4. On peut décomposer $\boldsymbol{g}$ sur la base des formes coordonnées : $\boldsymbol{g} = g_{ij} \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^j$. Par définition, on a donc, dans toute carte locale, $g_{ij} = \boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{\partial}}_i, \vec{\boldsymbol{\partial}}_j) = \vec{\boldsymbol{\partial}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\partial}}_j$. On retrouve ce qu'on avait déjà déduit de la première forme fondamentale pour les surfaces plongées dans l'espace 3D euclidien : en deux dimensions on a donc $E = g_{uu} = \vec{\boldsymbol{\partial}}_u \cdot \vec{\boldsymbol{\partial}}_u$, $F = g_{vv} = \vec{\boldsymbol{\partial}}_u \cdot \vec{\boldsymbol{\partial}}_v$, et $G = \vec{\boldsymbol{\partial}}_v \cdot \vec{\boldsymbol{\partial}}_v$.
5. Les coordonnées du tenseur métrique se transforment comme celles de tout bon tenseur de type $(0,2)$. Si l'on a $\boldsymbol{g} = g_{ab} \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^a \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^b = G_{ij} \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}^i \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}^j$, alors

$$G_{ij} = g_{mn} \frac{\partial x^i}{\partial X^m} \frac{\partial x^j}{\partial X^n} \tag{63}$$

Exercice : calculer la métrique de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées sphériques. Réponse : $g_{cart} = \operatorname{diag}(1,1,1)$ et $g_{spher} = \operatorname{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$.

Définition 4.2. *Quand $\boldsymbol{g}$ est définie positive, on dit que $(\vec{\boldsymbol{e}}_i)$ est une base orthonormée de $T_x\mathcal{M}$ si $\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{e}}_i, \vec{\boldsymbol{e}}_j) = \delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon. Si la signature de $\boldsymbol{g}$ est $(-,+,\ldots)$, on aura $\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_1) = -1$, et $\forall j > 1, \boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{e}}_i, \vec{\boldsymbol{e}}_j) = \delta_{ij}$.*

1. Cependant, Nash a démontré que toute variété différentiable de dimension n de classe $\mathcal{C}^3$ est plongeable de façon isométrique dans un espace euclidien de dimension $n(n+1)(3n+11)/2$.

Comme $\boldsymbol{g}$ est diagonalisable définie positive, il est toujours possible de trouver une carte telle qu'en P, les vecteurs de la base naturelle sont une base orthonormée, autrement dit qu'on puisse exprimer les composantes du tenseur métrique comme celles de la métrique de Minkowski en coordonnées cartésiennes. Cela constitue en fait le principe d'équivalence qui postule que localement, on peut toujours se ramener à un système de référence dans lequel les lois de la physique sont celles du cadre théorique de la relativité restreinte.

Définition 4.3. *Soit $\gamma : I \to \mathcal{M}$ un arc paramétré sur $\mathcal{M}$. La distance parcourue le long de l'arc entre deux paramètres $t_1, t_2 \in I$ vaut par définition*

$$\ell_\gamma(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\pm \boldsymbol{g}(\overrightarrow{\gamma}'(t), \overrightarrow{\gamma}'(t))}\ \mathrm{d}t \tag{64}$$

Il faudra mettre un plus sous la racine carrée pour toutes les trajectoires des variétés à métrique définie positive, et moins pour les particules matérielles en relativité générale dont la trajectoire vérifie toujours $\|\overrightarrow{\gamma}'(t)\|^2 < 0$.

Cette définition est naturelle au sens de la norme définie par le tenseur métrique. En effet, on a

$$\|\gamma(t+\varepsilon) - \gamma(t)\|^2 = \varepsilon^2 \boldsymbol{g}(\overrightarrow{\gamma}'(t), \overrightarrow{\gamma}'(t)) + o(\varepsilon^3) \tag{65}$$

de telle sorte que l'abscisse curviligne sera définie par $\mathrm{d}s = \sqrt{\pm \boldsymbol{g}(\overrightarrow{\gamma}'(t), \overrightarrow{\gamma}'(t))}\ \mathrm{d}t$. En termes de coordonnées, en notant $\overrightarrow{\gamma}'(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = v^i \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i$, on aura $\mathrm{d}s = \sqrt{\pm g_{ij} v^i v^j}\ \mathrm{d}t$.

4.2 Dualité métrique entre vecteurs et formes

Les coefficients g_{ij} forment une matrice symétrique définie positive (ou en relativité, diagonalisable avec des valeurs propres non nulles), donc inversible. On note g^{ij} les composantes de l'inverse de cette matrice. Ainsi, on a $g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c$. Munis de cette notation, voyons si le tenseur métrique nous permet de passer de $T\mathcal{M}$ à $T^*\mathcal{M}$ de façon privilégiée. On sait que dans un espace muni d'un produit scalaire, à tout vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ correspond une unique forme linéaire définie par $\underline{\boldsymbol{v}} = < \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \cdot >$. Ici on peut faire exactement la même chose avec le tenseur métrique et définir $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \cdot)$. $\underline{\boldsymbol{v}}$ est le dual métrique de $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. On a en particulier

$$\underline{\boldsymbol{v}}(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i) = \boldsymbol{g}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i) = g_{ab} v^a \delta^b_i = g_{ai} v^a \tag{66}$$

de telle sorte que si l'on décompose $\underline{\boldsymbol{v}}$ sur la base des formes coordonnées ainsi $\underline{\boldsymbol{v}} = v_i \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i$, on a nécessairement

$$v_i = g_{ai} v^a \tag{67}$$

On dit alors que v_i sont les coordonnées covariantes de $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ définies par dualité métrique. On peut interpréter l'équation précédente comme une équation matricielle. On peut inverser cette équation et écrire que

$$v^a = g^{ai} v_i \tag{68}$$

On peut évidemment tout faire dans l'autre sens. Soit $\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_i \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i$ une forme linéaire. Alors on peut lui faire correspondre un unique vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} = \omega^i \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i$ qui est tel que $\underline{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{g}(\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}, \cdot)$. Par le même raisonnement on trouvera que $\omega_i = g_{ai} \omega^a$ et que $\omega^i = g^{ai} \omega_a$.

Remarquez que l'on a $v_i = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i$ et $v^i = \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$. On peut alors visualiser à quoi correspondent géométriquement les cordonnées covariantes et contravariantes d'un objet de $T\mathcal{M}$, si on le considère comme un vecteur, ou de $T^*\mathcal{M}$, si on le considère comme une forme. Nous représentons cela à la figure 8 quand la base naturelle n'est pas orthonormée.

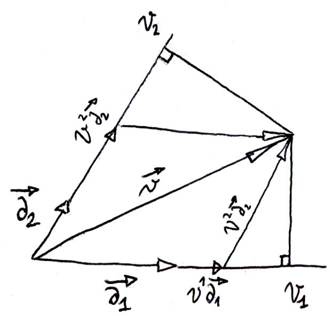

FIGURE 8 – Coordonnées covariantes et contravariantes dans la base naturelle quand la métrique est définie positive. Quand celle-ci n'est pas orthonormée, les coordonnées covariantes et contravariantes ne sont pas égales. Quand la métrique est de signature $(-,+,+,+)$, l'orthonormalité de la base n'assure même pas l'égalité des coordonnées covariantes et contravariantes en raison de la géométrie hyperbolique qui lie l'espace et le temps (voir tout bon livre de relativité restreinte).

