

Méthodes théoriques pour la mécanique céleste

Étudiant :

Léo Bernus
Observatoire de Paris
M2 AAIS DSG

Enseignants :

Jacques Laskar
Gwenaél Boué
Philippe Robutel
Jacques Féjoz
IMCCE

4 juillet 2016

Table des matières

Introduction	5
1 Mécanique de Lagrange	7
1.1 Fondements de la mécanique : principe de moindre action	7
1.2 Fonction de Lagrange, équations d'Euler-Lagrange	8
1.3 Coordonnées généralisées, multiplicateurs de Lagrange	10
1.4 Fonction de Lagrange d'une particule libre	11
1.5 Fonction de Lagrange d'une particule dans un potentiel	13
1.6 Théorème de Noether	13
1.6.1 Cas le plus fréquent : invariance	13
1.6.2 Théorème de Noether généralisé	15
1.6.3 Exemples de lois de conservation	16
1.6.4 Invariance de Galilée et barycentre	18
2 Fonction de Hamilton, équations de Hamilton	20
2.1 Transformation de Legendre	20
2.1.1 Définition	20
2.1.2 Cas de plusieurs variables	20
2.1.3 Exemple préliminaire	21
2.2 Fonction de Hamilton, équations de Hamilton	22
2.3 Équations de Hamilton	22
2.4 Exemple hyper important : le pendule simple	23
2.4.1 Portrait de phase	23
2.4.2 Période du pendule	25
2.4.3 Au voisinage de l'équilibre	28
2.4.4 Domaines de stabilité	30
3 Transformations symplectiques	31
3.1 Transformation canonique	31
3.2 Forme symplectique	32
3.3 Fonction génératrice	33
3.4 Exemples ultra classiques et hyper importants	34
3.4.1 Translation	34
3.4.2 Changement de variables action-angle	34
3.4.3 Passage en complexes	35
3.4.4 Transformation linéaire	35

3.5	Espace des phases étendu : fonction de Hamilton dépendant du temps	36
3.5.1	Extension de l'espace des phases et de la fonction de Hamilton	37
3.5.2	Pendule tournant	37
4	Flot de Hamilton	39
4.1	Crochets de Poisson	39
4.1.1	Minimum vital	39
4.1.2	Matrice de Poisson	41
4.2	Flot d'un système dynamique	41
4.2.1	Introduction au flot de Hamilton	42
4.2.2	Symplecticité du flot de Hamilton	42
4.3	Dérivée de Lie, développement du flot	45
4.3.1	Dérivée et crochets de Lie	45
4.3.2	Développement de Taylor du Flot de Hamilton	46
4.4	Application : intégrateur symplectique	47
4.4.1	Introduction : un intégrateur non symplectique	47
4.4.2	Construction théorique de l'intégrateur symplectique	47
5	Théorèmes dont la puissance destructrice terrifie les fonctions de Hamilton	52
5.1	Introduction	52
5.2	Les immenses théorèmes qui transcendent la réalité	53
5.3	Applications : dynamique des systèmes intégrables sur le tore	56
5.3.1	Dimension 1 : dynamique sur \mathbb{T}	56
5.3.2	Dimension 2 : dynamique sur \mathbb{T}^2	57
6	Perturbations, dynamique des systèmes non intégrables, chaos	61
6.1	Introduction	61
6.2	Système dynamique perturbé	61
6.2.1	Résolution à l'ordre 1	61
6.2.2	Résolution à l'ordre 2, idées pour un ordre quelconque	64
6.3	Premiers pas vers le chaos : un exemple	65
6.3.1	Le satellite triaxial	65
6.3.2	Résonances spin-orbite	65
6.4	Système quasi-intégrable : dynamique lentement variable	67
A	Géométrie hamiltonienne	69
A.1	Cadre géométrique	69
A.1.1	Espace des phases	69
A.1.2	Vecteurs, base naturelle	70
A.2	Formes différentielles	71
A.2.1	Algèbre extérieure	71
A.2.2	Formes différentielles sur une variété différentiable	73
B	Le problème à deux corps, ou de Kepler	76
B.1	Introduction	76
B.2	Équation spatiale du mouvement	77
B.2.1	Invariance par translation, réduction à une particule	77

B.2.2	Invariance par rotation et moment cinétique	79
B.2.3	Vecteur de Lagrange-Laplace-Runge-Lenz-Hermann-Hamilton-Gibbs-Bernoulli	79
B.2.4	Trajectoires spatiales	80
B.3	Mouvement horaire sur les trajectoires	81
B.3.1	Loi des aires	81
B.3.2	Équation de Kepler	82
B.3.3	Position spatiale de l'astre	83
B.3.4	Vitesse de l'astre	83
B.3.5	Énergie	84
B.4	Coordonnées elliptiques	84
B.4.1	Éllipse dans l'espace	84
B.4.2	Changement de repère	85
B.5	Calculs de moyennes	86
B.5.1	Changements de variables	86
B.5.2	Quelques exemples de calculs de moyennes	86
B.5.3	Application	86
B.6	Développements en série	86
C	Algèbre de Lie sur les variétés	87
C.1	Représentation continue d'un groupe sur une variété	87
C.2	Générateur infinitésimal	88
C.3	Crochets de Lie	88
D	Application : le problème à trois corps hiérarchique	89
D.1	Fonction de Hamilton	89
D.2	Réduction du barycentre : variables de Jacobi	89
D.3	Fonction perturbatrice : développements	91
D.4	Moyennisation de la fonction perturbatrice	93
D.4.1	Quelques vecteurs	93
D.4.2	Moyennisation de la fonction perturbatrice	93
D.5	La fin de la guerre	94
D.5.1	Joyeuse coïncidence	94
D.5.2	Réduction du noeud	94
D.5.3	Plan de Laplace	95
D.5.4	La victoire	95
E	Le problème à 4 corps	96

Introduction

Ce document rassemble un ensemble d'outils théoriques utiles pour comprendre la mécanique céleste qui me furent enseignés pendant mon année de M2 à l'Observatoire de Paris ; ce texte rassemble surtout le cours donné par Jacques Laskar et Gwenaël Boué, mais je ne me suis pas privé de l'étendre à certaines notions abordées également dans les cours donnés par Philippe Robutel et par Jacques Féjoz ; certains éléments sont même tirés du cours donné en 2013 au M1 de physique de l'ENS Cachan par Alain Comtet. Ce document continue d'être perfectionné au fur et à mesure que je vieillis. Le présent ouvrage se rapproche plus d'un "cours de calculs" que d'un cours de mécanique céleste. Cela signifie que nous allons donner des outils mathématiques pour effectuer des calculs théoriques en mécanique céleste. Ma façon de voir le calcul, et je pense que c'était également celle de Jacques Laskar et Gwenaël Boué pendant le déroulement de leur cours, est qu'il faut "faire l'effort d'être flemmard". J'entends par là qu'une étude approfondie des mathématiques et des méthodes de calculs, bien qu'elle nécessite des efforts intellectuels intenses, est libératrice pour "trivialiser" les problèmes de la science physique¹. Le physicien qui a une connaissance solide des outils mathématiques dispose d'outils surpuissants pour tuer les problèmes de physique en un clin d'œil, alors que celui qui a négligé les mathématiques dans sa jeunesse n'aura de cesse de s'en vouloir s'il veut comprendre en profondeur les théories physiques.

L'art de la physique est un va-et-vient incessant entre le concret et l'abstrait. Prévenons tout de suite que ce cours s'oriente plus vers l'abstrait que le concret. Certains exemples illustreront le cours, mais la meilleure façon d'illustrer ces notions est de se poser soi-même ses propres problèmes en observant la nature ; puisse ce cours vous aider à résoudre vos propres problèmes de physique.

Toute personne disposant d'une licence de physique ou de mathématiques devrait pouvoir comprendre ce document. Il est cependant recommandé, pour suivre ce cours agréablement, d'avoir des notions basiques de calcul et géométrie différentielles. Les notions géométrie différentielle dans les variétés sont introduites au fur et à mesure ; cependant, n'étant pas mathématicien de formation, il est possible que les parties purement mathématiques soient moins facilement compréhensibles. L'annexe A donne un peu plus que les bases mathématiques nécessaires pour comprendre ce cours.

Dans le chapitre 1, nous exposons le formalisme de Lagrange de la mécanique. L'annexe B est une façon un peu originale de traiter le problème de Kepler en n'utilisant que la mécanique de Lagrange. Le but est surtout de s'entraîner à utiliser les méthodes vues dans le premier chapitre. Il s'ensuit un chapitre 2 sur les fondements du formalisme de Hamilton. Le chapitre 3 expose le cœur de ce cours : les transformations symplectiques. En quelques mots, les transformations symplectiques sont des changements de variables qui laissent invariantes les équations du mouvement. La symplecticité d'une transformation a un lien profond avec la structure d'une fonction de Hamilton.

1. C'était également le point de vue de Lev Landau, cf. sa biographie dans le tome 1 de son cours de physique théorique [4]

L'intérêt des changements de variables n'est plus à présenter ; au lieu d'effectuer des calculs horribles, nous préférons trouver le changement de variables qui tue le problème. Le chapitre 4 traite du flot de Hamilton. Cela permet de décrire formellement l'évolution d'un système mécanique. Le lien étroit avec les transformations symplectiques vient de ce que le flot de Hamilton est lui-même une transformation symplectique continue dans le temps. Le chapitre 5 expose des théorèmes surpuissants ; ces théorèmes permettent de décrire la dynamique des systèmes intégrables. Enfin, le chapitre 6 explique comment traiter les systèmes dynamiques quasi-intégrables, et amorce le début d'un exposé sur la dynamique chaotique. L'annexe D expose une application importante de tout ce formalisme en montrant un exemple de problème à trois corps.

Il va de soi que je suis le seul responsable de toutes les erreurs ou coquilles présentes dans ce document. Si vous voulez contribuer à la correction et l'amélioration de ce cours, merci de m'envoyer un message à leo.bernus@gmail.com.

Chapitre 1

Mécanique de Lagrange

Si la formulation de Lagrange et de Hamilton de la mécanique n'ont plus de secrets pour vous, passez directement au chapitre 3.

1.1 Fondements de la mécanique : principe de moindre action

Nous allons reformuler la mécanique classique. En physique moderne, le point de départ de toute théorie - la mécanique classique ne fait pas exception - se résume à l'affirmation suivante : "tout système physique tend à être le plus flemmard possible". Cette façon un peu provocatrice et simpliste de dire les choses peut s'exprimer plus formellement de la façon suivante :

Postulat 1.1.1. *Soit un système physique isolé qui évolue entre t_1 et t_2 , entièrement caractérisé par les coordonnées réelles $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \gamma(t)$. Alors il existe une quantité réelle S que nous nommons action, fonctionnelle différentiable¹ des coordonnées et des instants t_1 et t_2 , telle que la trajectoire réellement suivie par le système physique rende l'action extrémale.*

Autrement dit, la trajectoire réelle suivie par le système physique obéit à l'équation suivante :

$$\boxed{\delta S = 0} \tag{1.1}$$

où δS est la variation au premier ordre de l'action entre deux chemins.

Il me semble que quelques années de pratique sont nécessaires pour commencer à sentir et intuitiver ce postulat, voire plus : y croire. Quoi qu'il en soit, c'est le point de départ de tout ce qui sera écrit dans ce cours. Cet ouvrage ne prétend pas être un exposé exhaustif du calcul variationnel, au contraire nous allons plutôt voir quelles en sont les conséquences pour la mécanique classique.

Remarquons que ce postulat est extrêmement général et peut décrire formellement absolument tout système physique : un être humain, l'Univers, le Système Solaire, une cellule, etc². Tant que je n'ai pas précisé ce qu'étaient les coordonnées, je peux dire absolument n'importe quoi. La puissance

1. Selon Arnold : une fonctionnelle S est différentiable s'il existe deux autres fonctionnelles F et R telles que pour tous chemins γ et h , et pour tout réel ε , nous avons $\delta S = S(\gamma + \varepsilon h) - S(\gamma) = F + R$, où F est linéaire en ε et $R = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

2. Par "formellement" j'entends que je n'ai bien évidemment pas la prétention d'être capable, en pratique, de décrire exactement ces systèmes d'une complexité qui dépasse les capacités de compréhension d'un cerveau humain !

de cet aspect généraliste est que nous pouvons appliquer cette théorie dans absolument tous les domaines. La relativité générale, la mécanique quantique, et la physique des particules ne font pas exception, notamment grâce aux travaux remarquables de Feynman et Schwinger sur l'intégrale de chemin pour ce qui concerne les deux derniers domaines évoqués. En fait, tout l'art du physicien revient à déterminer quelles sont les variables pertinentes à incorporer dans les coordonnées, et à deviner l'expression de l'action en fonction de ces variables.

Terminons par remarquer que le calcul variationnel est extrêmement fructueux pour passer de la mécanique classique à la mécanique quantique. Le passage réciproque fait encore l'objet de recherches contemporaines. De plus, toutes les théories qui tentent d'unifier la théorie de la relativité générale et la mécanique quantique font appel au principe variationnel : les théoriciens essaient de deviner quelle est l'expression de l'action générale qui décrit à la fois la théorie quantique et relativiste. Il est donc évident que la compréhension de la mécanique analytique est indispensable pour étudier la physique théorique de haut niveau.

1.2 Fonction de Lagrange, équations d'Euler-Lagrange

L'action est une fonctionnelle du chemin suivi par le système physique (les coordonnées, l'instant de départ, et celui d'arrivée). Dans presque tous les cas de la physique, il est envisageable de postuler que S est une fonction continue du temps. Il est donc naturel d'introduire une autre fonctionnelle, la *fonction de Lagrange*, L , telle que l'action soit son intégrale³. Dans le cas de la mécanique, il est presque toujours possible de limiter les coordonnées à des repérages dans l'espace (sans préciser le système de coordonnées pour le moment) et à leurs dérivées premières par rapport au temps. Nous effectuons cette réduction car en mécanique classique, la donnée des positions et des vitesses permet de caractériser entièrement un système physique⁴. Comme la mécanique classique est le cadre de notre étude nous nous limiterons à cela dans toute la suite, mais dans une physique plus générale il serait tout-à-fait envisageable de considérer des fonctions de Lagrange qui dépendent des dérivées à tous les ordres. Ainsi, la fonction de Lagrange est une fonction des variables qui repèrent les objets physiques dans l'espace et de leurs dérivées premières par rapport au temps. S'il y a besoin de n nombres pour repérer spatialement les objets physiques, nous notons q ce n -uplet de nombres, et \dot{q} leurs dérivées premières.

Sous toutes ces hypothèses, l'action le long d'un chemin $\gamma : t \in [t_1, t_2] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ se définit comme suit :

$$S(\gamma, t_1, t_2) = \int_{\substack{t=t_1 \\ q=\gamma}}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt. \quad (1.2)$$

La notation $q = \gamma$ en dessous du signe somme signifie que l'intégration se fait le long du chemin γ . Pour éviter la lourdeur nous sous-entendrons cette notation et ne la récrirons plus.

Il est souvent plus simple de travailler avec des fonctions de Lagrange que des actions. Voyons ce que le postulat 1.1.1 implique sur la fonction de Lagrange. Afin de différencier la fonctionnelle action, considérons deux chemins : l'un, γ , et l'autre, $\gamma + \varepsilon h$, où $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et h est un chemin vérifiant $h(t_1) = h(t_2) = 0$: nous demandons que les trajectoires coïncident au début et à la fin. L'idée que nous avons derrière la tête est la suivante : quelle est le chemin le moins fatiguant pour aller d'un

3. dans le cas où S ne serait pas continue dans le temps, il faudrait considérer que L est dans l'espace des distributions.

4. Ceci provient du postulat de Galilée sur l'existence des référentiels galiléens.

point A à un point B ? La variation de l'action doit être nulle au premier ordre en ε au voisinage du chemin qui la rend extrémale. Différentions l'action :

$$\delta S = S(\gamma + \varepsilon h, t_1, t_2) - S(\gamma, t_1, t_2) = \int_{t=t_1}^{t_2} \left(L(q(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t) - L(q(t), \dot{q}(t), t) \right) dt. \quad (1.3)$$

En allégeant les notations et en ne notant plus toutes les dépendances des fonctions, nous obtenons :

$$\delta S = \varepsilon \int_{t=t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h} \right) dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (1.4)$$

$$= \varepsilon \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h \right]_{t_1}^{t_2} - \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) h dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (1.5)$$

en effectuant une intégration par parties. En dimension n , des quantités comme $h \partial L / \partial q$ représentent en réalité des produits scalaires du type $\sum_i h_i \partial L / \partial q_i$. Si les extrémités sont fixées, alors $h(t_1) = h(t_2) = 0$ et le premier terme entre crochets est nul. Comme la trajectoire h est arbitraire, nous sentons venir le théorème suivant :

Théorème 1.2.1. (*Équations d'Euler-Lagrange*)

Soit S une action et L la fonction de Lagrange de cette action définie par :

$$S(\gamma, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt. \quad (1.6)$$

La trajectoire γ rend l'action extrémale parmi les courbes d'extrémités fixes en t_1 et t_2 si et seulement si

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0} \quad (1.7)$$

le long de γ . Ces équations se nomment équations d'Euler-Lagrange.

Démonstration. Entre les calculs qui précèdent et le théorème, il manque la preuve que

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) h(t) dt = 0 \quad \forall h \in C^0([t_1, t_2]) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (1.8)$$

Remarquons que comme la fonction h est arbitraire, nous pouvons nous ramener au cas à une dimension en choisissant $h_i \neq 0$ et $h_j = 0 \forall j \neq i$. Démontrer ce théorème revient alors à prouver l'affirmation suivante : si f est continue sur $[t_1, t_2]$ et si pour toute fonction h continue, nous avons

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) h(t) dt = 0 \quad (1.9)$$

alors f est nulle sur tout l'intervalle. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe t_0 dans $]t_1, t_2[$ tel que $f(t_0) \neq 0$, et par exemple, supposons $f(t_0) > 0$. Comme f est continue, il existe un voisinage de t_0 , $]t - a, t + a[$ tel que :

$$\forall t \in]t - a, t + a[, f(t) > 0. \quad (1.10)$$

Il n'est alors pas difficile de se convaincre que nous pouvons trouver une fonction h continue qui vérifie :

$$\forall t \notin]t - a, t + a[, h(t) = 0, \quad \text{et} \quad \forall t \in]t - a, t + a[, h(t) > 0. \quad (1.11)$$

Dans ce cas, la fonction $t \mapsto f(t)h(t)$ est strictement positive sur $]t - a, t + a[$ et nulle partout ailleurs, et donc l'intégrale est strictement positive, ce qui est absurde, donc $f(t_0) = 0$. t_0 a été choisi arbitrairement, nous en déduisons que f est nulle sur $]t_1, t_2[$, donc $[t_1, t_2]$ en vertu de sa continuité. CQFD

Quelques remarques sur la fonction de Lagrange s'imposent.

1. Multiplier la fonction de Lagrange par une constante ne change pas les équations du mouvement. Cela correspond au choix des unités. La plupart du temps, nous choisissons la dimension d'une énergie.
2. Les équations du mouvement ne sont pas changées si nous ajoutons à la fonction de Lagrange la dérivée totale d'une fonction des coordonnées. En effet, si nous posons $L' = L + df(q, t)/dt$, l'action modifiée correspondante ne différera que de $f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1)$, qui manifestement, ne dépend pas du chemin suivi par le système physique. En électromagnétisme, cela correspond à un changement de choix de jauge. En mécanique, le choix de cette fonction peut être utile pour simplifier la forme de la fonction de Lagrange.
3. L'action est additive. En effet, si deux systèmes qui n'interagissent pas sont décrits par les actions S_1 et S_2 , alors la réunion des systèmes est décrite par l'action $S_1 + S_2$. Il en va de même pour leurs fonctions de Lagrange.
4. Les équations d'Euler-Lagrange sont des équations différentielles du second ordre des coordonnées. Si nous sommes capables formellement de résoudre ces équations, nous pouvons connaître la trajectoire suivie par les objets physiques.

