Chapitre 7 : Algèbre extérieure

Léo Bernus

19 mars 2020

Table des matières

1 En guise de prélude : les 2-formes **2**
1.1 Propriétés des 2-formes . . . 2
1.2 Le champ électromagnétique comme 2-forme . . . 3

2 Formes multilinéaires alternées, ou p-formes **6**

3 Le tenseur de Levi-Civita **8**
3.1 $\mathcal{A}_n T_x \mathcal{M}$ comme espace vectoriel de dimension 1 . . . 8
3.2 Exercices - exemples . . . 10
3.2.1 Produit vectoriel de $n-1$ vecteurs . . . 10
3.2.2 Gymnastique avec le tenseur de Levi-Civita . . . 11
3.3 Dualité de Hodge . . . 12
3.4 Quelques applications dans l'espace-temps relativiste . . . 13

4 Le champ électromagnétique **15**
4.1 Prolégomène : particule dans un champ de force pure . . . 15
4.2 Construction du champ électromagnétique . . . 16
4.3 Exercices . . . 16

Ce chapitre sera l'occasion d'approfondir un type particulier de tenseurs : les formes différentielles, autrement appelées les k-formes extérieures. Ce sont tout simplement les formes k-linéaires antisymétriques. Elles présentent un grand intérêt en physique car elles permettent de généraliser la notion de déterminant dans des variétés et permettent d'établir une théorie de l'intégration (et donc de la dérivation) dans les variétés et les sous-variétés. Cela sera infiniment utile pour faire des sommes continues en relativité générale. L'objet de ce chapitre est de présenter ces objets en tant que tel et de déjà en apercevoir quelques illustrations en sciences physiques. Le chapitre suivant traîtera spécifiquement de la dérivation et l'intégration sur les variétés.

Dans tout ce chapitre, on considère une variété de dimension n munie d'un tenseur métrique $(\mathcal{M}, \boldsymbol{g})$. Nous préciserons chaque fois que nécessaire si la métrique est définie positive ou si nous sommes en relativité, auquel cas $\dim\mathcal{M} = 4$ et $\boldsymbol{g}$ est de signature $(-,+,+,+)$.

1 En guise de prélude : les 2-formes

1.1 Propriétés des 2-formes

Définition 1.1. *Une 2-forme extérieure, ou tout simplement une 2-forme, est une forme bilinéaire (ou un tenseur de type $(0,2)$) alternée : si $\boldsymbol{b}$ est une 2-forme, alors*

$$\forall \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in T_x\mathcal{M}, \boldsymbol{b}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = 0 \tag{1}$$

Proposition 1.1. *Toute forme bilinéaire alternée est antisymétrique. Autrement dit, si $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ est une 2-forme, on a*

$$\forall \overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in T_x\mathcal{M}, \boldsymbol{b}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = -\boldsymbol{b}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \tag{2}$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{b}$ une 2-forme. Soient $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in T_x\mathcal{M}$.

$$\boldsymbol{b}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = 0 = \boldsymbol{b}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) - \boldsymbol{b}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) - \boldsymbol{b}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{b}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = -\boldsymbol{b}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) - \boldsymbol{b}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \tag{3}$$

□

Définition 1.2. *Par convention, les formes linéaires (ou tenseurs de type $(0,1)$) sont des 1-formes, et les champs scalaires sont des 0-formes. On note $\mathcal{A}_0\mathcal{M}$ les champs scalaires, $\mathcal{A}_1\mathcal{M}$ les champs de formes linéaires, et $\mathcal{A}_2\mathcal{M}$ les champs de 2-formes sur $\mathcal{M}$.*

Définition 1.3. *Soient $\underline{\boldsymbol{\omega}}, \underline{\boldsymbol{\nu}} \in \mathcal{A}_1\mathcal{M}$. On définit le produit extérieur de $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ et $\underline{\boldsymbol{\nu}}$ l'élément de $\mathcal{A}_2\mathcal{M}$ défini ainsi*

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} \wedge \underline{\boldsymbol{\nu}} = \underline{\boldsymbol{\omega}} \otimes \underline{\boldsymbol{\nu}} - \underline{\boldsymbol{\nu}} \otimes \underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{4}$$

Remarque : on a

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} \wedge \underline{\boldsymbol{\nu}} \left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) = \det \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{\omega}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right) & \underline{\boldsymbol{\nu}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right) \\ \underline{\boldsymbol{\omega}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) & \underline{\boldsymbol{\nu}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{\boldsymbol{\omega}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right) & \underline{\boldsymbol{\nu}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right) \\ \underline{\boldsymbol{\omega}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) & \underline{\boldsymbol{\nu}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) \end{vmatrix} \tag{5}$$

Théorème 1.1. *Soit une variété $\mathcal{M}$ de dimension n. Soit x^k une carte générique sur un ouvert de $\mathcal{M}$. $\left(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^j\right)_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $\mathcal{A}_2\mathcal{M}$.*

Démonstration. Montrons que la famille est génératrice. Soit $\boldsymbol{b} \in \mathcal{A}_2\mathcal{M}$. Soient $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = u^i\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = v^i\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i$ deux éléments de $T\mathcal{M}$. On a

$$\boldsymbol{b}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = u^k v^\ell \boldsymbol{b}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k, \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_\ell\right) \tag{6}$$

mais comme $\boldsymbol{b}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k, \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_\ell\right) = -\boldsymbol{b}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_\ell, \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k\right)$ et $\boldsymbol{b}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k, \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k\right) = 0$, on a

$$\boldsymbol{b}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \sum_{1\leq k<\ell\leq n} (u^k v^\ell - u^\ell v^k)\boldsymbol{b}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k, \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_\ell\right) = \sum_{1\leq k<\ell\leq n} \boldsymbol{b}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_k, \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_\ell\right) \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^\ell(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \tag{7}$$

ce qui montre bien que la famille annoncée engendre $A_2\mathcal{M}$.

Montrons que la famille est libre. Soient $\alpha_{k\ell} \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ tel que $\sum_{1\leq k<\ell\leq n} \alpha_{k\ell}\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^k \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^\ell = \mathbf{0}$. En appliquant cette forme à $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i, \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_j\right)$ avec $1 \leq i < j \leq n$, on trouve $\alpha_{ij} = 0$. □

Corollaire 1.1. *$A_2\mathcal{M}$ est un espace vectoriel de dimension $n(n-1)/2$.*

Donnons une interprétation géométrique des 2-formes.

— Si $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$, $\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{y}} = \det(\cdot, \cdot)$. C'est donc le volume du parallélogramme formé par les deux vecteurs en argument.

— Pour une variété quelconque, dans l'espace tangent en un point M, $\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^j(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ est l'aire algébrique du parallélogramme formé par la projection des vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ sur le plan affine d'origine M et engendré par Vect $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i, \overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_j\right)$. Nous illustrons cette propriété dans $\mathbb{R}^3$ sur la figure 1.

1.2 Le champ électromagnétique comme 2-forme

Nous allons donner un exemple de champ de 2-formes particulièrement utile en physique : la forme de Faraday, ou autrement dit, le tenseur électromagnétique.

Commençons par observer que ce qu'on appelle vulgairement le "vecteur champ électrique" et le "vecteur champ magnétique" ne sont pas des vecteurs au sens des champs tensoriels dans les variétés. C'est facile à voir pour le champ électrique. En effet, considérons une particule chargée au repos subissant un champ magnétique non nul. Elle subit une force de Lorentz nulle :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = q\overrightarrow{\mathbf{0}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \tag{8}$$

À présent plaçons nous dans un référentiel en translation rectiligne uniforme de vitesse $\overrightarrow{\boldsymbol{U}}$ par rapport au mobile au repos. Alors du point de vue de cet observateur, étant donné l'invariance des lois de la physique dans tous les référentiels inertiels, il faut que la force soit également nulle malgré la vitesse, c'est-à-dire que du point de vue de cet observateur, on a

$$\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} = q(\overrightarrow{\boldsymbol{E}}' - \overrightarrow{\boldsymbol{U}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{B}}') \tag{9}$$

Il apparaît ici nécessaire d'avoir $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}' \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ pour que le mobile continue d'être au repos. Pourtant, la transformation de Lorentz comme de Galilée sont des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$. Si $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ était un vecteur au sens défini dans le chapitre sur les tenseurs, alors ses composantes devraient se transformer selon la loi linéaire des transformations contravariantes des coordonnées d'un vecteur. Aucune transformation linéaire ne peut transformer le vecteur nul en un vecteur non nul. $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ n'est