4.3 Musique tensorielle : dualité métrique des tenseurs

De même on peut passer des coordonnées covariantes aux contravariantes et réciproquement pour tout type de tenseur.

Définition 4.4. *Soit $\boldsymbol{T} \in T_s^r\mathcal{M}$. On appelle dual métrique de $\boldsymbol{T}$ sur le k-ème argument contravariante le tenseur de $T_{s+1}^{r-1}\mathcal{M}$ noté $\boldsymbol{T}^\flat$ dont le graphe vérifie*

$$\boldsymbol{T}^\flat\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_k, \ldots, \underline{\boldsymbol{\omega}}_r, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_s\right) = \boldsymbol{T}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}_1, \ldots, \boldsymbol{g}(\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_k, \cdot), \ldots, \underline{\boldsymbol{\omega}}_r, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_s\right) \tag{69}$$

et de même on appelle dual métrique de $\boldsymbol{T}$ sur le p-ème argument covariant le tenseur de $T_{s-1}^{r+1}\mathcal{M}$ le tenseur noté $\boldsymbol{T}^\sharp$ dont le graphe vérifie

$$\boldsymbol{T}^\sharp\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{\omega}}_r, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{u}}_p, \ldots \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_s\right) = \boldsymbol{T}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}_1, \ldots, \ldots, \ldots, \underline{\boldsymbol{\omega}}_r, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_p, \ldots \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_s\right) \tag{70}$$

où l'on a $\underline{\boldsymbol{u}}_p = \boldsymbol{g}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_p, \cdot)$.

Exercice : calculer les coordonnées de $\boldsymbol{T}^\flat$ et $\boldsymbol{T}^\sharp$ en fonctions de celles de $\boldsymbol{T}$ que l'on notera respectivement $T^{a_1\ldots a_{k-1}}{}_{a_k}{}^{a_{k+1}\ldots a_r}{}_{b_1,\ldots,b_s}$, $T^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1,\ldots,b_{p-1}}{}^{b_p}{}_{b_{p+1}\ldots b_s}$ et $T^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s}$.

Solution : un calcul simple montre que

$$T^{a_1\ldots a_{k-1}}{}_{a_k}{}^{a_{k+1}\ldots a_r}{}_{b_1,\ldots,b_s} = g_{a_k q_k} T^{a_1\ldots a_{k-1} q_k a_{k+1}\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s} \tag{71}$$

$$T^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1,\ldots,b_{p-1}}{}^{b_p}{}_{b_{p+1}\ldots b_s} = g^{b_p q_p} T^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_{p-1} q_p b_{p+1}\ldots b_s} \tag{72}$$

Pour des tenseurs de rang moins élevés, par exemple pour $\boldsymbol{T} = T_{ab}\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^a \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^b$, on aura typiquement $T^a_{\ b} = g^{ai}T_{ib}$, $T_a^{\ b} = g^{bi}T_{ai}$, $T^{ab} = g^{ai}g^{bj}T_{ij}$ etc. Notez que comme $\boldsymbol{g}$ est symétrique, l'ordre des indices dans g^{ai} n'a pas d'importance. On aura également, dans l'autre sens $T_{ab} = g_{ai}T^i_{\ b}$, etc. (le reste est laissé à titre d'exercice).

Ces relations sont vraies en particulier pour le tenseur métrique lui-même, de quoi l'on peut déduire une propriété intéressante :

$$g_b{}^a = g^a{}_b = g^{ai} g_{ib} = \delta^a_b \tag{73}$$

dans tous les systèmes de coordonnées.

Certains ouvrages parlent d'isomorphismes musicaux pour passer des indices contravariants aux covariants ou le contraire ; on utilise la notation $\flat$ pour faire descendre un indice et $\sharp$ pour le faire monter, par dualité métrique. On aurait pu noter $\underline{\boldsymbol{\omega}}^\sharp = \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^\flat = \underline{\boldsymbol{v}}$ mais nous pensons que les notations soulignées et fléchées sont plus parlantes.

5 Flot d'un champ de vecteurs

5.1 Équation différentielle dans une variété

On sait que tout vecteur peut être considéré comme la dérivée d'un arc paramétré en un point : $\forall \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in T_x\mathcal{M}, \exists \gamma : I \to \mathcal{M} \;/\; \gamma(0) = x, \overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}'(0) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$.

Définition 5.1. *Soit $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in T\mathcal{M}$. On dit que γ, arc paramétré, est une ligne de champ de $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ si $\forall \lambda \in I, \overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}'(\lambda) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}(\gamma(\lambda))$.*

Soit $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in T\mathcal{M}$, soit $x \in \mathcal{M}$. On sait que le problème de Cauchy $\overrightarrow{\boldsymbol{y}}' = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}(y)$, $y(0) = x$ admet une unique solution maximale. On note J_x l'intervalle de définition de la solution maximale. On note

$$D = \{(t, x) | x \in \mathcal{M}, t \in J_x\} \tag{74}$$

l'ensemble de vie du champ $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, c'est-à-dire le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ sur lequel on puisse transporter des points le long des lignes du champ $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Sous réserve d'existence, pour $t \in \mathbb{R}$, on note

$$D_t = \{x | (t, x) \in D\} \tag{75}$$

l'ensemble des points qui ont été transportés par les lignes de $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ au bout d'un temps t.

Définition 5.2. *On appelle flot local maximal de $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, ou plus simplement flot de $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, l'application définie ainsi*

$$\begin{aligned} \phi^{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}} &: D \to \mathcal{M} \\ (t, x) &\mapsto \phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(x) \end{aligned} \tag{76}$$

où $t \mapsto \phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}(x)$ est l'unique solution maximale du problème de Cauchy $\overrightarrow{\boldsymbol{y}}' = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}(t)$, $y(0) = x$.

Nous représentons figure 9 le flot d'un champ de vecteurs appliqué en un point.

Définition 5.3. *Si $D = \mathbb{R} \times \mathcal{M}$, on dit que $\phi^{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}$ (ou $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$) est complet.*

Voici quelques propriétés élémentaires du flot.

- D est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ et $\{0\} \times \mathcal{M} \subset D$.
- Sous réserve d'existence pour $t \in \mathbb{R}$, $\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de D_{-t} dans D_t. Son inverse est $\phi_{-t}^{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}$. (Voir figure 10.)
- Si $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ est complet, alors $D_t = \mathcal{M}$. Dans ce cas, pour tout t, $\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$. Le flot de $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ définit alors un groupe continu à un paramètre qui opère un morphisme de groupes entre $+$ et $\circ$: $\forall t, s \in \mathbb{R}, \phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}} \circ \phi_s^{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}} = \phi_{t+s}^{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}$. On a donc affaire à un groupe commutatif.

