

Maths champignons

Éléments de calcul

Novembre 2022

Approfondissements et sources diverses : consulter <http://www.carolinevernier.website/numbersets.html>, <https://www.librairie-tropiques.fr/2021/10/apprendre-a-apprendre.html>.

1 Axiomes de Peano et addition

Vocabulaire. \forall = "pour tout". \exists = "il existe". \in = "appartient à".

Axiome 1. L'ensemble des entiers naturels, noté \mathbb{N} , muni de l'opération de succession $s(\cdot)$ vérifie les axiomes suivants.

1. $0 \in \mathbb{N}$. De plus, 0 n'est le successeur d'aucun nombre : $\forall n \in \mathbb{N}, s(n) \neq 0$.
2. Tout élément $n \in \mathbb{N}$ admet un successeur $s(n)$. (En langage plus compact : $\forall n \in \mathbb{N}, s(n) \in \mathbb{N}$).
3. Deux éléments qui ont le même successeur sont égaux¹ :
 $\forall p, q \in \mathbb{N}, s(p) = s(q) \Rightarrow p = q$.
4. Principe de récurrence : soit $P(\cdot)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel. Si $P(0)$ est vraie, et si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(P(k) \Rightarrow P(s(k)))$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La liste des axiomes précédents suffit pour assurer l'existence de \mathbb{N} . Si on veut munir \mathbb{N} d'une opération d'addition, il faut ajouter un axiome supplémentaire :

Axiome 2. On définit l'opérateur $+(\cdot, \cdot)$ sur \mathbb{N} , et on postule que

$$\forall p \in \mathbb{N}, +(p, 0) = p$$

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, +(p, s(q)) = s(+(p, q))$$

1. On dit que $s(\cdot)$ est injective.

Remarque Pour simplifier les notations, on peut écrire que $+(p, q) = (p + q)$, mais attention, à ce stade, les propriétés de l'addition ne sont pas démontrées !

Théorème 1.

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, +(p, q) = s(s(\dots s(q) \dots))$$

où l'opérateur $s(\cdot)$ apparaît p fois.

Théorème 2. Soient p, q et r des entiers naturels. Alors :

1. $+(0, p) = +(p, 0) = p$ (autrement dit, $0 + p = p + 0 = p$).
2. $+(p, q) = +(q, p)$ (autrement dit, $(p + q) = (q + p)$).
3. $+(+(p, q), r) = +(p, +(q, r))$ (autrement dit, $((p + q) + r) = (p + (q + r))$).
4. $+(p, q) = +(r, q) \Rightarrow p = r$ (autrement dit, $p + q = r + q \Rightarrow p = r$).

Remarque. La propriété 1 est la symétrie de l'addition. La propriété 2 se nomme l'associativité. La propriété 3 est une propriété d'injectivité.

Démonstration. Il faut effectuer des raisonnements par récurrence. Laissé en exercice ! CQFD

2 Multiplication, produit

On a besoin d'ajouter des axiomes pour définir le produit de deux nombres.

Axiome 3. On postule l'existence d'un opérateur $\times(\cdot, \cdot)$ sur \mathbb{N} qui vérifie les axiomes suivants :

1. $\forall p \in \mathbb{N}, \times(p, 0) = 0$ (autrement dit, $p \times 0 = 0$)
2. $\forall p, q \in \mathbb{N}, \times(p, s(q)) = +(\times(p, q), p)$
(autrement dit, $p \times (q + 1) = p \times q + p$).

Remarque. Évidemment il est plus commode d'écrire $p \times q$, voire $p \cdot q$, voire même pq à la place de $\times(p, q)$.

Théorème 3. Soient p, q et r trois nombres entiers.

1. $p \times 1 = 1 \times p = p$ (élément neutre)
2. $pq = qp$. (commutativité)
3. $(pq)r = p(qr)$. (associativité)
4. $p(q + r) = pq + pr$. (distributivité)
5. $mn = 0 \Leftrightarrow (m = 0 \text{ ou } n = 0)$.

6. $(pq = pr \text{ et } p \neq 0) \Leftrightarrow q = r$.

Démonstration. Par commodité, on va utiliser les notations usuelles du produit.

1. Montrons le par récurrence sur p . C'est évidemment vrai au rang 0. Supposons que ce soit vrai au rang p et montrons-le au rang $p + 1$. D'une part, $(p + 1) \times 1 = (p + 1) \times (0 + 1) = (p + 1) \times 0 + (p + 1) = p + 1$. D'autre part, $1 \times (p + 1) = 1 \times p + 1 = p + 1$ par hypothèse de récurrence. Conclusion : la propriété est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2. Par récurrence sur q . On démontre d'abord le lemme suivant : $pq = p + \dots + p$ où p apparaît q fois, par récurrence. Remarquons que cette expression a du sens en vertu de l'associativité de $+$.

Initialisation : c'est évident pour $q = 0$.

Hérédité : supposons que la propriété soit vraie au rang q . Alors on a $p(q + 1) = pq + p$ d'après le point 2 de l'axiome du produit, et en utilisant l'hypothèse de récurrence, $p(q + 1) = p + \dots + p + p$ où p apparaît $q + 1$ fois. La propriété est donc vraie pour tout q .

