

Maths-champignons

Construction axiomatique des triangles isométriques et quelques applications

Novembre 2022

1 Axiomes

Axiome 1. *On admet les axiomes suivants :*

1. *Existence d'un segment qui relie deux points.*
2. *Étant donné un segment, existence d'une droite infinie qui prolonge ce segment.*
3. *Étant donné un cercle et une distance, existence du cercle dont le centre est ce point et le rayon cette distance.*
4. *Théorie des nombres (voir chapitre sur le calcul).*
5. *Tous les angles droits sont égaux entre eux.*
6. *Si deux droites sont sécantes à une troisième, et que les angles intérieurs formés ont une somme strictement inférieure à un angle plat, alors les deux droites sont sécantes du côté où les angles sont plus petites que deux angles droits.*

On peut déduire une conséquence directe de l'axiome 6 :

Théorème 1. *Étant donnée une droite et un point séparé de cette droite, il existe une unique autre droite parallèle à la première passant par ce point.*

Pour une présentation plus détaillée des axiomes, consulter les éléments géométriques d'Euclide¹.

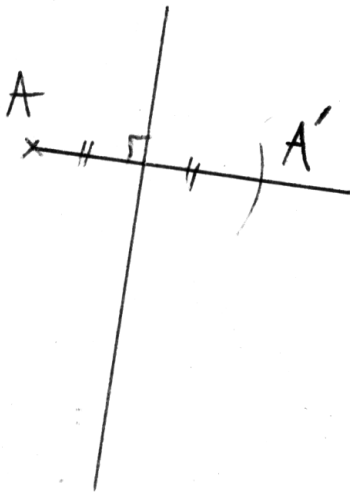
1. Consulter par exemple http://promenadesmaths.free.fr/telecharger/euclide_elements_1804.pdf ou <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Projet-geometrie/Cours1.pdf>.

2 Transformations isométriques

Définition 1. (Symétrie axiale)

Soit A un point et (d) une droite. Le symétrique de A par rapport à (d) est le point A' tel que $(d) = \text{med}[AA']$ (notation pour dire que (d) est la médiatrice du segment $[AA']$). On appelle cette transformation une symétrie axiale, (d) en est l'axe de symétrie.

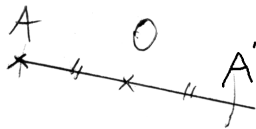
Figure :



Définition 2. (Symétrie centrale)

Soient A et O deux points. Le symétrique de A par rapport à O est le point A' tel que $O = \text{mil}[AA']$ (notation pour dire que O est le milieu du segment $[AA']$). On appelle cette transformation une symétrie centrale, O en est le centre de symétrie.

Figure :

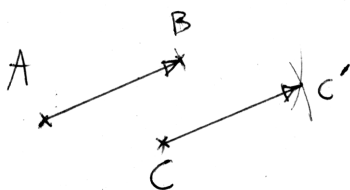


Définition 3. (Translation)

Soient A, B, C trois points. Le bipoint² $(A; B)$ définit une translation t : l'image de C par la translation t , est le point C' tel que :

- $(AB) \parallel (CC')$,
- $(AC) \parallel (BC')$.

Figure :



Remarque. Les deux points de la définition précédente sont équivalents à : $ABC'C$ est un parallélogramme. On pourrait remplacer cela par les propriétés équivalentes du parallélogramme (voir propriété 5 plus loin).

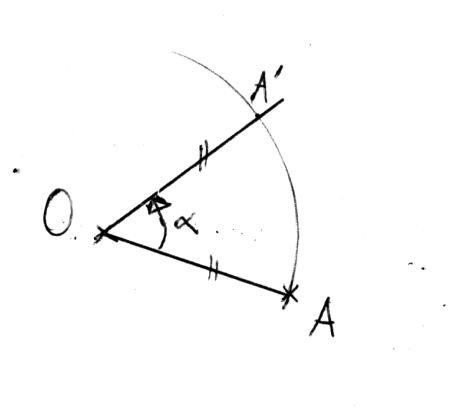
Définition 4. (Rotation)

Soient A et O deux points, soit α un nombre réel tel que $0 \leq \alpha < 360$. A' est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle α si :

- $OA = OA'$,
- $\widehat{AOA'} = \alpha^\circ$, dans le sens anti-horaire.