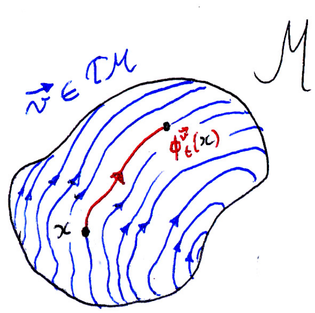

FIGURE 9 – Illustration de l'action du flot sur un point de $\mathcal{M}$. Le flot d'un champ de vecteurs transporte un point le long des lignes de champ de ce vecteur.

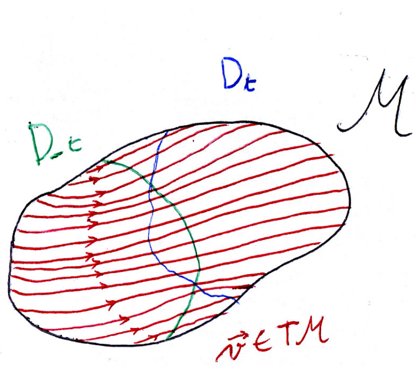

FIGURE 10 – Représentation de D_{+t} et D_{-t} pour un flot (ou un champ de vecteurs) donné. Pour simplifier la représentation, on a choisi $\mathcal{M}$ comme étant un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

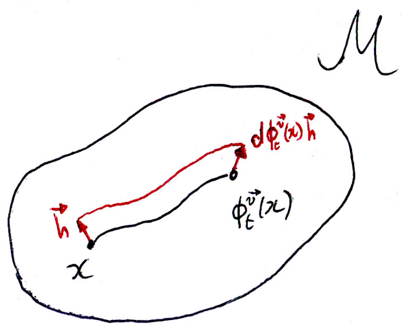

FIGURE 11 – Action du flot sur l'espace tangent. Il faut prendre sa différentielle.

5.2 Équations aux variations

La notion de flot consiste à interpréter l'unique solution du problème de Cauchy non plus seulement comme une fonction du temps, mais aussi comme une fonction de la condition initiale. Ainsi, comme pour toute bonne fonction qui se respecte, on peut se demander comment varie le flot lorsque les conditions initiales varient légèrement. Si le flot est différentiable, cela donne

$$\phi_t^{\vec{\boldsymbol{v}}}(x+\vec{\boldsymbol{h}}) = \phi_t^{\vec{\boldsymbol{v}}}(x) + \mathrm{d}\phi_t^{\vec{\boldsymbol{v}}}(x)\vec{\boldsymbol{h}} + o(\|\vec{\boldsymbol{h}}\|) \tag{77}$$

En dérivant par rapport au temps, il vient

$$\frac{\mathrm{d}\phi_t^{\vec{\boldsymbol{v}}}(x+\vec{\boldsymbol{h}})}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{v}}\left(\phi_t^{\vec{\boldsymbol{v}}}(x)\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\phi_t^{\vec{\boldsymbol{v}}}(x)\vec{\boldsymbol{h}} + o(\|\vec{\boldsymbol{h}}\|) = \vec{\boldsymbol{v}}\left(\phi_t^{\vec{\boldsymbol{v}}}(x)\right) + \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}\left(\phi_t^{\vec{\boldsymbol{v}}}(x)\right)\vec{\boldsymbol{h}} + o(\|\vec{\boldsymbol{h}}\|) \tag{78}$$

d'où l'on tire que $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}\left(\phi_t^{\vec{\boldsymbol{v}}}(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\phi_t^{\vec{\boldsymbol{v}}}(x)$. En effectuant une intégration, on vérifie donc au passage que si le champ $\vec{\boldsymbol{v}}$ est différentiable sur $\mathcal{M}$, alors le flot l'est aussi. Nous représentons figure 11 la géométrie de l'équation aux variations.

Une question qu'on peut souvent être amené à se poser est de savoir comment varie la solution d'une équation différentielle si l'on change légèrement sa condition initiale. En supposant que l'on reste dans le domaine de linéarité, et si l'on suppose $\phi_t^{\vec{\boldsymbol{v}}}(x)$ connu, on voudrait savoir comment varie $\vec{\boldsymbol{h}}$ lorsque la condition initiale n'est pas x_0 mais $x_0+\vec{\boldsymbol{h}}$. Dans ce cas, un simple calcul permet de montrer que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{h}}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}\,\vec{\boldsymbol{h}} \tag{79}$$

mais on peut faire mieux. En effet, puisque l'on a

$$x(t)+\vec{\boldsymbol{h}}(t) = \phi_t^{\vec{\boldsymbol{v}}}(x_0+\vec{\boldsymbol{h}}_0) + o(\|\vec{\boldsymbol{h}}\|) = \phi_t^{\vec{\boldsymbol{v}}}(x_0) + \mathrm{d}\phi_t^{\vec{\boldsymbol{v}}}(x_0)\vec{\boldsymbol{h}}_0 + o(\|\vec{\boldsymbol{h}}\|) \tag{80}$$

on en déduit ce résultat intéressant

$$\vec{\boldsymbol{h}}(t) = \mathrm{d}\phi_t^{\vec{\boldsymbol{v}}}(x_0)\vec{\boldsymbol{h}}_0 \tag{81}$$

Du poinit de vue des simulations numériques, ce résultat peut avoir un grand intérêt. En effet, on peut souvent calculer numériquement les dérivées partielles des quantités calculées numériquement au temps t en fonction des paramètres du modèle et des conditions initiales à $t = 0$. En effet, en supposant qu'on sache calculer numériquement $\phi_t^{\vec{v}}$ via des intégrations numériques, alors on aura

$$\frac{\partial \phi_t^{\vec{v}}(x_0)}{\partial x_0^i} \approx \frac{1}{2\delta}\left[\phi_t^{\vec{v}}(x_0^1, \dots, x_0^i + \delta, \dots, x_0^n) - \phi_t^{\vec{v}}(x_0^1, \dots, x_0^i - \delta, \dots, x_0^n)\right] \tag{82}$$

Une fois qu'on a calculé toutes les dérivées partielles (ce qui peut prendre du temps) on peut étudier très facilement les variations linéaires de toute quantité le long des trajectoires connues. Un point délicat sera le choix de δ : il faut qu'il soit suffisamment grand pour que la modification soit très grande devant le bruit numérique, mais suffisamment petit pour rester dans un voisinage linéaire du point considéré. L'existence d'un tel δ n'est pas assurée a priori.