1.3 Coordonnées généralisées, multiplicateurs de Lagrange

Sans le dire, nous utilisons depuis le début des *coordonnées généralisées* pour décrire nos objets physiques. Les coordonnées généralisées sont simplement un ensemble de nombres suffisant pour caractériser l'état d'un système physique. En mécanique, il y a bien sûr un lien entre les coordonnées généralisées et les positions des objets⁵, mais, très souvent, des symétries du système, ou encore des contraintes entre plusieurs coordonnées spatiales, nous invitent à choisir des coordonnées astucieuses. Nous voyons d'ailleurs que l'un des avantages de la mécanique de Lagrange est que la forme des équations ne dépend pas du choix des coordonnées généralisées. Mais le concept de coordonnées généralisées ne s'applique pas qu'à la mécanique. En effet, il est possible de formuler la thermodynamique à l'aide du principe variationnel. Alors, les systèmes thermodynamiques ont pour coordonnées généralisées des paramètres tels que la pression, le volume, etc.

L'excellent livre [3] expose une multitude d'exemples qui permettent de comprendre en profondeur le concept de coordonnées généralisées. Peut-être que je le ferai un jour...

Parfois, il arrive que nous utilisons plus de coordonnées que nécessaires pour décrire un système physique. Cela se caractérise par un ensemble de contraintes sur les coordonnées. S'il y a m contraintes, alors il existe m fonctions telles que $f_m(q, \dot{q}) = 0$. En thermodynamique il s'agit en

5. En fait, les positions des objets *sont* des coordonnées généralisées particulières.

général de l'équation d'état du fluide que l'on étudie. Par exemple une mole de gaz parfait est entièrement caractérisée par sa pression, son volume et sa température, mais deux de ces trois variables suffisent à décrire ce gaz puisque l'équation d'état les relie. Il existe des situations similaires en mécanique. Un cylindre qui roule sur un plan nécessite deux angles plus la position de son centre d'inertie par exemple pour être entièrement caractérisé. Mais si nous ajoutons la contrainte qu'il roule sans glisser, une seule variable suffit à décrire sa dynamique. Que s'est-il passé entre ces deux étapes ?

Parfois, il est possible d'utiliser les contraintes et d'éliminer directement les variables inutiles de la fonction de Lagrange. Mais ce n'est pas toujours le cas. Il existe plusieurs classes de contraintes. Pour ce paragraphe nous étudierons des équations de liaisons. C'est-à-dire que nous supposons que les m contraintes peuvent s'exprimer sous la forme

$$\sum_{i=1}^n c_{ki}(q) \dot{q}_i = 0, \quad k \in \llbracket 1, m \rrbracket. \quad (1.12)$$

Si le membre de gauche est la dérivée totale d'une fonction, on dit que les liaisons sont holonomes. En intégrant ces équations on trouve des relations entre les coordonnées et non leurs dérivées. Si ce n'est pas le cas, alors elles ne peuvent pas être intégrées pour exprimer une coordonnée en fonction des autres et éliminer des variables jusqu'à décrire le système physique avec aussi peu de variables qu'il n'y a réellement de degré de liberté ($n - m$ en principe), et il s'agit de liaisons non holonomes. Dans ce cas, nous n'avons pas d'autre choix que de décrire le système physique avec des variables non indépendantes en nombre supérieur à son réel degré de liberté. Rappelons que pour une variation des coordonnées δq , l'action varie de

$$\delta S = - \int \delta q \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) dt + \mathcal{O}(\delta q^2). \quad (1.13)$$

Si pendant δt les coordonnées varient de δq , en multipliant les équations (1.12) par δt nous obtenons

$$\sum_{i=1}^n c_{ki}(q) \delta q_i = 0. \quad (1.14)$$

On peut alors ajouter les m équations (1.12) à l'action sans modifier l'intégrale en multipliant chaque contrainte par $\lambda_k(q)$, une fonction inconnue des coordonnées. En exigeant que l'action ne varie pas au voisinage des trajectoires physiques, nous obtenons les équations d'Euler-Lagrange avec contraintes :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^m \lambda_k(q) c_{ki}(q). \quad (1.15)$$

Avec les équations de liaisons (1.12) cela constitue un ensemble suffisant pour déterminer l'évolution des coordonnées ainsi que les $\lambda_k(q)$.

[Je mettrai un exemple un peu plus tard.]

1.4 Fonction de Lagrange d'une particule libre

À présent nous avons donné tous les postulats nécessaires pour construire toutes les théories physiques (non quantiques). Tout l'art du physicien consiste à deviner la forme que prennent les

fonctions de Lagrange⁶ selon une situation donnée. Une fois que ceci est effectué, pour être capable de déterminer l'évolution future d'un système donné, il suffit, formellement, d'intégrer les équations d'Euler-Lagrange. Un des plus beaux exemples de cet art de deviner les fonctions de Lagrange est l'expression de la fonction de Lagrange d'une particule libre en mécanique galiléenne.

Nous choisissons les coordonnées cartésiennes. La particule n'interagissant avec rien, la nature du mouvement est indépendante de la date considérée : si nous reproduisons l'expérience plus tard, le résultat doit être le même. La fonction de Lagrange doit donc être invariante par translation dans le temps, ou autrement dit, la fonction de Lagrange ne dépend pas explicitement du temps : $\partial L/\partial t = 0$. Si nous postulons que l'espace est homogène, il en est de même pour la position de la particule : la fonction de Lagrange ne dépend pas de la position \vec{r} . Si nous postulons que l'espace est isotrope, en l'absence d'interaction avec un environnement, la fonction de Lagrange ne doit pas dépendre de la direction du mouvement, donc de la direction et du sens du vecteur vitesse \vec{v} . La fonction de Lagrange doit donc être une fonction du carré scalaire de la vitesse : il existe une fonction d'une variable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, telle que la fonction de Lagrange s'exprime comme cette fonction évaluée en le carré scalaire de la vitesse :

$$L : \quad \mathbb{R}^7 \quad \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{r}, \vec{v}, t) \quad \mapsto f(\vec{v}^2).$$

En écrivant les équations d'Euler-Lagrange sur une telle fonction de Lagrange, nous retrouverions⁷ $\ddot{\vec{v}} = 0$ et donc un mouvement rectiligne uniforme. Mais allons un peu plus loin pour donner la forme explicite de la fonction de Lagrange. Nous exigeons l'invariance de la fonction de Lagrange par une transformation de Galilée⁸. Pour cela, considérons un changement de repère galiléen infinitésimal, l'un se déplaçant à une vitesse $\vec{\varepsilon}$ par rapport à l'autre. Alors la nouvelle fonction de Lagrange s'écrit $\tilde{L} = f((\vec{v} + \vec{\varepsilon})^2)$. Au premier ordre en $|\vec{\varepsilon}|$, nous obtenons :

$$\tilde{L} = L + f'(\vec{v}^2)2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (1.16)$$

où f' est la dérivée première de f par rapport à son unique variable. Les équations du mouvement ne seront les mêmes que si les deux fonctions de Lagrange diffèrent d'une dérivée totale par rapport au temps. Il faut donc qu'il existe une fonction des coordonnées $g(\vec{r})$ telle que

$$2f'(\vec{v}^2)\vec{\varepsilon} \cdot \vec{v} = \frac{dg}{dt} = \frac{dg}{d\vec{r}} \cdot \vec{v}. \quad (1.17)$$

g n'est fonction que des coordonnées : $\partial_t g = 0$ puisque \tilde{L} ne doit pas dépendre du temps ; de même, $\partial_{\vec{v}} g = 0$, sinon, la dérivée totale de g par rapport au temps ferait intervenir des accélérations, or, les fonctions de Lagrange en mécanique classique ne font intervenir que des positions et des vitesses. Comme la relation (1.17) est vraie pour des vitesses arbitraires, elle conduit à

$$2f'(\vec{v}^2)\vec{\varepsilon} = \frac{dg}{d\vec{r}}. \quad (1.18)$$

Or, comme g ne dépend que des positions, sa dérivée par rapport aux coordonnées ne saurait dépendre des vitesses. Ainsi, la dérivée de f par rapport à \vec{v}^2 ne dépend pas de la vitesse, mais pas des

6. ou, de façon équivalente, les actions.

7. à moins que f ne soit une fonction constante. Nous invitons le lecteur à le démontrer.

8. Ceci constitue le principe de relativité galiléenne : les lois de la physiques doivent être invariantes par changement de référentiel galiléen.

positions non plus en vertu de l'invariance par translation. Nous en déduisons que $2f'(\vec{v}^2)$ est une constante. Nous définissons la masse⁹ de la particule comme la valeur de cette constante. En intégrant et en choisissant nulle la constante d'intégration (deux fonctions de Lagrange différentes d'une constante donnent les mêmes trajectoires), nous trouvons l'expression de la fonction de Lagrange d'une particule libre :

$$L(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2. \quad (1.19)$$

1.5 Fonction de Lagrange d'une particule dans un potentiel

Il serait très tentant d'écrire que la fonction de Lagrange d'une particule soumise à un potentiel s'écrit $L = T - V$ où $T = mv^2/2$ est l'énergie cinétique, avec pour seule justification que les équations d'Euler-Lagrange redonnent bien la deuxième loi de Newton. Cette approche n'est pas satisfaisante si nous souhaitons reconstruire toute la mécanique uniquement à partir du principe de moindre action. Écrire une fonction de Lagrange comme étant la différence de l'énergie cinétique et d'un potentiel est la *définition* de ce qu'est un potentiel. En effet, nous pourrions imaginer une infinité de systèmes physiques dont les fonction de Lagrange ont des formes totalement hallucinantes qui ne séparent même pas énergie potentielle et énergie cinétique. Nous pouvons remédier à ce problème en définissant le potentiel ainsi : $V \equiv T - L$, où T est la fonction de Lagrange de la particule si elle était libre (que nous définissons alors comme l'énergie cinétique). En effet, si nous mettons absolument n'importe quoi dans le potentiel, nous pouvons obtenir absolument n'importe quelle fonction de Lagrange. Toute la suite consiste à deviner quelle est la forme d'un potentiel dans une situation donnée. J'ai employé le terme *deviner* et non *déterminer* car seule l'expérience et l'intuition peuvent nous guider pour écrire la forme d'un potentiel. En gravitation et en électrostatique, le fait que les potentiels varient en raison de l'inverse de la distance entre les particules constitue un postulat¹⁰.

1.6 Théorème de Noether

1.6.1 Cas le plus fréquent : invariance

Théorème incontournable de la mécanique. Nous en donnons ici une formulation assez intuitive. Pour une démonstration plus mathématique, se référer à la bible de la mécanique, l'ouvrage d'Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* [2]. L'idée générale du théorème de Noether est que toute invariance d'une fonction de Lagrange (donc d'une action) implique la conservation d'une certaine grandeur. Nous avons vu par exemple que dans le cas d'une particule libre, l'invariance par translation dans le temps, dans l'espace, et par rotation (isotropie de l'espace) entraînait la conservation de la vitesse, de l'énergie cinétique, et plus généralement de l'énergie. Nous allons généraliser ce résultat. Considérons un changement des coordonnées, notées q , de paramètre s :

$$\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.20)$$

$$(q, s) \mapsto \Phi(q, s). \quad (1.21)$$

9. Si nous choisissons les masses positives, les trajectoires du mouvement correspondront à des minima de l'action. Nous choisissons cette convention, qui va de pair avec la flemme naturelle du physicien : nous préférons minimiser notre action que la maximiser !

10. En fait, il est possible d'obtenir des causes plus fondamentales en ayant des considérations de théories des champs.

Nous imposons à ce changement de coordonnées d'être l'identité quand $s = 0$: $\Phi(\cdot, 0) = Id$. À l'ordre 1 en s , nous pouvons exprimer la variation de l'action en fonction de ce changement de coordonnées. En effet, la variation infinitésimale

$$\Phi(q, s) = q + s \left. \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right|_{s=0} + \mathcal{O}(s^2) \quad (1.22)$$

entraîne la variation d'action suivante (le même calcul a été fait dans la section 1.2) :

$$\delta S = -s \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) \left. \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right|_{s=0} dt + s \left[\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right|_{s=0} \right]_{t_1}^{t_2} + \mathcal{O}(s^2). \quad (1.23)$$

À présent, supposons que $q(t)$ soit une solution des équations d'Euler-Lagrange, donc une trajectoire physique. Alors le premier terme est nul. Ainsi, si l'action est invariante par la transformation $\Phi(\cdot, s)$ pour tout s , alors c'est aussi vrai pour les s infiniment petits. Si l'action est invariante par la transformation, les nouvelles coordonnées doivent aussi rendre l'action extrémale. Il s'ensuit que le deuxième terme est nul. Comme les instants t_1 et t_2 ont été choisis arbitrairement, nous en déduisons que la quantité entre crochets ne dépend pas du temps. Cela constitue le théorème de Noether :

Théorème 1.6.1. (*Noether simple*)

Si la fonction de Lagrange ou l'action d'un système physique est invariante par la transformation Φ :

$$\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.24)$$

$$(q, s) \mapsto \Phi(q, s), \quad (1.25)$$

différentiable par rapport à la variable s et qui vérifie $h(\cdot, 0) = Id$, alors la quantité

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right|_{s=0} \quad (1.26)$$

se conserve dans le temps. Autrement dit, c'est une intégrale première, ou encore, sa dérivée totale par rapport au temps est nulle.

Rappelons ce qu'est une dérivée totale. Soit une fonction $f : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}, (q, \dot{q}, t) \mapsto f(q, \dot{q}, t)$. La différentielle de cette fonction s'exprime ainsi :

$$df = \vec{\nabla} \cdot d\vec{X} = \partial_t f dt + \partial_q f dq + \partial_{\dot{q}} f d\dot{q}. \quad (1.27)$$

Si nous nous plaçons le long d'une trajectoire, alors les coordonnées (q, \dot{q}) dépendent du temps et nous pouvons tout dériver par rapport au temps (formellement, nous "divisons par dt ") :

$$\frac{df}{dt} = \partial_t f + \partial_q f \dot{q} + \partial_{\dot{q}} f \ddot{q}. \quad (1.28)$$

Une façon plus formelle d'exprimer le théorème de Noether est la suivante :

$$\boxed{\frac{\partial L(\Phi(q, s), \dot{\Phi}(q, s), t)}{\partial s} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right|_{s=0} = 0.} \quad (1.29)$$

1.6.2 Théorème de Noether généralisé

Parfois, des transformations ne laissent pas invariante la fonction de Lagrange, mais ont pour effet de lui ajouter la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction, proportionnelle à la variable de la transformation à l'ordre un :

$$L' = L(\Phi(q, s), \dot{\Phi}(q, s), t) = L(q, \dot{q}, t) + s \frac{df}{dt} + \mathcal{O}(s^2). \quad (1.30)$$

Supposons que q soit une trajectoire physique solution des équations d'Euler-Lagrange. En reprenant le calcul du paragraphe précédent, nous pouvons montrer facilement que la variation d'action correspondante est :

$$\delta S = -s \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial s} \Big|_{s=0} dt + s \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \Big|_{s=0} \right]_{t_1}^{t_2} + \mathcal{O}(s^2). \quad (1.31)$$

$$= s \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \Big|_{s=0} \right]_{t_1}^{t_2} + \mathcal{O}(s^2). \quad (1.32)$$

$$= s[f(q, t)]_{t_1}^{t_2} + \mathcal{O}(s^2). \quad (1.33)$$

Nous savons que deux fonctions de Lagrange différentes d'une dérivée totale donnent les mêmes trajectoires. Le calcul précédent nous donne :

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \Big|_{s=0} \right] (q(t_2), \dot{q}(t_2), t_2) - f(q(t_2), t_2) = f(q(t_1), t_1) - \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \Big|_{s=0} \right] (q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \quad (1.34)$$

Il s'ensuit que la quantité

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \Big|_{s=0} - f(q, t) \quad (1.35)$$

est une intégrale première. Nous venons de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.6.2. (Noether généralisé)

Si la fonction de Lagrange d'un système physique, par la transformation Φ :

$$\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.36)$$

$$(q, s) \mapsto \Phi(q, s), \quad (1.37)$$

différentiable par rapport à la variable s et qui vérifie $\Phi(\cdot, 0) = \text{Id}$, est changée à l'ordre un d'une dérivée totale, c'est-à-dire si :

$$L(\Phi(q, s), \dot{\Phi}(q, s), t) = L(q, \dot{q}, t) + s \frac{df(q, t)}{dt} + \mathcal{O}(s^2) \quad (1.38)$$

alors la quantité

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \Big|_{s=0} - f(q, t) \quad (1.39)$$

est une intégrale première.

Un exemple d'application de ce théorème est exposé dans l'annexe B.

1.6.3 Exemples de lois de conservation

Invariance par translation et impulsion

Prenons le cas particulier d'un système de N particules en interaction, indexés par des lettres majuscules $A, B, \dots \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Si ces particules sont en interaction deux à deux, alors nous pouvons postuler que le potentiel relatif à chaque couple de particules ne dépendra que du rayon vecteur séparant les deux points matériels : $V(\vec{r}_A, \vec{r}_B) \equiv V(\vec{r}_A - \vec{r}_B)$. Le potentiel total est la somme de toutes les interactions deux à deux des particules, et l'énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques de chaque particule. Ainsi, la fonction de Lagrange s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} \sum_A m_A \dot{r}_A^2 - \frac{1}{2} \sum_A \sum_{B \neq A} V(\vec{r}_A - \vec{r}_B). \quad (1.40)$$

Nous constatons que cette fonction de Lagrange est invariante par translation, autrement dit par la transformation suivante :

$$\begin{aligned} T_{\vec{a}} : \quad \mathbb{R}^{3N+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{3N} \\ (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, s) &\mapsto (\vec{r}_1 + s\vec{a}, \dots, \vec{r}_N + s\vec{a}) \end{aligned}$$

Ainsi, la quantité suivante est une intégrale première :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial T_{\vec{a}}}{\partial s} = \left(\sum_A m_A \dot{\vec{r}}_A \right) \cdot \vec{a} \quad (1.41)$$

Comme le vecteur \vec{a} a été choisi arbitrairement, nous en déduisons que la quantité de mouvement totale

$$\vec{P} = \sum_A m_A \vec{v}_A \quad (1.42)$$

est une intégrale première.

En anticipant un peu sur le chapitre suivant, nous pouvons dire quelque chose de plus général. Si une fonction de Lagrange quelconque est invariante par translation, alors de même, nous trouvons que

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot a \quad (1.43)$$

est une intégrale première. Comme le vecteur a est arbitraire, nous en déduisons que le moment conjugué total

$$P = \sum_A \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} \quad (1.44)$$

est une intégrale première.

Invariance par rotation et moment cinétique

Le plus souvent, les potentiels d'interaction entre deux particules ne dépendent que de la distance qui les sépare et non de la direction ; cela traduit l'isotropie de l'espace. L'énergie cinétique, quant à elle, ne fait intervenir que le carré scalaire de la vitesse, donc est également indépendante du sens

du mouvement. Il est donc intéressant de chercher les conséquences de ce type d'invariance. Inspirés par les considérations qui précèdent, il est naturel d'écrire la fonction de Lagrange qui suit :

$$L = \frac{1}{2} \sum_A m_A \vec{v}_A^2 - \frac{1}{2} \sum_A \sum_{B \neq A} V(|\vec{r}_A - \vec{r}_B|). \quad (1.45)$$

À présent considérons la transformation suivante, qui coïncide avec une rotation d'angle s et de direction \vec{n} à l'ordre 1 en s :

$$\begin{aligned} R_{\vec{n}} : \quad \mathbb{R}^{3N+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{3N} \\ (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, s) &\mapsto (\vec{r}_1 + s\vec{n} \wedge \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N + s\vec{n} \wedge \vec{r}_N). \end{aligned}$$

La fonction de Lagrange est invariante par cette transformation à l'ordre 1 en s . Le théorème de Noether donne :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial R_{\vec{n}}}{\partial s} = (m_A \vec{v}_A)_{A \in \llbracket 1, N \rrbracket} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{r}_A)_{A \in \llbracket 1, N \rrbracket} = \sum_A m_A \vec{v}_A \cdot (\vec{n} \wedge \vec{r}_A) = \text{const.} \quad (1.46)$$

En effectuant des permutations circulaires dans le produit mixte, nous en déduisons que la quantité

$$I = \vec{n} \cdot \sum_A \vec{r}_A \wedge (m_A \vec{r}_A) \quad (1.47)$$

est une intégrale première. Comme le vecteur \vec{n} a une direction arbitraire, nous en déduisons que le moment cinétique total

$$\vec{L} = \sum_A \vec{r}_A \wedge (m_A \vec{v}_A) \quad (1.48)$$

est une intégrale première.

