Chapitre 3.5 : Équations différentielles

Léo Bernus

24 mars 2020

Table des matières

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction d'une variable, qui fait entrer en compte les dérivées de cette fonction. Il existe une infinité de types d'équations différentielles, la plupart sont insolubles. Nous allons nous concentrer sur celles qui sont les plus utiles en physique et dont nous sommes au moins capables de donner quelques déterminations, même si nous ne serons pas toujours capables de les résoudre intégralement.

1 Le problème de Cauchy

1.1 Un peu de vocabulaire

Définition 1.1. *Soit $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $F \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$. On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre toute équation de fonctions inconnues $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ qui prend la forme suivante :*

$$\forall t \in I, y'(t) = F(t, y(t)) \tag{1}$$

Exemple : la deuxième loi de Newton peut s'exprimer comme une équation différentielle du premier ordre. En effet, soit un point matériel de masse m repéré par sa position $x \in \mathbb{R}^3$ dans un repère galiléen, soumis à un champ de force $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3, (t, x) \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{F}}(t, x)$. La deuxième loi de Newton s'écrit

$$\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{d}}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{F}}(t, x)}{m} \tag{2}$$

En posant $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} = \overrightarrow{\boldsymbol{d}} x / \mathrm{d}t$ on peut récrire la seconde loi de Newton ainsi

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{y}}}{\mathrm{d}t} \\ \\ \frac{\overrightarrow{\mathbf{d}} x}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{F}(t,x)}{m} \\ \\ \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix} \tag{3}$$

qui est bien une équation différentielle ordinaire d'ordre 1. Nous verrons plus tard quel est l'intérêt de remettre ce type d'équation différentielle sous cette forme, mais signalons déjà que la condition initiale de cette équation différentielle consiste en la donnée d'une position x et d'une vitesse $\overrightarrow{\boldsymbol{y}}$ à une date donnée, ce qui est bien cohérent avec la physique. Il est donc logique de traiter séparément les positions et les vitesses.

Définition 1.2 (Problème de Cauchy)**.** *Le problème de Cauchy consiste à chercher la solution d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 avec la donnée d'une condition initiale. Autrement dit, le problème de Cauchy consiste à chercher les solutions du problème suivant :*

$$\begin{cases} \forall t \in I, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = F(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \quad (t_0, y_0) \in I \times \Omega \end{cases} \tag{4}$$

Presque tous les systèmes physiques à un nombre fini de degrés de liberté peuvent se mettre sous la forme d'un problème de Cauchy.

Définition 1.3. *Soit $y : I \to \mathbb{R}^n$, et $z : J \to \mathbb{R}^n$. Si y et z sont solution de l'équation (1), et que $I \subset J$ et $z|_I = y$, on dit que z est un prolongement de y.*

Définition 1.4. *On dit que y est une solution maximale de (1) si elle n'admet aucun autre prolongement qu'elle-même.*

Par exemple, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \exp t$ est une solution maximale de l'équation différentielle ordinaire d'ordre 1 $y' = y$.

Définition 1.5. *Soit $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ définissant l'équation différentielle $y' = F(t, y)$. Une soluton globale est une solution définie sur tout I.*

Remarques.

1. Toute soluton globale est maximale. La réciproque est fausse, nous verrons des exemples.
2. Les solutons globales n'existent pas toujours.

Histoire de fixer les idées une bonne fois pour toutes : résoudre une équation différentielle ne consiste pas à se contenter d'écrire le graphe d'une fonction comme le font les physiciens un peu paresseux [1]. Résoudre une équation différentielle consiste à trouver des *fonctions*, c'est-à-dire : *un ensemble de définition, et un graphe.* Comme nous allons le voir il ne s'agit pas juste d'une lubie mathématique mais cela peut avoir des conséquences très importantes sur le comportement des solutions (cf. par exemple le théorème d'explosion).

1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 1.6 (Rappel : fonction localement lipschitzienne)**.** *Soit f une fonction continue sur $I \times \Omega$. On dit que f est localement lipschitzienne selon sa seconde variable sur Ω si*

$$\forall (t_0, x_0) \in I \times \Omega, \exists \mathscr{V}_{(t_0,x_0)} \subset I \times \Omega, \exists k > 0 \ / \ \forall (t, x), (t, y) \in \mathcal{V}_{(t_0,x_0)}, \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\| \quad (5)$$

Théorème évident : toutes les fonctions $\mathcal{C}^1$ sont localement lipschitziennes. Ce n'est pas le cas des fonctions continues. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est continue en 0 mais pas localement lipschitzienne en 0.