Les équations aux variations nous permettent d'étudier la dynamique au voisinage des points d'équilibres pour lesquels $\vec{\boldsymbol{v}}(x_{eq}) = \vec{\boldsymbol{0}}$. En effet, au voisinage d'un tel point d'équilivre x_{eq}, si l'on s'intéresse à l'évoluton de $x_{eq} + \vec{\boldsymbol{h}}$, alors les variations ne se feront qu'à l'ordre 1, on aura

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{h}}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}(x_{eq})\vec{\boldsymbol{h}} \tag{83}$$

qui est une équation différentielle linéaire à coefficients constants (on sait que les solutions maximales des équations différentielles linéaires sont définies sur $\mathbb{R}$, voir le chapitre sur les équations différentielles). Plusieurs cas sont possibles. Si le rang de $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}(x_{eq})$ est plus petit que n, alors il faudra pousser le calcul à des ordres supérieurs pour pouvoir dire quelque chose de la dynamique au voisinage de l'équilibre. En effet, si $\vec{\boldsymbol{h}}(0)$ est dans le noyau de $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}(x_{eq})$, on serait tenté de dire que $\forall t$, $\vec{\boldsymbol{h}}(t) = \vec{\boldsymbol{h}}(0)$, mais c'est potentiellement faux car sur le noyau de $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}(x_{eq})$, l'approximation linéaire ne nous apprend rien du comportement des solutions.

Si le rang de $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}(x_{eq})$ est égal à n, pour calculer son exponentielle et résoudre le système, on peut être tenté de le diagonaliser [2]. Supposons que $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}(x_{eq})$ est diagonalisable et notons (λ_i) ses valeurs. On peut distinguer trois cas :

1. $\forall i, Re(\lambda_i) \leq 0$: le point d'équilibre est stable ($|\mathrm{e}^{\lambda_i t}|$ est borné pour $t > 0$). C'est souvent le cas des points d'équilibres des systèmes dissipatifs (exemple : oscillateur harmonique amorti par un frottement fluide, circuits électriques RLC, systèmes gravitationnels avec marées,...).
2. $\exists i \ / \ Re(\lambda_i) > 0$: le point d'équilibre est instable, il présente ce qu'on appelle une direction hyperbolique ($|\mathrm{e}^{\lambda_i t}|$ n'est pas borné).
3. $\forall i, Re(\lambda_i) = 0$: le point d'équilibre est ce qu'on appelle un point elliptique ($|\mathrm{e}^{\lambda_i t}| = 1$). La combinaison linéaire des exponentielles complexes devant rester réelle, on aura des signaux quasipériodiques [3]. C'est le cas des systèmes gravitationnels conservatifs par exemple [4].

2. C'est très souvent le cas dans les systèmes mécaniques puisqu'ils sont dérivés d'un lagrangien, ainsi la différentielle de la vitesse apparaît comme la hessienne d'un potentiel, symétrique, donc diagonalisable.

3. Un signal quasipériodique est un signal de la forme $s(t) = \sum_k s_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k t}$ où les λ_k sont des réels quelconques.

4. La linéarisation des équations planétaires dans le Système Solaire donne ce genre de comportement. On consultera par exemple l'article de Laskar, Boué, Correia, *Tidal dissipation in multi-planet systemsand constraints on orbit fitting*, A& A, 538, A105 (2012), disponible ici http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201116643.

Exercice : pendule simple. On considère le système différentiel ordinaire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\theta\\ J\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}J\\ -\sin\theta\end{pmatrix} = \overrightarrow{\boldsymbol{F}}(\theta, J) \tag{84}$$

(C'est simplement l'équation différentielle $y'' + \sin y = 0$ récrite sous forme d'un système ordinaire du premier ordre). Étudier la dynamique au voisinage des points d'équilibre.

Solution. On voit que θ est une variable 2π périodique (on dit que c'est une variable cyclique). On étudiera la dynamique au voisinage des points d'équilibre en posant $(\theta, J) = (\theta_{eq}, J_{eq}) + \overrightarrow{\boldsymbol{h}} = (\theta_{eq}, J_{eq}) + (\delta\theta, \delta J)$ et on cherchera à étudier la dynamique linéaire de $(\delta\theta, \delta J)$.

Les points d'équilibre sont ceux pour lesquels le deuxième terme de l'équation s'annule (la vitesse sera nulle). Cela impliquera donc $J = 0$ et $\theta \equiv 0[\pi]$. On étudiera l'équilibre au voisinage de $(\theta_{eq}, J_{eq}) = (0, 0)$ puis $(\pi, 0)$. La différentielle de $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}$ se calcule aisément

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{F}}(\theta, J) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\cos\theta & 0\end{pmatrix} \tag{85}$$

Étudions la dynamique linéaire au voisinage de $(\theta_{eq}, J_{eq}) = (0, 0)$. On a

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{F}}(0, 0) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \tag{86}$$

De telle sorte que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\delta\theta\\ \delta J\end{pmatrix} = \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{F}}(0, 0)\begin{pmatrix}\delta\theta\\ \delta J\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta J\\ -\delta\theta\end{pmatrix} \tag{87}$$

On montre facilement que le point de coordonnées $(\delta\theta, \delta J)$ a un mouvement circulaire uniforme [5] dans le sens trigonométrique. On a affaire à un point elliptique qui correspond à un équilibre stable. Physiquement cela correspond à la configuration où la masse du pendule est en dessous du centre de rotation.. Au voisinage du point d'équilibre $(\theta_{eq}, J_{eq}) = (\pi, 0)$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\delta\theta\\ \delta J\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta J\\ \delta\theta\end{pmatrix} \tag{88}$$

En injectant la première ligne dans la deuxième, on trouve $\delta\ddot{J} = \delta J$. La solution est de la forme $\delta J(t) = a\mathrm{ch}t + b\mathrm{sh}t$ où $a, b \in \mathbb{R}$ où ch et sh sont les fonctions cosinus et sinus hyperboliques. On aura par ailleurs $\delta\theta = \delta\dot{J} = a\mathrm{sh}t + b\mathrm{ch}t$. Ce point est un point d'équilibre instable car les deux variables divergent. Physiquement, cela correspond à la configuration où la masse du pendule est au dessus du point de rotation. Par ailleurs, on constate que $(\delta\theta)^2 - (\delta J)^2 = a^2 - b^2 =$cst, les trajectoires sont donc des hyperboles d'asymptotes $\delta J = \pm\delta\theta$. Cela justifie la terminologie "point hyperbolique". On donne une représentation du portrait de phase du pendule avec un zoom sur les points d'équilibre figure 12.

5.3 Intégrales premières et submersion

Définition 5.4. *Soit $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, et soit ϕ le flot d'un champ de vecteurs. On dit que f est une intégrale première du flot si elle est invariante par le flot, c'est-à-dire $\forall t, f \circ \phi_t = f$.*

5. Par exemple, poser $z = \delta\theta + \mathrm{i}\delta J$ et établir une équation différentielle sur z et voir comment il varie dans le plan complexe.