2. Un bipoint est simplement la donnée de deux points dans un ordre précis.

Figure :



Définition 5. Les quatre transformations précédentes sont des isométries. Toute composition³ de ces transformations est aussi une isométrie.

Axiome 2. (Axiome 8 des éléments géométriques d'Euclide) Deux figures sont superposables si et seulement si il existe une isométrie qui transforme l'une en l'autre.

3 Triangles isométriques

Définition 6. Deux triangles sont isométriques lorsque l'un est l'image de l'autre par une isométrie.

Proposition 1. Deux triangles sont isométriques lorsqu'ils sont superposables.

Proposition 2. Deux triangles sont isométriques ssi leurs côtés sont de mêmes mesures deux à deux.

Démonstration. \Rightarrow) C'est évident : lorsque l'on superpose deux triangles (d'après l'axiome 8), leurs côtés coïncident et donc sont de même mesure.

\Leftarrow) C'est moins évident⁴. Pour démontrer le sens réciproque, il faudrait prouver qu'étant données trois distances (pour trois segments), partant d'un segment, on ne peut construire qu'un seul triangle (à une symétrie axiale près). Pour ce faire, il faudrait traiter en détail des intersections possibles des cercles, ce qui

3. La composition de transformations est la succession de ces transformations. Par exemple, appliquer une symétrie axiale sur un point A pour donner A' , puis appliquer à A' une rotation pour donner A'' .

4. D'ailleurs, Euclide lui-même va un peu vite dans sa démonstration (voir problème 2, livre 1), et a été critiqué plusieurs fois. Cf. par exemple <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Projet-geometrie/Cours1.pdf>

dépasse le cadre de ce cours. Cependant, vous pouvez vous en convaincre intuitivement en traçant des triangles lorsque trois longueurs sont données. *CQFD*

Remarque. Certains livres parlent de triangles égaux plutôt que de triangles isométriques. Je préfère parler de triangles isométriques, pour indiquer que deux triangles différents (donc non égaux!) peuvent avoir les mesures égales.

Théorème 2. Soient deux triangles ABC et EFG . On suppose que :

- $AB = EF$,
- $BC = FG$,
- $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$.

Alors les triangles ABC et EFG sont isométriques (donc, en particulier, $AC = EG$).

Démonstration. Puisque $AB = EF$, les segments $[AB]$ et $[EF]$ sont de mêmes mesures. D'après l'axiome 8, il existe une isométrie qui permet de superposer ces deux segments, en faisant coïncider B avec F . Comme les angles \widehat{ABC} et \widehat{EFG} sont égaux, les droites (BC) et (FG) sont orientées dans la même direction et ont un point commun, elles sont donc confondues. De plus, comme $BC = FG$ et que les points B et F sont confondus, d'après l'axiome 8, les segments $[BC]$ et $[FG]$ sont superposés, ainsi, les points C et G sont superposés. Mais alors, les segments $[AC]$ et $[EG]$ sont superposés. Ainsi, les trois segments des deux triangles sont superposés, et donc d'après l'axiome 8, ils sont isométriques.