Invariance par translation temporelle, énergie

Un des postulats de la physique est que les propriétés de l'Univers ne dépendent pas de la date considérée ; les lois de la physique sont les mêmes quelle que soit la date. Autrement dit, si nous effectuons une expérience à une date t_1 et que nous la répétons à la date t_2 dans les mêmes conditions, le résultat doit être le même. Ces affirmations sont extrêmement bien vérifiées aux échelles de temps humaines. Aux échelles astronomiques également. Aux échelles cosmologiques le débat est encore ouvert ; certaines théories de relativité générale modifiée prédisent une variation de la constante de gravitation universelle aux échelles cosmologiques.

L'invariance dans le temps joue un rôle particulier en mécanique classique car pour le moment nous ne considérons pas le temps comme une coordonnée généralisée ; ceci ne nous prive pas de réfléchir. Si la fonction de Lagrange ne dépend pas explicitement du temps, nous pouvons écrire :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \quad (1.49)$$

donc la quantité

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \quad (1.50)$$

est une intégrale première. Notons que pour la fonction de Lagrange (1.40), nous retrouvons que l'énergie mécanique totale

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_A m_A v_A^2 + \frac{1}{2} \sum_A \sum_{B \neq A} V(\vec{r}_A, \vec{r}_B) \quad (1.51)$$

est conservée.

1.6.4 Invariance de Galilée et barycentre

Enfin, donnons un exemple du théorème de Noether généralisé. Soit la fonction de Lagrange suivante :

$$L = \frac{1}{2} \sum_A m_A v_A^2 + \frac{1}{2} \sum_A \sum_{B \neq A} V(\vec{r}_A - \vec{r}_B). \quad (1.52)$$

Soit $G_{\vec{V}}$ la transformation de Galilée à un paramètre dans la direction \vec{V} :

$$G_{\vec{V}} : \quad \mathbb{R}^{N+2} \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^{N+1} \\ ((\vec{r}_A)_{A \in [1, N]}, t, s) \quad \mapsto \quad ((\vec{r}_A + s\vec{V}t)_{A \in [1, N]}, t). \quad (1.53)$$

Calculons la variation de la fonction de Lagrange sous cette transformation.

$$L' = \frac{1}{2} \sum_A m_A (v_A^2 + s^2 V^2 + 2s\vec{v}_A \cdot \vec{V}) + \frac{1}{2} \sum_A \sum_{B \neq A} V(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \quad (1.54)$$

$$= L + s \frac{d}{dt} \left(\sum_A m_A \left[\frac{1}{2} s V^2 t + \vec{r}_A \cdot \vec{V} \right] \right) \quad (1.55)$$

$$= L + s \frac{d}{dt} \sum_A m_A \vec{r}_A \cdot \vec{V} + \mathcal{O}(s^2). \quad (1.56)$$

Remarquons que l'équation (1.55) montre que les équations du mouvement de la fonction de Lagrange (1.52) sont invariantes sous les transformations de Galilée, même non infinitésimales. D'après le théorème de Noether généralisé, la quantité suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial G_{\vec{v}}}{\partial s} - \sum_A m_A \vec{r}_A \cdot \vec{V} = \sum_A m_A \vec{v}_A \cdot \vec{V} t - \sum_A m_A \vec{r}_A \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \left(\vec{P} t - \sum_A m_A \vec{r}_A \right) \quad (1.57)$$

où $P = \sum_A m_A \vec{v}_A$ est l'impulsion totale, est une intégrale première du mouvement. Comme le vecteur \vec{V} est arbitraire, nous trouvons que le vecteur

$$\vec{Q} = \sum_A m_A \vec{r}_A - \vec{P} t \quad (1.58)$$

est une intégrale première. En divisant cette équation par $\sum_A m_A$, nous en déduisons que le vecteur

$$\vec{q} = \vec{G} - \mathcal{V} t, \quad (1.59)$$

où

$$\vec{G} = \frac{\sum_A m_A \vec{r}_A}{\sum_A m_A}, \quad (1.60)$$

et

$$\vec{v} = \frac{\sum_A m_A \vec{v}_A}{\sum_A m_A} = \frac{\vec{P}}{\sum_A m_A}, \quad (1.61)$$

est une intégrale première. Le vecteur \vec{q} est la constante du barycentre, le vecteur \vec{G} est le barycentre du système des N corps. Nous retrouvons que le barycentre d'un système isolé se déplace à une vitesse uniforme :

$$\vec{G} = \vec{q} + \vec{v}t. \quad (1.62)$$

En relativité restreinte, le barycentre se définit grâce à l'invariance de la fonction de Lagrange par les transformations de Lorentz. En relativité générale, c'est un peu plus compliqué... Voir le fantastique livre de Landau et Lifchitz *Théorie des champs* [5].

Chapitre 2

Fonction de Hamilton, équations de Hamilton

2.1 Transformation de Legendre

La transformation de Legendre est un outil très efficace dans plusieurs domaines de la physique ; elle permet entre autres de transformer des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel en des fonctions à valeurs dans l'espace dual. Autrement dit, cela permet de changer de jeu de variables, ce qui peut être utile en thermodynamique par exemple.

2.1.1 Définition

Définition 2.1.1. (*Transformation de Legendre*)

Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction au moins deux fois dérivable sur \mathbb{R} , et strictement convexe ($f'' > 0$). La transformation de Legendre de f est une autre fonction, g , d'une nouvelle variable, p , qui se construit de la façon suivante (voir figure 2.1). Soit \mathcal{C} la courbe de f dans le plan (x, y) . Soit $p \in \mathbb{R}$. Soit la droite d'équation $y = px$. Soit $x(p)$ l'abscisse du point de coordonnées $(x(p), f(x(p)))$ qui maximise la distance verticale entre la droite d'équation $y = px$ et la courbe \mathcal{C} . Si ce point existe, alors il est unique, et nous notons $g(p) = px(p) - f(x(p))$ la transformée de Legendre de f en p .

Démonstration. Nous devons démontrer l'unicité d'un tel point. Pour p donné, si un tel point existe, son abscisse est solution de l'équation $p = f'(x)$. S'il existait deux réels distincts a et b solutions, avec par exemple $a < b$, alors comme $f'' > 0$,

$$\forall t \in [a, b], f'(a) < f'(t) < f'(b), \quad (2.1)$$

donc $f'(a) \neq f'(b)$ ce qui est absurde.

CQFD

2.1.2 Cas de plusieurs variables

Si une fonction f au moins deux fois différentiable est définie sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} , dire qu'elle est convexe revient à dire que sa hessienne est définie positive. Autrement dit, la matrice H

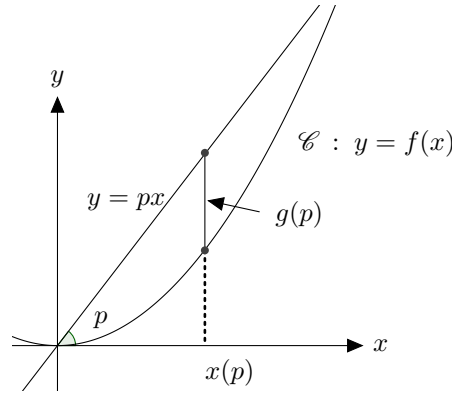


FIGURE 2.1 – Transformation de Legendre

dont les coefficients sont $H_{ij} = \partial_{ij} f$ doit vérifier :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{*n}, {}^t \mathbf{x} \mathbf{H} \mathbf{x} > 0. \quad (2.2)$$

La généralisation ne pose pas de difficultés.

Définition 2.1.2. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} , deux fois différentiable, et convexe. la transformée de Legendre de f est la fonction de la variable $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, définie comme le maximum par rapport à la variable \mathbf{x} , pour \mathbf{p} fixé, de la fonction $F(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x})$:

$$g(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{x}} (\langle \mathbf{p} | \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x})). \quad (2.3)$$

Quand le maximum est atteint, le gradient selon \mathbf{x} doit s'annuler, ce qui montre que les variables \mathbf{x} et \mathbf{p} sont reliées par

$$\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{x}} f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.4)$$

En lisant l'expression (2.3) Nous constatons que la variable \mathbf{p} n'est pas un vecteur, mais une forme linéaire. Ainsi, la transformation de Legendre permet d'exprimer des fonction dont la variable est dans l'espace dual.

Le lecteur curieux d'en savoir plus sur la mathématique de la transformation de Legendre pourra consulter, par exemple, l'ouvrage d'Arnold [2].

2.1.3 Exemple préliminaire

Considérons la fonction de Lagrange d'un point matériel libre : $L = m\vec{v}^2/2$. Effectuons la transformation de Legendre de cette fonction de Lagrange par rapport à la variable \vec{v} . La nouvelle variable \vec{p} doit vérifier

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v}, \quad (2.5)$$

nous en déduisons la relation inverse $\vec{v}(\vec{p}) = \vec{p}/m$. La transformée de Legendre de la fonction de Lagrange, $\mathcal{H}(\vec{p})$, s'écrit :

$$\mathcal{H}(\vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{v}(\vec{p}) - L(\vec{v}(\vec{p})) = \frac{\vec{p}^2}{m} - \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{\vec{p}^2}{2m}. \quad (2.6)$$

Nous reconnaissons que la nouvelle variable \vec{p} s'interprète physiquement comme la quantité de mouvement du point matériel. C'est un cas particulier, et il faudra prendre garde à ne pas confondre moment conjugué et quantité de mouvement, qui sont *a priori* différentes.

2.2 Fonction de Hamilton, équations de Hamilton

Inspirés par l'exemple précédent, généralisons-le à une fonction de Lagrange quelconque.

Définition 2.2.1. (*fonction de Hamilton*)

Soit $L(q, \dot{q})$ une fonction de Lagrange d'un système physique donné. Nous définissons la fonction $H(p, q)$, fonction de Hamilton, comme la transformée de Legendre de la fonction de Lagrange par rapport à la variable \dot{q} , la variable q étant fixée lors de la transformation.

Par conséquent, p , le moment conjugué à la variable q , est défini comme suit :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad (2.7)$$

et ensuite, la fonction de Hamilton s'en déduit¹ :

$$H(p, q, t) = p\dot{q}(p, q) - L(q, \dot{q}(p, q), t). \quad (2.8)$$

À présent, nous allons voir quel est l'intérêt d'utiliser le formalisme de Hamilton. D'abord, la quantité p , le moment conjugué, a souvent une interprétation physique intéressante. Ensuite, ces transformations que nous exposons permettent souvent de se ramener à des quantités invariantes, plutôt que de résoudre des équations différentielles. Au lieu d'avoir plein de quantités qui varient dans tous les sens, nous n'avons que des intégrales premières. Voyons cependant comment calculer les variations de p et q . Remarque : nous appelons *espace des phases* l'espace dans lequel évoluent les coordonnées généralisées et leurs moments conjugués.

2.3 Équations de Hamilton

Considérons la fonction de Hamilton comme une fonction des variables p, q et t , différencions-la.

$$dH = p d\dot{q} + \dot{q} dp - \partial_q L dq - \partial_{\dot{q}} L d\dot{q} - \partial_t L dt \quad (2.9)$$

$$= \dot{q} dp - \partial_q L dq - \partial_t L dt \quad \text{définition de l'impulsion généralisée} \quad (2.10)$$

$$= \dot{q} dp - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L dq - \partial_t L dt \quad \text{équation d'Euler-Lagrange} \quad (2.11)$$

$$= \dot{q} dp - \dot{p} dq - \partial_t L dt \quad \text{définition de l'impulsion généralisée.} \quad (2.12)$$

En identifiant les dérivées partielles sur les formes différentielles élémentaires, nous en déduisons les équations de Hamilton :

1. La généralisation à une fonction de Lagrange dépendant du temps ne pose pas de problème.

Théorème 2.3.1. *Soit H la fonction de Hamilton définie par rapport à une fonction de Lagrange ou une action. La trajectoire dans l'espace des phases qui rend l'action extrémale obéit aux équations de Hamilton :*

$$\boxed{\dot{q} = \partial_p H \quad \text{et} \quad \dot{p} = -\partial_q H.} \quad (2.13)$$

Nous avons affaire à un système d'équation différentielle entièrement déterministe². En effet, étant donnée une condition initiale $(p(0), q(0))$, le théorème de Cauchy assure l'unicité de la trajectoire. C'est plutôt rassurant dans le cadre de la mécanique classique !

2.4 Exemple hyper important : le pendule simple

Cet exemple est hyper important car énormément de systèmes dynamiques peuvent se ramener à un pendule simple en effectuant les bons changements de variables. Comprendre en profondeur la dynamique du pendule permet de comprendre la dynamique de systèmes plus complexes en procédant par analogies. Dans ce paragraphe, l'attention ne doit pas être portée sur les résultats dont vous connaissez sans doute déjà la grande partie, mais sur la méthode utilisée et les outils mis en applications.

2.4.1 Portrait de phase

Considérons le pendule simple (à tige rigide) de la figure 2.2. Nous choisissons les coordonnées généralisées cylindriques à une dimension, l'angle θ qui sépare la direction du pendule avec la droite verticale. Dans ce cadre, l'énergie cinétique s'écrit

$$T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2. \quad (2.14)$$

En postulant que le potentiel terrestre s'exprime comme $V = mgz$ où z est l'altitude de l'objet considéré, de la trigonométrie élémentaire nous donne $V = -mg \cos \theta$ (l'origine des altitudes est arbitraire, nous choisissons le potentiel le plus simple possible). Ainsi, la fonction de Lagrange s'écrit :

$$L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL \cos \theta. \quad (2.15)$$

Le moment conjugué de la variable θ est

$$I = \partial_{\dot{\theta}} L = mL^2\dot{\theta}. \quad (2.16)$$

Remarquez que le moment conjugué de θ ne s'interprète pas comme la quantité de mouvement du pendule, mais comme son moment cinétique projeté sur l'axe de rotation. Nous pouvons nous y attendre, car quand nous avons choisi la coordonnée généralisée θ , nous nous sommes d'emblée intéressés à la rotation du pendule et non à une translation ; il est naturel que le moment cinétique caractérise une rotation et que la quantité de mouvement rende compte de la translation, puisque, comme montré au chapitre précédent, la conservation respective de ces deux grandeurs reflète directement l'invariance de la fonction de Lagrange par rapport à leurs transformations respectives.

2. À la fin du cours, nous allons développer la dynamique non intégrable des systèmes chaotiques. Même s'il est extrêmement difficile, voire impossible, de prévoir le futur dans ces cas-là, la dynamique n'en reste pas moins déterministe.

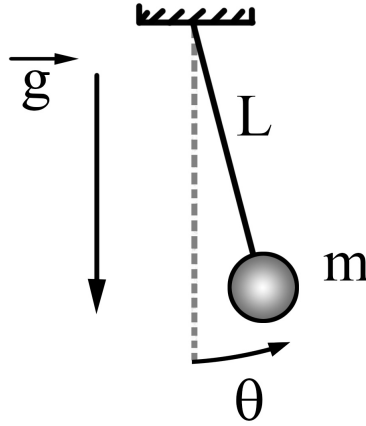


FIGURE 2.2 – Le pendule simple

Garder ces expressions lourdes permet de pouvoir interpréter physiquement les quantités ; à présent, si l'on veut faire des calculs plus facilement, il faut dédimensionner le problème. Pour commencer, nous considérons une nouvelle fonction de Lagrange qui n'est autre que l'ancienne divisée par mL^2 , son moment d'inertie. Ainsi, la fonction de Lagrange a la dimension d'une énergie par moment d'inertie. Sa nouvelle expression est :

$$L' \equiv \frac{L}{mL^2} = \frac{\dot{\theta}}{2} + \frac{g}{L} \cos \theta \quad (2.17)$$

et avec ces notations, nous avons tout simplement

$$J = \partial_{\dot{\theta}} L' = \dot{\theta} \quad (2.18)$$

La fonction de Hamilton s'écrit :

$$H(J, \theta) = J\dot{\theta} - L' = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{L} \cos \theta \quad (2.19)$$

ou encore :

$$H(J, \theta) = \frac{J^2}{2} - \frac{g}{L} \cos \theta. \quad (2.20)$$

De là, nous pouvons tuer le problème instantanément. En effet, la fonction de Hamilton (et de Lagrange) est invariante par translation dans le temps. Ainsi, les trajectoires sont les courbes d'équation $H(J, \theta) = H_0$. La constante H_0 s'interprète comme l'énergie du système. De façon générale, tous les systèmes autonomes³ à un degré de liberté sont intégrables puisque les trajectoires de l'espace des phases ont pour équation $H(p, q) = \text{constante}$. Les trajectoires dans l'espace des phases ne sont autres que les lignes de niveaux d'énergies. Nous en avons tracés quelques unes dans la figure 2.3. Même si formellement le problème est terminé, nous allons faire quelques commentaires

3. Dont la fonction de Hamilton ne dépend pas du temps.

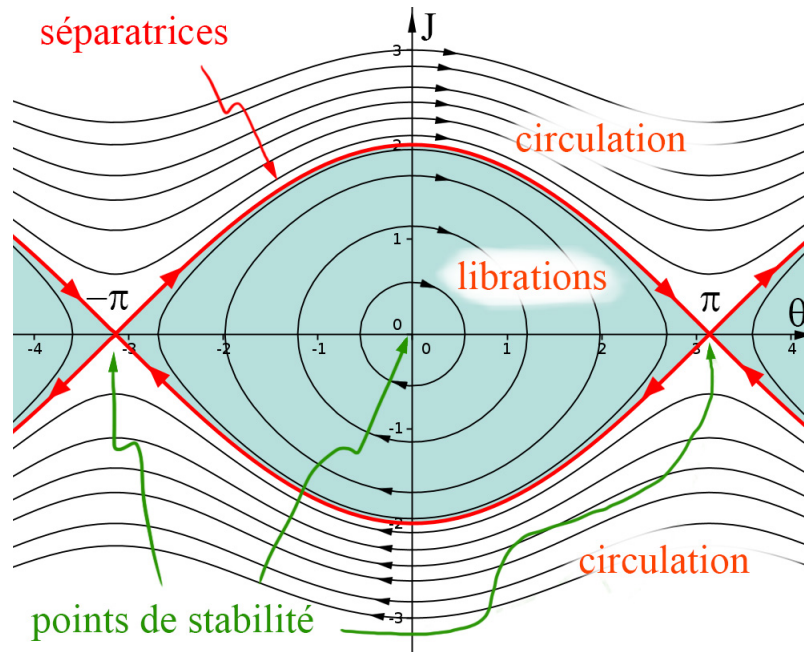


FIGURE 2.3 – Portrait de phase du pendule simple

pour comprendre en profondeur la dynamique du pendule. Tout d'abord, le sens de parcours des trajectoires. Si $J > 0$, alors θ augmente. Donc, toutes les trajectoires au dessus de l'axe des abscisses vont vers la droite. De façon analogue, toutes les trajectoires en dessous de l'axe des abscisses vont vers la gauche.

2.4.2 Période du pendule

Cette partie assez technique peut être sautée en première lecture, elle ne compromet pas la compréhension de la suite.

À présent, calculons la période du pendule. Pour ce faire, nous allons considérer une situation particulière⁴. Imaginons une expérience où nous lâchons le pendule sans vitesse depuis l'angle θ_0 avec $\theta_0 \in [0, \pi]$. La question est : au bout de combien de temps le pendule revient à sa position initiale ? Comme l'énergie se conserve, nous avons :

$$-\frac{g}{L} \cos \theta_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{g}{L} \cos \theta. \quad (2.21)$$

En séparant les variables nous obtenons⁵ :

$$dt = \sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (2.22)$$

4. la généralisation se fait sans peine en considérant une énergie quelconque H_0 . Nous voulons simplifier les notations pour ne pas perdre en clarté.

5. La différence des cosinus sous la racine carrée est toujours positive puisque comme l'énergie se conserve et que l'énergie cinétique est toujours positive, la valeur absolue de θ ne peut excéder θ_0 .

