

# Maths champignons

## Le théorème de Thalès.

Novembre 2022

Rappel du théorème :

**Théorème.** Soit un triangle  $ABC$ . Sur les demi-droites  $[AB)$  et  $[AC)$ , on considère respectivement les points  $D$  et  $E$  tels que  $AD > AB$  et  $AE > AC$ . Alors :

$$(DE) \parallel (BC) \Leftrightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

**Sens direct ( $\Rightarrow$ )**

1. Construire une figure correspondant au théorème (avec le parallélisme).
2. Tracer les segments  $[BE]$  et  $[CD]$ .
3. Soit la hauteur du triangle  $ABC$  issue de  $B$ , soit  $H$  l'intersection entre cette hauteur et la droite  $(AC)$ . Tracer cette hauteur et le point  $H$ .
4. On note  $\mathcal{A}(\cdot)$  l'opérateur de calcul d'aire. Démontrer que :

$$\frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(ABE)} = \frac{AC}{AE}.$$

5. De même, démontrer que

$$\frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(ACD)} = \frac{AB}{AD}.$$

6. En considérant une base commune des triangles  $BCD$  et  $BCE$ , et le fait que  $(BC) \parallel (DE)$ , démontrer que  $\mathcal{A}(BCD) = \mathcal{A}(BCE)$ . En déduire que  $\mathcal{A}(ABE) = \mathcal{A}(ACD)$ .
7. Démontrer la première égalité du théorème.
8. Proposer un protocole de construction permettant de déduire facilement la dernière égalité du théorème.

**Sens réciproque ( $\Leftarrow$ )** On considère la figure géométrique du théorème, mais on ne suppose que l'égalité des rapports.

Il existe  $C' \in [AE)$  tel que  $(BC') \parallel (DE)$ . Démontrer que  $AE' = AE$ . Conclure.

Bonus : peut-on alléger les hypothèses de la réciproque ?

**Application : triangles semblables** Considérons deux triangles  $ABC$  et  $DEF$  et supposons que les rapports des distances soient constants : il existe un nombre  $k$  tel que

$$k = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

Démontrer que tous les angles aux sommets sont égaux deux à deux.

*Indice : on peut supposer, par exemple, que  $0 < k < 1$ , et construire un triangle encastré dans  $ABC$ , qui a les mêmes rapports de mesures de côtés, et utiliser le théorème de Thalès pour montrer qu'il est isométrique au triangle  $DEF$ , pour conclure avec l'axiome 8 d'Euclide.*

Démontrer que la réciproque est vraie : que si les angles sont égaux deux à deux, alors les rapports des distances sont constants.

*Indice : idem que précédemment, en utilisant la notion de secteur angulaire (consulter le dictionnaire si besoin).*

Conclusion :

**Définition-théorème.** On dit que deux triangles sont semblables lorsque le rapport entre les mesures respectives de leurs côtés est constant, ou, ce qui revient au même, lorsque les angles aux sommets sont égaux deux à deux.