Dans le cas où, une fois ayant fait superposer $[AB]$ et $[EF]$, les deux angles \widehat{ABC} et \widehat{EFG} auraient des sens opposés (l'un dans le sens horaire, l'autre dans le sens anti-horaire), il suffirait d'appliquer une symétrie axiale d'axe (AB) à l'un des deux triangles pour se ramener à la situation précédente. *CQFD*

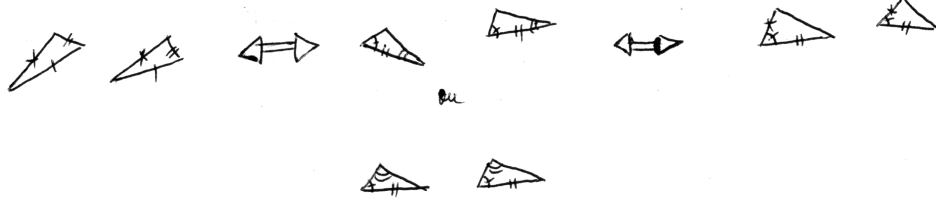
Théorème 3. Soient deux triangles ABC et EFG . On suppose que :

- $AB = EF$,
- $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$,
- $\widehat{CAB} = \widehat{GEF}$.

Alors les triangles ABC et EFG sont isométriques (donc, en particulier, $BC = FG$ et $AC = EG$).

Démonstration. Elle est similaire à la démonstration précédente : trouver une isométrie qui superpose $[EF]$ à $[AB]$, et utiliser l'axiome 8 pour faire superposer C à G par intersection des droites. Les détails sont laissés au lecteur. *CQFD*

Figure synthèse : différentes configurations de triangles isométriques.



Proposition 3. Si deux triangles sont isométriques, alors les angles des sommets sont égaux deux à deux.

Démonstration. Considérons deux triangles isométriques. Par l'axiome 8 des éléments d'Euclide, on peut superposer les deux triangles, et alors tous les angles se superposent deux à deux, et donc sont égaux. CQFD

Corollaire 1. Lorsqu'une figure est transformée par une isométrie, les distance et les angles sont conservés.

Remarque. Intuitivement, à l'exception près de la symétrie axiale, une isométrie consiste à déplacer une figure sans la déformer.

Proposition 4. Soient (d) , (e) et (f) trois droites, on suppose que la droite (f) est sécantes aux deux autres droites. Les trois droites forment donc des angles alternes-internes. Alors, les angles alternes-internes sont égaux si et seulement si $(d) \parallel (e)$.

Démonstration. \Rightarrow

Soient (d) et (e) les deux droites considérées, soit (f) la droite sécante aux deux droites.

On suppose que les angles alternes-internes sont égaux. On pose $A = (d) \cap (f)$ et $B = (e) \cap (f)$, et $M = \text{mil}[AB]$. Soit (h) la droite passant par M perpendiculaire à (d) . Soient $A' = (h) \cap (d)$ et $B' = (h) \cap (e)$.

— Démontrer que les triangles $AA'M$ et $BB'M$ sont isométriques. Conclure.

\Leftarrow

Soient (d) et (e) les deux droites considérées, soit (f) la droite sécante aux deux droites. On suppose que $(d) \parallel (e)$.

Soient les points situés comme dans la figure 1. Les angles $\widehat{B'BA}$ et $\widehat{B''BB''}$ sont opposés, donc égaux. Ainsi, démontrer que les angles alternes-internes sont égaux revient à démontrer que les angles $\widehat{A'AB}$ et $\widehat{ABB''}$ sont complémentaires.