Comme les équations ne dépendent pas explicitement du temps, un renversement de celui-ci laisse la physique invariante. Ainsi, le pendule met autant de temps pour aller de $\theta = \theta_0$ à $\theta = 0$ que le chemin inverse. En outre, le système étant symétrique par rapport à l'axe vertical, nous en déduisons que la période du pendule est quatre fois le temps qu'il met pour aller de $\theta = \theta_0$ à $\theta = 0$. Ainsi, nous avons :

$$T = 2\sqrt{\frac{2L}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}. \quad (2.23)$$

J'entends déjà les rumeurs rugir ! "Mais qui nous dit que cette intégrale converge ? Escroc !" Ne vous en faites pas. Nous allons montrer que tant que $\theta_0 < \pi$, l'intégrale converge. En effet, plaçons-nous au voisinage du point embêtant, θ_0 . Posons $\theta = \theta_0 - u$. En utilisant la formule de sommation du cosinus, nous trouvons facilement que :

$$\cos(\theta_0 - u) - \cos\theta_0 = u \sin\theta_0 + \mathcal{O}(u^2). \quad (2.24)$$

Ainsi, au voisinage de θ_0 , nous avons :

$$\frac{1}{\sqrt{\cos(\theta_0 - u) - \cos\theta_0}} \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{u \sin\theta_0}} \quad (2.25)$$

et $\sin\theta_0$ est bien différent de zéro puisque nous avons supposé que $\theta_0 \in]0, \pi[$ ⁶. Ainsi, l'intégrale converge autant que l'intégrale de la fonction inverse de la racine carrée au voisinage de zéro, ce qui prouve qu'il y a convergence (critère de Riemann). Ainsi, tant que nous sommes à des énergies inférieures à mgL , la période est définie et le pendule oscille. En revanche, quand nous atteignons $\theta_0 = \pi$, nous voyons sur la figure 2.3 que nous atteignons une séparatrice. Dans ce cas, nous avons :

$$\frac{1}{\sqrt{\cos(\theta_0 - u) - \cos\theta_0}} \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2}{u^2}} = \frac{\sqrt{2}}{u} \quad (2.26)$$

donc l'intégrale diverge : le pendule met un temps infini pour faire un aller-retour (simplement un aller en fait, vu que l'intégrale diverge dès le début de la trajectoire quand $\theta = \theta_0 = \pi$). Si nous considérons des énergies encore plus grandes, alors cette intégrale n'a plus aucun sens. En fait, le seul moyen d'obtenir des énergie plus grande est d'avoir une énergie cinétique qui ne s'annule jamais. Comme l'impulsion est supposée continue, cela signifie que le pendule tourne sans cesse dans le même sens, sans jamais s'arrêter. Cela correspond aux circulations dans la figure 2.3. Pour résumer, il y a trois zones à remarquer (visibles sur la figure 2.3) : pour les faibles énergies, le pendule effectue des allers-retours, ce qui correspond aux trajectoires fermées. Quand l'énergie atteint mgL , nous sommes sur les séparatrices : c'est le cas limite. Enfin, lorsque nous donnons trop d'énergie au système, le pendule se met à tourner sans cesse dans le même sens (l'un ou l'autre selon le signe de la vitesse) : c'est la circulation.

Nous souhaitons à présent obtenir une expression plus lisible pour la période du pendule (et retrouver la formule $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$ valable pour les petites oscillations que vous avez appris dans votre enfance). La trigonométrie élémentaire nous donne :

$$K'(\theta_0) = \sqrt{2} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}. \quad (2.27)$$

6. Oui, j'ai enlevé 0 sans rien dire, je sais. L'intégrale ne convergerait pas si l'on avait $\theta_0 = 0$. C'est normal puisque si nous lâchons le pendule depuis sa position d'équilibre, il n'oscille pas, donc la période n'est pas définie.

Nous effectuons le changement de variable suivant :

$$\sin \xi = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} \quad (2.28)$$

sa différentiation donne :

$$\cos \xi d\xi = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} d\theta \quad (2.29)$$

ou encore

$$\sqrt{1 - \sin^2 \xi} d\xi = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \xi}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} d\theta \quad (2.30)$$

de telle sorte que

$$K'(\theta_0) = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \xi}}. \quad (2.31)$$

Finalement, nous obtenons la formule suivante pour la période :

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} K\left(\sin \frac{\theta_0}{2}\right) \quad (2.32)$$

où

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + x^2 \sin^2 \xi}}. \quad (2.33)$$

Nous reconnaissons une intégrale elliptique de première espèce. Avant d'aller plus loin dans les calculs, nous voyons déjà que pour des oscillations d'amplitude nulle, *i.e.* en posant $\theta_0 = 0$, nous retrouvons la formule de la période du pendule pour les faibles oscillations :

$$T \approx 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} d\xi = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (2.34)$$

Nous pouvons développer l'intégrande de (2.33) en série entière et permuter la somme et l'intégrale puisque $|\sin^2(\theta_0/2) \sin^2 \xi| < 1$. L'intégrale précédente s'exprime alors :

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \xi d\xi \quad (2.35)$$

Nous reconnaissons l'intégrale de Wallis :

$$W_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \xi d\xi \quad (2.36)$$

En remarquant que $\sin^{2n} \xi = \sin^{2n-2} \xi (1 - \cos^2 \xi)$, nous obtenons

$$W_{2n} = W_{2n-2} - \int_0^{\pi/2} \cos \xi \sin^{2n-2} \xi \cos \xi d\xi, \quad (2.37)$$

et en effectuant une intégration par partie, après quelques calculs élémentaires nous obtenons la relation de récurrence

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2}. \quad (2.38)$$

En propageant cette relation jusqu'à $W_0 = \pi/2$, nous avons :

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} W_0 = \frac{2n}{2n} \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-2}{2n-2} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{2}{2} \frac{1}{2} W_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}. \quad (2.39)$$

Par ailleurs, nous avons

$$\binom{-1/2}{n} (-1)^n = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-1)^n = \frac{2^n}{2^n} \frac{2n}{2n} \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-2}{2n-2} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{2}{2} \frac{1}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}. \quad (2.40)$$

En combinant toutes ces horreurs dans (2.35), nous obtenons l'expression suivante :

$$K(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 x^{2n} \quad (2.41)$$

soit un développement en série entière de la période du pendule :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2}. \quad (2.42)$$

Si l'angle de déviation initiale est faible, nous obtenons les premiers termes :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \mathcal{O}(\theta_0^4) \right). \quad (2.43)$$

2.4.3 Au voisinage de l'équilibre

Un autre aspect que nous n'avons pas encore étudié est le comportement du pendule au voisinage des points d'équilibre. Pour qu'un point de l'espace des phases soit à l'équilibre, il faut et il suffit que $\dot{p} = 0$ et $\dot{q} = 0$, ce qui revient à dire que le gradient de la fonction de Hamilton est nul dans l'espace des phases. Le calcul donne une famille de solutions :

$$\vec{\nabla} H = 0 \quad \Rightarrow \quad J = 0 \quad \text{et} \quad \theta \equiv 0[\pi]. \quad (2.44)$$

Au voisinage de $\theta = 0$, la fonction de Hamilton se développe ainsi :

$$H = \frac{J^2}{2} - \frac{g}{L} + \frac{g}{2L} \theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4) \quad (2.45)$$

et les trajectoires d'équation $H = \text{constante}$ sont des ellipses (figure 2.4).

Au voisinage de $\theta = \pi$, posons $x = \theta - \pi$. La fonction de Hamilton se développe ainsi :

$$H = \frac{J^2}{2} - \frac{g}{L} \cos(x + \pi) = \frac{J^2}{2} + \frac{g}{L} \cos x = \frac{J^2}{2} + 1 - \frac{g}{2L} x^2. \quad (2.46)$$

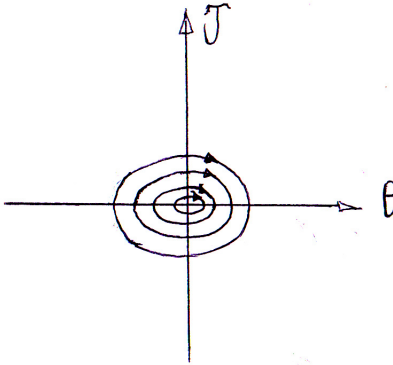


FIGURE 2.4 – Portrait de phase au voisinage du point d'équilibre $J = 0, \theta = 0$.

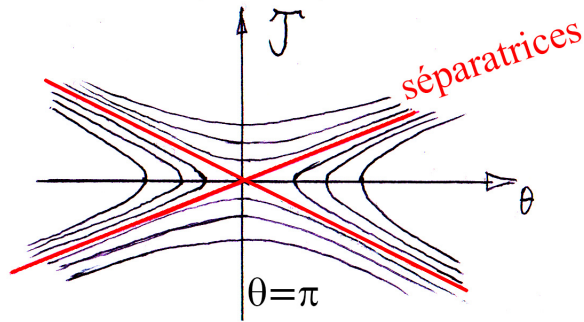


FIGURE 2.5 – Portrait de phase au voisinage du point d'équilibre $J = 0, \theta = \pi$.

Donc au voisinage de $\theta = \pi$, les trajectoires sont des hyperboles (figure 2.5). Nous pouvons même calculer la pente des séparatrices là où elles se coupent : c'est la pentes des hyperboles particulières d'équation

$$\frac{J^2}{2} - \frac{g}{2L}x^2 = 0 \quad (2.47)$$

ou encore

$$J = \pm \sqrt{\frac{g}{L}}x, \quad (2.48)$$

ce qui donne les pentes.

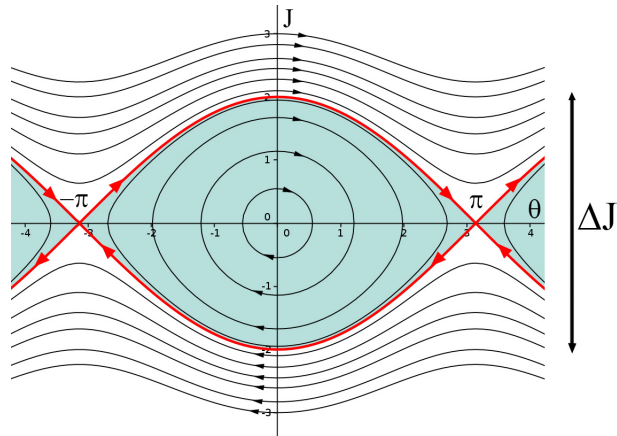


FIGURE 2.6 – Domaine de la zone de libration

2.4.4 Domaines de stabilité

Dernier mot sur le pendule : nous pouvons nous demander sur quelle hauteur d'impulsion s'étend la zone de libration quand $\theta = 0$ (figure 2.6). Nous savons que la séparatrice correspond à une énergie mgL . Il suffit d'écrire l'équation suivante :

$$\frac{g}{L} = \frac{J^2}{2} - \frac{g}{L} \Rightarrow J = \pm 2\sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \Delta J = 4\sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (2.49)$$

Chapitre 3

Transformations symplectiques

Dans ce chapitre, nous exposons quelques bases fondamentales pour changer de variables. Plutôt que de résoudre des équations différentielles horribles, nous allons montrer comment des changements de variables astucieux permettent de "trivialiser" des problèmes de mécanique. Cela constitue la base de tous les chapitres suivants ; vous vous doutez ainsi que vous êtes sur le point de lire le chapitre le plus important de ce cours. Soyez attentif !

Le lecteur n'ayant aucune idée de ce que sont des variétés différentiables ni des formes différentielles est invité à consulter l'annexe A avant de lire ce chapitre.

3.1 Transformation canonique

Les équations de Hamilton peuvent s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ +\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_p H \\ \partial_q H \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

où \mathbb{I} désigne la matrice identité. En notant $X = {}^t(p, q)$, on a :

$$\dot{X} = J \partial_X H \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ +\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

À présent, considérons le changement de variables bijectif et différentiable, que nous notons de façon un peu abusive $Y = Y(X)$. Nous avons :

$$\dot{Y} = M \dot{X} \quad \text{où} \quad M[i, j] = \frac{\partial Y_i}{\partial X_j} \quad (3.3)$$

Nous avons aussi

$$\frac{\partial H}{\partial X_i} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial X_i} \quad (3.4)$$

d'où

$$\frac{\partial H}{\partial X} = {}^t M \frac{\partial H}{\partial Y}. \quad (3.5)$$

Les nouvelles équations de Hamilton s'écrivent, avec les nouvelles variables :

$$\dot{Y} = MJ^t M \frac{\partial H}{\partial Y}. \quad (3.6)$$

Nous dirons que le changement de variables est canonique s'il laisse invariant la forme des équations de Hamilton, c'est-à-dire si la matrice jacobienne du changement de variable vérifie :

$$MJ^t M = J. \quad (3.7)$$

Une telle matrice jacobienne est dite symplectique.

Remarquons que $J^2 = -I$, donc $J^{-1} = -J$. La canonicité est donc équivalente à :

$$J^{-1} = (MJ^t M)^{-1} = {}^t M^{-1} J^{-1} M^{-1} \quad (3.8)$$

ou encore

$$J = {}^t M^{-1} J M^{-1} \quad (3.9)$$

qui n'est autre que la condition de canonicité pour le changement de variable réciproque.

3.2 Forme symplectique

Vérifier la canonicité d'une transformation en vérifiant les relations matricielles n'est pas la solution la plus simple. Une méthode beaucoup plus simple est de vérifier la conservation de la 2-forme symplectique suivante :

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i. \quad (3.10)$$

En notant $X = {}^t(p, q)$ et $dX = {}^t(dp, dq)$, nous avons formellement :

$$\omega = -\frac{1}{2} {}^t dX \wedge J dX. \quad (3.11)$$

Avec ces notations, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. *Un changement de variable, noté $Y(X)$, est symplectique si et seulement si*

$${}^t dX \wedge J dX = {}^t dY(X) \wedge J dY(X) \quad (3.12)$$

Dans les notations (p, q) , si les nouvelles coordonnées sont (P, Q) , alors, de façon équivalente, le changement de variable $(p, q) \mapsto (P, Q)$ est symplectique si et seulement si :

$$\boxed{\sum_i dp_i \wedge dq_i = \sum_i dP_i \wedge dQ_i.} \quad (3.13)$$

Démonstration. En effet, comme $dY = M dX$, nous avons¹ :

$${}^t dY \wedge J dY = {}^t dX {}^t M \wedge J M dX = {}^t dX \wedge {}^t M J M dX \quad (3.14)$$

et l'égalité annoncée dans le théorème n'est vraie que si ${}^t M J M = J$.

CQFD

1. en cas de doute : ${}^t dU \wedge M dV = \sum_{i,j} M[i, j] dU_{ij} = {}^t dU M \wedge dV$.

3.3 Fonction génératrice

La plupart des ouvrages présentent les changements de variables en présentant les fonctions génératrices, et s'y réfèrent sans arrêt pour vérifier la canonicité des changements de variables. À moins d'être une espèce de mutant, il est impossible de se souvenir des signes des formules de changements de variables sans refaire à la main toute la transformée de Legendre, et le formalisme relatif aux fonctions génératrices est beaucoup plus compliqué que celui des 2-formes symplectiques. Nous encourageons, de façon systématique, d'utiliser plutôt les secondes que les premières quand cela est possible. Cependant, l'intérêt de cette section est double. D'abord, vous serez capable de lire et comprendre une grande partie de la littérature sur les systèmes hamiltonien, car plein de pauvres gens utilisent à tort ces fonctions génératrices. Ensuite, nous verrons que les fonctions génératrices ont un intérêt lorsque nous résolvons un hamiltonien perturbé (cf. chapitre 6).

Considérons le changement de variables $(p, q) \mapsto (P, Q)$. Comme la 2-forme $\omega = dp \wedge dq$ se conserve, nous avons :

$$dp \wedge dq - dP \wedge dQ = 0. \quad (3.15)$$

Nous pouvons interpréter cette expression comme la différentielle d'une 1-forme. Plein de cas sont possibles. Par exemple :

$$d(pdq) = dp \wedge dq \quad \text{et} \quad d(-QdP) = dP \wedge dQ \quad (3.16)$$

donc

$$d(pdq) - d(QdP) = d(pdq - QdP) = 0 \quad (3.17)$$

donc en vertu du théorème de Poincaré A.2.7, il existe un champ scalaire S tel que

$$dS(q, Q) = pdq - PdQ \quad (3.18)$$

si nous connaissons S , nous avons accès au changement de variables :

$$\partial_q S = p \quad \text{et} \quad \partial_Q S = -P. \quad (3.19)$$

La conservation de la 2-forme ω peut aussi se voir comme la nullité d'autres formes différentielles, qui engendrent d'autres fonctions génératrices :

$$d(pdq - PdQ) = 0 \quad \rightarrow \quad S(q, Q) \quad (3.20)$$

$$d(pdq + QdP) = 0 \quad \rightarrow \quad S(q, P) \quad (3.21)$$

$$d(qdp - PdQ) = 0 \quad \rightarrow \quad S(p, Q) \quad (3.22)$$

$$d(qdp + QdP) = 0 \quad \rightarrow \quad S(p, P). \quad (3.23)$$

Il existe des cas (rares) où vérifier la conservation de ω est compliqué car ω est difficile à calculer. Dans ce cas, en utilisant ce qui précède, nous pourrions préférer calculer uniquement la 1-forme $pdq - PdQ$ et voir s'il est possible de l'écrire sous la forme d'une différentielle $dS(q, Q)$. Il va sans dire que ce raisonnement est applicable à toutes les combinaisons de la dernière suite d'équations.

Remarque Parfois, il est plus simple de vérifier la conservation de la 1-forme $\sigma = pdq$, qui, *a fortiori*, entraîne la conservation de la 2-forme ω . Les transformations canoniques qui conservent σ sont un sous-groupe des transformations canoniques.

3.4 Exemples ultra classiques et hyper importants

Tout est dans le titre...

3.4.1 Translation

La transformation

$$(p, q) \rightarrow (P, Q) = (p + a, q + b) \quad (3.24)$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^{2n}$ est un changement de variables canonique. En effet, comme $dP = dp$ et $dQ = dq$, il est immédiat que la 2-forme $dp \wedge dq$ est conservée.

3.4.2 Changement de variables action-angle

Soit le jeu de variables canoniques (I, θ) . Considérons le changement de variables suivant :

$$(I, \theta) \rightarrow (X = I \cos \theta, Y = I \sin \theta). \quad (3.25)$$

Est-il canonique ? Vérifions-le immédiatement :

$$dX \wedge dY = (\cos \theta dI - I \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dI + I \cos \theta d\theta) \quad (3.26)$$

$$= I \cos^2 \theta dI \wedge d\theta + I \sin^2 \theta dI \wedge d\theta \quad (3.27)$$

$$= I dI \wedge d\theta, \quad (3.28)$$

donc le changement n'est pas canonique!!! Malgré tout, nous n'étions pas loin du but. Essayons alors avec $(X = I^\alpha \cos \theta, Y = I^\alpha \sin \theta)$. Nous obtenons alors :

$$dX \wedge dY = \alpha I^{2\alpha-1} dI \wedge d\theta. \quad (3.29)$$

En choisissant $\alpha = 1/2$, nous trouvons $dI \wedge d\theta/2$. La bonne solution est donc de choisir :

$$\boxed{(I, \theta) \rightarrow (X = \sqrt{2I} \cos \theta, Y = \sqrt{2I} \sin \theta)}. \quad (3.30)$$

Le premier exemple auquel nous pensons est évidemment l'oscillateur harmonique, dont la fonction de Hamilton s'écrit, dans le bon choix d'unités :

$$H(p, q) = \frac{1}{2} (p^2 + q^2). \quad (3.31)$$

Nous voyons bien que la symétrie entre les deux variables nous incite à passer en variables polaires. Utilisons alors le changement de variables canonique que nous venons de définir : $(q, p) = \sqrt{2I}(\cos \theta, \sin \theta)$, il vient, dans ce nouveau jeu de variables :

$$H(I, \theta) = I. \quad (3.32)$$

Ainsi, l'intégration des équations de Hamilton est triviale : $\dot{I} = -\partial_\theta H = 0$ donc $I = I_0 = \text{constante}$; puis $\dot{\theta} = \partial_I H|_{I=I_0} = 1$ donc $\theta = \theta_0 + t$. En revenant aux anciennes variables, nous trouvons finalement :

$$q = \sqrt{2I_0} \cos(t + \theta_0) \quad \text{et} \quad p = \sqrt{2I_0} \sin(t + \theta_0) \quad (3.33)$$

avec

$$I_0 = \frac{1}{2}(q_0^2 + p_0^2) \quad \text{et} \quad \theta_0 = \text{atan} \left(\frac{p_0}{q_0} \right) \quad (3.34)$$

si $q_0 \neq 0$, sinon il suffit de prendre $I_0 = p_0^2/2$ et $\theta_0 = \pi/2$. Même si vous étiez déjà capable d'intégrer l'oscillateur harmonique sans ces outils, ce paragraphe a un intérêt pédagogique car nous voyons apparaître une nouvelle stratégie de résolution. Au lieu de résoudre des équations différentielles, nous effectuons des transformations symplectiques pour rendre les équations de Hamilton triviales. Ce style de stratégie sera le fil conducteur de tout ce cours.