Théorème 1.1. *Soit le problème de Cauchy défini sur $I \times \Omega$: $y' = F(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, où $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. Si F est localement lipschitzienne selon sa seconde variable sur Ω, alors il existe une unique solution maximale locale (définie sur un intervalle connexe contenant t_0) au problème de Cauchy.*

Signalons tout de même l'incroyable puissance de ce théorème duquel découle tout le déterminisme des phénomènes naturels. Comme tout théorème incroyablement puissant, la démonstration est très difficile. Elle sera reportée en annexe [2].

1. Cela les conduit parfois à des erreurs, y compris dans la littérature scientifique publiée comme j'ai pu m'en apercevoir. Je ne citerai pas les noms.
2. Quand j'aurai plus de temps. Pour le moment, nous renvoyons à tout ouvrage classique d'analyse de niveau licence en mathématiques. Par exemple, le livre de Xavier Gourdon, "les maths en tête, analyse", aux éditions Ellipses. On trouve aussi facilement la démonstration sur internet. De toute façon je fais confiance aux étudiants suffisamment motivés pour chercher et trouver une preuve dans la littérature.

1.3 Exercices – non déterminisme des points singuliers

1.3.1 La cuve percée

Soit une cuve remplie d'eau, de section A, et percée en bas par un trou de section a. On peut montrer (équation de Bernoulli) que la hauteur de l'eau dans la cuve obéit à l'équation différentielle $h' = -C\sqrt{h}$ où $C = \sqrt{2g}a/A$. En dilatant l'échelle de temps on peut se ramener à $h' = -\sqrt{h}$ (il suffit de poser $\tau = t/C$).

1. Trouver la (les) solution(s) maximale(s) au problème de Cauchy avec $h(0) = h_0 > 0$.
2. Trouver la (les) solution(s) maximale(s) au problème de Cauchy avec $h(0) = 0$.

Solution.

1. Comme h est $\mathcal{C}^1$, elle est continue, et comme $h_0 > 0$, il existe un voisinage de 0 tel que sur ce voisinage, $h(t) > 0$. Tant que c'est le cas, il est légitime de récrire l'équation différentielle ainsi :
$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -\mathrm{d}t \tag{6}$$
soit après intégration (on fera attention aux bornes pour avoir les bonnes constantes d'intégration) $\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0} = -t/2$ ou encore $h(t) = (\sqrt{h_0} - t/2)^2$. Cette écriture est valable tant que $h > 0$, c'est-à-dire tant que $t < 2\sqrt{h_0}$.
2. Si $h(0) = 0$, alors pour tout $t > 0$, $h(t) = 0$. En effet, s'il existe $t > 0$ tel que $h(t) > 0$, alors c'est le cas précédent qui s'applique et on voit que $h(0) \neq 0$ ce qui est contradictoire. Cela nous permet par ailleurs de prolonger la solution de la question précédente par la fonction nulle sur $[2\sqrt{h_0}, +\infty[$. Ainsi nous voyons que la solution maximale de la question précédence est $h(t) = (\sqrt{h_0} - t/2)^2$ si $t < 2\sqrt{h_0}$, $h(t) = 0$ si $t \geq 2\sqrt{h_0}$.
Cependant, pour $t_0 < 0$ toute solution de la forme
$$h(t) = \begin{cases} (t - t_0)^2, \forall t < t_0 \\ 0 \forall t \geq t_0 \end{cases} \tag{7}$$
convient également à ce problème de Cauchy. Cela illustre que le caractère non lipschitzien en 0 de la fonction racine carrée supprime le déterminisme du théorème de Cauchy. L'interprétation physique est la suivante : si on observe une cuve vide percée, on ne peut pas savoir quand elle s'est vidée, ni si elle a déjà été remplie un jour. Nous illustrons donc l'ensemble des solutions à ce problème de Cauchy figure 1

1.3.2 $ty' - 2y = 1$

1. Résoudre sur $]-\infty, 0[$ puis sur $]0, +\infty[$
2. Raccorder les solutions : résoudre sur $\mathbb{R}$.
3. Que se passe-t-il si on impose une condition initiale en $t_\ominus < 0$ seulement ? en $t_\oplus > 0$ seulement ? les deux ?

Solution.