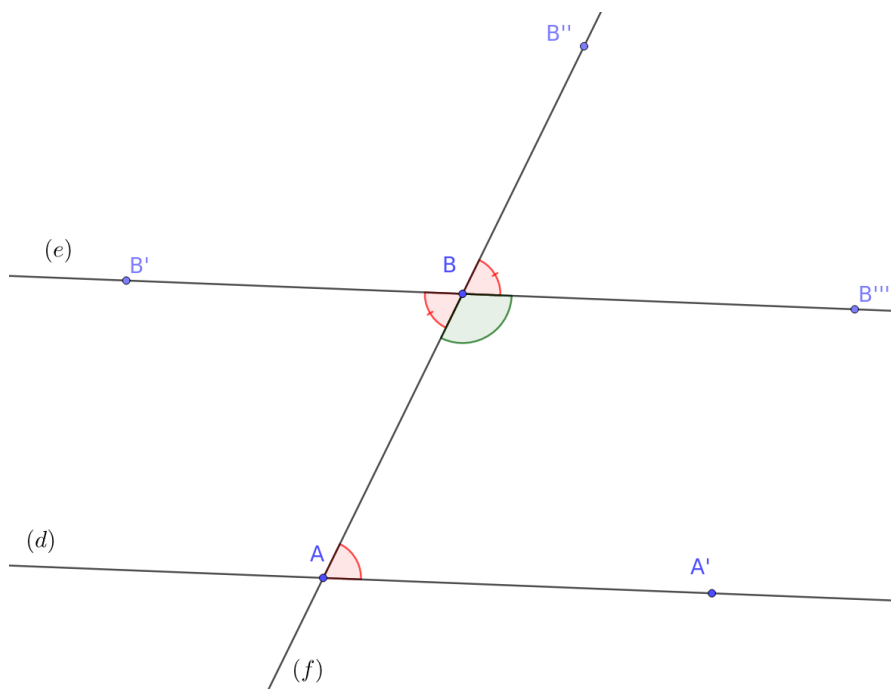


FIGURE 1: Angles alternes-internes.

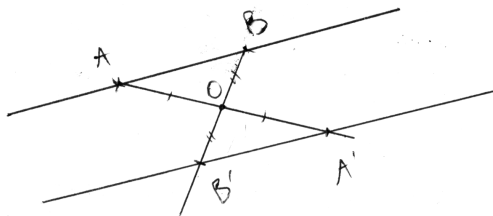
En effet, si c'est le cas, puisque $\widehat{B''BB'''}$ et $\widehat{ABB'''}$ sont complémentaires, on a l'égalité demandée.

Par contraposée de l'axiome 5 d'Euclide⁵, puisque les droites sont parallèles, alors la somme de $\widehat{A'AB}$ et $\widehat{ABB'''}$ égale deux angles droits. D'où le résultat.

CQFD

Théorème 4. Soit (d) une droite. Si on transforme cette droite en (d') par une symétrie centrale, alors $(d) \parallel (d')$.

Figure :



5. Celui portant sur les deux droites sécantes à une troisième, le point 6 de notre axiome 1.

Démonstration. En exercice! Soit (d) une droite, soit O le centre de symétrie. Si $O \in (d)$, alors $(d') = (d)$ et il n'y a rien à faire. Supposons donc que $O \notin (d)$. Soient $A, B \in (d)$. Soient A' et B' les images respectives de A et B par la symétrie centrale de centre O . Alors $(d') = (A'B')$.

1. Démontrer que les triangles AOB et $A'OB'$ sont isométriques.
2. En déduire que $\widehat{BAB'} = \widehat{AB'A'}$.
3. Conclure la démonstration.

CQFD

Définition 7. (*Parallélogramme; rappel*) Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si $(AB) \parallel (CD)$ et $(AC) \parallel (BD)$.

Proposition 5. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $ABCD$ est un parallélogramme,
2. $AB = CD$ et $AD = BC$ (côtés opposés de mêmes mesures),
3. Si O est l'intersection de (AC) et (BD) , alors $AO = OC$ et $BO = OD$ (les diagonales se coupent en leur milieu).
4. C est l'image de D par la translation de bipoint $(A; B)$.

Démonstration. Conseil : (re)faites des dessins en lisant la démonstration.

$1 \Leftrightarrow 4$ est évident d'après la définition des translations.

Pour démontrer $1 \Rightarrow 2$, il suffit de considérer les triangles ABC et ACD et de montrer qu'ils sont isométriques. Pour ce faire, on utilise la propriété des angles alternes internes : $(AB) \parallel (CD)$, donc $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$; puis $(AD) \parallel (BC)$, donc $\widehat{DAC} = \widehat{ACB}$. De plus, les deux triangles ont un côté en commun. Ils sont donc isométriques. Ainsi, $AB = CD$ et $AC = BD$ (cette fois-ci il faut lire la figure 2 de droite à gauche).