3.4.3 Passage en complexes

Considérons le changement de variables suivant :

$$(x, y) \rightarrow (z, \bar{z}), \quad (3.35)$$

où $z = x + iy$. Un instant de calcul donne :

$$dz \wedge d\bar{z} = -2idx \wedge dy. \quad (3.36)$$

Pour se débarrasser du préfacteur $2i$, il faut choisir, par exemple, le changement suivant :

$$\boxed{v = \frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) \quad \text{et} \quad \tilde{v} = i \frac{\bar{z}}{\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}}(x - iy).} \quad (3.37)$$

Appliquons également ceci à l'oscillateur harmonique. Posons $v = (q+ip)/\sqrt{2}$ et $\tilde{v} = i(q-ip)/\sqrt{2}$. Essayons d'écrire la fonction de Hamilton en terme de v et \tilde{v} :

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) = \frac{1}{2}(q + ip)(q - ip) = -iv\tilde{v}. \quad (3.38)$$

Les équations de Hamilton s'écrivent alors :

$$\dot{v} = -iv \quad \text{et} \quad \dot{\tilde{v}} = +i\tilde{v}. \quad (3.39)$$

Nous trouvons alors :

$$v(t) = v_0 e^{-it} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + ip_0)e^{-it} \quad \text{et} \quad \tilde{v}(t) = \tilde{v}_0 e^{it} = \frac{i}{\sqrt{2}}(q_0 - ip_0). \quad (3.40)$$

En revenant aux anciennes variables, nous obtenons :

$$q(t) = \sqrt{2} \text{Re}(v) = q_0 \cos t + p_0 \sin t. \quad (3.41)$$

3.4.4 Transformation linéaire

En mécanique céleste, il est fréquent d'observer des résonances entre des orbites, ou des résonances spin-orbites. Ce phénomène, sur lequel nous reviendrons en détail dans le chapitre 6, intervient lorsque le rapport entre deux fréquences est rationnel. Si, par exemple, deux angles α et β oscillent avec des fréquences qui vérifient $a\alpha + b\beta = 0$ où a et b sont des entiers relatifs, nous

sentons bien que poser $\phi = a\alpha + b\beta$ sera un changement de variable astucieux. Voici les questions que nous nous devons de poser : avons-nous le droit ? Autrement dit, quel est le changement de variable canonique qui permet de faire ceci ? Si nous imposons ce changement dans les coordonnées, comment vont changer les impulsions conjuguées pour que le changement soit canonique ? Voici des éléments de réponse.

Considérons une transformation linéaire des coordonnées la plus générale possible : posons $Q = Mq$ où M est une matrice inversible. La matrice jacobienne N du changement de variables s'exprime ainsi :

$$\begin{pmatrix} dP \\ dQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp \\ dq \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} dp \\ dq \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

La condition ${}^tN J N = J$ impose :

$$\begin{pmatrix} 0 & -{}^tAM \\ {}^tMA & {}^tMB - {}^tBM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

donc nécessairement :

$$A = {}^tM^{-1}. \quad (3.44)$$

De plus, nous devons avoir ${}^tMB - {}^tBM = 0$. La façon la plus simple de satisfaire cette condition est de choisir $B = 0$. Cela offre l'avantage supplémentaire de séparer le changement de variables entre les impulsions et les coordonnées. En conclusion, nous pouvons retenir que le changement de coordonnées linéaire $Q = Mq$ peut être complété par le changement d'impulsions linéaire $P = {}^tM^{-1}p$ pour avoir une transformation canonique :

$$\boxed{Q = Mq \quad \Rightarrow \quad P = {}^tM^{-1}p.} \quad (3.45)$$

3.5 Espace des phases étendu : fonction de Hamilton dépendant du temps

L'utilité de ces transformations canonique est de simplifier au maximum l'expression de la fonction de Hamilton pour simplifier au maximum les équations du mouvement. Parfois, une difficulté se pose : une dépendance explicite en temps se mélange aux coordonnées et il peut être extrêmement difficile de résoudre analytiquement le problème. Cependant, il arrive souvent que la dépendance en temps ne soit qu'apparente, et il est possible d'effectuer des changements de variables qui "tuent" la dépendance temporelle de la fonction de Hamilton. Beaucoup (trop) d'ouvrages préconisent l'utilisation des fonctions génératrices qui dépendent du temps, mais c'est une horreur à calculer. Le plus simple est d'étendre l'espace des phases. En effet, lorsqu'une fonction de Hamilton évolue dans un espace des phases de dimension $2n$ mais dépend explicitement du temps, on dit que le système a $n + 1/2$ degrés de liberté ; cette appellation étrange vient de ce que la variable temporelle n'apparaît qu'en coordonnée mais n'a pas d'impulsion conjuguée. L'astuce consiste donc à étendre l'espace des phases et de rajouter l'impulsion conjuguée au temps dans la fonction de Hamilton. Voici comment nous procédons.

3.5.1 Extension de l'espace des phases et de la fonction de Hamilton

Soit une fonction de Hamilton $H(p, q, t)$ dépendant explicitement du temps t . Nous définissons le jeu de variables canoniques (P_τ, τ) en posant :

$$\tilde{H}(P_\tau, p, q, \tau) = P_\tau + H(p, q, \tau). \quad (3.46)$$

Dans ce cadre, les nouvelles équations de Hamilton sont :

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\tau} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dP_\tau}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau} = -\frac{\partial H}{\partial \tau}. \quad (3.47)$$

Ainsi, dans l'espace des phases, la variable τ évolue comme le temps t . Il est immédiat que les équations de Hamilton ne changent pas sur les autres variables. De plus, en anticipant un peu sur le chapitre 4, nous avons :

$$\frac{d\tilde{H}}{dt} = \{\tilde{H}, \tilde{H}\} = 0, \quad (3.48)$$

ainsi nous avons éliminé la dépendance en temps de la fonction de Hamilton. Ceci étant fait, pour simplifier la fonction de Hamilton, il suffit d'effectuer les bons changements de variables canoniques en considérant t comme n'importe quelle variable. Appliquons ceci sur un exemple simple.

3.5.2 Pendule tournant

Sous certaines hypothèses et après certains choix d'unités², un satellite non sphérique en rotation autour d'une planète a une dynamique décrite par la fonction de Hamilton suivante :

$$H(J, \theta, t) = \frac{J^2}{2} + \alpha \cos(\theta - t). \quad (3.49)$$

Étendons l'espace des phases et écrivons :

$$\tilde{H}(P, J, \theta, \tau) = P + \frac{J^2}{2} + \alpha \cos(\theta - \tau). \quad (3.50)$$

Pour éliminer le temps, nous avons envie de poser : $\phi = \theta - \tau$. Essayons de compléter ce changement de variables le plus simplement possible. Posons un deuxième angle : $\psi = \tau$. Matriciellement, nous avons :

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \tau \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \theta \\ \tau \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Pour compléter ce changement de variables sur les impulsion en garantissant sa canonicité, nous devons avoir :

$$\begin{pmatrix} I \\ I' \end{pmatrix} = {}^t A^{-1} \begin{pmatrix} J \\ P \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

C'est là qu'il nous faut nous souvenir qu'en vertu du postulat 1.1.1, la physique est la science de la flemme par excellence. En bons physiciens, soyons de bons flemmards et ne nous fatiguons pas à calculer ${}^t A^{-1}$. Écrivons plutôt que

$$\begin{pmatrix} J \\ P \end{pmatrix} = {}^t A \begin{pmatrix} I \\ I' \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

2. Nous y reviendrons au chapitre 6.

ce qui nous donne $I = J$ et $P = I' - I$. Il vient :

$$\tilde{H} = \frac{I^2}{2} + \alpha \cos \phi + I' - I. \quad (3.54)$$

Comme nous avons éliminé la dépendance temporelle, I' est une intégrale première. En effet :

$$\dot{I}' = -\partial_\psi \tilde{H} = 0. \quad (3.55)$$

Nous pouvons considérer la fonction de Hamilton sans cette variable puisque deux fonctions de Hamilton différentes d'une constante donnent les mêmes trajectoires. Il reste donc :

$$\tilde{H} = \frac{I^2}{2} - I + \alpha \cos \phi. \quad (3.56)$$

Pour éliminer I , il suffit d'effectuer une translation en posant $\tilde{I} = I - 1$. Sans avoir besoin de changer les autres variables, la transformation est symplectique. À la constante près sans aucun intérêt, la fonction de Hamilton, dans ces nouvelles variables, s'écrit :

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{I}^2}{2} + \alpha \cos \phi, \quad (3.57)$$

et sous vos yeux ébahis vous voyez réapparaître notre bon vieux pote Mr. Pendule!

Chapitre 4

Flot de Hamilton

Désormais nous notons \mathcal{P} l'espace des phases.

4.1 Crochets de Poisson

Un peu d'outils mathématiques avant de voir un des outils les plus puissants de la mécanique analytique.

4.1.1 Minimum vital

Définition 4.1.1. Soit (p, q) un jeu de variables canoniques. Soient f et g deux champs scalaires différentiables. Le crochet de Poisson de f et g se définit comme suit :

$$\{f, g\} = -(\partial_p f, \partial_q f) \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ +\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_p g \\ \partial_q g \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$= -{}^t \nabla f J \nabla g \quad (4.2)$$

$$= \partial_p f \partial_q g - \partial_q f \partial_p g. \quad (4.3)$$

Quelques propriétés à retenir :

— Les crochets de Poisson définissent une forme bilinéaire antisymétrique sur les fonctions différentiables.

— Règle de Leibniz : $\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\} g_2 + \{f, g_2\} g_1$ (règle analogue si le produit est dans le premier argument du crochet).

— Identité de Jacobi : $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$.

— Si (p, q) est un jeu de variables canoniques, alors $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, q_j\} = 0$ et $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$.

Les règles de Leibniz et la bilinéarité indiquent que les applications $\{g, \cdot\}$ et $\{\cdot, g\}$ ont toutes les "bonnes" propriétés d'un opérateur de dérivation. Par exemple, nous avons l'identité suivante :

$$\boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \{H, \cdot\}} \quad (4.4)$$

En effet :

$$\frac{d}{dt} = \dot{p} \partial_p + \dot{q} \partial_q + \partial_t = -\partial_q H \partial_p + \partial_p H \partial_q + \partial_t = \{H, \cdot\} + \partial_t. \quad (4.5)$$

Nous en déduisons que si $F(p, q)$ est un champ scalaire différentiable qui ne dépend pas explicitement du temps, alors c'est une intégrale première si et seulement si $\{F, H\} = 0$. Mais au fait, nous avons vu plus haut qu'il était possible d'étendre l'espace des phases et de considérer le temps comme n'importe quelle variable! Donc, de façon encore plus simple et élégante, nous avons identiquement $d/dt = \{\tilde{H}, \cdot\}$, où \tilde{H} est la fonction de Hamilton complétée par l'impulsion conjuguée au temps.

Théorème 4.1.1. *Soit la transformation $Y(X)$, ou notée autrement, $(p, q) \rightarrow (P, Q)$. Il y a équivalence entre les propositions suivantes.*

- (1) $Y(X)$ est une transformation canonique.
- (2) Les crochets de Poisson sont conservés par la transformation, autrement dit, pour tous champs scalaires F et $G : \{F, G\}_Y = \{F, G\}_X$.
- (3) Dans le nouveau jeu de variables, nous avons : $\{P_i, P_j\} = 0$, $\{Q_i, Q_j\} = 0$ et $\{P_i, Q_j\} = \delta_{ij}$.

Démonstration. Considérons la transformation $Y(X)$ ou encore $(p, q) \rightarrow (P, Q)$. Considérons deux champs scalaires différentiables F et G .

(1) \Leftrightarrow (2). Nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial Y_i} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial Y_i} \quad \text{ou encore} \quad \nabla_Y F = {}^t M \nabla_X F \quad \text{où} \quad M[ij] = \frac{\partial X_i}{\partial Y_j}. \quad (4.6)$$

Il vient :

$$\{F, G\}_Y = -{}^t \nabla_X F M J {}^t M \nabla_X G \quad (4.7)$$

Donc la conservation des crochets de Poisson, autrement dit, l'égalité

$$-{}^t \nabla_X F M J {}^t M \nabla_X G = -{}^t \nabla_X F J \nabla_X G = \{F, G\}_X \quad (4.8)$$

est vérifiée si et seulement si $M J {}^t M = J$, autrement dit, si et seulement si la transformation est canonique.

(2) \Rightarrow (3). $\{P, Q\}_Y = \{P, Q\}_X$ donc (3) est immédiatement vérifié.

(3) \Rightarrow (1). Soit

$$A = \frac{\partial Y}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial p_j} & \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Un calcul par bloc montre que :

$$A J {}^t A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial p_j} & \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} & \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \\ \frac{\partial P_j}{\partial q_i} & \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial p_j} & \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial P_j}{\partial q_i} & -\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \\ \frac{\partial P_j}{\partial p_i} & \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\partial P_i}{\partial p_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} + \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} & -\frac{\partial P_i}{\partial p_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \frac{\partial P_j}{\partial q_j} \\ -\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} + \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} & -\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$= \begin{pmatrix} \{P_j, P_i\} & \{Q_j, P_i\} \\ \{P_j, Q_i\} & \{Q_j, Q_i\} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

d'où le résultat.

CQFD

4.1.2 Matrice de Poisson

Quelques calculs directs montrent que :

$$\{f(Y(X)), g(X)\}_X = \sum_k \frac{\partial f}{\partial Y_k} \{Y_k, g\}. \quad (4.14)$$

Considérons le changement de variables non canonique $y(x)$. Comment s'expriment les crochets de Poisson de deux fonctions dans le nouveau jeu de variables ? Retrouvons nos manches et faisons le calcul. D'après ce qui précède, nous avons :

$$\{F, G\} = \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial G}{\partial y_j} \{y_i, y_j\} = {}^t \nabla_y F B \nabla_y G \quad (4.15)$$

où

$$B = \{y_i, y_j\} \quad (4.16)$$

est la matrice de Poisson. Si la transformation est canonique, nous avons $B = -J$ et nous retrouvons les crochets de Poisson canoniques. Considérons une fonction de Hamilton qui ne dépend pas du temps, ainsi que des champs scalaires stationnaires. Si le changement de variables est bijectif, autrement dit s'il est possible d'exprimer la fonction de Hamilton $H(x)$ en fonction de $y(x)$, alors nous obtenons les nouvelles équations de Hamilton :

$$\frac{dy_i}{dt} = \{H(y(x)), y_i\} = - \sum_j \{y_i, y_j\} \frac{\partial H}{\partial y_j} = -B \nabla_y H \quad (4.17)$$

et nous retrouvons bien $\dot{y} = J \nabla_y H$ dans le cas d'une transformation canonique.

4.2 Flot d'un système dynamique

Accrochez-vous, ça va déboîter. Nous allons monter toujours plus haut dans l'abstraction et considérer l'évolution temporelle d'un système dynamique comme l'action d'un opérateur mathématique sur les coordonnées. Ce simple changement de point de vue va nous fournir, une fois de plus, des outils surpuissants qui permettent de giffler violemment les problèmes compliqués. Oh-lala, j'entends déjà gronder dans la salle "c'est bien beau de monter en abstraction, mais à quoi ça peut bien servir tout ce boxon ?". Ne vous inquiétez pas, justement, cette montée en abstraction va se conclure par un spectaculaire retour au concret avec un exposé sur les intégrateurs symplectiques, des techniques hyper-astucieuses pour intégrer numériquement des systèmes dynamique. *Il suicidaire de lire cette section sans avoir parfaitement compris ce que sont les transformations canoniques et sans savoir manipuler les crochets de Poisson. Il est conseillé de lire l'annexe C pour profiter pleinement de ce qui va suivre.*

4.2.1 Introduction au flot de Hamilton

Définition 4.2.1. Soit un système dynamique caractérisé par sa fonction de Hamilton H et un jeu de coordonnées canoniques (p, q) évoluant dans l'espace des phases M . Considérons un état initial $(p(0), q(0)) = (p_0, q_0)$. Le flot de Hamilton au temps t , ϕ_t , est l'application qui à (p_0, q_0) associe $(p(t), q(t))$. Autrement dit, nous avons :

$$\phi_t : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \quad (4.18)$$

$$(p_0, q_0) \mapsto (p(t), q(t)). \quad (4.19)$$

Si le système dynamique n'est pas dissipatif donc ne perd pas d'information pendant son évolution, il est possible de remonter le temps : connaissant $x(t)$, nous pouvons remonter à x_0 en appliquant ϕ_t^{-1} . Dans ce cas, ϕ_t est bijective et nous avons $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$. Ainsi, nous pouvons indexer l'ensemble des flots de Hamilton sur $\mathbb{R} : \mathcal{F} = \{\phi_t, t \in \mathbb{R}\}$. Nous en déduisons :

Théorème 4.2.1. L'ensemble des flots de Hamilton indexés sur \mathbb{R} muni de la loi de composition interne \circ est un groupe abélien (commutatif). De plus, la loi \circ est un morphisme de groupe pour l'addition, c'est-à-dire que nous avons identiquement :

$$\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1+t_2}. \quad (4.20)$$

Pour rappel, un groupe abélien dispose des propriétés suivantes :

- Associativité : $\phi_a \circ (\phi_b \circ \phi_c) = (\phi_a \circ \phi_b) \circ \phi_c = \phi_a \circ \phi_b \circ \phi_c$
- Existence de l'élément neutre : $\phi_0 = 1_{\mathcal{F}} = Id$.
- Existence de l'inverse : $\phi_t \circ \phi_{-t} = 1_{\mathcal{F}}$.
- Pour avoir un groupe abélien : commutativité : $\phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t$.

4.2.2 Symplecticité du flot de Hamilton

Nous allons écrire le flot de Hamilton comme une série entière d'opérateur, que nous allons considérer comme des transformations. Un résultat très important de la dynamique de Hamilton est la conservation du volume dans l'espace des phases. Nous allons vous mener pas à pas à ce résultat, puis en tirer des conséquences.