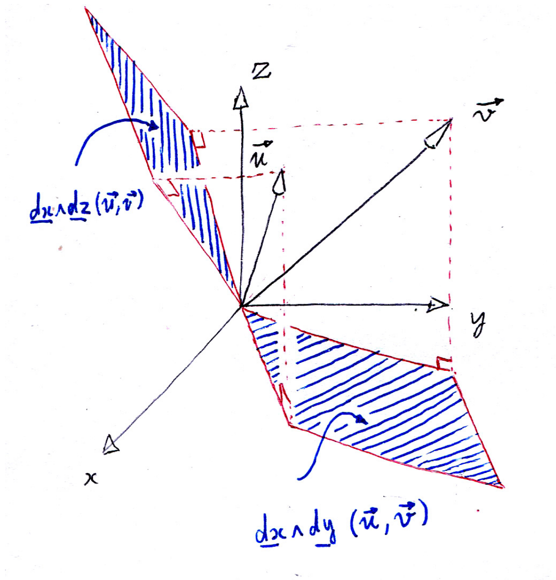

FIGURE 1 – Illustration de l'action de $\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^j$ sur deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Les projections des vecteurs sur les plans sont en rouge, et les aires (algébriques) représentant $\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^j(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ sont en bleu. Nous n'avons pas représenté la projection sur le plan (yOz) pour éviter d'alourdir le schéma.

donc pas un vecteur. De la même manière, considérons une spire circulaire traversée par un courant électrique dans le plan $x0y$, centrée en $(0,0)$. Le champ magnétique en $(0,0,0)$ sera dirigé vers $+\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_z$. À présent effectuons une symétrie centrale du système dans le plan $x0y$. Bien que l'axe z soit invariant, le sens du courant a été inversé, par conséquent, le champ magnétique pointe dorénavant vers $-\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_z$. Si le champ magnétique était un vecteur, sa composante z aurait été invariante par une telle transformation. Le champ magnétique n'est donc pas un vecteur au sens des champs tensoriels.

Les "vecteurs" champ électrique et champ magnétique ne sont donc pas les meilleurs objets. Nous voudrions pouvoir travailler avec des tenseurs. Il existe un objet plus intrinsèque qui englobe tout le champ électromagnétique et c'est avec cet objet que nous allons travailler.

À ce stade du cours nous n'avons pas les moyens de montrer qu'il s'agit de la seule forme possible du champ électromagnétique, nous nous contentons de le donner "dogmatiquement". Nous montreront tout à la fin de ce chapitre pourquoi le champ électromagnétique a cette forme [1]. Le but de cette anticipation est pédagogique : il vous permettra de manipuler une 2-forme et de vous habituer à ce formalisme avant de passer aux k-formes.

Munissons l'espace de Minkowski $\mathcal{E}$ d'une carte cartésienne $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$. Ici, les lettres grecques noteront les indices allant de 0 à 3 et les indices latins indiqueront les lettres allant de 1 à 3. La 1-forme travail du champ électromagnétique s'écrit

$$\underline{\boldsymbol{E}} = E_i \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i \tag{10}$$

1. Nous avons en effet besoin du dual de Hodge, qui intervient assez tard dans cette leçon.

Et la 2-forme flux magnétique s'écrit

$$\boldsymbol{\phi} = B_x \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{y}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{z}} + B_y \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{z}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}} + B_z \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{y}} = B_i \mathbf{d}\boldsymbol{S}^i \tag{11}$$

où $\mathbf{d}\boldsymbol{S}^x = \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{y}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{z}}$, $\mathbf{d}\boldsymbol{S}^y = \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{z}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}$, et $\mathbf{d}\boldsymbol{S}^z = \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{y}}$ sont les formes d'aire. La forme de Faraday s'écrit

$$\boldsymbol{F} = \underline{\boldsymbol{E}} \wedge c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{\phi} = E_i \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^0 + B_i \mathbf{d}\boldsymbol{S}^i \tag{12}$$

On peut vérifier que dans ces conditions, un observateur de quadrivitesse $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ subit la force de Lorentz dont les composantes sont les suivantes : $f^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu$ où u_ν sont les coordonnées covariantes de $\underline{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}^\flat$. On aimerait établir les lois de transformation du champ électromagnétique lorsque nous changeons d'observateur intertiel. À ce titre considérons le changement de carte associé à une transformation de Lorentz le long de l'axe x : posons $x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu$ où l'on a posé

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & \mathrm{sh}\varphi & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\varphi & \mathrm{sh}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

la matrice de Lorentz[2]. Voyons comment se transforment les formes élémentaires. Nous avons

$$c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} = \mathrm{ch}\varphi \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}^0 + \mathrm{sh}\varphi \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}, \quad \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}} = \mathrm{sh}\varphi c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} + \mathrm{ch}\varphi \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}, \quad \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{y}} = \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Y}}, \quad \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{z}} = \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Z}} \tag{14}$$

De quoi nous déduisons

$$E_x \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}} \wedge c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} = E_x(\mathrm{sh}\varphi c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} + \mathrm{ch}\varphi \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}) \wedge (\mathrm{ch}\varphi \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}^0 + \mathrm{sh}\varphi \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}) = E_x \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}} \wedge c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} \tag{15}$$

où nous avons utilisé le fait que $\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}^i \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}^i = \mathbf{0}$ pour tout i, que $\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} = -\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}}$, et que $\mathrm{ch}^2\varphi - \mathrm{sh}^2\varphi = 1$. Par le même type de calcul on trouve

$$E_y \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{y}} \wedge c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} = \mathrm{ch}\varphi E_y \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Y}} \wedge c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} - \mathrm{sh}\varphi E_y \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Y}} \tag{16}$$

$$E_z \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{z}} \wedge c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} = \mathrm{ch}\varphi E_z \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Z}} \wedge c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} + \mathrm{sh}\varphi E_z \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Z}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}} \tag{17}$$

$$B_x \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{y}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{z}} = B_x \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Y}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Z}} \tag{18}$$

$$B_y \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{z}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}} = \mathrm{sh}\varphi B_y \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Z}} \wedge c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} + \mathrm{ch}\varphi B_y \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Z}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}} \tag{19}$$

$$B_z \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{y}} = -\mathrm{sh}\varphi B_z \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Y}} \wedge c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} + \mathrm{ch}\varphi B_z \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Y}} \tag{20}$$

En rassemblant les termes sur les composantes des vecteurs de base de $\mathcal{A}_2\mathcal{E}$, on trouve que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} = {} & E_x \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Y}} + (\mathrm{ch}\varphi E_y - \mathrm{sh}\varphi B_z)\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Y}} \wedge c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} + (\mathrm{ch}\varphi E_z + \mathrm{sh}\varphi B_y)\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Z}} \wedge c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} \\ & + B_x \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Y}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Z}} + (\mathrm{ch}\varphi B_y + \mathrm{sh}\varphi E_z)\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Z}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}} + (\mathrm{ch}\varphi B_z - \mathrm{sh}\varphi E_y)\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Y}} \end{aligned} \tag{21}$$

2. Pour exprimer cette matrice en fonction de V la vitesse relative des référentiels et c la vitesse de la lumière, il suffit de se rappeler que dans le référentiel mobile, l'origine se déplace à $x(t) = Vt$, d'où $\frac{x}{ct} = \frac{\mathrm{sh}\varphi}{\mathrm{ch}\varphi} = \mathrm{th}\varphi$. De là on tire $\frac{\mathrm{ch}^2\varphi - \mathrm{sh}^2\varphi}{\mathrm{ch}^2\varphi} = 1 - \mathrm{th}\varphi = 1 - \frac{V^2}{c^2}$ et donc $\mathrm{ch}\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$, et $\mathrm{sh}\varphi = \mathrm{th}\varphi\mathrm{ch}\varphi = \frac{V/c}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$.