Démontrons $2 \Rightarrow 1$. Soit $ABCD$ un quadrilatère qui a ses côtés opposés de mêmes mesures (voir figure 2 à gauche).

Considérons les triangles ADC et ACB . Ils ont un côté superposé, $[AC]$, et d'après l'hypothèse 2, $AB = CD$ et $AC = BD$. Ce sont donc des triangles isométriques. Ainsi $\widehat{CAB} = \widehat{ACD}$, et d'après la propriété des angles alternes-internes, $(AB) \parallel (CD)$. Et aussi, $\widehat{DAC} = \widehat{ACB}$, donc $(AD) \parallel (BC)$ (voir figure 2 à droite). Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Ainsi, on a démontré que $2 \Rightarrow 1$ et $1 \Rightarrow 2$. Donc $2 \Leftrightarrow 1$.

Pour démontrer $2 \Rightarrow 3$, on utilise encore les triangles isométriques, en plus du parallélisme, acquis par ce qui précède. Considérons O l'intersection des diagonales. Alors, les triangles ADO et COB sont isométriques. En effet, $AD =$

BC , et par parallélisme et angles alternes-internes, $\widehat{DAC} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB} = \widehat{DBC}$. On en déduit que $AO = OC$ et $DO = OB$, autrement dit, $O = \text{mil}[AC] = \text{mil}[BD]$. (Figure 3 de gauche à droite).

Pour démontrer $3 \Rightarrow 2$, on utilise le fait que les triangles AOD et BOC sont isométriques. On a évidemment $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$, et comme O est le milieu des diagonales, $AO = OC$ et $BO = OD$, ce qui est une condition suffisante pour avoir des triangles isométriques. Ainsi, $AD = BC$. Pour obtenir $AB = CD$, il suffit de procéder de même en considérant les triangles isométriques AOB et DOC .

Conclusion : $2 \Rightarrow 3$ et $3 \Rightarrow 2$, donc $2 \Leftrightarrow 3$, et de plus, $1 \Leftrightarrow 2$, et $1 \Leftrightarrow 4$. On a donc bien $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$.

CQFD

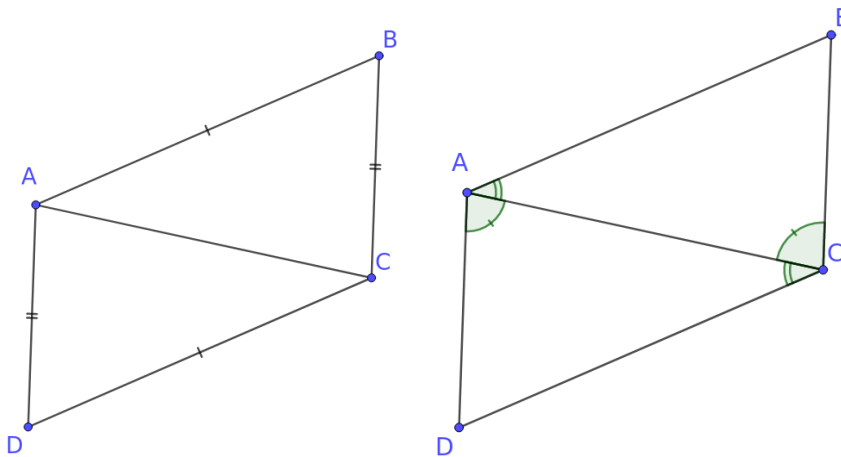


FIGURE 2: À gauche : situation des triangles isométriques. À droite : on en déduit l'égalité d'angles alternes-internes.