Pour commencer, nous allons développer le flot à l'ordre 1. Par définition, le générateur infinitésimal $X(x_0)$ du groupe des flots de Hamilton est :

$$X(x_0) = \frac{d\phi_t(x_0)}{dt} \quad (4.21)$$

Nous écrirons souvent, de façon plus compacte :

$$\dot{x} = X(x). \quad (4.22)$$

Effectuons un développement limité au voisinage de x_0 pour voir comment varie le flot. Nous notons $\nabla\phi_t(x_0) = \partial_j\phi_t^i(x_0)$ la matrice jacobienne de ϕ_t au point x_0 .

$$\frac{d}{dt}\phi(x_0 + h) = \frac{d}{dt}\phi_t(x_0) + \frac{d}{dt}\nabla\phi_t(x_0)h + \mathcal{O}(h^2) \quad (4.23)$$

$$= X(\phi_t(x_0 + h)) = X[\phi_t(x_0) + \nabla(\phi_t(x_0))h + \mathcal{O}(h^2)] \quad (4.24)$$

$$= X(\phi_t(x_0) + \nabla X(\phi_t(x_0))\nabla\phi_t(x_0)h + \mathcal{O}(h^2)), \quad (4.25)$$

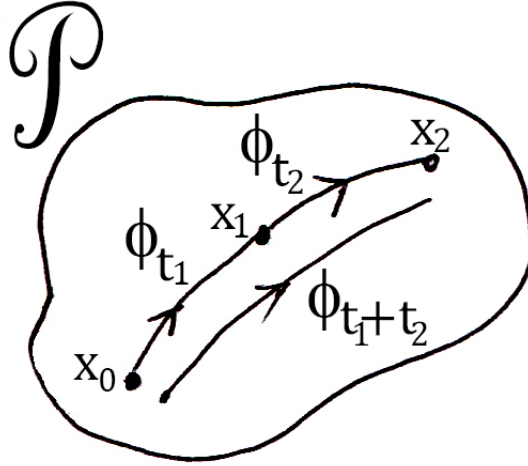


FIGURE 4.1 – Le flot hamiltonien

où nous avons noté $\nabla X(\phi_t(x_0))$ la matrice jacobienne du générateur infinitésimal. Ainsi, le dernier terme représente le produit de deux matrices appliqué à h . En identifiant les parties linéaires du développement limité, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \nabla \phi_t(x_0) = \nabla X(\phi_t(x_0)) \nabla \phi_t(x_0). \quad (4.26)$$

Ce petit calcul va nous permettre de démontrer quelques théorèmes d'importances cruciales. Avec ces notations, l'équation d'évolution temporelle de la dynamique devient :

$$\dot{x} = X(x) \quad \text{où} \quad X = X_H = J\nabla H. \quad (4.27)$$

Avec ces notations, le gradient du générateur infinitésimal s'exprime ainsi :

$$\nabla X = J\nabla\nabla H = JS \quad (4.28)$$

où

$$S = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.29)$$

est la matrice hessienne de la fonction de Hamilton. À présent, nous sommes armés pour commencer à enchaîner les théorèmes dont la puissance dévaste les problèmes de dynamique :

Théorème 4.2.2. *Pour tout instant t fixé, le flot de Hamilton ϕ_t est une transformation symplectique de l'espace des phases \mathcal{P} dans lui-même.*

Démonstration. Pour rester cohérent avec le chapitre 3, notons $M(t) = \nabla \phi_t(x_0)$ la matrice jacobienne du flot (que nous considérons comme notre changement de variables). L'équation (4.26) s'écrit :

$$\dot{M} = \nabla X M = J S M. \quad (4.30)$$

Posons :

$$U(t) = {}^t M(t) J M(t). \quad (4.31)$$

Comme $\phi_0 = Id$, nous avons $U(0) = J$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Dérivons U par rapport à t .

$$\dot{U} = {}^t \dot{M} J M + {}^t M J \dot{M} = {}^t (J S M) J M + {}^t M J J S M = {}^t M^t S^t J J M + {}^t M J J S M. \quad (4.32)$$

Or, en vertu du théorème de Schwartz, la matrice hessienne est symétrique, donc ${}^t S = S$. De plus, en se souvenant que $J^2 = -I$ et que ${}^t J = -J$, nous obtenons :

$$\dot{U} = {}^t M S M - {}^t M S M = 0. \quad (4.33)$$

Ainsi, pour tout t , $U(t) = U(0) = J$. L'application ϕ_t est donc bien symplectique à tout instant. *CQFD*

Corrolaire 1. *Le volume dans l'espace des phases se conserve par le flot de Hamilton.*

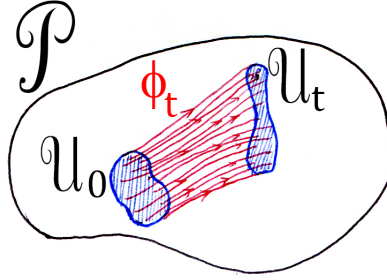


FIGURE 4.2 – Un domaine transformé par le flot de Hamilton

Démonstration. Considérons un ensemble compact \mathcal{U}_0 (fermé et borné) de \mathcal{P} , l'espace des phases. Quand le temps évolue, ce domaine évolue aussi pour devenir \mathcal{U}_t (cf. figure 4.2). Le volume de l'espace des phases se définit comme suit :

$$\mathcal{V}(\mathcal{U}_t) = \int_{\mathcal{U}_t} dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge dq_n. \quad (4.34)$$

Or, le flot de Hamilton au temps t est une application symplectique. Notons alors $\phi_t(p, q) = (P, Q)$. Ainsi, nous pouvons voir les nouvelles variables (P, Q) dans l'ancien ensemble \mathcal{U}_0 comme les anciennes variables (p, q) dans le nouvel ensemble \mathcal{U}_t (figure 4.3). Il en résulte :

$$\mathcal{V}(\mathcal{U}_t) = \int_{\mathcal{U}_t} dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge dq_n = \int_{\mathcal{U}_0} dP_1 \wedge \dots \wedge dP_n \wedge dQ_1 \wedge \dots \wedge dQ_n. \quad (4.35)$$

Toujours en notant $M(t)$ la matrice jacobienne du changement de variables ϕ_t , nous avons :

$$\mathcal{V}(\mathcal{U}_t) = \int_{\mathcal{U}_0} \det(M) dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge dq_n \quad (4.36)$$

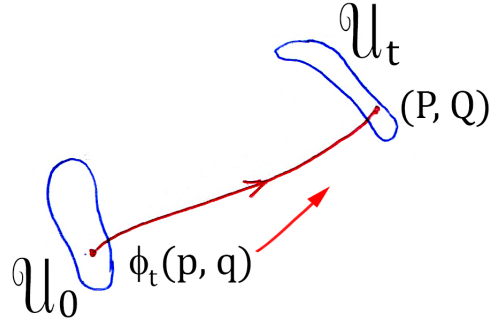


FIGURE 4.3 – Le flot comme changement de variables

De plus, comme la transformation est canonique, nous savons que $\det({}^t M J M) = \det(J)$. Mais par ailleurs :

$$\det({}^t M J M) = \det({}^t M) \det(M) \det(J) = \det(M)^2 \det(J). \quad (4.37)$$

Donc nécessairement :

$$\det(M) = \pm 1. \quad (4.38)$$

En supposant que la matrice jacobienne soit continue dans le temps, la condition initiale $\det(M)|_{t=0} = 1$ nous permet d'affirmer que :

$$\forall t, \det(M) = +1 \quad \text{et} \quad \mathcal{V}(\mathcal{U}_t) = \mathcal{V}(\mathcal{U}_0). \quad (4.39)$$

CQFD

4.3 Dérivée de Lie, développement du flot

Une fois de plus, définissons quelques outils mathématiques avant de construire des armes de destruction massive. Le fil conducteur est le suivant : nous allons définir de *bons* opérateurs de dérivation à l'aide des crochets de Poisson pour ensuite développer le flot de Hamilton en série entière pour en obtenir une expression formelle. Commençons sans plus tarder, et définissons.

4.3.1 Dérivée et crochets de Lie

Définition 4.3.1. La dérivée de Lie d'un champ scalaire f est l'opérateur agissant sur les champs scalaires, définie ainsi :

$$L_f = \{f, \cdot\}. \quad (4.40)$$

Exemple : $L_H = \{H, \cdot\} = X_H = d/dt$.

Définition 4.3.2. Soient deux opérateurs A et B agissant sur les champs scalaires et donnant des champs scalaires. L'ensemble de ces opérateurs constitue un groupe pour la loi de composition interne \circ , et pour simplifier les notations, nous notons $A \circ B = AB$. Les crochets de Lie de A et B sont leur commutateur :

$$[A, B] = AB - BA. \quad (4.41)$$

Un calcul direct montre que les crochets de Lie vérifient l'identité de Jacobi :

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0. \quad (4.42)$$

Une propriété intéressante : pour f et g champs scalaires, nous avons identiquement :

$$[L_f, L_g] = L_{\{f, g\}}. \quad (4.43)$$

En effet :

$$[L_f, L_g] = L_f L_g - L_g L_f = \{f, \{g, \cdot\}\} - \{g, \{f, \cdot\}\} \quad (4.44)$$

$$= \{f, \{g, \cdot\}\} + \{g, \{\cdot, f\}\} \quad (4.45)$$

$$= -\{\cdot, \{f, g\}\} \quad (\text{identité de Jacobi}) \quad (4.46)$$

$$= \{\{f, g\}, \cdot\} \quad (4.47)$$

$$= L_{\{f, g\}}. \quad (4.48)$$

Nous voilà dotés des outils de base pour construire une bombe nucléaire. Accrochez-vous.

4.3.2 Développement de Taylor du Flot de Hamilton

Soit f un champ scalaire sur \mathcal{P} . Nous définissons sa dérivée le long du flot de Hamilton :

$$\frac{d}{dt} f(\phi_t(x_0)) = \nabla f \cdot \frac{d}{dt} \phi_t(x_0) = \nabla f \cdot J \nabla H(\phi_t(x_0)) \quad (4.49)$$

Mais nous reconnaissons les crochets de Poisson :

$$\frac{d}{dt} f(\phi_t(x_0)) = -\{f, H\}(\phi_t(x_0)) = L_H f(x). \quad (4.50)$$

Bien sûr, nous aurions pu établir cette égalité immédiatement au début de ce chapitre avec les seuls outils de base des crochets de Poisson. En d'autres termes, nous avons $d/dt = L_H$, ce qui implique que $d^n/dt^n = L_H^n$. Il vient :

$$f(\phi_t(x_0)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} f(\phi_t(x_0))_{t=0} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n L_H^n}{n!} \right) f(\phi_t(x_0))_{t=0} \quad (4.51)$$

d'où :

$$\boxed{f(x) = f(\phi_t(x_0)) = \exp(tL_H) f(x)_{t=0}} \quad (4.52)$$

Il y a une autre façon d'obtenir ce résultat. En effet, nous avons :

$$\frac{d}{dt} f(\phi_t(x_0)) = L_H f(x_0), \quad (4.53)$$

ce qui constitue une équation différentielle dont nous savons que la solution est une exponentielle. Mieux : si nous prenons formellement $f = Id$, nous obtenons la solution formelle des trajectoires dans l'espace des phases :

$$\boxed{\phi_t(x_0) = \exp(tL_H)x_0.} \quad (4.54)$$

4.4 Application : intégrateur symplectique

4.4.1 Introduction : un intégrateur non symplectique

Toutes ces considérations mathématiques trouvent des applications abondantes en physique numérique, comme nous allons le voir. Pour comprendre ce qu'est un intégrateur symplectique, il faut d'abord comprendre ce que ce n'est pas. Donnons-en un exemple. Nous prenons la fonction de Hamilton de notre meilleur pote Mr. Pendule :

$$H = \frac{p^2}{2} + \cos q. \quad (4.55)$$

Les équations du mouvement sont $\dot{p} = \sin q$ et $\dot{q} = p$. Essayons la méthode d'Euler pour intégrer numériquement ces équations. Si nous choisissons un pas de temps τ , nous avons $p(t + \tau) = p(t) + \tau \sin q(t)$ et $q(t + \tau) = p(t) + \tau p(t)$. Mais, considérons cette avancée dans le temps comme un changement de variables :

$$(p, q) \rightarrow (P, Q) = (p + \tau \sin q, q + \tau p). \quad (4.56)$$

Est-ce que tout ceci est symplectique ? Calculons :

$$dP \wedge dQ = (dp + \tau \cos q dq) \wedge (dq + \tau dp) = (1 - \tau^2 \cos q) dp \wedge dq. \quad (4.57)$$

Comme annoncé, le changement n'est pas symplectique. Nous avons même quantifié la non symplecticité de l'intégrateur : à chaque pas de temps, le volume dans l'espace des phases, autrement dit l'énergie, diminue de $\tau^2 \cos q$. Nous retrouvons, heureusement, qu'à l'ordre 1 en τ , l'intégrateur conserve bien l'énergie. Le problème de ce genre d'intégrateur non symplectique est que dans des simulations à long terme, les pertes d'énergies dues aux erreurs vont être significatives et faire perdre tout l'intérêt de la simulation. Le grand apport de Jacques Laskar dans l'étude du Système Solaire a été d'introduire de puissants intégrateurs symplectiques pour obtenir des simulations à très long terme de l'évolution des trajectoires des astres. La construction de ces intégrateurs, comme nous allons le voir, est intimement liée à la connaissance de la fonction de Hamilton du système. Les contraintes sont les suivantes : nous voulons un intégrateur qui, non seulement, s'écarte peu de la solution réelle (jusqu'à l'ordre que l'on veut par rapport au pas de temps, formellement), mais aussi conserve le volume dans l'espace des phases, c'est-à-dire que chaque incrémentation des coordonnées doit être une transformation symplectique pour conserver la structure de la fonction de Hamilton. Voyons comment faire.

4.4.2 Construction théorique de l'intégrateur symplectique

Une mise en bouche pimentée :

Formule de Baker-Campbell-Hausdorff

Théorème 4.4.1. *Si A et B sont deux opérateurs, alors nous avons l'identité suivante :*

$$e^A e^B = e^C \quad (4.58)$$

où

$$C = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_i+s_i>0 \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{(\sum_{i=1}^n (r_i + s_i))^{-1}}{r_1! s_1! \cdots r_n! s_n!} [A^{r_1} B^{s_1} A^{r_2} B^{s_2} \dots A^{r_n} B^{s_n}] \quad (4.59)$$

où s_n et r_n sont des entiers positifs, et où nous avons noté :

$$[A^{r_1} B^{s_1} \dots A^{r_n} B^{s_n}] = \underbrace{[A, [A, \dots [A, [B, [B, \dots [B, \dots [A, [A, \dots [A, [B, [B, \dots [B]] \dots]]]}]}]}_{r_1} \underbrace{\dots}_{s_1} \dots \underbrace{\dots}_{r_n} \underbrace{\dots}_{s_n}. \quad (4.60)$$

Dans le cas où A et B sont du même ordre, dans le sens où $\mathcal{O}(A) = \mathcal{O}(B)$, cette formule donne (ou alors par un "simple" développement de l'exponentielle) à l'ordre 4 :

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[A, [A, B]] + \frac{1}{24}[A, [[A, B], B]] + \mathcal{O}(A^5). \quad (4.61)$$

Nous ne démontrons pas ce théorème, qui, dans sa généralité, sort du cadre de ce cours. Dans la pratique, nous aurons simplement à calculer les premiers ordres (en général jusqu'à l'ordre 2, trois si on a du courage) en développant les exponentielles.

Appliquons ce théorème dans un cadre proche de ce qui nous intéresse. Considérons une fonction de Hamilton mise sous la forme suivante :

$$H(p, q) = A(p) + B(q). \quad (4.62)$$

Formellement, il s'intègre ainsi :

$$x(t) = e^{tL_H} x_0. \quad (4.63)$$

Or :

$$e^{tL_H} = e^{tL_A + tL_B} \quad (4.64)$$

ce qui, en utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, devient :

$$tL_H = tL_A + tL_B + \frac{t^2}{2}[L_A, L_B] + \mathcal{O}(t^3) \quad (4.65)$$

$$= t \left[L_A + L_B + \frac{t}{2} L_{\{A, B\}} \right] + \mathcal{O}(t^3) \quad (4.66)$$

$$= tL_{A+B+\frac{t}{2}\{A, B\}} + \mathcal{O}(t^3). \quad (4.67)$$

Ainsi, nous avons, à l'ordre 2 en t :

$$x(t) = \exp(tL_{\tilde{H}})x(0) \quad (4.68)$$

où

$$\tilde{H} = A + B + \frac{t}{2}\{A, B\} + \frac{t^2}{12}\{A, \{A, B\}\} - \frac{t^2}{12}\{\{A, B\}, B\} \quad (4.69)$$

Ainsi, en appliquant l'opérateur $\exp(tL_A) \exp(tL_B)$, nous intégrons de façon exacte le système piloté par la fonction de Hamilton \tilde{H} . Comme l'incrément est symplectique, même au bout d'un temps infini, les trajectoires simulées ne s'éloignent jamais significativement des vraies trajectoires. Revenons sur notre exemple du pendule.

Intégration symplectique du pendule

Pour se ramener aux notations précédentes :

$$H = \frac{p^2}{2} + \cos q = A(p) + B(q). \quad (4.70)$$

Choisissons un pas d'intégration τ . Formellement, nous avons :

$$e^{\tau L_A} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q + \tau p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e^{\tau L_B} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + \tau \sin q \\ q \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

Il en résulte que :

$$e^{t L_A} e^{t L_B} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + \tau \sin q \\ q + \tau p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + \tau \sin q \\ q + \tau p + \tau^2 \sin q \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

Bien évidemment, cette transformation est symplectique. S'il reste des gens pas convaincus :

$$dp' \wedge dq' = (dp + \tau \cos q dq) \wedge (dq + \tau dp + \tau^2 \cos q dq) = dp \wedge dq + \tau^2 \cos q (dq \wedge dp + dp \wedge dq) = dp \wedge dq. \quad (4.73)$$

Nous voyons ici apparaître le terme $\tau^2 \cos q$ qui vient compenser la perte de volume de l'intégrateur d'Euler. Remarquons qu'en terme de calcul, cet intégrateur n'est pas plus cher qu'Euler, mais a le mérite de rester stable à long terme. De plus, même à court terme, cet intégrateur ne s'éloigne pas plus de la solution exacte que celui d'Euler : nous sommes exact à l'ordre 1 en τ .

Ordres supérieurs

Découpons notre pas de temps τ en n intervalles. Nous allons chercher des nombres $(a, b) = (a_i, b_i)_i \in \mathbb{R}^{+2n}$ pour optimiser l'incrémenteur¹ $S(\tau)$ défini ainsi :

$$S(\tau) = e^{\tau L_K} = e^{\tau a_1 L_A} e^{\tau b_1 L_B} e^{\tau a_2 L_A} e^{\tau b_2 L_B} \dots e^{\tau a_n L_A} e^{\tau b_n L_B} = \prod_{i=1}^n e^{\tau a_i L_A} e^{\tau b_i L_B}, \quad (4.74)$$

où nous calculons :

$$K = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) A + \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) B + \tau P_1(a, b) \{A, B\} + \tau^2 P_{2,1}(a, b) \{A, \{A, B\}\} + \tau^2 P_{2,2}(a, b) \{A, B\}, B\} + \mathcal{O}(\tau^3). \quad (4.75)$$

Pour que K soit une approximation de $H = A + B$, il faut d'emblée normaliser (a, b) par :

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1. \quad (4.76)$$

1. Remarquons qu'un incrémenteur n'est rien d'autre qu'un flot de Hamilton.

Ensuite, pour tuer le terme d'ordre 1, on peut chercher (a, b) tel que $P_1(a, b) = 0$ et être précis directement à l'ordre 2. À présent, voyons quelques contraintes qui permettent de restreindre les solutions. En effet, exigeons que l'incrémentement soit réversible. Nous avons d'une part :

$$S(\tau)^{-1} = [e^{\tau a_1 L_A} e^{\tau b_1 L_B} e^{\tau a_2 L_A} e^{\tau b_2 L_B} \dots e^{\tau a_n L_A} e^{\tau b_n L_B}]^{-1} \quad (4.77)$$

$$= e^{-\tau b_n L_B} e^{-\tau a_n L_A} e^{-\tau b_{n-1} L_B} e^{-\tau a_{n-1} L_A} \dots e^{-\tau b_1 L_B} e^{-\tau a_1 L_A}. \quad (4.78)$$

Mais, d'autre part :

$$S(\tau)^{-1} = e^{-\tau L_K} \quad (4.79)$$

$$= e^{-\tau a_1 L_A} e^{-\tau b_1 L_B} e^{-\tau a_2 L_A} e^{-\tau b_2 L_B} \dots e^{-\tau a_n L_A} e^{-\tau b_n L_B}, \quad (4.80)$$

donc nécessairement :

$$b_n = 0, \quad a_k = a_{n-k} \quad \text{et} \quad b_k = b_{n-k}. \quad (4.81)$$

Une autre conséquence de la réversibilité est la suivante. En effet, si l'on exige que l'incrémenteur $S(\tau)$ ait la propriété de réversibilité du flot de Hamilton, à savoir $S(\tau)^{-1} = S(-\tau)$, nous avons nécessairement :

$$S(\tau)^{-1} = e^{-\tau L_K(\tau)} = S(-\tau) = e^{-\tau L_K(-\tau)}. \quad (4.82)$$

Ainsi, il apparaît que

$$K(\tau) = K(-\tau). \quad (4.83)$$

Nous en déduisons que K est un polynôme (ou une série entière, selon ce que l'on souhaite faire) pair de τ .