On sait que dans la carte (X^μ), l'observateur va ressentir le champ électrique de composantes E_X, E_Y, E_Z et le champ magnétique B_X, B_Y, B_Z tels que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} = E_X \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}} \wedge c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} + E_Y \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Y}} \wedge c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} + E_Z \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Z}} \wedge c\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} \\ + B_X \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Y}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Z}} + B_Y \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Z}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}} + B_Z \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{X}} \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{Y}}\end{aligned} \tag{22}$$

(à travers la force de Lorentz exprimée à partir de cette 2-forme). par unicité de la décomposition sur les éléments de base, on en déduit la loi de transformation du champ électromagnétique

$$E_X = E_x, \quad E_Y = \mathrm{ch}\varphi E_y - \mathrm{sh}\varphi B_z, \quad E_Z = \mathrm{ch}\varphi E_z + \mathrm{sh}\varphi B_y \tag{23}$$

$$B_X = B_x, \quad B_Y = \mathrm{ch}\varphi B_y + \mathrm{sh}\varphi E_z, \quad B_Z = \mathrm{ch}\varphi B_z - \mathrm{sh}\varphi E_y \tag{24}$$

On voit ici que le champ électrique et le champ magnétique n'ont pas des composantes qui se transforment comme celles d'un vecteur. Les champs électriques et magnétiques sont liés : lors d'un changement d'observateur, une partie du champ magnétique se retrouve dans le champ électrique et réciproquement. On ne peut donc plus les dissocier, c'est pourquoi dans la physique moderne [3] on parle d'électromagnétisme. Par ailleurs, le tenseur $\boldsymbol{F}$ a des composantes qui se transforment comme un "vrai" tenseur. On aurait trouvé le même résultat en appliquant les formules du chapitre 6. Ici, comme la transformation est linéaire, la matrice jacobienne est la matrice de Lorentz elle-même. Le tenseur électromagnétisme est donc le seul objet intrinsèque au sens des variétés, c'est en étudiant cet objet qu'on a pu déduire les lois de transformation des composantes des champs électrique et magnétique.

2 Formes multilinéaires alternées, ou p-formes

Définition 2.1. *Une forme p-linéaire antisymétrique, ou une p-forme différentielle – plus simplement une p-forme –, est un tenseur de type $(0,p)$, alterné si $\boldsymbol{\omega}$ est une p-forme, alors on a :*

$$\forall \vec{\boldsymbol{u}} \in T\mathcal{M}, \boldsymbol{\omega}(\ldots, \vec{\boldsymbol{u}}, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}, \ldots) = \mathbf{0} \tag{25}$$

ou, ce qui revient au même, $\boldsymbol{\omega}$ est antisymétrique :

$$\forall \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in T\mathcal{M}, \boldsymbol{\omega}(\ldots, \vec{\boldsymbol{u}}, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}, \ldots) = -\boldsymbol{\omega}(\ldots, \vec{\boldsymbol{v}}, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}, \ldots) \tag{26}$$

On note $\mathcal{A}_pT_x\mathcal{M}$ l'ensemble des p-formes sur $T_x\mathcal{M}$, et $\mathcal{A}_p\mathcal{M}$ l'ensemble des champs de p-formes sur $T\mathcal{M}$.

Remarques.

1. Soit $(\vec{\boldsymbol{e}}_i)$ une base de $T_x\mathcal{M}$ (cela peut être la base naturelle dans une carte donnée, mais pas nécessairement) et soit $\boldsymbol{\omega}$ une forme p-linéaire sur l'espace tangent en x ($\boldsymbol{\omega} \in T_x\binom{0}{p}\mathcal{M}$). Soient $\omega_{i_1\ldots i_p}$ les coordonnées de $\boldsymbol{\omega}$ dans la base $\underline{\boldsymbol{e}}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{i_p}$ où $\underline{\boldsymbol{e}}^i = \boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{e}}_i, \cdot)$. On a $\boldsymbol{\omega} = \omega_{i_1\ldots i_p} \underline{\boldsymbol{e}}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{i_p}$. Autrement dit, $\omega_{i_1\ldots i_p} = \boldsymbol{\omega}(\vec{\boldsymbol{e}}_{i_1}, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_{i_p})$. Alors on a la propriété suivante : $\boldsymbol{\omega}$ est un élément de $\mathcal{A}_pT_x\mathcal{M}$ si et seulement si ses coordonnées sont antisymétriques par rapport à leurs indices, c'est-à-dire si et seulement si $\omega_{\ldots i \ldots j \ldots} = -\omega_{\ldots j \ldots i \ldots}$. Les anciens ouvrages se contentent de définir les p-formes comme des tableaux de chiffres qui se transforment comme les tenseurs par changement de carte et qui sont antisymétriques par rapport à leurs indices. Ils parlent tout simplement de "tenseurs antisymétriques".

3. Plus précisément, depuis le XIX^e siècle. Auparavant, les notions d'électricité et de magnétisme étaient séparées.

2. Si $\mathcal{M}$ est de dimension n, alors pour tout $p > n$, $\mathcal{A}_p\mathcal{M}$ ne contient que des formes nulles. En effet, si les n premiers arguments sont une famille libre, alors le $n+1$-ème argument est nécessairement une combinaison linéaire des n premiers, de telle sorte que la famille est liée. Comme les p-formes sont linéaires et alternées, elles donneront nécessairement un résultat nul. Ainsi, on se limitera à l'étude des p-formes pour $p \leq n$.

Théorème 2.1. $\dim \mathcal{A}_p\mathcal{M} = \mathrm{C}_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démonstration. Pour déterminer la dimension de $\mathcal{A}_p\mathcal{M}$, il suffit de savoir combien de nombres indépendant figurent dans les $\omega_{i_1 \dots i_p}$, composantes de $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}_p\mathcal{M}$, à partir de la contrainte d'antisymétrie. Nous savons que $\omega_{i_1 \dots i_p}$ est nul si deux indices sont égaux. Le nombre de composantes non nulles est donc $n(n-1)\dots(n-p+1)$ si $p \leq n$, 0 si $p > n$. De plus, comme comme $\boldsymbol{\omega}$ est antisymétrique, le nombre de composantes égales à $\omega_{i_1 \dots i_p}$ au signe près se déduit par le nombre de permutations de $(i_1, \dots, i_p)$, égal à $p!$. Le nombre de composantes indépendantes est donc égal à $\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$. □

Ce théorème appelle quelques remarques.

1. Par convention, $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$ et $\binom{n}{0} = 1$, le théorème se suffit donc à lui-même pour tout $p \in \mathbb{N}$.
2. On note que $\dim \mathcal{A}_0\mathcal{M} = \dim \mathcal{A}_n\mathcal{M} = 1$. Cela montre que l'ensemble des formes n-linéaires antisymétriques dans un espace de dimension n est un espace vectoriel de dimension 1. ce résultat très important permet de restreindre l'étude des formes n-linéaires dans les espaces vectoriels de dimension n à l'étude du déterminant et permet d'établir toutes les propriétés intéressantes de celui-ci. Par exemple, que le déterminant d'une application linéaire n'est qu'un multiplicateur de volume : $\det(f(\vec{\boldsymbol{u}}_1), \dots, f(\vec{\boldsymbol{u}}_n)) = \det f \det(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{u}}_n)$.
3. On remarque aussi que $\dim \mathcal{A}_p\mathcal{M} = \dim \mathcal{A}_{n-p}\mathcal{M}$. Il doit donc exister une dualité qui permet de passer de façon bijective de $\mathcal{A}_p\mathcal{M}$ à $\mathcal{A}_{n-p}\mathcal{M}$. Nous verrons cela plus loin dans le cours : il s'agit de la dualité de Hodge.

À présent voyons comment construire des p-formes différentielles à partir de q-formes où $q < p$. Pour cela nous avons besoin de poser du vocabulaire sur les permutations.

Définition 2.2. *On note $\mathscr{G}_n$ le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$ (c'es-à-dire l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$). Soit $\sigma \in \mathscr{G}_n$. Toute permutation peut s'écrire comme succession d'échange de deux éléments en laissant les autres invariants (ce qu'on appelle des transpositions).*

— *Si le nombre de transposition est pair, on dit que σ est une permutation paire. Sinon on dit que σ est une permutation impaire.*
— *On note $k(\sigma)$ la signature de σ. Si σ est une permutation paire, $k(\sigma) = 1$, sinon $k(\sigma) = -1$.*

En fait, on peut également définir les p-formes différentielles à partir des permutations :

Proposition 2.1.

$$\omega \in \mathcal{A}_p\mathcal{M} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\omega} \in T_p^0\mathcal{M} \\ \forall(\vec{\boldsymbol{v}}_i) \in (T_{\mathcal{M}})^p, \forall \sigma \in \mathscr{G}_p, \boldsymbol{\omega}(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{v}}_p) = k(\sigma)\boldsymbol{\omega}(\vec{\boldsymbol{v}}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{\boldsymbol{v}}_{\sigma(n)}) \end{cases} \tag{27}$$

Armé de cet outillage, nous pouvons généraliser le produit extérieur aux p-formes.