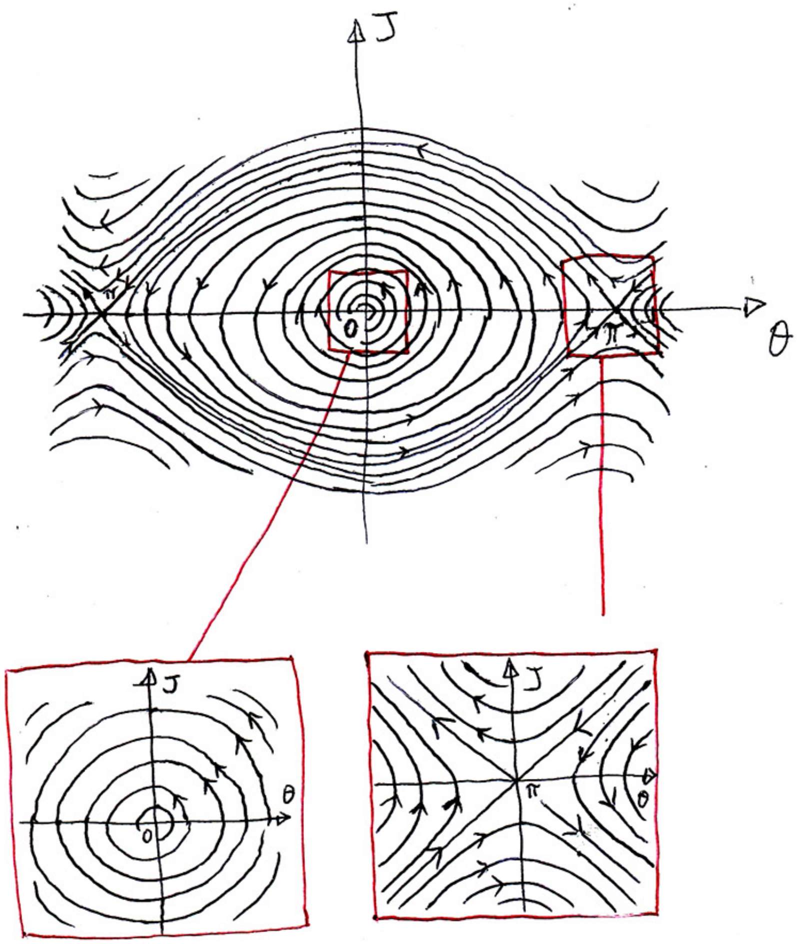

Figure 12 – Nous représentons le portrait de phase du pendule simple (pour cela il suffit de tracer les différentes courbes des niveaux d'énergie, à savoir $J^2/2 - \cos\theta =$cst). nous faisons un zoom sur les deux points d'équilibre. Nous y retrouvons les hyperboles pour le point hyperbolique (à droite) et les cercles pour le point elliptique (à gauche). Si nous avions pris des unités "physiques", il y aurait une affinité sur chacun des axes, ce qui justifierait la terminologie elliptique du point. La dynamique des séparatrices et de leur destruction lorsqu'on ajoute une perturbation non intégrable sera étudiée en M2 DSG.

Si f est une intégrale première, alors la solution du système différentiel considéré est contrainte de vivre dans une sous-variété. En effet, si l'on se dote d'une carte (x^i), et que f est une intégrale première, alors on aura $f(x^i)$ =cst. Si f est une submersion, alors toute solution est contrainte de vivre dans la sous-variété définie par submersion. S'il y a d'autres intégrales premières, alors cela définit des sous-sous-variétés définies par les intersections des sous-variétés. C'est une méthode classique : utiliser les intégrales premières pour restreindre l'ensemble dans lequel on cherche les solutions de l'équation différentielle à résoudre.

Un exemple qui sera vu abondamment en M2 DSG sera ce qu'on appelle les variables action-angle. Considérons un système à $2n$ degrés de lberté. On peut parfois réduire ce système à des variables action-angles définies de telle sorte qu'il existe un changement de variables dans lequel le système différentiel s'écrive ainsi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\theta\\ I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \omega(I)\end{pmatrix} \tag{89}$$

On peut résoudre ce système ainsi : $I(t) = I_0$ et $\theta(t) = \omega(I)t + \theta_0$. La solution vit donc dans un tore de dimenson n dont le i-ème rayon rayon est la composante i de I et dont le i-ème angle est la composante i de θ. Considérons par exemple l'oscillateur harmonique :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\ -x\end{pmatrix} \tag{90}$$

Si l'on effectue le changement de variables en posant $x = \sqrt{2I}\cos\theta$ et $y = \sqrt{2I}\sin\theta$, on peut facilement montrer qu'on a $\dot{I} = 0$, $\dot{\theta} = -1$.

6 Dérivée de Lie

6.1 Minimum vital sur l'image réciproque du flot

La dérivée de Lie le long d'un vecteur sera simplement la dérivée temporelle du flot. Avant de passer à la dérivée de Lie en toute généralité, il faut voir comment agit le flot sur les tenseurs. On va le faire d'abord sur les champs scalaires, puis sur les vecteurs, et enfin sur les tenseurs.

Définition 6.1. *Soit f un champ scalaire sur $\mathcal{M}$ et soit $\vec{\boldsymbol{u}} \in T\mathcal{M}$. On définit l'image réciproque de f sur $\mathcal{M}$ par $\phi^{\vec{\boldsymbol{u}}}$ le champ scalaire défini ainsi*

$$\phi_t^{\vec{\boldsymbol{u}}*} f = f \circ \phi_t^{\vec{\boldsymbol{u}}} \tag{91}$$

Définition 6.2. *Soient $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in T\mathcal{M}$, et $x \in \mathcal{M}$. L'image réciproque de $\vec{\boldsymbol{v}}$ par $\phi_t^{\vec{\boldsymbol{u}}}$ en x se définit ainsi*

$$\phi_t^{\vec{\boldsymbol{u}}*} \vec{\boldsymbol{v}}_x = \left(\mathrm{d}\phi_t^{\vec{\boldsymbol{u}}}\right)^{-1}_{\left(\phi_t^{\vec{\boldsymbol{u}}}(x)\right)} \vec{\boldsymbol{v}}_{\left(\phi_t^{\vec{\boldsymbol{u}}}(x)\right)} \tag{92}$$

Pour plus de clarté, on a mis en indice les points en lesquels les objets sont définis.

Définition 6.3. *On définit l'image directe d'un champ de vecteur $\vec{\boldsymbol{v}}$ par $\phi_t^{\vec{\boldsymbol{u}}}$ en x le champ de vecteur défini ainsi*

$$\phi_{t*}^{\vec{\boldsymbol{u}}} \vec{\boldsymbol{v}}_{\phi_t^{\vec{\boldsymbol{u}}}(x)} = \mathrm{d}\phi_t^{\vec{\boldsymbol{u}}} \vec{\boldsymbol{v}}_x \tag{93}$$

En fait, on a $\phi_{t*}^{\vec{\boldsymbol{u}}} = (\phi_t^{\vec{\boldsymbol{u}}*})^{-1}$.