1. Résolvons sur $]0, +\infty[$. Remarquons qu'il y a une condition limite : compte-tenu de l'équation différentielle à résoudre, il faut que
$$\lim_{t \to 0^+} y(t) = -\frac{1}{2} \tag{8}$$

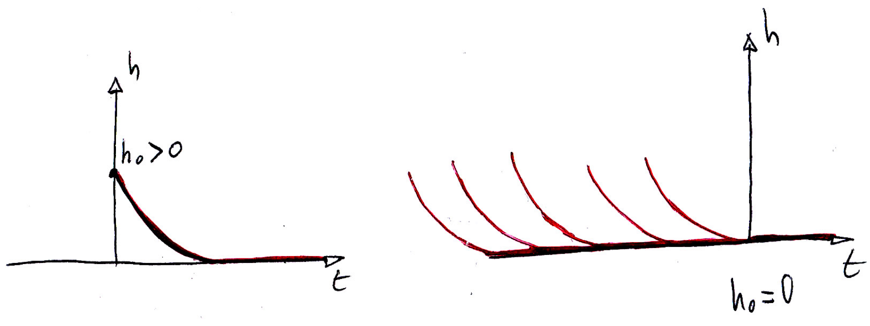

FIGURE 1 – Solutions de l'exercice 1.3.1 (cuve percée). À gauche, la solution du problème de Cauchy avec $h(0) > 0$. À droite l'ensemble des solutions du problème de Cauchy avec $h() = 0$.

D'autre part, $y_p = 1/2$ est une solution particulière. Pour $t > 0$, l'équation homogène à résoudre est $y' = 2y/t$. En séparant les variables et en intégrant au voisinage de 0, on trouve que $\varphi_\oplus(t) = C_\oplus t^2$, pour $C_\oplus \in \mathbb{R}$ est solution du système homogène. On remarque que y ne s'annule jamais et qu'elle est solution maximale et globale du système homogène sur $\mathbb{R}_+^*$. La solution de l'équation est donc $y_\oplus(t) = -1/2 + \varphi_\oplus(t)$. De même on montre que sur $\mathbb{R}_-^*$, la solution est $y_\ominus(t) = -1/2 + \varphi_\ominus(t)$ avec $\varphi_\ominus(t) = C_\ominus t^2, C_\ominus \in \mathbb{R}$.

2. On constate que $\lim_{t\to 0^-} y_\ominus(t) = \lim_{t\to 0^+} y_\oplus(t) = -1/2$ et que $\lim_{t\to 0^-} y'_\ominus(t) = \lim_{t\to 0^+} y'_\oplus(t) = 0$, donc l'ensemble des solutions se présente sous la forme d'un espace affine :
$$S = -\frac{1}{2} + \mathrm{Vect}(\psi_\ominus, \psi_\oplus) \tag{9}$$
où $\psi_\ominus : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall t < 0, \psi_\ominus(t) = t^2 \forall t \geq 0, \psi_\ominus(t) = 0$ et $\psi_\oplus : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall t \leq 0, \psi_\oplus(t) = 0, \forall t > 0, \psi_\oplus(t) = t^2$. Nous représentons l'ensemble des solutions figure 2.

3. Si on impose une condition initiale en $t_\ominus < 0$, alors la solution sera entièrement déterminée sur $\mathbb{R}_-$ car le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique bien. Mais en $t > 0$ tout peut arriver. On a le même type de comportement symétriquement si on impose une condition initiale en $t_\oplus > 0$. En revanche, la donnée de deux conditions initiale, l'une à gauche, l'autre à droite, permet de déterminer entièrement la solution. Nous en donnons une illustration figure 3. Remarquons que ce comportement non déterminisme est dû à ce que la fonction $(t, y) \mapsto 2y/t - 1/t$ n'est pas lipschitzienne quand $t = 0$, en fait elle n'est même pas définie.

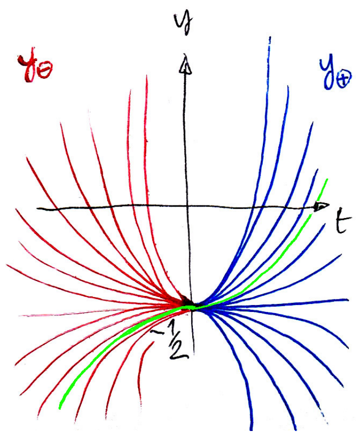

FIGURE 2 – Nous représentons l'ensemble des solutions du système différentielle sans conditions initiales. Notons qu'on peut prendre au choix n'importe quel solution à gauche, puis ensuite passer à n'importe quelle autre solution à droite, la fonction restera $\mathcal{C}^1$ tout en étant solution de l'équation différentielle. Un exemple est donné en vert.