Définition 2.3. *Le produit d'une p-forme et d'une q-forme, noté $\wedge$ est une $p+q$-forme :*

$$\begin{aligned} \wedge : \mathcal{A}_p\mathcal{M} \times \mathcal{A}_q\mathcal{M} &\to \mathcal{A}_{p+q}\mathcal{M} \\ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\mu}) &\mapsto \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\mu} \end{aligned} \tag{28}$$

qui se définit par son action sur $p+q$ vecteurs. Soient $(\vec{\boldsymbol{v}}_i) \in (T\mathcal{M})^{p+q}$, on a

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\mu}(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathscr{G}_{p+q}} k(\sigma) \boldsymbol{\omega}(\vec{\boldsymbol{v}}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{\sigma(p)}) \boldsymbol{\mu}(\vec{\boldsymbol{v}}_{\sigma(p+1)}, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{\sigma(p+q)}) \tag{29}$$

Proposition 2.2.
— $\forall(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_p\mathcal{M} \times \mathcal{A}_q\mathcal{M}, \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\mu} = (-1)^{pq} \boldsymbol{\mu} \wedge \boldsymbol{\omega}$ *(anticommutativité).*
— $\forall(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathcal{A}_p\mathcal{M} \times \mathcal{A}_q\mathcal{M} \times \mathcal{A}_r\mathcal{M}, \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\mu} \wedge \boldsymbol{\nu}) = (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\mu}) \wedge \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\mu} \wedge \boldsymbol{\nu}$ *(associativité).*

Voyons quelques exemples. Pour les 1-formes, on a

$$\forall \underline{\boldsymbol{\omega}}, \underline{\boldsymbol{\mu}} \in \mathcal{A}_1\mathcal{M}, \underline{\boldsymbol{\omega}} \wedge \underline{\boldsymbol{\mu}} = \underline{\boldsymbol{\omega}} \otimes \underline{\boldsymbol{\mu}} - \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes \underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{30}$$

soit

$$\forall \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in T\mathcal{M}, \underline{\boldsymbol{\omega}} \wedge \underline{\boldsymbol{\mu}}(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) = \underline{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\boldsymbol{u}})\underline{\boldsymbol{\mu}}(\vec{\boldsymbol{v}}) - \underline{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\boldsymbol{v}})\underline{\boldsymbol{\mu}}(\vec{\boldsymbol{u}}) \tag{31}$$

Plus généralement, si $(\underline{\boldsymbol{\omega}}_i) \in (\mathcal{A}_1\mathcal{M})^p$, on a

$$\forall(\vec{\boldsymbol{v}}_i) \in (T\mathcal{M})^p, \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}_n(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_p) = \begin{vmatrix} \underline{\boldsymbol{\omega}}_1(\vec{\boldsymbol{v}}_1) & \ldots & \underline{\boldsymbol{\omega}}_p(\vec{\boldsymbol{v}}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\boldsymbol{\omega}}_1(\vec{\boldsymbol{v}}_p) & \ldots & \underline{\boldsymbol{\omega}}_p(\vec{\boldsymbol{v}}_p) \end{vmatrix} \tag{32}$$

Cette propriété illustre bien le fait que les p-formes différentielles sont des multiplicateurs de volumes dans les sous-espaces vectoriels de dimension p.

Théorème 2.2. $(\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_p})$ *avec $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$, est une base de $\mathcal{A}_p\mathcal{M}$.*

Démonstration. Comme on a $\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_p}(\vec{\boldsymbol{\partial}}_{i_1}, \ldots, \vec{\boldsymbol{\partial}}_{i_p}) = 1$, la famille proposée est libre. Par ailleurs, cette famille contient autant d'éléments qu'il y a de choix pour sélectionner p éléments parmi n, c'est-à-dire $\binom{n}{p}$, la dimension de $\mathcal{A}_p\mathcal{M}$. C'est donc une base. □

Quelques remarques.

1. Le produit tensoriel de deux formes différentielles alternées n'est pas une forme alternée !
2. En dimension 3, les permutations circulaires sont paires. Attention ! elles sont impaires en dimension 4, donc en relativité.

3 Le tenseur de Levi-Civita

3.1 $\mathcal{A}_nT_x\mathcal{M}$ comme espace vectoriel de dimension 1

Nous allons nous attarder sur $\mathcal{A}_n\mathcal{M}$ où $n = \dim\mathcal{M}$. On sait que $\dim\mathcal{A}_n\mathcal{M} = 1$, donc tous les éléments de $\mathcal{A}_n\mathcal{M}$ sont proportionnels. Si $\mathcal{M}$ est munie d'une métrique $\boldsymbol{g}$, on peut définir une base orthonormale de $T_x\mathcal{M}$, que l'on notera $(\vec{\boldsymbol{e}}_i) \in (T_x\mathcal{M})^n$ avec

$$\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{e}}_i, \vec{\boldsymbol{e}}_j) = \delta_{ij} \text{ si } \boldsymbol{g} \text{ est définie positive} \tag{33}$$

$$\boldsymbol{g}(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_0) = -1, \quad \forall (i,j) \in [\![0,3]\!] \times [\![1,3]\!], \boldsymbol{g}(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_j) = \delta_{ij} \text{ en relativité.} \tag{34}$$

Pour tout élément non nul de $\mathcal{A}_n T_x \mathcal{M}$, on a nécessairement $\boldsymbol{\omega}(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_n) \neq 0$. Comme $\dim \mathcal{A}_n T_x \mathcal{M} = 1$, il n'existe que deux n-formes distinctes qui vérifient respectivement $\boldsymbol{\lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_n) = 1$ et $\boldsymbol{\nu}(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_n) = -1$. Définir une orientation de l'espace $T_x\mathcal{M}$ revient à choisir l'une de ces deux formes comme référence. On dit que $\mathcal{M}$ est orientable si on peut la munir d'un atlas et y choisir une orientation qui reste la même sur chaque carte et qui ne change pas sur les zones de recollement. Nous avons déjà vu des exemples avec les surfaces régulières. Désormais nous ne travaillerons qu'avec des variétés orientables.

Définition 3.1. *Choisissons une base orthonormée $\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_n$ en $T_x\mathcal{M}$. On appelle tenseur (ou forme) de Levi-Civita, associé à la métrique $\boldsymbol{g}$, et on note $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur de $\mathcal{A}_n T_x \mathcal{M}$ qui vérifie $\boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1, \ldots \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_n) = 1$.*

Pour l'instant cette définition est complètement arbitraire et dépend de la base orthonormée choisie. Nous allons voir qu'il n'en est rien grâce à la propriété suivante.

Proposition 3.1. *Pour toute base orthonormée $(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n)$ de $T_x\mathcal{M}$, $|\boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n)| = 1$.*

Démonstration. Puisque $\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^1 \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^2 \wedge \ldots \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^n$ est une base de $\mathcal{A}_n T_x \mathcal{M}$, on a $\boldsymbol{\varepsilon} = \omega_{12\ldots n} \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^1 \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^2 \wedge \ldots \wedge \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^n$. S on se place dans la base orthonormée de départ $(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_n)$, on aura tout simplement

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underline{\boldsymbol{e}}^1 \wedge \ldots \wedge \underline{\boldsymbol{e}}^n = k(\sigma) \underline{\boldsymbol{e}}^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \underline{\boldsymbol{e}}^{\sigma(n)} \tag{35}$$

où $\sigma \in \mathscr{G}_n$. Posons

$$[i_1, \ldots, i_n] = \begin{cases} k(\sigma) \text{ si } (i_1, \ldots, i_n) = \sigma(1, 2, \ldots, n) \text{ avec } \sigma \in \mathscr{G}_n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{36}$$

On a $\boldsymbol{\varepsilon} = [\sigma(1), \ldots, \sigma(n)] \underline{\boldsymbol{e}}^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \underline{\boldsymbol{e}}^{\sigma(n)}$. Ainsi, dans une base orthonormée, on a

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i_1, \ldots, i_n} [i_1, \ldots, i_n] \underline{\boldsymbol{e}}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{i_n} \tag{37}$$

Voyons ce qui se passe quand on passe dans une base orthonormée quelconque. Soit $P^\mu_{\ \nu}$ la matrice de passage de $(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i)$, la base orthonormée de départ, à $(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i)$, autre base orthonormée on a $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i = P^j_{\ i} \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_j$. On a

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n) = \underline{\boldsymbol{e}}^1 \wedge \ldots \wedge \underline{\boldsymbol{e}}^n (\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{G}_n} k(\sigma) \prod_{j=1}^{n} P^{\sigma(j)}_{\ j} = \det P \tag{38}$$

Or on sait que le déterminant de la matrice de passage entre deux base orthonormées est égal à ± 1, d'où le résultat. □

Cela nous permet de poser la définition suivante :

Définition 3.2. *On dit qu'une base $(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n)$ de $T_x\mathcal{M}$ est directe si $\boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n) > 0$, indirecte si $\boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n) < 0$. De même, on dit qu'une base orthonormée est directe si $\boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n) = 1$, indirecte si $\boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n) = -1$.*

Ainsi, la définition du tenseur de Levi-Civita ne dépend plus de la base choisie de départ mais uniquement du choix de l'orientation.

