

# Maths champignons

## Logique mathématique

Novembre 2022

### 1 Mémo de logique mathématique

- Raisonnement déductif :  $A \Rightarrow B$  (si  $A$ , alors  $B$ ).

Exemples :

- a. Si j'habite à Paris, alors j'habite en France.
- b. S'il pleut, alors le sol (non abrité) est mouillé.

Attention : un raisonnement déductif procède par hypothèse, ce n'est pas parce qu'un raisonnement déductif est vrai que la conclusion de la déduction est vraie. Exemple : si je suis immortel, alors je ne crains pas le feu. Le raisonnement est correct, mais il n'a aucune réalité. Pour obtenir de la réalité à partir de raisonnements, on a besoin de l'axiome suivant :

- Règle du modus ponens :  $[(A \text{ est vrai}) \text{ et } (A \Rightarrow B)] \Rightarrow (B \text{ est vrai})$ .

Exemples :

- a. Si Socrate est un homme, alors Socrate est mortel. Or Socrate est bien un homme, donc Socrate est mortel.
- b. Si je vis à Paris, alors je vis en France. Or je vis bien à Paris, donc je vis en France.
- c. Si dans un triangle  $ABC$ ,  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ , alors le triangle est rectangle en  $B$ . Considérons le triangle  $ABC$  avec  $AC = 5u$ ,  $AB = 3u$  et  $BC = 4u$ . On a bien  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ , donc le triangle rectangle est effectivement rectangle en  $B$ .

Remarquez ici l'usage distinct de « si...alors... » et de « ...donc... ». Le premier cas n'exprime qu'une déduction abstraite de toute vérité, le deuxième exprime une affirmation vraie appuyée par une déduction.

Les autres raisonnements sont des combinaisons de déductions.

- Raisonnement par équivalence :  $A \Leftrightarrow B$  ( $A$  si et seulement si  $B$ ,  $A$  ssi  $B$  en abrégé). Cela signifie que  $A \Rightarrow B$  et  $B \Rightarrow A$ .

Exemples :

- Un nombre entier est pair ssi son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6, ou 8.
- Deux droites sont parallèles ssi étant donné une troisième droite sécante aux deux premières, les angles alternes-internes sont égaux.
- Un triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$  ssi  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ .

- Contraposée d'une déduction :  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non}B \Rightarrow \text{non}A)$ .

Exemples :

- Si le sol (non abrité) n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas.
- Si dans un triangle  $ABC$ ,  $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$ , alors le triangle n'est pas rectangle en  $B$ .
- Si des triangles ont des angles aux sommets différents, alors ils ne sont pas isométriques.

## 2 Tables de vérité

Les règles précédentes peuvent être utilisées avec la seule intuition. Cependant, on peut utiliser des axiomes sous forme de tables de vérité, qui épuisent toutes les possibilités de vérité des propositions. On considère deux propositions  $a$  et  $b$ . Formellement, on notera leurs négations  $\neg a$  et  $\neg b$ . On va construire la logique binaire (ou booléenne), qui comporte deux valeurs de vérité : vrai ou faux, qu'on traduira respectivement par 1 ou 0. Les tableaux 1 et 2 expriment toutes les possibilités pour relier  $a$  et  $b$  par les lien *et* et *ou*. On notera symboliquement  $a \wedge b$  pour *a et b*, et on notera  $a \vee b$  pour *a ou b* — il s'agit d'un *ou* inclusif, au sens où on a  $a \vee b$  lorsque l'on a  $a$ , ou  $b$ , ou  $a$  et  $b$ .

Détaillons la construction du tableau *et*, le tableau 1. Dans les deux premières colonnes, on détaille toutes les possibilités de combinaisons de vérités pour  $a$  et  $b$ . À droite, la seule possibilité pour que  $a \wedge b$  soit vraie est que les deux soient vrais en même temps. On raisonne de manière similaire pour obtenir la table *ou* (tableau 2).