Définition 6.4. *Soit $T \in T^0_s\mathcal{M}$. Soit $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in T\mathcal{M}$. L'image réciproque de T par le flot $\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}$ se définit ainsi*

$$\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}*}\boldsymbol{T}_x(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1,\ldots,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s) = T_{(\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}(x))}\left(\mathrm{d}\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1,\ldots,\mathrm{d}\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s\right) \tag{94}$$

Remarque : on a

$$\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}*}\underline{\boldsymbol{\omega}}_x(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \underline{\boldsymbol{\omega}}_{\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}(x)}(\mathrm{d}\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{g}\left(\mathrm{d}\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}},\mathrm{d}\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) = \phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}*}\boldsymbol{g}(\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \tag{95}$$

Définition 6.5. *Soit $\boldsymbol{T} \in T^r_s\mathcal{M}$. L'image réciproque de $\boldsymbol{T}$ par le flot $\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}$ se définit ainsi*

$$\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}*}\boldsymbol{T}_x(\underline{\boldsymbol{u}}_1,\ldots,\underline{\boldsymbol{u}}_r,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1,\ldots,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s) = \boldsymbol{T}_{\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}(x)}(\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}*}\underline{\boldsymbol{u}}_1,\ldots,\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}*}\underline{\boldsymbol{u}}_r,\mathrm{d}\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1,\mathrm{d}\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_s) \tag{96}$$

6.2 Propriétés de la dérivée de Lie

Définition 6.6. *On définira alternativement la dérivée de Lie pour les champs scalaires, les vecteurs, et les tenseurs. Soit $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}$ un champ de vecteur. On appelle dérivée de Lie le long de $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}$, et on note $L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}$, l'opérateur qui à un élément de $T^{r_s\mathcal{M}}$ associe un autre élément de $T^r_s\mathcal{M}$, défini ainsi*

$$L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}} = \left.\frac{\mathrm{d}\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}*}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \tag{97}$$

On aura en particulier

$$L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}f = \left.\frac{\mathrm{d}f\circ\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \tag{98}$$

$$L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \lim_{t\to 0}\frac{\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}*}\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{t} \tag{99}$$

$$L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{T} = \lim_{t\to 0}\frac{\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}*}\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}}{t} \tag{100}$$

Proposition 6.1. *Soient $\boldsymbol{T},\boldsymbol{S} \in T^r_s\mathcal{M}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. La dérivée de Lie vérifie les propriétés suivantes*

1. $L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}(\boldsymbol{T}+\lambda\boldsymbol{S}) = L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{T} + \lambda L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{S}$ *(linéarité).*
2. $L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}) = (L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{T})\otimes\boldsymbol{S} + \boldsymbol{T}\otimes(L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{S})$ *(règle de Leibniz).*
3. $L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}$ *commute avec la contraction. On aura donc en particulier* $L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}(\boldsymbol{T}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}},\ldots)) = (L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{T})(\overrightarrow{\boldsymbol{u}},\ldots) + \boldsymbol{T}(L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}\overrightarrow{\boldsymbol{u}},\ldots)$.
4. $L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}f = \overrightarrow{\boldsymbol{X}}(f)$.
5. $L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}\overrightarrow{\boldsymbol{Y}} = \left[\overrightarrow{\boldsymbol{X}},\overrightarrow{\boldsymbol{Y}}\right] = \overrightarrow{\boldsymbol{X}}\overrightarrow{\boldsymbol{Y}} - \overrightarrow{\boldsymbol{Y}}\overrightarrow{\boldsymbol{X}}$.

Démonstration. Seuls les points 4 et 5 n'apparaissent pas évident. Démontrons-les sous forme d'exercices. D'abord, signalons que l'on définit $\left[\overrightarrow{\boldsymbol{X}},\overrightarrow{\boldsymbol{Y}}\right]$ comme le commutateur de $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{Y}}$ par son action sur un champ scalaire. En effet, la notation $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}\overrightarrow{\boldsymbol{Y}}$ peut sembler hérétique pour un physicien, pourtant il s'agit bel et bien d'un vecteur. En effet, si f est un champ scalaire, $\overrightarrow{\boldsymbol{Y}}f$ est un champ scalaire, donc rien n'interdit de lui appliquer un vecteur, par exemple $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}$, ce qui nous donnera tout simplement $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}\overrightarrow{\boldsymbol{Y}}f = \overrightarrow{\boldsymbol{X}}(\overrightarrow{\boldsymbol{Y}}f)$.

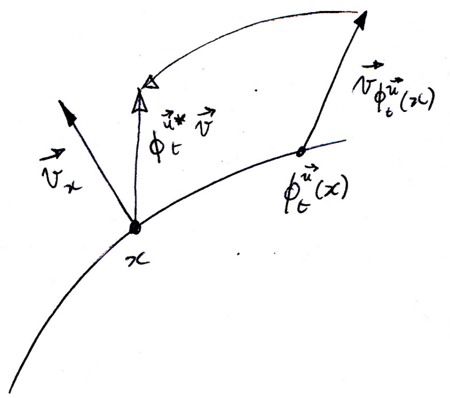

FIGURE 13 – Image réciproque d'un champ de vecteurs.

1. Calculer le développement limité de $\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}*} f$ au voisinage de $t = 0$, conclure et démontrer le point 4.
2. Calculer les coordonnées de $\left[\overrightarrow{\boldsymbol{X}}, \overrightarrow{\boldsymbol{Y}}\right]$ dans la base naturelle (ce n'est pas indispensable pour la démonstration mais ça permet de se faire une idée de ce qu'est ce commutateur).
3. Développer $L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{Y}} f)$ à l'aide de la règle de Leibniz, d'une part, et le calculer comme l'action sur un champ scalaire, d'autre part. Conclure et démontrer le point 5.

Solution.

1.
$$\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}*} f(x) = f(\phi_t^{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}(x)) = f(x + t\overrightarrow{\boldsymbol{X}} + (t)) = f(x) + t\mathrm{d}f(x)\overrightarrow{\boldsymbol{X}} + o(t) = f(x) + t\overrightarrow{\boldsymbol{X}} f(x) + o(t) \tag{101}$$
la suite est évidente.

2. On pourrait faire le calcul en regardant l'action sur un champ scalaire, mais avec un peu d'habitude on peut calculer directement
$$\left[\overrightarrow{\boldsymbol{X}}, \overrightarrow{\boldsymbol{Y}}\right] = X^i \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i \left(Y^j \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_j\right) - Y^p \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_p \left(X^q \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_q\right) \tag{102}$$
$$= X^i \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i \left(Y^j\right) \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_j + X^i Y^j \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_j - Y^p \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_p \left(X^q\right) - Y^p X^q \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_p \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_q \tag{103}$$
$$= X^i Y^j_{,i} \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_j - Y^p X^q_{,p} \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_q \tag{104}$$
où l'on a posé $\partial_i A = A_{,i}$ pour toute quantité A. La compensation des dérivées secondes vient du théorème de Schwarz. En regroupant les indices muets on obtient finalement
$$\left[\overrightarrow{\boldsymbol{X}}, \overrightarrow{\boldsymbol{Y}}\right] = (X^k Y^i_{,k} - Y^k X^i_{,k}) \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i \tag{105}$$
ce qui indique les coordonnées du commutateur dans la base naturelle.