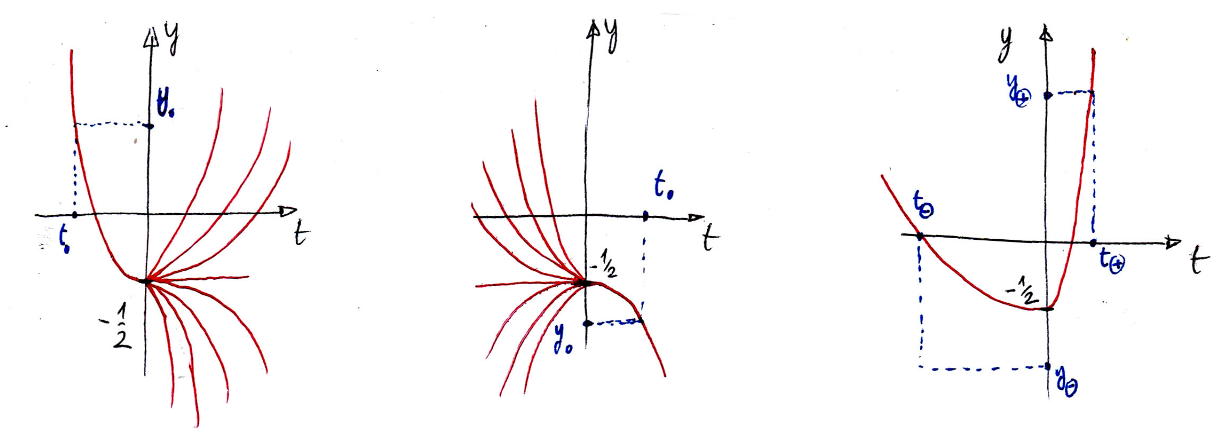

FIGURE 3 – À gauche : solutions avec condition initiale pour t négatif, au milieu solutions avec condition initiale pour t positif, à droite la solution (unique) quand on fixe deux conditions initiales pour t positif et négatif.

1.4 Théorème d'explosion

Théorème 1.2. *Soit $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, localement lipschitzienne sur Ω. Considérons le problème de Cauchy associé : $y' = F(t,y)$ et $y(t_0) = y_0$ avec $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. Soit $(\tilde{I}, y)$ la solution maximale locale avec $\tilde{I} =]a,b[$. Si $a > \mathrm{Inf} I$ ou $b < \mathrm{Sup} I$, alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe t dans $\tilde{I}$ tel que $y(t) \notin K$.*

Démonstration. Par l'absurde. Supposons qu'il existe un compact qui contient la solution maximale avec $b < \mathrm{Sup} I$ par exemple. On va montrer que la solution proposée n'est pas maximale en construisant une solution qui déborde de $\tilde{I}$. Posons $y_+ = \lim_{t \to b} y$. Comme F est lipschitzienne, d'après le théorème des accroissement finis, y admet une limite en b contenue dans K qu'on note y_b. Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} y' = F(t,y) \\ y(b) = y_b \end{array} \right. \tag{10}$$

Ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale puisque $(b, y_b) \in I \times \Omega$. On note (I_b, z) sa solution maximale. Par ailleurs, $I_b \subset I$ est un ouvert qui contient b. Notons $\bar{I} = (\tilde{I} \cup I_b) \cap]a, +\infty[$. Posons $x : \bar{I} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto y(t)$ si $t < b$, $z(t)$ si $t \geq b$. x est dérivable sur $\bar{I}$, $x_{\tilde{I}} = y$ et x est solution du problème de Cauchy de départ. On a donc trouvé un prolongement de $(\tilde{I}, y)$ ce qui est contradictoire. □

Corollaire 1.1 (Théorème d'explosion)**.** *Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, avec les hypothèse précédentes, les solutions explosent : si $a > \mathrm{Inf} I$, $\lim_a \|y\| = +\infty$, et si $b < \mathrm{Sup} I$, $\lim_b \|y\| = +\infty$.*

Exercice Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ qui n'admet aucun point critique (c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|\overrightarrow{\nabla} f(x)\| \neq 0$). Montrer que les lignes de champ ne sont pas bornées. Indication : utiliser le théorème d'explosion, et dans les cas où il ne s'applique pas, poser $g = f \circ \gamma$ où γ est une ligne de champ et montrer que g diverge.