Construisons le tableau  $a \Rightarrow b$  (tableau 3). On procède de même pour les deux colonnes de gauche. Pour la colonne de droite, on regarde quels sont les cas possibles d'implication de  $a$  vers  $b$  — si les combinaisons ne sont pas contradictoires avec  $a \Rightarrow b$ , alors  $a \Rightarrow b$  prendra la valeur vraie. Lorsque  $a$  et  $b$  sont tous les deux faux, cela ne contredit pas que  $a$  puisse impliquer  $b$  : si  $a$  est vrai,  $b$  est vrai, mais comme  $a$  est faux, l'implication n'est pas contredite même si  $b$  est

TABLE 1: Tableau de vérité ET.

$a$	$b$	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

TABLE 2: Tableau de vérité OU.

$a$	$b$	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

faux. Ce qui nous donne la première ligne. On peut très bien avoir "par accident" que  $b$  soit vrai même si  $a$  est faux lorsque  $a \Rightarrow b$  (le sol peut être mouillé sans qu'il pleuve). Ainsi, on déduit la deuxième ligne. Lorsque  $a$  est vrai, si  $a \Rightarrow b$ , cela implique que  $b$  est vrai (d'après la règle du modus ponens). Donc  $a$  vrai et  $b$  faux donnent que  $a \Rightarrow b$  est faux. D'où la troisième ligne. La dernière ligne est triviale.

En fait, ces constructions de tableaux sont intuitives, car on peut carrément prendre ces tableaux (tableaux 1, 2, 3) comme des axiomes.

TABLE 3: Tableau de vérité de l'implication.

$a$	$b$	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Construisons le tableau de vérité  $\neg b \Rightarrow \neg a$  (tableau 4).

Si on le réarrange en inversant les vérités dans les deux premières colonnes, on obtient le tableau de vérité portant sur  $a$  et  $b$ , en permutant les places de  $a$  et  $b$  (tableau 5).

À des permutations de lignes près, on obtient le même tableau que le tableau d'implication simple (tableau 3). On vient donc de démontrer que  $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ .

TABLE 4: Tableau de vérité  $\neg a \Rightarrow \neg b$ .

$\neg b$	$\neg a$	$\neg b \Rightarrow \neg a$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

TABLE 5: Tableau de vérité de la contraposée.

$a$	$b$	$\neg b \Rightarrow \neg a$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

**Exercice.**

1. En s'aidant de l'intuition, construire la table de vérité du ou exclusif ( $a$ , ou  $b$ , mais pas  $a$  et  $b$ ). On notera  $a \oplus b$  l'opérateur du ou exclusif.
2. À partir de la table de l'implication 3, construire la table de vérité de  $a \Leftrightarrow b$ .
3. Soit  $c$  une proposition. Construire le tableau de vérité  $(a \wedge b) \vee c$ .

### 3 Transformer des propositions

Dans cette section, on ne s'occupe pas de savoir si les propriétés sont vraies.

1. Quel est le contraire de toujours ?
2. Exprimer la négation des propositions suivantes :
  - $x < 2$ ;
  - Pour tout  $x$  nombre réel,  $f(x) < 0$  ( $f(x)$  est une expression qui dépend du nombre  $x$ ).
  - Tous les nombres impairs sont premiers.
  - Tous les nombres premiers sont impairs.
  - Il existe au moins un marxiste capitaliste.
  - Il pleut tous les jours.
3. Exprimer la contraposée des propositions suivantes :
  - S'il pleut, alors le sol (non abrité) est mouillé.

- Si j'habite à Paris, alors j'habite en France.
4. Les couples de propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Justifier.
    - a. S'il pleut, alors le sol (non abrité) est mouillé.
    - b. S'il ne pleut pas, alors le sol (non abrité) est sec.
    - a.  $n$  est impair.
    - b.  $n^2$  est impair.
    - a.  $n$  est pair.
    - b. Le chiffre des unités de  $n$  vaut 2, 4, 6, ou 8.
    - a.  $n$  est un multiple de 3.
    - b. La somme des chiffres de  $n$  est un multiple de 3.
  5. Démontrer que si  $x^2 + x + 1 = 0$ , alors  $x = 1$ . Démontrer que la réciproque est fausse.