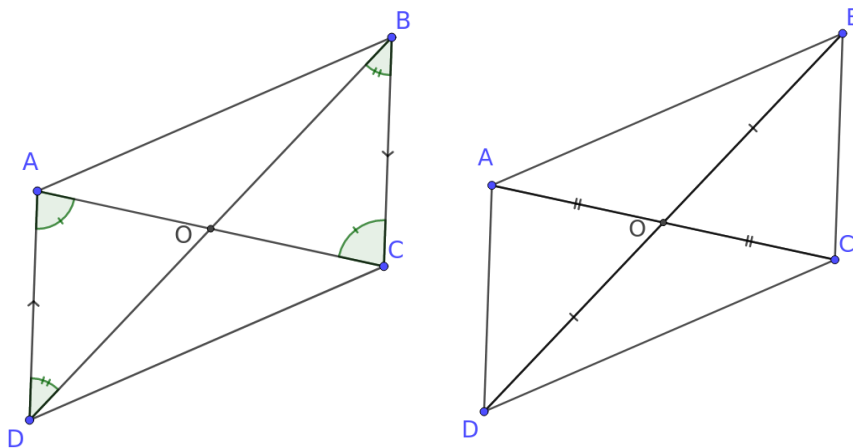


FIGURE 3: Triangles isométriques à partir des diagonales. À gauche : égalité d'angles alternes internes. À droite : égalité de mesures de segments.

4 Aire des triangles

Pour définir la mesure des surfaces, nous avons besoin de quelques axiomes.

Axiome 3. (Théorie de la mesure des surfaces) On postule l'existence d'un opérateur de mesure des surfaces, qu'on appelle aire, et qu'on note \mathcal{A} . Cet opérateur vérifie :

1. L'aire \mathcal{A} d'une surface est toujours positive ou nulle. (Positivité)
2. Si \mathcal{L} est une ligne, alors $\mathcal{A}(\mathcal{L}) = 0$. Autrement dit, les lignes ont des aires nulles⁶.
3. Si deux surfaces sont disjointes, alors l'aire des deux surfaces est la somme des aires de chaque surface. (Additivité de l'aire).
4. Si une figure U est incluse dans une figure V , alors $\mathcal{A}(U) \leq \mathcal{A}(V)$. (Le tout est plus grand que la partie).
5. Si $ABCD$ est un rectangle, alors $\mathcal{A}(ABCD) = AB \times CD$. (L'aire d'un rectangle est le produit des mesures de ses côtés).

Proposition 6. L'aire d'un point est nulle.

Démonstration. (Pour le fun de se casser la tête)

6. On pourrait déduire cela de l'axiome de la construction des lignes : une ligne est une longueur sans épaisseur.

Un point peut toujours être contenu dans une ligne. Or la surface d'une ligne est nulle. D'après l'axiome du tout et de la partie, la surface d'un point est inférieure ou égale à zéro ; d'après l'axiome de positivité, la surface d'un point est supérieure ou égale à zéro. La seule possibilité est qu'elle soit nulle. CQFD

Axiome 4. (Extension de l'axiome 8 d'Euclide)
Deux surfaces isométriques ont la même aire.

Théorème 5. Soit ABC un triangle rectangle en B . Alors

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{AB \times BC}{2}.$$

Démonstration. Soit M le milieu de $[AC]$ et D le symétrique de B par rapport à M . La symétrie centrale conserve les distances et les angles, donc $ABCD$ est un rectangle. Donc l'aire de $ABCD$ vaut $AB \times CD$. Les deux triangles ABC et ABD sont isométriques (symétrie centrale de centre M) donc ont la même aire (d'après l'axiome 8), qu'on notera $\mathcal{A}(ABC)$. Mais ces deux triangles sont disjoints, donc l'aire de la figure totale, c'est-à-dire l'aire du rectangle $ABCD$, vaut 2 fois $\mathcal{A}(ABC)$. Ainsi :

$$2 \times \mathcal{A}(ABC) = AB \times CD$$

donc

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{AB \times BC}{2}.$$

CQFD

Corollaire 2. Soit ABC un triangle quelconque. Soit H l'intersection entre (AB) et la hauteur issue de C . Alors :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

Démonstration. Il suffit de découper ABC en deux triangles rectangles, et d'utiliser l'axiome d'additivité de l'aire. CQFD