Solution. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une ligne de champ de f : $\forall t \in I, \overrightarrow{\gamma}'(t) = \overrightarrow{\nabla} f$ et γ est solution locale maximale de cette équation différentielle ordinaire d'ordre 1. Comme f est définie "implicitement" sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, si I est de la forme $]a, b[$, $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, b[$, les lignes de champs divergent d'après le théorème d'explosion. Le seul cas où ça peut ne pas diverger est le cas où $I = \mathbb{R}$. Montrons que les solutions divergent quand même. Soit $g = f \circ \gamma$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par composition, g est $\mathcal{C}^1$ et en composant les dérivées on calcule aisément que $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = \|\overrightarrow{\nabla} f(\gamma(t))\|^2 \geq (\mathrm{Inf}_{\mathbb{R}} \|\overrightarrow{\nabla} f\|)^2 = m > 0$. g est donc une fonction strictement croissante et par conservation de l'ordre par intégration, on a $\lim_{+\infty} g = +\infty$. Or sur tout compact, f est bornée, donc le seul moyen de dépasser un nombre arbitrairement grand est de sortir de tout compact. Donc les lignes de champ divergent.

2 Systèmes différentiels linéaires

Comme tout est localement linéaire en physique, cette section présente un grand intérêt pour les physiciens. En général, les systèmes différentiels sont non intégrables (on ne peut pas trouver de fonction explicite). Mais on peut étudier le comportement au voisinage d'un point connu en différentiant.

2.1 Propriétés générales des solutions

Théorème 2.1. *Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$, continues. Soit le système différentiel $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$. Les solutions maximales sont globales : elles sont définies sur tout I.*

La preuve technique consiste à majorer la norme de X sur I pour montrer que comme X n'explose pas, on peut toujours prolonger les solutions jusqu'à atteindre tout I. Là encore je n'ai pas beaucoup de temps donc je préfère laisser les étudiants motivés chercher par eux-mêmes ou sur internet ou dans le livre de Gourdon. Notez qu'on a besoin du Lemme de Gronwall pour montrer ce théorème.

Théorème 2.2. *Considérons le système différentiel dans $\mathbb{R}^n$ $X'(t) = A(t)X(t)$ avec A continue sur I. L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension n.*

Démonstration. D'abord remarquons que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel linéaire. En effet, cet ensemble est stable par addition et par multiplication externe par un scalaire. Toutes les applications linéaires sont localement lipschitziennes. Si l'on fixe $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, le système associé a une unique solution maximale définie sur I. Ainsi, grâce au théorème de Cauchy, $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des solutions de cette équation différentielle et $\mathbb{R}^n$ sont en bijection. D'où le résultat. □

Corollaire 2.1. *L'ensemble des solutions du système différentiel $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ est un espace affine de dimension n.*

Corollaire 2.2. *Toute équation différentielle linéaire d'ordre k résolue a des solutions qui vivent dans un espace affine de dimension $n \times k$.*

Démonstration. L'équation différentielle

$$X^{(k)}(t) + \sum_{p=0}^{k-1} A_p(t)X^{(p)}(t) = B(t) \tag{11}$$

est équivalente au système différentiel suivant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} Y_k \\ Y_{k-1} \\ \vdots \\ Y_2 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(t) - \sum_{p=0}^{k-1} A_p(t)Y_p(t) \\ Y_k \\ \vdots \\ Y_3 \\ Y_2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

qui est un système différentiel de taille $n \times k$. □

Et c'est à peu près tout ce qu'on peut dire des systèmes différentiels linéaires lorsque les applications linéaires dépendent du temps.

2.2 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Théorème 2.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La soluton du problème de Cauchy $X' = AX, X(0) = X_0$, est :*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \exp(tA)X_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}\right) X_0 \tag{13}$$

Démonstration. Il suffit de dériver la somme infinie sachant que A commute avec A. □

En pratique : si A est diagonalisable, on a $A = P^{-1}DP$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Il suffit de faire le changement de variables $Y = PX$ ce qui donne $Y(t) = \mathrm{e}^{tD}Y(0) = (\mathrm{e}^{\lambda_1 t}Y_1(0), \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}Y_n(0))$.

Si A n'est pas diagonalisable, au pire toute matrice est trigonalisable dans $\mathbb{C}$. Dans ce cas il est facile de résoudre le système. Si on se ramène à une matrice triangulaire supérieure, alors on résoud la dernière ligne : $y_n' = \lambda_n y_n$, ce qui donne $y_n(t) = \mathrm{e}\lambda_n t y_n(0)$. Ensuite on remonte à l'avant dernière ligne : $y_{n-1}' = \lambda_{n-1}y_{n-1} + \mu y_n$ qu'on peut facilement résoudre puisqu'on connaît y_n, et ainsi de suite jusqu'à remonter toute la matrice.