## 4 Raisonnement par récurrence

On rappelle l'axiome de récurrence :

**Axiome 1.** Principe de récurrence : soit  $P(\cdot)$  une propriété qui dépend d'un entier naturel. Si  $P(0)$  est vraie, et si, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(P(k) \Rightarrow P(s(k)))$ , alors  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour démontrer qu'une proposition  $P$  portant sur un entier naturel  $n$  est vraie, on procède comme suit :

- Initialisation : on montre que la proposition est vraie pour un rang de départ (souvent 0).
- Hérédité : on montre que la proposition est héréditaire : que, si pour un entier naturel  $n$  quelconque,  $P(n)$  est vraie, alors cela entraîne  $P(n + 1)$ .
- Conclusion : on peut alors conclure que la proposition  $P$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

### Exercices

- Démontrer qu'un polygone de  $n$  côtés a exactement  $n(n - 3)/2$  diagonales.
- Soit  $x \in ] - 1; +\infty[$ , soit  $n \in \mathbb{N}$ , avec  $n > 2$ . Démontrer que  $(1 + x)^n > 1 + nx$ . (Égalité de Bernoulli)
- Quelle est l'erreur dans la démonstration suivante ?

**Proposition.** 3 divise<sup>1</sup> tous les nombres de la forme  $4^n + 1$ .

**Démonstration.** Supposons la propriété vraie au rang  $n$  et montrons qu'elle est vraie au rang  $n + 1$ . On a

$$4^{n+1} + 1 = 4 \times 4^n + 1 = (3 + 1)4^n + 1 = 3 \times 4^n + 4^n + 1$$

Or 3 divise  $3 \times 4^n$  ainsi que  $4^n + 1$  (hypothèse de récurrence), il divise donc leur somme. D'où le résultat.

**Définition 1.** Un nombre premier est un nombre entier qui admet exactement deux diviseurs.

**Théorème 1.** Théorème fondamental de l'arithmétique : tout nombre entier supérieur ou égal à deux admet une décomposition unique en facteurs premiers.

*Démonstration.* 1. Existence de la décomposition : on va démontrer que tout nombre entier supérieur ou égal à deux admet un diviseur premier.

- a. Montrer que c'est bien le cas pour 2.
- b. Soit  $n$  un nombre entier supérieur à 2 et supposons qu'il admette un diviseur premier. Démontrer que  $n + 1$  admet un diviseur premier.  
*Aide : on distinguera deux cas, celui où  $n + 1$  est premier et celui où il ne l'est pas. Dans le second cas, on utilisera l'hypothèse de récurrence sur un de ses diviseurs.*
- c. Conclure.

2. Unicité.

**Lemme 1.** Soit  $p$  un nombre premier qui divise  $ab$ . Alors  $p$  divise  $a$  ou  $b$ .

On démontrera cette proposition par l'absurde dans la section suivante.

- a. On suppose que  $p$  divise un produit de facteurs premiers. Démontrer qu'il en divise au moins un.
- b. Supposons que  $n$  admette deux décompositions en facteurs premiers. Démontrer que ces décompositions sont identiques.

CQFD

---

1. Rappel de la divisibilité. Soient  $a$  et  $b$  deux nombres entiers naturels. On dit que  $a$  divise  $b$  (ou que  $b$  est un multiple de  $a$ , ou que  $a$  est un diviseur de  $b$ ) si le reste de la division euclidienne de  $b$  par  $a$  est nul. Autrement dit, il existe un entier  $k$  tel que  $b = ka$ .

## 5 Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à effectuer une déduction vraie pour arriver à une conclusion fausse. Cela permet de montrer qu'une proposition est fausse. Si l'on veut montrer que  $A$  est faux, on démontre que  $A \Rightarrow B$ , et que  $B$  est faux. Comme la déduction est vraie, on a la déduction  $\text{non}B \Rightarrow \text{non}A$ , or comme  $B$  est faux,  $\text{non}B$  est vrai, donc  $\text{non}A$  est vrai, et donc la fausseté de  $A$  est démontrée.