3. D'une part, la règle de Lebniz implique
$$L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{Y}} f) = L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{Y}}) f + \overrightarrow{\boldsymbol{Y}}(L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}} f) = (L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}} \overrightarrow{\boldsymbol{Y}}) f + \overrightarrow{\boldsymbol{Y}} \overrightarrow{\boldsymbol{X}} f. \tag{106}$$

D'autre part, en considérant $\overrightarrow{\boldsymbol{Y}} f$ comme un champ scalaire, on a

$$L_{\overrightarrow{\mathbf{X}}} \left(\overrightarrow{\boldsymbol{Y}} f \right) = \overrightarrow{\boldsymbol{X}} \overrightarrow{\boldsymbol{Y}} f \tag{107}$$

L'identification des deux égalités permet de conclure.

□

On a également les propositions naturelles suivantes.

Proposition 6.2. *Soient* $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}, \overrightarrow{\boldsymbol{Y}} \in T\mathcal{M}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors :*

1. $L_{\overrightarrow{\mathbf{X}}+\lambda\overrightarrow{\mathbf{Y}}} = L_{\overrightarrow{\mathbf{X}}} + \lambda L_{\overrightarrow{\mathbf{Y}}}$
2. $L_{\left[\overrightarrow{\mathbf{X}},\overrightarrow{\mathbf{Y}}\right]} = \left[L_{\overrightarrow{\mathbf{X}}}, L_{\overrightarrow{\mathbf{Y}}} \right] = L_{\overrightarrow{\mathbf{X}}} \circ L_{\overrightarrow{\mathbf{Y}}} - L_{\overrightarrow{\mathbf{Y}}} \circ L_{\overrightarrow{\mathbf{X}}}$

Théorème 6.1. *Soient* $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}, \overrightarrow{\boldsymbol{Y}} \in T\mathcal{M}$. *Il y a équivalence entre les trois propositions suivantes.*

1. $\left[\overrightarrow{\boldsymbol{X}}, \overrightarrow{\boldsymbol{Y}} \right] = 0$
2. $\left[L_{\overrightarrow{\mathbf{X}}}, L_{\overrightarrow{\mathbf{Y}}} \right] = 0$
3. $\forall t, s, \phi_t^{\overrightarrow{\mathbf{X}}} \circ \phi_s^{\overrightarrow{\mathbf{Y}}} = \phi_s^{\overrightarrow{\mathbf{Y}}} \circ \phi_t^{\overrightarrow{\mathbf{X}}}$

On aura besoin de deux lemmes préliminaires.

Lemme 6.1. *Soit* ψ *un automorphisme différentiable de* $\mathcal{M}$. *Soit* $\overrightarrow{\boldsymbol{X}} \in T\mathcal{M}$. *On note formellement* $\phi_t^{\overrightarrow{\mathbf{X}}} = \mathrm{e}^{t\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}$ *en raison de l'expression du développement en série entière de Taylor d'un champ scalaire. Alors on a*

$$\forall t, \psi(\mathrm{e}^{t\overrightarrow{\boldsymbol{X}}})(x) = \mathrm{e}^{t\psi_* \overrightarrow{\boldsymbol{X}}}(\psi(x)) \tag{108}$$

Démonstration.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \psi(\mathrm{e}^{t\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}(x)) = \psi_* \overrightarrow{\boldsymbol{X}}_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{t\psi_* \overrightarrow{\boldsymbol{X}}}(\psi(x)) \tag{109}$$

Les deux flots vérifient la même équation différentielle et vérifient tous deux la même condition initiale puisque

$$\psi(\mathrm{e}^{0\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}(x)) = \psi(x) = \psi(\mathrm{e}^{0\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}(x)) \tag{110}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de conclure. □

Lemme 6.2. *Si* $\left[\overrightarrow{\boldsymbol{X}}, \overrightarrow{\boldsymbol{Y}} \right] = 0$, *alors* $\forall t, \mathrm{e}_*^{t\overrightarrow{\boldsymbol{Y}}} \overrightarrow{\boldsymbol{X}} = \overrightarrow{\boldsymbol{X}}$.

Démonstration.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}_*^{t\overrightarrow{\boldsymbol{Y}}} \overrightarrow{\boldsymbol{X}} = -L_{\overrightarrow{\mathbf{Y}}} \overrightarrow{\boldsymbol{X}} = \left[\overrightarrow{\boldsymbol{X}}, \overrightarrow{\boldsymbol{Y}} \right] = 0 \tag{111}$$

par intégration le long du flot, on obtient le résultat annoncé. □

Désormais la démonstration du théorème est beaucoup plus simple.

Démonstration. (2) ⇒ (1) est évident. (3) ⇒ (2) s'obtient en dérivant l'équation par rapport à s puis t. Montrons que (1) ⇒ (3). Posons $\psi = \mathrm{e}^{s\overrightarrow{\boldsymbol{Y}}}$. Supposons que le commutateur soit nul. Il vient

$$\mathrm{e}^{s\overrightarrow{\boldsymbol{Y}}}\left(\mathrm{e}^{s\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}(x)\right) = \mathrm{e}^{t\mathrm{e}_*^{s\overrightarrow{\boldsymbol{Y}}}\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}\left(\mathrm{e}^{s\overrightarrow{\boldsymbol{Y}}}(x)\right) = \mathrm{e}^{t\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}\mathrm{e}^{s\overrightarrow{\boldsymbol{Y}}}(x) \tag{112}$$

La première égalité vient du premier lemme et la deuxième du second. Ce qui achève la preuve. □

Un contre-exemple important : le groupe unitaire de $\mathbb{R}^3$, noté $O(3)$, constitué des rotations et des symétries axiales et centrales, n'est pas un groupe commutatif. Il est facile de montrer que dans $\mathbb{R}^3$ la rotation autour de l'axe x et celle autour de l'axe y ne commutent pas. Faites l'expérience avec des objets autour de vous (et pas des objets présentant trop de symétries bien sûr !). L'ordre dans lequel on effectue les transformation changera le résultat, sauf si les générateurs infinitésimaux des transformations ont un commutateur nul.

Par ailleurs ce théorème exprime que l'exponentiation d'opérateurs n'effectue pas un morphisme de groupe entre + et ∘ sauf si le commutateur est nul. La formule générale du commutateur de la somme d'opérateurs s'exprime grâce à la formule de Baker-Campbell-Hausdorff que nous donnons pour information mais qui sort complètement du cadre de ce cours. Nous ne donnerons pas de démonstration.

Théorème 6.2 (Formule de Baker-Campbell-Hausdorff)**.** *Si A et B sont deux opérateurs, alors nous avons l'identité suivante :*

$$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^C \tag{113}$$

où

$$C = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_i+s_i>0 \\ 1\leq i\leq n}} \frac{[A^{r_1}B^{s_1}A^{r_2}B^{s_2}\dots A^{r_n}B^{s_n}]}{(\sum_{i=1}^n (r_i+s_i))r_1!s_1!\cdots r_n!s_n!} \tag{114}$$

où s_n et r_n sont des entiers positifs, et où nous avons noté :

$$[A^{r_1}B^{s_1}\dots A^{r_n}B^{s_n}] = [\underbrace{A,[A,\dots[A,}_{A^{r_1}}\underbrace{[B,[B,\dots[B,}_{B^{s_1}}\ \dots\ \underbrace{[A,[A,\dots[A,}_{A^{r_n}}\underbrace{[B,[B,\dots B}_{B^{s_n}}]]\dots]]. \tag{115}$$

Dans le cas où A et B sont du même ordre et petits devant l'identité, dans le sens où $\mathscr{O}(A) = \mathscr{O}(B) = o(1)$, cette formule donne (ou alors par un "simple" développement de l'exponentielle) à l'ordre 4 :

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] - \frac{1}{12}[A,[A,B]] + \frac{1}{24}[A,[[A,B],B]] + \mathscr{O}(A^5). \tag{116}$$

On conclut avec un théorème "évident" [6] mais qui exprime tout l'intérêt de la dérivée de Lie.