2.3 Exercices et techniques de résolution

2.3.1 La physique...

Décrire l'ensemble des solutions de $(E) : y'' + 2\lambda y' + \delta y = 0$.

Solution. Remettre cette équation différentielle sous forme d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 revient à écrire $X' = AX$ où

$$A = \begin{pmatrix} -2\lambda & -\delta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

et $X = (y', y)$. Le polynome caractéristique de A s'écrit $P = x^2 + 2\lambda x + \lambda = (x+\lambda)^2 + \delta - \lambda^2$. Si $\lambda^2 \geq \delta$, les racines sont $r_\pm = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \delta}$. Dans ce cas le système est stable si et seulement si $\lambda > \sqrt{\lambda^2 - \delta}$ ce qui est toujours le cas (en physique cela correspond au régime amorti). En effet, d'après le théorème précédent, les solutions sont nécessairement sous la forme $y(t) = a\mathrm{e}^{r_+ t} + b\mathrm{e}^{r_- t}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ et on a $\lim_{+\infty} y = 0$. Si $\lambda^2 \leq \delta$, les racines sont $r_\pm = -\lambda \pm \mathrm{i}\sqrt{\delta - \lambda^2}$. Dans ce cas le système est stable si et seulement si $\lambda \geq 0$. En physique, si $\lambda > 0$, cela correspond aux oscillations amorties. Cela s'explique par le fait que $\lambda > 0$ correspond à un amortissement linéaire de la vitesse (si on avait $\lambda < 0$ cela correspondrait à une amplification de la vitesse et mènerait à un phénomène d'explosion). Si $\lambda = 0$ alors nous avons des oscillations pures. C'est le cas où il n'y a aucun amortissement de la vitesse en physique. Si $\lambda^2 = \delta$, il y a une racine de multiplicité double $r = -\lambda$. Cela correspond au régime critique et en physique nous apprenons à chercher une solution de la forme $y(t) = (a + bt)\mathrm{e}^{rt}$. Le prochain exercice va nous montrer pourquoi c'est le cas.

2.3.2 Équations différentielles linéaires à coefficiants constants d'ordre n à une inconnue

Quelques rappels d'algèbre s'imposent. Soient $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$. On dit que :

- P divise Q si $\exists R \in \mathbb{C}[X] \;/\; Q = PR$.
- R est un diviseur commun de P et Q si R divise P et Q.
- P et Q sont premiers entre eux si leurs seuls diviseurs communs sont les polynomes constants.
- Propriété : P divise Q si et seulement si l'ensemble des racines de P sont contenues dans l'ensemble de celles de Q, et toutes de multiplicités inférieures.
- Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel et que $P = \sum a_i X^i$ est un polynome, on note $P(u) = \sum a_i u^i$ le polynome de l'endormorphisme u, qui est lui même un endomorphisme.

Voici un théorème classique d'algèbre linéaire qui nous sera bien utile.

Théorème 2.4 (Décomposition du noyau)**.** *Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, P_i p polynomes et $P = \prod_{i=1}^{p} P_i$. Si les P_i sont tous premiers entre eux deux à deux, alors*

$$\mathrm{Ker} P(u) = \oplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(P_i(u)) \tag{15}$$

Démonstration. Le résultat se démontre aisément par récurrence mais nous aurons besoin d'initialiser avec les rangs 1 et 2.

D'abord la proposition est triviale quand $p = 1$ car P est premier avec lui-même.

Ensuite, pour $p = 2$, nous savons que si P_1 et P_2 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Bezout, il existe deux polynomes U et V tels que $UP_1 + VP_2 = 1$. Ainsi, pour tout u endomorphisme de E, $UP_1(u) + VP_2(u) = \mathbb{I}_E$. De telle sorte que pour tout x dans E, on a

$$x = UP_1(u)x + VP_2(u)x \tag{16}$$

Pour montrer que la somme d'espace est directe, il faut montrer que $\mathrm{Ker}P(u) = \mathrm{Ker}P_1(u) + \mathrm{Ker}P_2(u)$ et que $\mathrm{Ker}P_1(u) \cap \mathrm{Ker}P_2(u) = \{0_E\}$.