**Exercices** Démontrer par l'absurde les propriétés suivantes.

- (Pour tout  $x$  nombre réel, on a  $2x + 3 = 5x$ ) est faux.
- $0$  n'admet pas d'inverse dans les nombres réels.
- Soit  $x$  un nombre réel non nul. Alors  $1/x$  est non nul.

**Théorème 2.** (Division euclidienne)

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres entiers positifs. Alors il existe un unique couple d'entiers positifs  $(q, r)$  tels que  $a = bq + r$ ,  $bq \leq a$  et  $r < b$ .

On dit que  $q$  est le quotient et  $r$  le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

*Démonstration.* Existence. Soit  $A = \{c \in \mathbb{N} \mid bc \leq a\}$ . Comme  $\mathbb{N}$  est archimédien, il existe  $c' \in \mathbb{N}$  tel que  $bc' > a$  donc  $A$  est une partie majorée et non vide ( $0 \in A$ ) de  $\mathbb{N}$ .  $A$  admet donc un plus grand élément, noté  $q$ . Montrons que  $q$  et  $r = a - bq$  conviennent. Si  $r$  était plus grand que  $b$ , alors dans ce cas,  $bq = a - r \leq a - b$  et donc  $b(q + 1) \leq a$ , ce qui contredit la maximalité de  $q$ . Donc  $r < b$ .

Unicité. Soient  $(q, r)$  et  $(q', r')$  deux couples qui conviennent, et supposons par exemple que  $r' > r$ . On a  $bq + r = bq' + r'$  donc  $b(q - q') = r' - r$ . Ainsi,  $b$  divise  $r' - r$ . Donc il existe  $k$  entier tel que  $r' - r = bk$ , donc  $r' = r + bk > b$ , ce qui est absurde.

CQFD

**Lemme 2.** Soit  $p$  un nombre premier qui divise  $ab$ . Alors  $p$  divise  $a$  ou  $b$ .

*Démonstration.*

**Lemme 3.** Soient  $a$  et  $b$  deux entiers tels que  $\frac{a}{b}$  est irréductible. Soient  $c$  et  $d$  deux entiers différents de  $a$  et  $b$ . Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , alors il existe un entier  $e$  tel que  $c = ae$  et  $b = de$ .

*Démonstration.* Effectuons les divisions euclidiennes de  $c$  par  $a$  et  $d$  par  $b$  :

$$c = ae + r \quad \text{et} \quad d = bf + s$$

avec  $0 \leq r < a$  et  $0 \leq s < b$ .

1. En déduire un développement de l'égalité  $ad = bc$  en remplaçant  $c$  et  $d$  par leurs divisions euclidiennes.
2. En notant  $n = ad = bc$ , reconnaître deux divisions euclidiennes de  $n$ .
3. Par unicité de la division euclidienne, en déduire que  $f = e$  et  $as = br$ .
4. Supposons que  $r$  ou  $s$  est non nul. Démontrer que les deux sont forcément non nuls, et que  $\frac{a}{b} = \frac{r}{s}$ .
5. Soulever une contradiction. Conclure.

CQFD

1. Supposons que  $p$  ne divise pas  $a$  mais divise  $ab$ , soit  $c$  tel que  $ab = pc$ . Utiliser le lemme pour démontrer que  $p$  divise  $b$ .

CQFD

**Théorème 3.** *Il existe une infinité de nombre premiers.*

*Démonstration.*

**Lemme 4.** *Si  $a$  divise  $m$  et  $n$  et que  $m > n$ , alors  $a$  divise  $m - n$ .*

1. Démontrer le lemme.
2. Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers, rangeons-les dans l'ordre croissant, et notons-les ainsi :  $(p_1, p_2, \dots, p_N)$ . Soit  $A = p_1 p_2 \dots p_N + 1$ . Utiliser le théorème 1 pour trouver un diviseur premier commun à  $A$  et  $A - 1$ . Conclure.

CQFD