Théorème 3.1. *Dans une base quelconque, on a* $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{i_1\dots i_n}\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{i_n}$ *avec*

$$\boxed{\varepsilon_{i_1\dots i_n} = \pm\sqrt{|g|}[i_1,\dots,i_n]} \tag{39}$$

où $g = \det\boldsymbol{g}$ *est le déterminant de la matrice formé par les coordonnées du tenseur métrique dans la base considérée. On prendra le signe + si la base est directe, − si la base est indirecte.*

Démonstration. Soit $(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i)$ une base orthonormée directe et $(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_i)$ une base quelconque de $T_x\mathcal{M}$, et P la matrice de passage entre les deux bases. On sait que dans la base orthonormée, $g_{ij} = \delta_{ij}$ et dans la base quelconque, les composantes du tenseur métrique peuvent s'écrire sous forme matricielle [4] $g_{ij} = {}^tPP$ où ${}^tP$ est la matrice transposée de P. De telle sorte qu'on a $g = \det g = \det P^2$. D'abord constatons que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{12\dots n}\underline{\boldsymbol{u}}^1 \wedge \dots \wedge \underline{\boldsymbol{u}}^n = \varepsilon_{12\dots n}\sum_{(i_k)}[i_1,\dots,i_n]\underline{\boldsymbol{u}}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\boldsymbol{u}}^{i_n} \tag{40}$$

En particulier, on a

$$\varepsilon_{12\dots n} = \underline{\boldsymbol{e}}^1 \wedge \dots \wedge \underline{\boldsymbol{e}}^n(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_1,\dots,\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_n) = \sum_{\sigma\in\mathscr{G}_n} k(\sigma)P^{\sigma(1)}_1\dots P^{\sigma(n)}_n = \det P = \pm\sqrt{g} \tag{41}$$

d'où $\varepsilon_{12\dots n} = \pm\sqrt{g}$ selon le caractère direct ou indirect de la base, ce qui achève la preuve.

Dans le cas où la signature de $\boldsymbol{g}$ est $(-,+,+,+)$, la preuve est similaire, au détail près qu'il faut ajouter des signes moins où il faut dans la définition de $\boldsymbol{g}$. En effet, il suffit de constater que dans ce cas, on aurait matriciellement $g_{ij} = {}^tP\eta P$ avec η la matrice de Minkowski, et donc $\det g_{ij} = \det {}^tP\det\eta\det P = -\det P^2$. □

3.2 Exercices - exemples

Nous mettons sous forme d'exercice des démonstrations de résultats importants pour la suite du cours. Les résultats importants sont encadrés.

3.2.1 Produit vectoriel de $n-1$ vecteurs

Soit un espace vectoriel de dimension n, orienté, et muni d'une métrique (par exemple $T_x\mathcal{M}$). Soient $n-1$ vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1,\dots,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1}$. On pose

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1,\dots,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1},\cdot) \tag{42}$$

Dans la base naturelle, déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} = \underline{\boldsymbol{\omega}}^\sharp$, dual métrique de $\underline{\boldsymbol{\omega}}$. Considérer le cas particulier de $\mathbb{R}^3$ avec $\boldsymbol{g} = \mathbb{I}$ la matrice identité.

Solution. On a $\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_i\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^i$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} = \omega^i\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_i$ avec $\omega^i = g^{ij}\omega_j$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\omega_j &= \underline{\boldsymbol{\omega}}(\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_j)\\ &= \boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1,\dots,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{n-1},\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_j)\\ &= \pm\sqrt{g}[i_1,\dots,i_{n-1},i_n]v_1^{i_1}\dots v_{n-1}^{i_{n-1}}\delta_j^{i_n}\\ &= \pm\sqrt{g}[i_1,\dots,i_{n-1},j]v_1^{i_1}\dots v_{n-1}^{i_{n-1}}\end{aligned} \tag{43}$$

4. Nous identifions de façon impropre la matrice et les composantes du tenseur métrique dans la base donnée par la notation "g_{ij}" afin d'éviter toute confusion avec la notation $g = \det g_{ij}$.

et donc

$$\omega^i = \pm g^{ij}\sqrt{g}[i_1, \ldots, i_{n-1}, j]v_1^{i_1}\ldots v_{n-1}^{i_{n-1}} \tag{44}$$

En dimension 3, cela donne

$$\omega^j = [i_1, i_2, j]v_1^{i_1}v_2^{i_2} = \begin{pmatrix} v_1^y v_2^z - v_1^z v_2^y \\ v_1^z v_2^y - v_1^y v_2^z \\ v_1^x v_2^y - v_1^y v_2^x \end{pmatrix} \tag{45}$$

C'est le produit vectoriel. Dans les espaces courbes en dimension 3, ou dans un système de coordonnées quelconques dans $\mathbb{R}^3$, on a donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}_1}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \cdot) = \boldsymbol{g}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2, \cdot)} \tag{46}$$

ce qui justifie le cas particulier de la "formule du produit mixte" souvent utilisée en physique.

3.2.2 Gymnastique avec le tenseur de Levi-Civita

Nous nous proposons de démontrer quelques propriétés intéressantes qui seront utiles pour établir des propriétés intéressantes de la dualité de Hodge et surtout pour construire le champ électromagnétique.

1. Montrer que $\varepsilon^{i_1\ldots i_n} = \pm\frac{1}{\sqrt{g}}[i_1, \ldots, i_n]$, où $\varepsilon^{i_1\ldots i_n}$ sont les composantes du dual métrique du tenseur de Levi-Civita.
2. Montrer que $\boxed{\varepsilon^{i_1\ldots i_n}\varepsilon_{j_1\ldots j_n} = \pm\delta^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n}}$ où $\delta^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n}$ est le delta de Kroneker généralisé : il vaut $k(\sigma)$ si $(i_1, \ldots, i_n) = \sigma(j_1, \ldots, j_n)$ où $\sigma \in \mathscr{G}_n$, 0 sinon. Distinguer les cas où l'on doit choisir $+$ ou $-$.
3. Montrer que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $\boxed{\varepsilon^{i_1\ldots i_p a_1\ldots a_{n-p}}\varepsilon_{i_1\ldots i_p b_1\ldots b_{n-p}} = \pm p!\delta^{a_1\ldots a_{n-p}}_{b_1\ldots b_{n-p}}}$. Indication : faire une récurrence finie en initialisant avec le résultat de la question précédente.

Solution.

1. On a

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{12\ldots n} &= \varepsilon_{i_1\ldots i_n}g^{1i_1}\ldots g^{ni_n} && (47)\\
&= \sqrt{g}[i_1, \ldots, i_n]g^{1i_1}\ldots g^{ni_n} && (48)\\
&= \sqrt{g}\sum_{\sigma\in\mathscr{G}_n} k(\sigma)g^{1\sigma(1)}\ldots g^{n\sigma(n)} && (49)\\
&= \sqrt{g}\det(g^{ij}) && (50)\\
&= \begin{cases} 1/\sqrt{g} \text{ si } \boldsymbol{g} \text{ est définie positive,} \\ -1/\sqrt{g} \text{ en relativité générale,} \end{cases} && (51)
\end{aligned}$$

car $\det(g^{ij}) = 1/\det(g_{ij})$. Par ailleurs on sait que $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, le dual métrique de $\boldsymbol{\varepsilon}$, est un élément de $\mathcal{A}_2 T^*\mathcal{M}$, donc a les mêmes propriétés que $\boldsymbol{\varepsilon}$ sauf que ses arguments sont des formes linéaires. On sait donc qu'il vit dans un espace vectoriel de dimension 1 et que ses composantes, $\varepsilon^{i_1\ldots i_n}$ sont nécessairement proportionnelles à $[i_1, \ldots, i_n]$. La constante de proportionnalité est $\varepsilon^{12\ldots n}$, d'où

$$\boxed{\varepsilon^{i_1\ldots i_n} = \pm\frac{1}{\sqrt{g}}[i_1, \ldots, i_n]} \tag{52}$$

où il faudra choisir le signe $+$ si la base est directe et que $\boldsymbol{g}$ est définie positive, ou que la base est indirecte et qu'on est en relativité générale, et le signe $-$ si la base est indirecte et que $\boldsymbol{g}$ est définie positive, ou que la base est directe et qu'on est en relativité générale.