— Soit $x \in \mathrm{Ker}P_1(u) \cap \mathrm{Ker}P_2(u)$. Alors d'après (16) on a

$$x = UP_1(u)x + VP_2(u)x = U(0) + V(0) = 0 \tag{17}$$

— Soit $x \in \mathrm{Ker}P(u)$. On a $x = UP_1(u)x + VP_2(u)x$ et comme u commute avec lui-même,

$$P_2(u) \circ UP_1(u)(x) = UP_1P_2(u)(x) = UP(x) = 0 \tag{18}$$

donc $UP_1(u)(x) \in \mathrm{Ker}P_2(u)$. De même, $UP_2(u)(x) \in \mathrm{Ker}P_1(u)$. Et donc d'après (16), tout élément du noyau de $P(u)$ peut se décomposer par la somme d'un élément du noyau de $P_1(u)$ et d'un élément du noyau de $P_2(u)$.

La somme est donc bien directe.

À présent faisons la récurrence. Supposons que la propriété soit vraie au rang p. Soit $P = \prod_{i=1}^{p+1} P_i = QP_{p+1}$ avec $Q = \prod_{i=1}^{p} P_i$. Comme la propriété est vraie au rang 2, $\mathrm{Ker}P(u) = \mathrm{Ker}Q(u) \oplus \mathrm{Ker}P_{p+1}(u)$ et d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{Ker}Q(u) = \oplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}P_i(u)$, d'où le résultat. □

Nous avons désormais suffisamment d'éléments pour démontrer le théorème important suivant qui nous permettra de résoudre toutes les équations différentielles linéaires à coefficients constants à une fonction inconue.

Théorème 2.5. *Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. On peut écrire P sous forme développée ou factorisée :*

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = \prod_{i=1}^{p} (X - r_i)^{m_i} \text{ avec } \sum_{i=1}^{p} m_i = n \tag{19}$$

Soit (E) l'équation différentielle $P(D)y = 0$ où D est l'opérateur de dérivation. Alors l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \sum_{i=1}^{p} P_i(t) \mathrm{e}^{r_i t} \text{ avec } P_i \in \mathbb{C}_{m_i - 1}[X] \tag{20}$$

Démonstration. Ce théorème permet entre autres d'expliquer pourquoi on apprend à chercher des solutions de la forme $t \mapsto (at + b)\mathrm{e}^{rt}$ en régime critique en physique quand la racine du polynome caractéristique est double. Nous allons présenter la preuve sous forme d'exercice.

1. On note S_P l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $P(D)y = 0$. Montrer que si $P_1, \dots, P_p$ sont premiers entre eux, alors $S_{\prod_{i=1}^p P_i} = \oplus_{i=1}^p S_{P_i}$.
2. Déterminer les solutions de $P(D)$ quand $P = (X - r)^n$.
3. Conclure.

Solution.

1. D'après le théorème 2.3 on sait que toute solution de (E) est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout polynome P, si y est solution de (E) alors $P(D)y$ est aussi $\mathcal{C}^\infty$. D tout comme $P(D)$ sont donc des endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty$. De plus, $\forall P, Q \in \mathbb{C}[X], P(D)Q(D) = Q(D)P(D) = PQ(D)$. Ainsi, y est solution de E si et seulement si $y \in \mathrm{Ker} P(D)$. D'après le théorème de décomposition du noyau, il vient $\mathrm{Ker} P(D) = \oplus_{i=1}^p \mathrm{Ker} P_i(D)$, d'où le résultat.
2. On montre par récurrence que la solution de $(D - r)^m y = 0$ est de la forme $t \mapsto Q(t)\mathrm{e}^{rt}$ où $Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. La propriété est évidente pour $m = 1$. Supposons qu'elle soit vraie au rang m. Soit l'équation différentielle $(D - r)^{m+1} y = 0$. On peut la remettre sous la forme $(D-r)^m((D-r)y) = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a nécessairement $y'(t)-ry(t) = Q(t)\mathrm{e}^{rt}$ avec $Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. En outre,
$$(D - r)y(t) = Q(t)\mathrm{e}^{rt} \Leftrightarrow D(y(t)\mathrm{e}^{-rt}) = Q(t) \tag{21}$$
donc $t \mapsto y(t)\mathrm{e}^{rt}$ est une primitive de Q, c'est-à-dire un polynome de degré m. Ce qui achève de prouver la récurrence. D'où le résultat.
3. Décomposons $P = \prod_{i=1}^p (X - r_i)_i^m$. On sait que la solution sera la somme direct des solutions des équations différentielles $(D - r_i)^{m_i} y = 0$, qui sont de la forme $t \mapsto P_i(t)\mathrm{e}^{r_i t}$ où le degré de P_i est plus petit que $m_i - 1$. Donc y est solution de (E) si et seulement si $y(t) = \sum_i P_i(t)\mathrm{e}^{r_i t}$.