Théorème 6.3. *Soit $\overrightarrow{\boldsymbol{X}} \in T\mathcal{M}$, et $\boldsymbol{T} \in T^r_s\mathcal{M}$. Les deux propositions sont équivalentes.*

1. $\forall t, \left(\mathrm{e}^{t\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}\right)^* \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}$.
2. $L_{\overrightarrow{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{T} = 0$.

6. Pour ne pas dire "trivial"...

6.3 Coordonnées naturelles de la dérivée de Lie

Sous forme d'exercice. Soit $\vec{\boldsymbol{X}} = X^i \vec{\boldsymbol{\partial}}_i$, et $\boldsymbol{T} = T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} \vec{\boldsymbol{\partial}}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \vec{\boldsymbol{\partial}}_{i_r} \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_s}$.

1. Calculer les coordonnées de $L_{\vec{\boldsymbol{X}}} \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i$ dans la base des formes coordonnées.
2. Calculer les coordonnées de $L_{\vec{\boldsymbol{X}}} \vec{\boldsymbol{\partial}}_i$ dans la base naturelle.
3. En utilisant la règle de Leibniz et la commutation avec la contraction, en déduire les coordonnées de $L_{\vec{\boldsymbol{X}}} \boldsymbol{T}$ en fonction des coordonnées de $\boldsymbol{T}$.

Solution.

1. Calculons l'action de $L_{\vec{\boldsymbol{X}}} \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i$ sur un vecteur $\vec{\boldsymbol{Y}}$. En utilisant la règle de Leibniz et la commutation avec la contraction, on a

$$L_{\vec{\boldsymbol{X}}} \left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i \left(\vec{\boldsymbol{Y}} \right) \right) = L_{\vec{\boldsymbol{X}}} \left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i \right) \vec{\boldsymbol{Y}} + \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i \left(L_{\vec{\boldsymbol{X}}} \vec{\boldsymbol{Y}} \right) = L_{\vec{\boldsymbol{X}}} \left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i \right) \vec{\boldsymbol{Y}} + (X^k Y^i_{,k} - Y^k X^i_{,k}) \tag{117}$$

Et d'autre part, en considérant $\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i \left(\vec{\boldsymbol{Y}} \right) = Y^i$ comme un champ scalaire, on obtient

$$L_{\vec{\boldsymbol{X}}} \left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i \left(\vec{\boldsymbol{Y}} \right) \right) = \vec{\boldsymbol{X}}(Y^i) = X^j Y^i_{,j} \tag{118}$$

d'où

$$L_{\vec{\boldsymbol{X}}} \left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i \right) \vec{\boldsymbol{Y}} = \vec{\boldsymbol{X}}(Y^i) = X^j Y^i_{,j} - (X^k Y^i_{,k} - Y^k X^i_{,k}) = X^i_{,k} Y^k = X^i_{,k} \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k \left(\vec{\boldsymbol{Y}} \right) \tag{119}$$

donc on a

$$L_{\vec{\boldsymbol{X}}} \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i = X^i_{,k} \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k \tag{120}$$

2. $$L_{\vec{\boldsymbol{X}}} \vec{\boldsymbol{\partial}}_i = \left[\vec{\boldsymbol{X}}, \vec{\boldsymbol{\partial}}_i \right] = X^j \vec{\boldsymbol{\partial}}_j \vec{\boldsymbol{\partial}}_i - X^j_{,i} \vec{\boldsymbol{\partial}}_j - X^j \vec{\boldsymbol{\partial}}_i \vec{\boldsymbol{\partial}}_j = -X^j_{,i} \vec{\boldsymbol{\partial}}_j \tag{121}$$

3. On utilise exactement la même méthode, en utilisant le fait que

$$L_{\vec{\boldsymbol{X}}}\left(\boldsymbol{T}\left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_1},\ldots,\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_r},\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_1},\ldots,\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_s}\right)\right) = \left(L_{\vec{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{T}\right)\left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_1},\ldots,\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_r},\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_1},\ldots,\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_s}\right) + \sum_{\ell=1}^{r}\boldsymbol{T}\left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_1},\ldots,L_{\vec{\boldsymbol{X}}}\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_\ell},\ldots,\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_r},\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_1},\ldots,\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_s}\right) + \sum_{m=1}^{s}\boldsymbol{T}\left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_1},\ldots,\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_r},\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_1},\ldots,L_{\vec{\boldsymbol{X}}}\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_m},\ldots,\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_s}\right) \tag{122}$$

$$= \left(L_{\vec{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{T}\right)\left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_1},\ldots,\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_r},\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_1},\ldots,\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_s}\right) + \sum_{\ell=1}^{r}\boldsymbol{T}\left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_1},\ldots,X^{i_\ell}_{,k}\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{k},\ldots,\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_r},\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_1},\ldots,\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_s}\right) + \sum_{m=1}^{s}\boldsymbol{T}\left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_1},\ldots,\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_r},\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_1},\ldots,-X^{k}_{,j_m}\vec{\boldsymbol{\partial}}_{k},\ldots,\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_s}\right) \tag{123}$$

$$= \left(L_{\vec{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{T}\right)^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s} + \sum_{\ell=1}^{r}T^{i_1\ldots k\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s}X^{i_\ell}_{k} - \sum_{m=1}^{s}T^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots k\ldots j_s}X^{k}_{j_m} \tag{124}$$

où k est à la place du ℓème indice dans la première somme et à la place du $m$ème indice dans la deuxième somme. Mais on a aussi

$$L_{\vec{\boldsymbol{X}}}\left(\boldsymbol{T}\left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_1},\ldots,\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_r},\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_1},\ldots,\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_s}\right)\right) = \vec{\boldsymbol{X}}\left(\boldsymbol{T}\left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_1},\ldots,\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_r},\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_1},\ldots,\vec{\boldsymbol{\partial}}_{j_s}\right)\right) \tag{125}$$

$$= \vec{\boldsymbol{X}}(T^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s}) \tag{126}$$

$$= X^k T^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s,k} \tag{127}$$

On en déduit l'expression des coordonnées de la dérivée de Lie d'un tenseur dans la base naturelle.

$$\left(L_{\vec{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{t}\right)^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s} = X^k T^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s,k} - \sum_{\ell=1}^{r}T^{i_1\ldots k\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s}X^{i_\ell}_{,k} + \sum_{m=1}^{s}T^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots k\ldots j_s}X^{k}_{,j_m} \tag{128}$$