2. On sait que $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ vivent chacun dans des espaces vectoriels de dimension 1. Leur produit tensoriel, qui a pour composantes $\varepsilon^{i_1\dots i_n}\varepsilon_{j_1\dots j_n}$, vit donc également dans un espace de dimension 1 : l'ensemble des tenseurs de type (n,n), antisymétriques sur les n premiers arguments et antisymétriques sur les n derniers. Le tenseur de type (n,n) et de composantes $\delta^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_n}$ satisfait à cette contrainte. Il est donc proportionnel à $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}$. La constante de proportionnalité se calcule comme suit. Si l'on prend une base orthonormée directe $(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1,\dots,\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_n)$ et sa base duale métrique $(\underline{\boldsymbol{e}}^1,\dots,\underline{\boldsymbol{e}}^n)$, on voit immédiatement que

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\boldsymbol{e}}^1,\dots,\underline{\boldsymbol{e}}^n,\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1,\dots,\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_n)=\pm 1 \tag{53}$$

avec $+$ si $\boldsymbol{g}$ est définie positive et $-$ en relativité. En effet, pour une base orthonormée, on a $e_0=\eta_{0i}e^i=-e^0=-1$, donc $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{e}}^1,\dots,\underline{\boldsymbol{e}}^n)=-1$. D'autre part, considérant le tenseur $\boldsymbol{\delta}=\delta^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_n}\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_1}\otimes\dots\otimes\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}_{i_n}\otimes\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_1}\otimes\dots\otimes\underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}^{j_n}$, on a

$$\boldsymbol{\delta}(\underline{\boldsymbol{e}}^1,\dots,\underline{\boldsymbol{e}}^n,\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1,\dots,\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_n)=\delta^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_n}\delta^1_{i_1}\dots\delta^n_{i_n}\delta^{j_1}_1\dots\delta^{j_n}_n=\delta^{12\dots n}_{12\dots n}=1 \tag{54}$$

d'où le résultat.

3. On montre le résultat par récurrence. Au rang $p=0$, la propriété est vraie d'après la question précédente. Supposons que la propriété annoncée soit vraie au rang p avec $p\in[\![1,n-1]\!]$. Montrons qu'elle est vraie au rang $p+1$. Nous avons, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\varepsilon^{i_1\dots i_p k a_1\dots a_{n-p-1}}\varepsilon_{i_1\dots i_p k b_1\dots b_{n-p-1}}=\pm p!\,\delta^{k a_1\dots a_{n-p-1}}_{k b_1\dots b_{n-p-1}} \tag{55}$$

L'indice k va se répéter n fois, mais $\delta^{k a_1\dots a_{n-p-1}}_{k b_1\dots b_{n-p-1}}$ n'est non nul que si $k\notin\{a_1,\dots,a_{n-p-1}\}$ ce qui ne peut arriver que $p+1$ fois. Il faudra compter $(p+1)$ fois si $(a_1,\dots,a_{n-p-1})$ est une permutation de $(b_1,\dots,b_{n-p-1})$, soit $\delta^{k a_1\dots a_{n-p-1}}_{k b_1\dots b_{n-p-1}}=(p+1)\delta^{a_1\dots a_{n-p-1}}_{b_1\dots b_{n-p-1}}$. Notons que l'égalité est aussi vérifiée si $(a_1,\dots,a_{n-p-1})$ n'est pas une permutation de $(b_1,\dots,b_{n-p-1})$, puisque les deux membres de l'égalité valent 0. Comme on a $p!(p+1)=(p+1)!$, cela permet de conclure la récurrence. L'égalité annoncée est donc vraie pour tout p entier compris entre 1 et n. Le choix des signes $+$ ou $-$ est similaire à celui de la question précédente.

3.3 Dualité de Hodge

Nous avons déjà vu que $\dim\mathcal{A}_p\mathcal{M}=\dim\mathcal{A}_{n-p}\mathcal{M}$. Ces deux ensembles sont donc en bijection d'après des théorèmes classiques d'algèbre linéaire. Une utilisation particulière du tenseur de Levi-Civita va nous permettre de passer de l'un à l'autre.

Définition 3.3. *Soit $p\in[\![1,n]\!]$. On appelle étoile de Hodge l'application*

$$\star:\mathcal{A}_p\mathcal{M}\to\mathcal{A}_{n-p}\mathcal{M},\boldsymbol{\omega}\mapsto\star\boldsymbol{\omega} \tag{56}$$

que l'on définit explicitement par les transformation des composantes :

$$\boxed{\star\omega_{i_1\dots i_{n-p}}=\frac{1}{p!}\varepsilon_{a_1\dots a_p i_1\dots i_{n-p}}g^{a_1b_1}\dots g^{a_pb_p}\omega_{b_1\dots b_p}} \tag{57}$$

Explicitement, si $n = 3$:

$$p = 0 : \star\omega_{ijk} = \omega\varepsilon_{ijk} \tag{58}$$
$$p = 1 : \star\omega_{ij} = \varepsilon_{aij} g^{ab}\omega_b \tag{59}$$
$$p = 2 : \star\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{abi} g^{ap} g^{bq}\omega_{pq} \tag{60}$$
$$p = 3 : \star\omega = \frac{1}{6}\varepsilon_{abc} g^{ap} g^{bq} g^{cr}\omega_{pqr} \tag{61}$$

Proposition 3.2. *$\forall \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}_p\mathcal{M}, \star\star\boldsymbol{\omega} = \pm(-1)^p\boldsymbol{\omega}$, + si $\boldsymbol{g}$ est définie positive, − en relativité.*

Démonstration. D'abord, on sait que $\star\star\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}_p\mathcal{M}$. De là, on calcule

$$\star(\star\omega)_{i_1\dots i_p} = \frac{1}{(n-p)!}\varepsilon_{a_1\dots a_{n-p}i_1\dots i_p} g^{a_1b_1}\dots g^{a_{n-p}b_{n-p}}\frac{1}{p!}\varepsilon_{u_1\dots u_p b_1\dots b_{n-p}} g^{u_1v_1}\dots g^{u_pv_p}\omega_{v_1\dots v_p} \tag{62}$$
$$= \frac{1}{p!(n-p)!}\varepsilon_{a_1\dots a_{n-p}i_1\dots i_p}\varepsilon^{v_1\dots v_p a_1\dots a_{n-p}}\omega_{v_1\dots v_p} \tag{63}$$

D'une part on substitue $\varepsilon^{v_1\dots v_p a_1\dots a_{n-p}} = (-1)^p\varepsilon^{a_1\dots a_{n-p}v_1\dots v_p}$, puis d'après l'exercice 3.2.2, on a $\varepsilon_{a_1\dots a_{n-p}i_1\dots i_p}\varepsilon^{a_1\dots a_{n-p}v_1\dots v_p} = \pm(n-p)!\delta^{v_1\dots v_p}_{i_1\dots i_p}$. De telle sorte que

$$\star\star\omega_{i_1\dots i_p} = \pm(-1)^p\frac{1}{p!}\delta^{v_1\dots v_p}_{i_1\dots i_p}\omega_{v_1\dots v_p} \tag{64}$$

Comme $\boldsymbol{\omega}$ est un tenseur antisymétrique, pour toute permutation σ on a $\delta^{\sigma(j_1)\dots\sigma(j_n)}_{j_1\dots j_n}\omega_{\sigma(j_1)\dots\sigma(j_n)} = k(\sigma)^2\omega_{j_1\dots j_n} = \omega_{j_1\dots j_n}$. Dans la sommation des indices répétés de l'équaton (64), les seuls termes non nuls qui nous intéressent sont ceux pour lesquels $(i_1\dots i_n)$ est une permutation de $(j_1\dots j_n)$. Il y en a exactement $p!$. D'où le résultat. □

Remarquons que cette propriété éablit bien que $\star$ est une bijection, puisque l'on a $\star^{-1} = \pm(-1)\star$.