Voyons ce que tout cela donne sur un petit cas : prenons $n = 2$. Si nous faisons comme précédemment sur le pendule, nous avons :

$$e^{\tau L_K} = e^{\tau L_A} e^{\tau L_B} \quad (4.84)$$

et d'après ce qui précède, nous voyons que, bien que symplectique, cet incrémenteur n'est pas réversible! Essayons-en un autre en symétrisant l'ordre de l'action des opérateurs :

$$S(\tau) = e^{\frac{1}{2}\tau L_A} e^{\tau L_B} e^{\frac{1}{2}\tau L_A}. \quad (4.85)$$

Nous vérifions immédiatement que :

$$S(\tau)^{-1} = e^{-\frac{1}{2}\tau L_A} e^{-\tau L_B} e^{-\frac{1}{2}\tau L_A} = S(-\tau). \quad (4.86)$$

De plus, cet intégrateur symétrisé est précis jusqu'à l'ordre deux, et nous remarquons même qu'en itérant, il ne coûte pas plus que le précédent en terme de calculs. En effet :

$$S(2\tau) = S(\tau)S(\tau) = e^{\frac{1}{2}\tau L_A} e^{\tau L_B} e^{\frac{1}{2}\tau L_A} e^{\frac{1}{2}\tau L_A} e^{\tau L_B} e^{\frac{1}{2}\tau L_A} = e^{\frac{1}{2}\tau L_A} e^{\tau L_B} e^{\tau L_A} e^{\tau L_B} e^{\frac{1}{2}\tau L_A} \quad (4.87)$$

ce qui nous fait économiser un calcul.

Un mot sur les méthodes de programmation

Un dernier commentaire sur les intégrateurs symplectiques : en pratique, ils sont simples à coder. Il suffit de créer des fonctions, subroutine, ou macros (selon le langage utilisé) pour chaque opérateur élémentaire : par exemple, créer une fonction (pour fixer le vocabulaire) $fonc(A, \tau, x)$ qui transforme x en $e^{\tau A(x)}x$. Ensuite, il faut faire de même avec l'opérateur B . Et au final, pour appliquer, par exemple, notre dernier incrémenteur, il suffit, dans la boucle principale, d'appliquer successivement $fonc(A, \tau/2, x)$, $fonc(B, \tau, x)$, puis de nouveau $fonc(A, \tau/2, x)$. Bien sûr, si l'on veut gagner en vitesse comme évoqué précédemment, il faut ruser. C'est là tout l'art du numéricien.

Pour en savoir plus Nous invitons le lecteur/trice curieux/euse à consulter l'article [6] de J. Laskar et P. Robutel, qui donne des explications beaucoup plus exhaustives que l'introduction que nous avons donnée dans ce court paragraphe sur les intégrateurs symplectiques.

Chapitre 5

Théorèmes dont la puissance destructrice terrifie les fonctions de Hamilton

En termes plus classiques, les ouvrages auraient nommé ce chapitre Dynamique des systèmes intégrables.

5.1 Introduction

À ce stade du cours, nous commençons à disposer d'armes vraiment puissantes pour tuer des hordes de fonctions de Hamilton. Comme vous l'avez compris, tout se base sur les changements de variables symplectiques. Nous allons faire un bilan de la liste des systèmes dynamiques que nous savons intégrer, autrement dit, dont nous savons résoudre les équations de Hamilton. Tout d'abord, les systèmes à un degré de liberté sont tous intégrables. En effet, l'intégrale première $H(p(0), q(0))$ nous fournit, formellement, une relation entre p et q ; étant donné un jeu de conditions initiales, la solution est entièrement connue dans l'espace des phases. Nous avons vu, par exemple, au chapitre 2 comment intégrer le problème du pendule. Une autre classe de problèmes intégrables sont ceux dont la fonction de Hamilton ne dépend que des impulsions (ou, de façon équivalente, que des coordonnées généralisées). Dans ce cas, l'intégration est triviale. En effet, nous avons $H(p, q) = f(p)$, donc $\dot{q} = \nabla_p f$, mais aussi, $\dot{p} = 0$, d'où $p = p_0$ et donc $\nabla_p f = \nabla_p f|_{p=p_0}$ et il vient alors $q(t) = \omega_0 t + q_0$ où $\omega_0 = \nabla_p f|_{p=p_0}$. Le but du jeu, dans ce qui suit, est de se ramener à l'un ou l'autre de ces cas de systèmes intégrables en utilisant notre artillerie lourde constituée des transformations symplectiques. Schématiquement, notre stratégie se résume de la façon suivante :

$$H(p, q) \xrightarrow{\phi} H(P) \rightarrow \text{système intégré.} \quad (5.1)$$

C'est simple, non ? Voyons comment faire.

5.2 Les immenses théorèmes qui transcendent la réalité

Accrochez vos ceintures!!! Nous commençons par une définition.

Définition 5.2.1. *On dit que deux fonctions F et G sont en involution quand leurs crochets de Poisson sont nuls : $\{F, G\} = 0$.*

Lemme 5.2.1. (Mayer)

Soient n fonctions $p_i^ = F_i(p, q)$ toutes en involution, et indépendantes : $\det(\partial F_i / \partial p_j) \neq 0$. Alors il existe un changement de variable canonique qui complète ces fonctions. Autrement dit, il existe n fonctions $q_i^* = G_i(p, q)$ telles que le changement de variable $(p, q) \rightarrow (p^*, q^*)$ soit canonique.*

Démonstration. Cette démonstration, un peu longue, peut être sautée en première lecture.

Nous pouvons raisonnablement supposer que le changement de variable est bijectif. Ainsi, posons $\phi = F^{-1}$. Nous avons alors :

$$p_i = \phi_i(p^*, q) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial p_j^*} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_j} \right)^{-1}. \quad (5.2)$$

Considérons la forme différentielle

$$\omega = pdq = \phi(p^*, q)dq \quad (5.3)$$

L'idée de la démonstration est de prouver que $d\omega = 0$; si c'est le cas, alors nous disposerons de l'existence de la fonction génératrice qui nous fournira le changement de variables. Donc, différencions :

$$d\omega = \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} dq_j \right) \wedge dp_i = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} - \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \right) dp_i \wedge dq_j. \quad (5.4)$$

Ainsi, la forme différentielle ω est fermée si et seulement si :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}. \quad (5.5)$$

Démontrons ceci sans plus tarder. Nous avons :

$$p_i^* = F_i(p, q) = F_i(\phi(p^*, q), q). \quad (5.6)$$

Mais, p_i^* en tant que fonction de p^* et q ne peut dépendre de q ! Ainsi, la dérivée partielle par rapport à q_i est forcément nulle :

$$\frac{\partial p_i^*}{\partial q_k} = \frac{\partial F_i}{\partial q_k} + \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial q_k} = 0. \quad (5.7)$$

En multipliant cette égalité par $\partial F_m / \partial p_k$, en effectuant la somme sur k (pour symétriser les indices), nous obtenons :

$$\forall i, m \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_k \frac{\partial F_i}{\partial q_k} \frac{\partial F_m}{\partial p_k} + \sum_{j,k} \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \frac{\partial F_m}{\partial p_k} \frac{\partial \phi_j}{\partial q_k} = 0. \quad (5.8)$$

De même, en permutant les indices j et k dans la deuxième somme, nous obtenons :

$$\forall i, m \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_k \frac{\partial F_i}{\partial q_k} \frac{\partial F_m}{\partial p_k} + \sum_{j,k} \frac{\partial F_m}{\partial p_j} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial q_j} = 0. \quad (5.9)$$

À présent, nous permutons les indices m et i dans l'égalité (5.8), et nous lui soustrayons l'égalité (5.9). Comme les fonctions F_i sont en involution, les premiers termes des égalités soustraites donnent zéro puisqu'ils sont identiquement égaux aux crochets de Poisson de F_i et F_m . Ainsi, nous obtenons :

$$\forall i, m \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j,k} \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \frac{\partial F_m}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial q_j} \right) = \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \sum_k \frac{\partial F_m}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial q_j} \right). \quad (5.10)$$

Nous voyons apparaître la différence que nous désirons nulle, nous touchons au but. En effet, cette somme représente la i -ème ligne de l'égalité vectorielle suivante :

$$\forall m \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad MY(m) = 0 \quad (5.11)$$

où

$$M_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \quad \text{et} \quad Y_j(m) = \sum_k \frac{\partial F_m}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial q_j} \right), \quad \text{pour } m \text{ fixé dans } \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (5.12)$$

Comme M est inversible, il vient :

$$\forall m, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad Y_j(m) = \sum_k \frac{\partial F_m}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial q_j} \right) = 0. \quad (5.13)$$

Nous reconnaissons encore la m -ème ligne d'une égalité vectorielle :

$$MX(j) = 0 \quad (5.14)$$

où, cette fois :

$$M_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \quad \text{et} \quad X_k(j) = \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial q_j} \right) \quad \text{pour } j \text{ fixé dans } \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (5.15)$$

M étant inversible, nous obtenons finalement :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial q_j} \right) = 0. \quad (5.16)$$

Nous arrivons au bout de nos péripéties. En effet, nous venons de prouver que la forme différentielle $\omega = \sum_i \phi_i(p^*, q) dq_i$ était fermée. Ainsi, il existe une fonction $S(p^*, q)$ telle que $\omega = dS$, soit :

$$\sum_i \phi_i(p^*, q) dq_i = dS(p^*, q) \quad (5.17)$$

d'où

$$p_i^* = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \quad (5.18)$$

Et ainsi, nous pouvons compléter le changement de variable par

$$q_i^* = \frac{\partial S(p^*, q)}{\partial p_i^*}. \quad (5.19)$$

En effet, le changement de variables $(p, q) \rightarrow (p^*, q^*)$ est canonique puisque

$$dS(p^*, q) = pdq + q^* dp^*, \quad (5.20)$$

d'où, en différentiant et en utilisant le théorème de Poincaré :

$$d^2S = dp \wedge dq + dq^* \wedge dp^* = 0. \quad (5.21)$$

CQFD

Théorème 5.2.1. (*Liouville*)

Soit un système dynamique à n degrés de liberté. Si ce système possède n intégrales premières $F_i(p, q)$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en involution deux à deux, et indépendantes (le jacobien $\partial F_i / \partial p_j$ est inversible), alors le système est intégrable et la solution peut être obtenue par quadrature¹.

Démonstration. Il suffit d'effectuer le changement de variables canonique du lemme précédent. Alors, nous avons

$$p^* = F(p, q) = \text{constante}. \quad (5.22)$$

De ce fait,

$$\dot{p}^* = -\partial_{q^*} H = 0, \quad (5.23)$$

donc nécessairement, la fonction de Hamilton ne dépend que des nouvelles impulsions, autrement dit des intégrales premières. Il en résulte que

$$\dot{q}^* = \partial_{p^*} H = \omega_0 = \text{constante} \quad (5.24)$$

ce qui donne la solution par quadrature :

$$p^* = p_0^* \quad \text{et} \quad q^* = \omega_0 t + q_0^*. \quad (5.25)$$

CQFD

Nous voyons ici qu'intégrer un système dynamique revient à trouver ses intégrales premières. Une façon simple et schématique d'énoncer le théorème de Liouville est de dire qu'un système de n degrés de liberté qui possède n intégrales premières est intégrable. Nous pouvons voir une analogie avec les systèmes d'équations linéaires : un système de n équations linéaires indépendantes à n inconnues est soluble. Le théorème de Liouville est, en quelque sorte, une généralisation de ce résultat. Pour les courageux qui ont lu la démonstration du lemme de Mayer, vous vous souvenez que vers la fin de la preuve, nous montrions que la validité du changement de variable était équivalente à l'inversibilité de la matrice jacobienne, ce qui nous rappelle la bijectivité de l'application linéaire sur un vecteur pour que le système soit inversible. Rappelons-nous aussi qu'une condition supplémentaire à la solubilité du problème est que les intégrales premières soient en involution. Un corollaire du théorème de Liouville est le théorème de Lie :

1. *i.e.* il existe des expressions littérales des trajectoires

Théorème 5.2.2. *Soit un système dynamique à n degrés de liberté. Soient $m < n$ intégrales premières $F_i(p, q)$, $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, en involution, et indépendantes : la matrice de taille $m \times m$ $M_{i,j} = \partial F_i / \partial p_j$ est inversible. Alors il est possible de réduire le nombre de degrés de liberté de m et d'obtenir un système à $n - m$ degrés de liberté.*

Démonstration. Appliquons, une fois de plus, le même changement de variables :

$$H(p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_n) \xrightarrow{\phi} H(p_1^*, \dots, p_m^*, p_{m+1}, \dots, p_n, q_{m+1}^*, \dots, q_n^*) \quad (5.26)$$

puisque tous les q_i^* , $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, sont constants par hypothèse. Ainsi, nous avons :

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \dot{p}_i^* = 0 = -\partial_{q_i^*} H. \quad (5.27)$$

CQFD

Théorème 5.2.3. *(Arnold-Liouville)*

Soit un système dynamique à n degrés de liberté. Supposons qu'il existe n intégrales premières $F_i(p, q)$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, indépendantes et en involution. Considérons, pour $f \in \mathbb{R}^n$ la variété de dimension n définie par les ensembles de niveau des F_i :

$$M_f = \{x \mid F_i(x) = f_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}. \quad (5.28)$$

Si M_f n'est pas vide, alors :

- M_f est une sous-variété de dimension n de \mathbb{R}^{2n} , invariante par le flot de Hamilton ϕ_H et par les flots des F_i , ϕ_{F_i} .
- Les flots ϕ_{F_i} commutent deux à deux.
- Si la variété M_f est compacte et connexe, alors elle est difféomorphe à un tore de dimension n :

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z}^n) = \{(\phi_1, \dots, \phi_n) \pmod{2\pi}\}. \quad (5.29)$$

- Le flot de H définit sur M_f un mouvement quasi-périodique, i.e. dans les coordonnées angulaires (ϕ_1, \dots, ϕ_n) ,

$$\dot{\phi} = \omega(f) = \text{constante}. \quad (5.30)$$

- Les équations canoniques de Hamilton sont intégrables par quadrature.
- Il existe un changement de variables canonique $(p, q) \rightarrow (I, \phi)$ tel que $(I, \phi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ dans lesquelles la fonction de Hamilton ne dépend que des actions I_k .

Démonstration. Je vais commencer par admettre ce résultat, et un jour j'irai jeter un oeil dans le Arnold [2]. Pour l'instant, priez la grande déesse Plüthaar. CQFD

5.3 Applications : dynamique des systèmes intégrables sur le tore

5.3.1 Dimension 1 : dynamique sur \mathbb{T}

Ce cas est relativement simple, mais permet de poser les bases. Dans le jeu de variables *action-angle* (I, θ) , nous avons $H(I, \theta) = H(I)$. Ainsi, $I = \text{constante}$ et $\theta = \nu t + \theta_0$ où $\nu = dH/dI$. Nous pouvons représenter cette évolution en coordonnées polaires, comme sur la figure 5.1. En fait, le tore de dimension 1 n'est rien d'autre qu'un cercle.

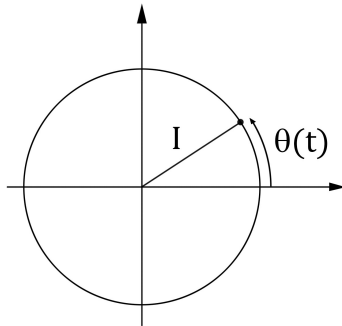


FIGURE 5.1 – Dynamique dans \mathbb{T}

5.3.2 Dimension 2 : dynamique sur \mathbb{T}^2

Soit le jeu de variables $(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$. La fonction de Hamilton ne dépend que des actions : $H(I_1, I_2)$. Par exemple, supposons que $I_1 > I_2$. Alors, nous pouvons représenter l'évolution des trajectoires sur un tore de dimension 2 plongé dans \mathbb{R}^3 . Considérons la figure 5.2.

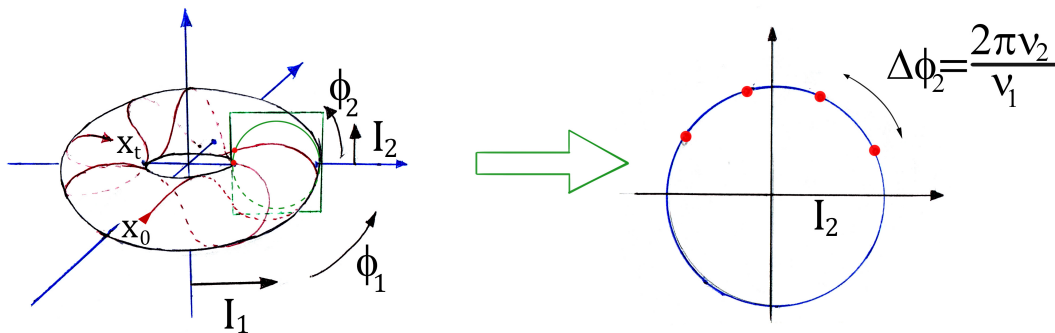


FIGURE 5.2 – Une trajectoire sur \mathbb{T}^2

Nous avons représenté une trajectoire sur le tore, définie entre un point de départ x_0 et un point d'arrivée $x_t = x(t) = \phi_t(x_0)$. Nous avons aussi représenté une *section de Poincaré*. Avant d'en donner une définition formelle, donnons quelques explications. Une section de Poincaré sert à tracer des courbes à deux dimensions qui donnent des informations sur le système à deux degrés de liberté. Comme représenté sur la figure, nous nous plaçons sur le demi-plan $\phi_1 = \text{constante}$ et nous regardons comment la trajectoire *coupe* ce plan. Chacun des points d'intersection donne un point sur la section de Poincaré. Ainsi, le temps qui sépare deux points de la section de Poincaré vaut la période de la première variable d'angle : $\Delta T_2 = 2\pi/\nu_1$. Et ainsi, comme représenté sur la figure 5.2, la variation d'angle vaut $\Delta\phi_2 = \nu_2\Delta T_2 = 2\pi\nu_2/\nu_1$.

Deux cas de figure intéressants se distinguent. Si $\nu_2/\nu_1 \in \mathbb{Q}$, alors les orbites sont périodiques et la section de Poincaré est un ensemble dénombrable (en vert sur la figure 5.3) On parle de *trajectoire résonante*. En revanche, si $\nu_2/\nu_1 \notin \mathbb{Q}$ (en rouge et en bleu sur la figure 5.3), au bout

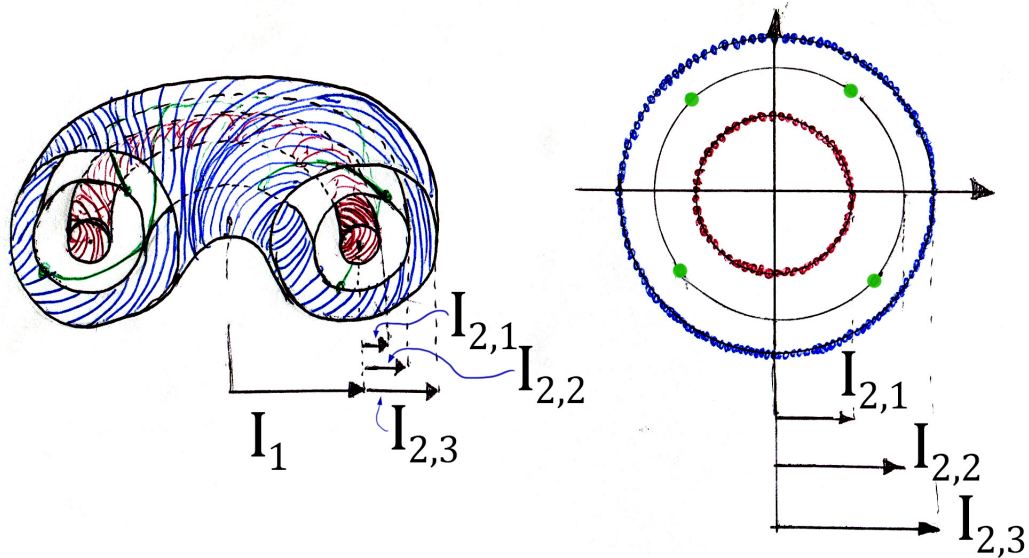


FIGURE 5.3 – Deux tores non résonants et un tore résonant

d'un temps infini la section de Poincaré est dense sur le cercle, et la trajectoire est dense sur le tore. Dans la figure 5.3, nous avons fait l'hypothèse que la fréquence ν_2 dépendait de l'action I_2 via $\nu_2 = \dot{\phi}_2 = \partial_{I_2} H$. Ainsi, dès que nous nous écartons à peine d'une résonance, nous avons des chances de tomber sur des trajectoires non résonantes.

