

Maths champignons

Irrationalité de racine carrée de 2

Novembre 2022

On rappelle que $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Cette notation mathématique exprime que \mathbb{Q} est l'ensemble des quotients de la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et q est un entier naturel qui n'est pas nul. On veut démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1 Préambule : le second degré

Définition 1. Soit x un nombre réel positif. La racine carrée de x , notée \sqrt{x} , est l'unique nombre positif dont le carré vaut x . Autrement dit, $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2} = x$.

Proposition 1. Pour tout nombre positif x , $\sqrt{x^2} = x$.

Exercices. Calculer les racines carrées suivantes, si nécessaire donner une estimation au centième près.

$$\sqrt{9}; \quad \sqrt{25}; \quad \sqrt{3^2 + 4^2}; \quad \sqrt{6^2 + 8^2}; \quad \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2}; \quad \sqrt{2}; \quad \sqrt{5}.$$

2 Une démonstration algébrique

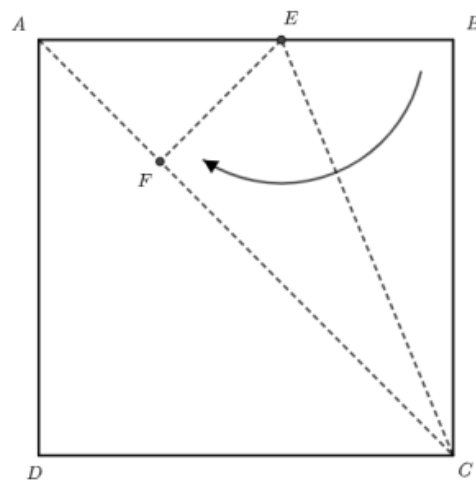
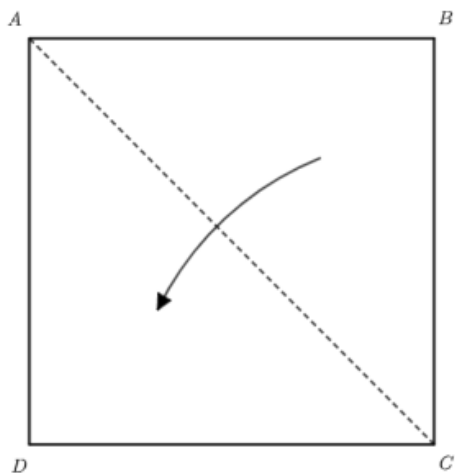
1. Soit $a \in \mathbb{N}$. Démontrer que si a est pair, alors a^2 est pair.
2. Montrer que si a est impair, alors a^2 est impair.
3. En déduire que $(a \text{ est pair}) \Leftrightarrow (a^2 \text{ est pair})$ et que $(a \text{ est impair}) \Leftrightarrow (a^2 \text{ est impair})$

4. On suppose qu'il existe des entiers minimaux p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$.
Démontrer que q^2 est pair. En déduire que q est pair. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $q = 2k$.
5. En utilisant cette expression de q , démontrer que p^2 est pair. En déduire que p est pair.
6. Soulever une contradiction. Conclure.

3 Une démonstration géométrique

Dans toute cette section, on suppose que les longueurs sont munies d'une unité u qu'on omettra de mentionner par abus de langage.

1. Calculer la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1.
2. Vérifier qu'un triangle dont les côtés mesurent respectivement 3, 4 et 5 est rectangle.
3. On suppose qu'il existe un triangle isocèle-rectangle avec des côtés dont les mesures sont toutes entières, et qu'on a trouvé les plus petits entiers qui conviennent. On note p la longueur des deux côtés adjacents à l'angle droit et q la longueur de l'hypoténuse, et on suppose que $p, q \in \mathbb{N}$.
Démontrer que l'hypothèse est vraie équivaut à dire que $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$.
Aide : utiliser la version augmentée du théorème de Pythagore.
4. Prendre une feuille carrée. On note A, B, C et D les sommets du carré. Plier le long de la diagonale $[AC]$. Déplier et tracer le segment $[AC]$. Replier le coin contenant le sommet B de telle sorte que le point B soit envoyé sur la diagonale $[AC]$. Noter F l'image du point B par ce pliage, et noter E l'extrémité du pli sur le segment $[AB]$.



Dans toute la suite, il faudra exprimer les longueurs en fonction de p et q .

5. Calculer FC et AF le plus simplement possible.
6. Quelle est la nature du triangle AFE ? Aide : au préalable, on pourra calculer les angles \widehat{AFE} et \widehat{FAE} .
7. Démontrer que les longueurs AF , FE et AE sont entières.
8. Soulever une contradiction. Conclure.

4 Compléments

Réfléchir aux conditions nécessaires et suffisantes pour que \sqrt{n} soit irrationnel pour $n \in \mathbb{N}$.