3.4 Quelques applications dans l'espace-temps relativiste

Désormais et jusqu'à la fin du chapitre, nous nous plaçons dans le cadre de la relativité (restreinte ou générale) : $\dim\mathcal{M} = 4$ et $\boldsymbol{g}$ a une signature $-,+,+,+$. Nous aurons besoin de deux propriétés très intéressantes avant d'appliquer tout ce formalisme à l'électromagnétisme.

Proposition 3.3. *$\forall \underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{A}_1\mathcal{M}, \star(\underline{\boldsymbol{a}} \wedge \underline{\boldsymbol{b}}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{a}}, \overrightarrow{\boldsymbol{b}}, \cdot, \cdot)$ où $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{a}}^\sharp$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{b}}^\sharp$ sont les vecteurs duals métriques de $\underline{\boldsymbol{a}}$ et $\underline{\boldsymbol{b}}$.*

Démonstration. Nous allons simplement montrer l'égalité des composantes.

$$(\star(\underline{\boldsymbol{a}} \wedge \underline{\boldsymbol{b}}))_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{rsij} g^{rp} g^{sq}(a_pb_q - a_qb_p) \tag{65}$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{rsij}(a^rb^s - a^sb^r) \tag{66}$$
$$= \varepsilon_{rsij}a^rb^s \tag{67}$$

□

Le théorème suivant va nous permettre de démontrer l'unicité de la décomposition orthogonale du tenseur électromagnétique en sa composante électrique puis sa composante magnétique.

Théorème 3.2 (Décomposition orthogonale des 2-formes)**.** *Soit* $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}_2\mathcal{M}$*. Soit* $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in T\mathcal{M}$ *tel que* $\boldsymbol{g}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = -1$*. Alors* $\boldsymbol{\omega}$ *peut se décomposer de façon unique selon deux formes linéaires* $\underline{\boldsymbol{q}}$ *et* $\underline{\boldsymbol{b}}$ *toutes deux orthogonales à* $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$*, c'est-à-dire qu'il existe deux uniques formes linéaires* $\underline{\boldsymbol{q}}$ *et* $\underline{\boldsymbol{b}}$ *vérifiant* $\underline{\boldsymbol{q}}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = 0$ *et* $\underline{\boldsymbol{b}}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = 0$ *telles que* $\boldsymbol{\omega} = \underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{q}} + \star(\underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{b}})$ *où* $\underline{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}^\flat$ *est le dual métrique de* $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$*. Autrement dit*

$$\forall \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}_2\mathcal{M}, \forall \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \in T\mathcal{M} \;/\; \|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|^2 = -1, \exists!(\underline{\boldsymbol{q}}, \underline{\boldsymbol{b}}) \in (\mathcal{A}_1\mathcal{M})^2 \;/\; \underline{\boldsymbol{q}}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = 0, \underline{\boldsymbol{q}}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = 0, \boldsymbol{\omega} = \underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{q}} + \star(\underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{b}}) \tag{68}$$

Démonstration. On va démontrer ce théorème sous forme d'exercice.

1. Soit $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}_2\mathcal{M}$. On pose $\underline{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\omega}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \cdot)$ et $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\omega} - \underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{q}}$, où $\underline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{g}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \cdot)$. Montrer que $\boldsymbol{B}(\cdot, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \underline{\boldsymbol{0}}$.
2. Soient $(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_3)$ tels que $(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_3)$ forme une base orthonormée directe. On pose $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} = b^i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$ où la sommation ne s'effectue que pour $i \in \{1, 2, 3\}$, avec $b^i = \frac{1}{2}[i, j, k]\boldsymbol{B}(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_j)$. Montrer que $\forall \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_3) = (\mathbb{R}\overrightarrow{\boldsymbol{u}})^\perp$, on a
$$\boldsymbol{B}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{b}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \tag{69}$$
3. En déduire le théorème.

Solution.

1. $\boldsymbol{B}(\cdot, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{\omega}(\cdot, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) - \boldsymbol{\omega}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}})\underline{\boldsymbol{u}} + \underline{\boldsymbol{u}}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{\omega}(\cdot, \overrightarrow{\boldsymbol{u}})$. Le deuxième terme est nul car $\boldsymbol{\omega}$ est alternée. En se rappelant que $\underline{\boldsymbol{u}}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|^2 = -1$, on trouve bien 0.
2. Soient $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = v^i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = w^i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i$, deux vecteurs de $(\mathbb{R}\overrightarrow{\boldsymbol{u}})^\perp$. On a $\boldsymbol{B}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = v^i w^j \boldsymbol{B}(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_j)$. Comme $\boldsymbol{B}$ est antisymétrique, il ne faut sommer que quand $i \neq j$. En utilisant le fait que
$$b^1 = \boldsymbol{B}(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_3), \quad b^2 = \boldsymbol{B}(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_3, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1), \quad b^3 = \boldsymbol{B}(\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_2) \tag{70}$$
le développement de cette somme donne
$$\boldsymbol{B}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = v^1 v^2 b^3 - v^2 w^1 b^3 + v^3 w^1 b^2 - v^1 w^3 b^2 + v^2 w^3 b^1 - v^3 w^2 b^1 = \begin{vmatrix} b^1 & v^1 & w^1 \\ b^2 & v^2 & w^2 \\ b^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \tag{71}$$
où $\boldsymbol{\varepsilon}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \dashv \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \cdot, \cdot, \cdot)$ est le tenseur de Levi-Civita restreint à $(\mathbb{R}\overrightarrow{\boldsymbol{u}})^\perp$.
3. Le résultat précédent peut se généraliser à deux vecteurs de $T_x\mathcal{M}$. En effet, si on ajoute une composante le long de $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ à $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$, le résultat sera indifférent :
$$\forall \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \in T_x\mathcal{M}, \boldsymbol{B}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{b}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \tag{72}$$
Sachant que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\omega} - \underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{q}}$, on en déduit l'existence d'une forme linéaire $\overrightarrow{\boldsymbol{q}}$ et d'un vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ tels que $\underline{\boldsymbol{q}}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0$ et $\boldsymbol{\omega} = \underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{q}} + \varepsilon(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{b}}, \cdot, \cdot) = \underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{q}} + \star(\underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{b}})$ d'après la propriété 3.3. Nous venons donc de démontrer l'existence de cette décomposition puisque nous avons

exibé des formes linéaires qui conviennent. Montrons l'unicité. Pour $\underline{\boldsymbol{q}}$ c'est facile : s'il existe une autre forme $\underline{\boldsymbol{q}}'$ et un autre vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}'$ qui conviennent également, alors on a, pour tout vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$

$$0 = \underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{q}}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{b}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) - \underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{q}}'(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{b}}'\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \tag{73}$$

Toutes les formes de Levi-Civita vont donner 0. Si on décompose les protuits extérieurs, on va trouver

$$0 = \underline{\boldsymbol{u}}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})\underline{\boldsymbol{q}}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) - \underline{\boldsymbol{u}}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\underline{\boldsymbol{q}}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) - \underline{\boldsymbol{u}}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})\underline{\boldsymbol{q}}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) + \underline{\boldsymbol{u}}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}})\underline{\boldsymbol{q}}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \underline{\boldsymbol{q}}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) - \underline{\boldsymbol{q}}'(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \tag{74}$$

soit $\forall \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in T\mathcal{M}, \underline{\boldsymbol{q}}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = \underline{\boldsymbol{q}}'(\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$, d'où l'unicité de $\underline{\boldsymbol{q}}$. Pour l'unicité de $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$, considérons deux vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ dans $(\mathbb{R}\overrightarrow{\boldsymbol{u}})^\perp$. S'il existe un autre $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}'$ qui convient, alors on a également $\boldsymbol{\varepsilon}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}(\overrightarrow{\boldsymbol{b}} - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}', \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = 0 = (\overrightarrow{\boldsymbol{b}} - \overrightarrow{\boldsymbol{b}}') \cdot (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ ce qui n'est possible que si $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} = \overrightarrow{\boldsymbol{b}}'$.

□

4 Le champ électromagnétique

Nous allons montrer que la forme du champ électromagnétique exposée section 1.2 est la seule possible. Pour toute cette section nous nous plaçons dans l'espace-temps de la relativité générale modélisé par une variété riemanienne $(\mathcal{M}, \boldsymbol{g})$ où $\dim\mathcal{M} = 4$ et $\boldsymbol{g}$ est de signature $(-,+,+,+)$.