À présent il s'agit de démontrer par récurrence sur q que $pq = qp$. C'est évidemment vrai au rang 0 (mais également au rang 1 d'après le premier point du théorème).

Supposons que c'est vrai au rang q (que $pq = qp$ pour tout q). D'une part, $p(q + 1) = pq + p = qp + p$ d'après l'hypothèse de récurrence, mais $qp + p = q + \dots + q + p$ où q apparaît p fois.

D'autre part, $(q + 1)p = q + 1 + \dots + q + 1$ où $q + 1$ apparaît p fois. Mais par commutativité et associativité de $+$, ce nombre est égal à $q + \dots + q + 1 + \dots + 1$ où q et 1 apparaissent p fois. Mais $1 + \dots + 1 = p$, et $q + \dots + q = qp$ et donc, $(q + 1)p = qp + p = p(q + 1)$.

La propriété est donc démontrée.

3. Elle se démontre de manière similaire. Laissée au lecteur.

4. Récurrence immédiate sur r .

5. Le sens réciproque est évident. Démontrons le sens direct. En fait, pour démontrer cette propriété, il suffit de démontrer que si $p \neq 0$, alors $q = 0$. Supposons donc que $q \neq 0$. Si $p \neq 0$, il existe un nombre entier naturel n tel que $p = n + 1$, et dans ce cas, on a $(p + 1)q = pq + q$. Comme q est non nul, le nombre précédent ne saurait être nul, ce qui est contradictoire.

Le théorème est donc démontré.

CQFD

Soustractions et nombres négatifs Notons d'abord qu'il y a une notion d'ordre dans \mathbb{N} . En effet, pour deux entiers naturels p et q , on dit que $p \leq q$ s'il existe un entier naturel r tel que $q = p + r$, et on dit que $p < q$ si r est non nul.

À présent posons-nous la question suivante : étant donné deux nombres entiers naturels p et q , peut-on toujours trouver un nombre entier naturel x tel que $p + x = q$? Si $p \leq q$, oui, mais que faire si $q < p$? Eh bien on introduit l'ensemble des nombres entiers relatifs, \mathbb{Z} , comme l'ensemble des solutions de ce problème. Il s'agit d'intégrer les nombres négatifs, et de se donner la possibilité d'additionner des nombres en effectuant l'opération réciproque de la succession. Au lieu de faire $+1$ un certain nombre de fois, on fait -1 . Ou plus précisément, on ajoute le nombre -1 , à savoir, on fait $+(-1)$.

Ainsi, la notion de soustraction peut se réduire à l'addition de nombres négatifs. De là, on peut étendre les propriétés des multiplications et additions aux nombres relatifs, et tout se passe bien².

De manière abusive, on peut donc écrire que $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$ et que $\mathbb{Z} = \{0; -1; 1; -2; 2; \dots\}$. Tout ce qui vient d'être fait est caché dans les points de suspension !

3 Fraction et quotients

Définition 1. Soient a et b deux nombres entiers avec $b \neq 0$. La fraction $\frac{a}{b}$ est la classe d'équivalence $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid ay = bx\}$.

Le quotient $\frac{a}{b}$ est le résultat de la division de a par b , c'est le nombre x tel que $bx = a$.

Remarque. L'ensemble des quotients d'entiers (positifs ou négatifs) constitue l'ensemble des nombres rationnels (qui s'expriment sous forme de ratio). Cet ensemble est noté \mathbb{Q} .

Théorème 4. Soient a, b, c, d des nombres entiers avec b, c, d non nuls. On a les égalités suivantes :

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}; \quad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}; \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Démonstration. Toutes les preuves s'effectuent en utilisant le point 6 du théorème 3 et la définition des quotients. CQFD

2. Les démonstrations sont laissées aux lecteurs les plus maniaques !

4 Puissances

Définition 2. Soit x un nombre réel non nul, soit n un entier relatif. On définit x^n par récurrence :

$$x^0 = 1; \quad x^{n+1} = x^n \cdot x$$

Remarque. De là on peut démontrer que $x^n = x \times x \times \dots \times x$ où x apparaît n fois à droite.

Théorème 5. Soient x et y deux réels non nuls, soient p et q deux nombres entiers relatifs. On a les égalités suivantes :

$$x^p x^q = x^{p+q}; \quad x^{-p} = \frac{1}{x^p}; \quad (x^p)^q = x^{pq}; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x^p}{y^p}$$

Définition 3. Soit n un entier naturel, soit x un réel positif. Le nombre $y = x^{1/n}$ est l'unique nombre positif qui vérifie $y^n = x$.

Remarque. On appelle $x^{1/n}$ la racine $n^{\text{ème}}$ de x . Pour $n = 2$, on obtient que $x^{1/2} = \sqrt{x}$, et on obtient immédiatement toutes les propriétés algébriques de la racine carrée.

Définition 4. Soient p et q deux nombres entiers naturels avec $q \neq 0$. On définit $x^{p/q} = (x^{1/q})^p$.

Remarque. Ainsi, on peut élever un nombre positif à n'importe quelle puissance rationnelle.

Exercice. Démontrer que les règles usuelles des puissances s'appliquent pour les nombres rationnels.