$\square$

2.3.3 Variation de la constante

Soit une équation différentielle ordinaire affine $X' = A(t)X + B(t)$ dans $\mathbb{R}^n$. Supposons que l'on connaisse les solutions du système homogène associé $X' = A(t)X$. Nous disposons de n fonctions V_i à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendantes qui vont former l'espace vectoriel des solutions. Nous cherchons une solution particulière de l'équation différentielle affine sous la forme suivante :
$$V : t \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)V_i(t) \tag{22}$$
où les λ_i sont n fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si nous injectons dans l'équation affine cela donne
$$\sum_i \lambda_i' V_i(t) + \sum_i \lambda_i(t)V_i'(t) = \sum_i \lambda_i(t)At)V_i(t) + B(t) \tag{23}$$
Comme chaque V_i est solution du système homogène, il ne reste que
$$\sum_i \lambda_i'(t)V_i(t) = B(t) \tag{24}$$

Comme les V_i sont linéairement indépendants, la matrice $W(t)$ dont chaque colonne est constituée par un $V_i(t)$ est inversible pour tout t réel. Si l'on pose $\Lambda(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$, L'équation précédente peut donc se récrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Lambda'(t) = W(t)^{-1} B(t) \tag{25}$$

et en choisissant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Lambda(t) = \int_0^t W(u)^{-1} B(u) \, \mathrm{d}u \tag{26}$$

on a trouvé formellement une solution particulière.

2.3.4 Wronskien

Définition 2.1. *Soit (V_i) une famille de n fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On appelle wronskien de la famille (V_i) la fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie ainsi : $w : t \mapsto \det(V_1(t), \ldots, V_n(t))$.*

Remarque : si on considère l'équation différentielle $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)y = 0$ et que (v_i) est une base de l'ensemble des solutions, alors si on remet cette équation différentielle sous la forme d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1, le wronskien de la base des solutions s'écrit

$$\forall t \in \ \mathbb{R}, w(t) = \begin{vmatrix} v_1(t) & \ldots & v_n(t) \\ v_1'(t) & & v_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{(n)}(t) & \ldots & v_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} \tag{27}$$

Proposition 2.1. *Soit l'équation différentielle $X' = A(t)X$ et soient V_i n solutions. Le rang des vecteurs $(V_1(t), \ldots, V_n(t))$ est indépendant de t.*

Démonstration. Soit S l'ensemble des solutions de l'équation. Alors d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout t,

$$\Phi_t : S_E \to \mathbb{R}^n, V \mapsto V(t) \tag{28}$$

est un isomorphisme. Il conserve donc le rang. □

Corollaire 2.3. *Soient V_i n solutions de $X' = A(t)X$. S'il existe t_0 tel que l'évaluation du wronskien w en t_0 soit non nulle, alors le wronskien ne s'annule jamais. Si en revanche le wronskien s'annule en un point, alors il est nul partout.*

Application. Soit l'équation $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. Supposons que l'on connaisse une solution u de cette équation différentielle.

1. Soit v une solution linéairement indépendante de u. Montrer que le wronskien associé obéit à une équation différentielle linéaire d'ordre 1. La résoudre.
2. En déduire que v obéit à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
3. Application : en remarquant que $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est solution, résoudre $(t^2 + 1)y'' - y' - t^2 y = 0$.

Solution.

1. En dimension 2, $w = uv' - u'v$ et $w' = uv'' - u''v$. D'autre part, on a

$$u(v'' + pv' + qv) - v(u'' + pu' + qu) = 0 \tag{29}$$

autrement dit, $w' + pw = 0$, d'où $\exists a \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, w(t) = a \exp\left(-\int_0^t p(u)\ \mathrm{d}u\right)$.

2. Connaissant u, il suffit de résoudre l'équation d'ordre 1 $uv' - u'v = \exp\left(-\int_0^t p(u)\ \mathrm{d}u\right)$. Cette solution sera nécessairement linéairement indépendante de u puisque le deuxième membre de l'équation différentielle ne s'annule jamais.

3. En utilisant la méthode ci-dessus, on trouve que

$$w(t) = \exp\left(\int^t \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{atan}\,t} \tag{30}$$

Si on cherche u linéairement indépendante de exp solution, alors on aura nécessairement

$$u'(t) - u(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{atan}\,t - t} \tag{31}$$

Si on cherche une solution par variation de la constante, en écrivant $u(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^t$, on obtient

$$\lambda'(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{atan}\,t - 2t} \tag{32}$$

donc une solution possible est $\lambda(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{atan}\,u - 2u}\ \mathrm{d}u$.