4.1 Prolégomène : particule dans un champ de force pure

Considérons une particule matérielle. On sait qu'en relativité générale cela signifie que cette particule suit une ligne d'univers que l'on peut paramétrer ainsi : $\mathscr{L} : I \to \mathcal{M}, \lambda \mapsto \mathcal{P}(\lambda)$, avec $\forall \lambda \in I, \boldsymbol{g}(\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}'(\lambda), \overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}'(\lambda)) < 0$. On reparamétrise cette trajectoire selon son abscisse curviligne qui vérifie $\mathrm{d}s = \sqrt{-\boldsymbol{g}(\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}'(\lambda), \overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}'(\lambda))}\,\mathrm{d}\lambda$. En notant $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{d}}\gamma/\mathrm{d}s$, on trouve $\boldsymbol{g}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = \|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^2\| = -1$. C'est ce qu'on appelle la 4-vitesse, ou la vitesse normalisée, du point matériel. Si la particule a une masse au repos m, on définit $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = m\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ sa quadri-impulsion. Le principe fondamental de la dynamique en relativité suppose qu'il existe un champ de force $\overrightarrow{\boldsymbol{f}}$ tel que l'on a

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} = \overrightarrow{\boldsymbol{f}} \tag{75}$$

où $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}s/c$ est ce qu'on appelle le temps propre. Si l'on développe cette équation, on obtient

$$\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + mc\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + mc\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \tag{76}$$

Or on sait que pour les trajectoires unitaires, $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = 0$. La variation de la masse au repos de la particule se calcule donc de cette façon : $\boldsymbol{g}(\overrightarrow{\boldsymbol{f}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = c\mathrm{d}m/\mathrm{d}s = \mathrm{d}m/\mathrm{d}\tau$.

Définition 4.1. *Les 4-forces pures sont les forces qui conservent la masse des particules, ce sont des champs de vecteurs* $\overrightarrow{\boldsymbol{f}}$ *(ou, par dualité métrique, des champs de formes linéaires* $\underline{\boldsymbol{f}}$*) qui vérifient* $\overrightarrow{\boldsymbol{f}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 0$ *(ou* $\underline{\boldsymbol{f}}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = 0$*).*

À moins que nous ne traitions de physique quantique relativiste avec collisions de particules élémentaires (ce qui n'est pas le cas ici), nous ne traiterons que des forces pures.

4.2 Construction du champ électromagnétique

Il est raisonnable de penser que le champ électromagnétique induit une 4-force pure sur les particules. D'autre part, si l'on peut imaginer des interactions scalaires qui ne dépendent que de la position des particules dans l'espace, on peut aussi imaginer des interactions vectorielles, c'est-à-dire qui dépendent de la direction intrinsèque du mouvement des particules, c'est-à-dire de leur 4-vitesse $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$. C'est ce que nous supposons pour le champ électromagnétique[5]. La dernière hypothèse forte que nous ajoutons est que l'action sur les particules est proportionnelle à la 4-vitesse $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$. Si chaque particule a un coefficient de couplage électromagnétique intrinsèque q que l'on peut appeler "charge électromagnétique", alors il doit exister une forme bilinéaire $\boldsymbol{F}$ telle que la 4-force électromagnétique s'écrive ainsi

$$\underline{\boldsymbol{f}} = q\boldsymbol{F}(\cdot, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \tag{77}$$

C'est ce qu'on appelle la "force de Lorentz" en physique. Si l'on suppose que cette force est pure, alors pour tout vecteur unitaire, on a $\boldsymbol{F}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) = 0$. Cela indique que $\boldsymbol{F}$ est une forme bilinéaire alternée, c'est donc un élément de $\mathcal{A}_2\mathcal{M}$. Mais, nous savons que toute 2-forme peut se décomposer de façon unique orthogonalement à un vecteur unitaire $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ donné. Ainsi, pour tout observateur de quadrivitesse $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, il existe deux formes linéaires, uniques, $\underline{\boldsymbol{E}}$ et $\underline{\boldsymbol{B}}$, telles que

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{E}} + \star(\underline{\boldsymbol{u}} \wedge c\underline{\boldsymbol{B}})} \tag{78}$$

$\underline{\boldsymbol{E}}$ et $\underline{\boldsymbol{B}}$ sont les formes électrique et magnétique. Par dualité métrique on peut évidemment leur faire correspondre les vecteurs électrique et magnétique respectivement. On constate que $\underline{\boldsymbol{E}}$ et $\underline{\boldsymbol{B}}$ ne sont pas des champs de formes linéaires définis intrinsèquement, car ils dépendent de l'observateur et sa quadrivitesse. Si l'on choisit un autre observateur qui croise le chemin du premier mais avec une autre quadrivitesse, alors il faudra changer la décomposition de $\boldsymbol{F}$ et l'expression des champs électrique et magnétique.

4.3 Exercices

1. Montrer que $\underline{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{F}(\cdot, \overrightarrow{\boldsymbol{u}})$ et $c\underline{\boldsymbol{B}} = \star\boldsymbol{F}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \cdot)$.
2. Exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ en fonction de celles de $\boldsymbol{F}$.
3. Exprimer les composantes de $\boldsymbol{F}$ en fonction de celles de $\underline{\boldsymbol{E}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$, dans une base quelconque, puis dans le repère orthonormé dont le premier vecteur est $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$.

Solution.

1. C'est un calcul direct.
2. C'est aussi du calcul direct : $E^i = (\boldsymbol{F}(\cdot, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}))^i = F^{ib}u_b$, et $cB^i = (\star\boldsymbol{F}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \cdot))^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk\ell}F_{jk}u_\ell$
3. $F_{ab} = u_aE_\beta - E_au_b + c\varepsilon_{cdab}u^cE^d$. Dans une base orthonormée décomposée le long de $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, on a $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_0$. En utilisant la matrice de Minkowski on vérifie immédiatement que $u^a = (1,0,0,0) = \delta^a_0$ et $u_a = (-1,0,0,0) = -\delta^0_a$ (les indices vont de 0 à 3), ainsi que $E_a =$

5. Le cas de la gravitation est plus compliqué de ce point de vue-là. On peut consulter l'ouvrage de Feynman "leçons sur la gravitation" où il traîte la gravitation comme un champ quantique et retrouve les lois de la relativité générale à partir de principes variationnels.

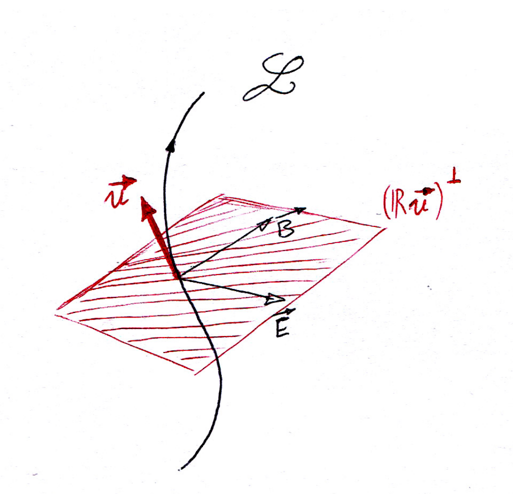

FIGURE 2 – Illustration de la décomposition orthogonale de la 2-forme électromagnétique par rapport à la 4-vitesse d'un observateur.

$(0, E_x, E_y, E_z)$ et $B^a = (0, B^x, B^y, B^z)$, avec $\varepsilon_{abcd} = [a, b, c, d]$. D'où

$$F_{ab} = -\delta_0^a E_b + E_a \delta_b^0 + c[0, k, a, b] B^k = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & cB^x & -cB^y \\ E_y & -cB^z & 0 & cB^x \\ E_z & cB^y & -cB^x & 0 \end{pmatrix} \tag{79}$$

ce qui permet par ailleurs de retrouver l'équation (12). La boucle est bouclée !

Quelques compléments :

$$F^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & cB^x & -cB^y \\ -E_y & -cB^z & 0 & cB^x \\ -E_z & cB^y & -cB^x & 0 \end{pmatrix} \tag{80}$$

$$\star \boldsymbol{F} = c\underline{\boldsymbol{B}} \wedge \underline{\boldsymbol{u}} + \star(\underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{E}}) \tag{81}$$

$$\star F_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & cB_x & cB_y & cB_z \\ -cB_x & 0 & E^x & -E^y \\ -cB_y & -E^z & 0 & E^x \\ -cB_z & E^y & -E^x & 0 \end{pmatrix} \tag{82}$$

D'amples compléments sur le champ électromagnétiques peuvent être trouvés dans le livre d'Éric Gourgoulhon, "relativité restreinte". Nous continuerons de travailler sur le champ électromagnétiques dans le chapitre suivant sur la dérivation dans les variétés.