Avant de passer à la suite, résumons nos résultats de façon un peu plus formelle, non seulement pour structurer les concepts, mais aussi pour apprendre du vocabulaire fréquemment utilisé dans la littérature.

Définition 5.3.1. Soit un système intégrable à deux degrés de liberté, de variables canoniques $(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2)$ évoluant dans le tore. Posons $\nu_k = \partial_{I_k} H$. L'application de premier retour par rapport à la variable θ_1 est le flot de Hamilton au temps $2\pi/\nu_2$, autrement dit $\phi_{2\pi/\nu_2}$.

Autrement dit, l'application de premier retour par rapport à la variable θ_2 est l'application qui "fait passer au point suivant" sur la section de Poincaré.

Définition 5.3.2. Nous reprenons les mêmes notations que dans la définition précédente. Soit $(I_{1,0}, I_{2,0}, \theta_{1,0}, \theta_{2,0}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$ une condition initiale. Elle définit une trajectoire. Nous appelons section de Poincaré de cette trajectoire, et notons S , la suite itérée de l'application de premier retour de cette condition initiale (cf. figure 5.4), autrement dit, l'ensemble des points suivants :

$$S = \{\phi_{2\pi/\nu_2}^n(I_{1,0}, I_{2,0}, \theta_{1,0}, \theta_{2,0}) | n \in \mathbb{N}\}. \quad (5.31)$$

Nous avons vu qu'il y avait un lien entre les variables d'action-angle et position-impulsion. Il s'agit d'un passage en coordonnées polaires mais canonique. Ainsi, la représentation de la trajectoire en variables action-angle est aussi le portrait de phase de la trajectoire. Nous pouvons voir la section

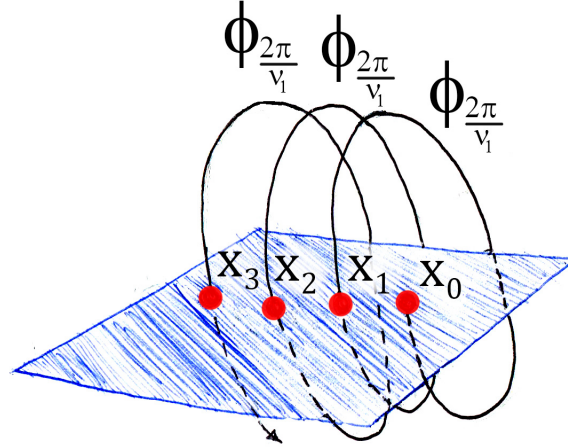


FIGURE 5.4 – L’itérée de l’application de premier retour

de Poincaré par rapport à une variable comme le portrait de phase stroboscopique de ce jeu de variables, où la période de prise de vue est précisément $2\pi/\nu_1$.

Pour avoir une vue d’ensemble du système, il est souvent nécessaire de tracer plusieurs sections de Poincaré à partir de plusieurs conditions initiales différentes :

Définition 5.3.3. *Nous appelons surface de sections de Poincaré, ou, de façon plus compacte, surface de sections, la carte tracée à partir des sections de Poincaré d’un ensemble de conditions initiales données.*

Comme introduction au chapitre suivant, nous allons donner un exemple de surface de sections, mais pour un système dynamique non intégrable. Mimas est un satellite non sphérique de Saturne. En raison de sa non sphéricité, nous devons définir deux angles pour caractériser son orbite : l’angle repérant son orbite, et son angle de rotation propre. Dans le modèle que j’ai effectué pendant mon stage de M1, l’orbite de Mimas était képlérienne, donc périodique. J’ai donc effectué, numériquement, une surface de sections de Mimas sur la variable de rotation. Le programme relevait la valeur de l’angle de rotation ainsi que sa vitesse (donc son impulsion conjuguée) à chaque fois que le satellite passait par le périastre. La surface de section de Mimas est représentée sur la figure 5.5.

Nous voyons plein de choses intéressantes. Sans rentrer dans les détails (qui furent l’objet de mon stage), nous voyons trois îles de libérations, comme sur le pendule simple. Nous voyons quelques trajectoires résonantes, et d’autres denses. Ce n’est pas tout-à-fait vrai. En effet, en tirant un nombre aléatoire, la probabilité qu’il soit exactement rationnelle est nulle. Cependant, si le rapport des fréquences est "presque" rationnel, comme le nombre d’itérations de la simulation est fini, nous ne voyons pas la densité de la trajectoire sur la surface de sections. Nous voyons aussi apparaître des zones où il n’y a aucun ordre apparent, les sections de Poincaré de certaines trajectoires semblent diverger (mais en restant à l’extérieur de la grande île de résonance) : ce sont des trajectoires chaotiques. En fait, la fonction de Hamilton de Mimas peut s’écrire comme une fonction de Hamilton intégrable à laquelle nous ajoutons une perturbation non intégrable. C’est ceci qui génère du chaos. En effet, la surface de sections de Mimas ressemble à celle du tore. Nous pouvons poser la ques-

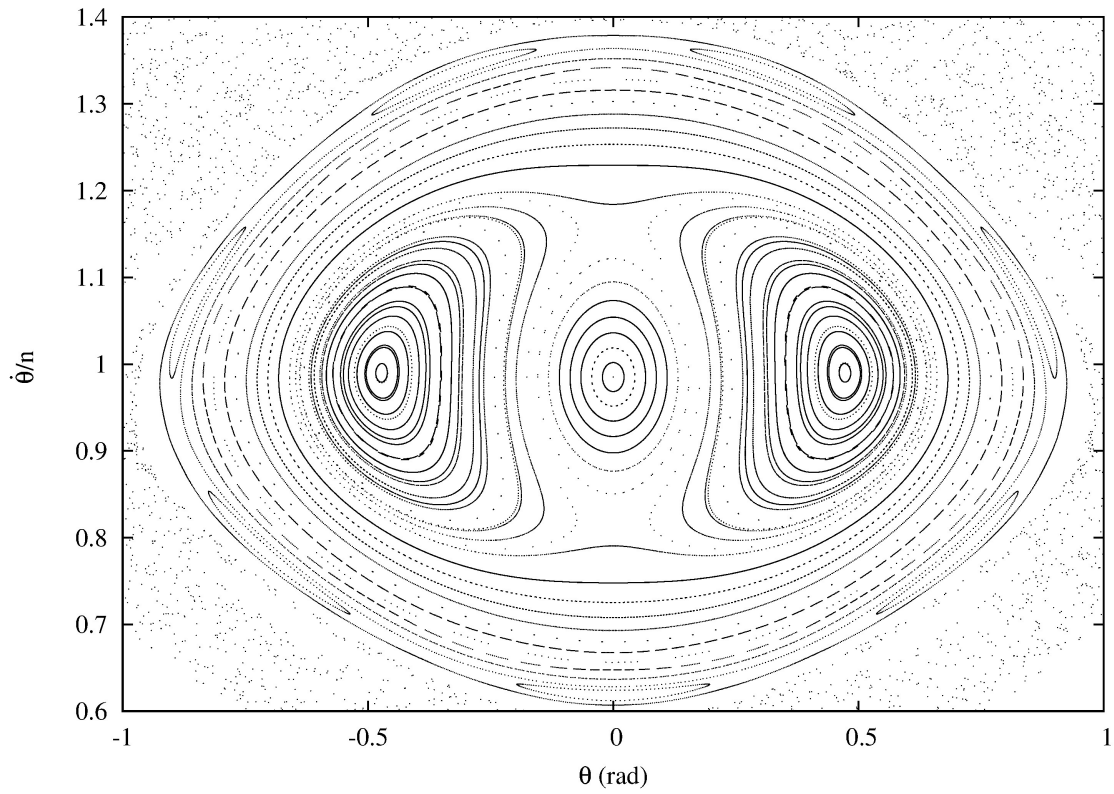


FIGURE 5.5 – Surface de sections de Mimas

tion suivante : existe-t-il une transformation qui permet de passer de la dynamique du tore à la dynamique non intégrable ? C'est justement l'objet du chapitre qui vient.

Chapitre 6

Perturbations, dynamique des systèmes non intégrables, chaos

6.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'affronter des fonctions de Hamilton un peu plus résistantes que celles que nous avons vues jusqu'ici. Nous allons voir des méthodes pour intégrer les trajectoires de fonctions de Hamilton du type :

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 \tag{6.1}$$

où H_0 est une fonction de Hamilton intégrable et εH_1 une perturbation. Le fil conducteur de l'exposé sera le suivant : nous voudrions trouver un changement de variable symplectique qui transforme la fonction de Hamilton ainsi :

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \varepsilon^n \tilde{H}_n \tag{6.2}$$

où, formellement, n est aussi grand que l'on veut. D'un point de vue pratique, et ça sera le cas dans ce cours, nous nous limiterons au premiers ordres. Mais théoriquement, rien n'empêche d'aller jusqu'à l'infini, et d'obtenir une solution exacte sous forme de série.

L'application la plus évidente est l'étude du Système Solaire. En première approximation, chaque planète a une orbite de Kepler par rapport au Soleil. Puis, viennent s'ajouter les attractions gravitationnelles des planètes entre elles. Nous pouvons même considérer la relativité générale comme une perturbation au problème de Newton, qui, par exemple, permet de retrouver l'avance du périhélie de Mercure. Cela donne tout un éventail de théories de mécanique céleste post-newtoniennes.

Commençons par les méthodes générales.

6.2 Système dynamique perturbé

6.2.1 Résolution à l'ordre 1

Pour signifier qu'une fonction de Hamilton est intégrable, nous la noterons ne dépendant que des variables d'actions. Ainsi, soit la fonction de Hamilton suivante :

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta). \tag{6.3}$$

Nous allons chercher un changement de variables canonique qui transforme la fonction de Hamilton selon

$$(I, \theta) \rightarrow (J, \psi) \quad \text{tel que} \quad H(J, \psi) = H_1'(J) + \varepsilon^k H_2'(J, \psi) \quad \text{où} \quad k \geq 2. \quad (6.4)$$

Posons $x = (I, \theta)$ et $y = (J, \psi)$. Considérons le champ scalaire $W(I, \theta)$. Comme la fonction de Hamilton perturbée est proche de la fonction de Hamilton intégrable (à ε près), nous allons considérer un changement de variables proche de l'identité. Pour $x = (p, q) \in \mathcal{P}$, nous allons considérer la transformation suivante :

$$x = (p, q) \rightarrow y = (P, Q) \quad \text{tel que} \quad x = e^{\varepsilon L_W} y \quad \text{ou encore} \quad y = e^{-\varepsilon L_W} x. \quad (6.5)$$

En développant l'exponentielle, il est direct que la transformation est proche de l'identité à ε près.

J'entends des voix gronder au dernier rang : "mais, qui me dit que ce changement de variables est canonique?" C'est le théorème suivant, qui est une conséquence directe du théorème 4.2.2 du chapitre 4 :

Théorème 6.2.1. *Soit un champ scalaire W . Alors, le flot de ce champ scalaire au temps t , défini comme*

$$\phi_{W,t} = e^{tL_W} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n L_W^n}{n!} \quad (6.6)$$

est une transformation symplectique de l'espace des phases \mathcal{P} dans lui-même.

Démonstration. La preuve est identique à celle du théorème 4.2.2, il suffit de remplacer la matrice hessienne de H par celle de W . Pour rappel, ce qui nous permet de conclure fut la symétrie de la matrice hessienne. CQFD

L'intérêt de la construction de toute cette artillerie lourde commence à apparaître : formellement, la transformation de la fonction de Hamilton s'écrit très simplement. En effet :

$$\tilde{H}(y) = H(x) = H(\phi_\varepsilon(y)) = e^{\varepsilon L_W} H(y) = H(y) + \varepsilon \{W, H\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (6.7)$$

Quand nous nous limitons aux termes d'ordre 1, nous obtenons¹ :

$$\tilde{H}(y) = H_0(y) + \varepsilon H_1(y) + \varepsilon \{W, H_0\}(y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (6.8)$$

Ordre par ordre, nous identifions :

$$\tilde{H}_0 = H_0, \quad \tilde{H}_1 = H_1 + \{W, H_0\}. \quad (6.9)$$

Nous exposons une technique de résolution de cette équation par séries de Fourier. Supposons que H_1 soit périodique par rapport à la variable q . Nous pouvons écrire sa décomposition en série de Fourier :

$$H_1(p, q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k(p) e^{i\langle k, q \rangle}, \quad (6.10)$$

où $\langle k, q \rangle$ désigne le produit scalaire $\sum_{j=1}^n k_j q_j$. De même, nous allons chercher une fonction génératrice périodique :

$$W(p, q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} w_k(p) e^{i\langle k, q \rangle}. \quad (6.11)$$

1. Pour rappel, nous avons $H(x) = H_0(x) + \varepsilon H_1(x)$.

Par hypothèse, H_0 ne dépend que de p . Ainsi, il vient :

$$\{W, H_0\} = -\partial_q W \partial_p H = - \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} w_k(p) i \langle k, \omega_0(p) \rangle e^{i \langle k, q \rangle}, \quad (6.12)$$

où nous avons noté $\omega_0(p) = \partial_p H_0$. Nous savons que $(q \rightarrow e^{i \langle k, q \rangle})$ est une base des fonctions 2π -périodiques. L'équation (6.9) nous donne ainsi :

$$\forall k \neq (0, \dots, 0), \quad -w_k(p) i \langle k, \omega_0(p) \rangle = -h_k(p) \quad \text{d'où} \quad w_k(p) = \frac{h_k(p)}{i \langle k, \omega_0(p) \rangle}. \quad (6.13)$$

Il nous manque le terme non périodique ($k = (0, \dots, 0)$). Mais, nous pouvons choisir W non périodique. En effet, le terme constant de H_1 est intégrable. Ainsi, nous obtenons l'équation homologique :

$$\{W, H_0\} = -H_1 + \langle H_1 \rangle = -\{H_1\}, \quad (6.14)$$

où $\langle H_1 \rangle$ est la moyenne de H_1 . Ainsi, la partie séculaire (non périodique) de H_1 rentre dans la partie intégrable de la nouvelle fonction de Hamilton. Mais, en ayant choisi la fonction génératrice W suivant l'équation (6.13), il vient alors :

$$\tilde{H}(P, Q) = H_0(P) + \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k(p) e^{i \langle k, q \rangle} - \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} w_k(p) i \langle k, \omega_0 \rangle e^{i \langle k, q \rangle} = H_0(P) + \varepsilon h_0(P) = H_0(P) + \varepsilon \langle H_1 \rangle(P). \quad (6.15)$$

En effectuant une moyenne sur H_1 par rapport à q , il ne reste qu'une dépendance en p . De plus, dans un terme d'ordre un, nous pouvons considérer indépendamment les variables p, q de P, Q , puisque la transformation est proche de l'identité à ε près. En effet :

$$\varepsilon f(y) = \varepsilon f(x + \varepsilon \{W, x\}) = \varepsilon f(x) + \varepsilon^2 \{W, x\} f'(x) = \varepsilon f(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (6.16)$$

Retenons le résultat à l'ordre 1 : Soit une fonction de Hamilton intégrable à l'ordre 0 et perturbée à l'ordre 1 :

$$H(p, q) = H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q). \quad (6.17)$$

Le changement de variables suivant permet d'intégrer le système à l'ordre 1 :

$$(p, q) = (P, Q) + \varepsilon \{W, (P, Q)\}, \quad (6.18)$$

$$\tilde{H}(P, Q) = H_0(P) + \varepsilon \langle H_1 \rangle(P), \quad (6.19)$$

$$\text{où } W(p, q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{h_k(p)}{i \langle k, \partial_p H_0 \rangle} e^{i \langle k, q \rangle} \quad (6.20)$$

$$\text{et } H_1(p, q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k e^{i \langle k, q \rangle}. \quad (6.21)$$

L'intérêt de ce formalisme est immense : en effet, la forme de la transformation est la même pour les variables et pour la fonction de Hamilton. À présent, nous voyons apparaître le problème des *petits diviseurs*. En effet, rien ne garantit la convergence de la série de Fourier. D'emblée, s'il existe k dans \mathbb{Z}^n tel que $\langle k, \omega_0 \rangle = 0$, toute notre construction tombe à l'eau. Mais pire, si le produit scalaire $\langle k, \omega_0 \rangle$ ne converge pas assez vite vers 0 quand $|k| = \sum_l |k_l|$ tend vers l'infini, alors la série de Fourier ne converge pas. Le théorème KAM (Kolmogorov, Arnold et Moser) donne une condition suffisante pour la convergence :

Théorème 6.2.2. (KAM)

Soit une fonction de Hamilton quasi-intégrable : $H(p, q) = H_0(p) + H_1(p, q)$. Soit $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Si :

(1) H_1 est analytique (développable en série entière au voisinage de chacun de ses points de son domaine de définition),

(2) $\omega_0 = \partial_p H_0(p_0)$ vérifie la condition diophantienne :

$$\exists \tau, \gamma > 0, \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus (0, \dots, 0), |\langle k, \omega_0 \rangle| \geq \frac{\tau}{|k|^\gamma}, \quad (6.22)$$

(3) $\det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j} \right) \neq 0$ (fonction de Hamilton non dégénérée),

alors il existe un changement de variable canonique tel que la dynamique du système est intégrable et évolue sur le tore.

Démonstration. Dans le cas où H_1 est analytique et périodique, nous avons :

$$\exists \sigma > 0, \frac{h_k}{\langle k, q \rangle} = \mathcal{O}(|k|^\gamma e^{-\sigma|k|}), \quad (6.23)$$

ce qui assure la convergence de la série. Par contre, je n'ai pas compris l'utilité de la non dégénérescence de H_0 ... CQFD

6.2.2 Résolution à l'ordre 2, idées pour un ordre quelconque

Il suffit de réitérer le processus. Par exemple, nous pouvons paramétrer la fonction génératrice sur chacun des ordres en posant :

$$W = \sum_{k=1}^n \varepsilon^{k-1} W_k \quad (6.24)$$

si nous voulons aller jusqu'à l'ordre n . Calculons, ordre par ordre, ce que donne un tel paramétrage. Nous désirons obtenir une fonction de Hamilton de la forme :

$$\tilde{H}(P, Q) = \tilde{H}_0(P) + \varepsilon \tilde{H}_1(P) + \varepsilon^2 \tilde{H}_2(P) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (6.25)$$

ou plus généralement :

$$\tilde{H}(P, Q) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{H}_k(P) + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}). \quad (6.26)$$

En effectuant le changement de variables, nous obtenons :

$$\tilde{H}(P, Q) = e^{\varepsilon W} H(P, Q) \quad (6.27)$$

$$= H + \varepsilon \{W, H\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \{W, \{W, H\}\} \quad (6.28)$$

$$= H_0 + \varepsilon (H_1 + \{W_1, H_0\}) + \varepsilon^2 \left(\{W_2, H_0\} + \{W_1, H_1\} + \frac{1}{2} \{W_1, \{W_1, H_0\}\} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (6.29)$$

Identifions ordre par ordre. Comme précédemment, nous obtenons sans surprise :

$$\tilde{H}_0 = H_0 \quad \text{et} \quad \tilde{H}_1 = H_1 + \{W_1, H_0\}, \quad (6.30)$$

puis

$$\tilde{H}_2 = \{W_2, H_0\} + \{W_1, H_1\} + \frac{1}{2}\{W_1, \{W_1, H_0\}\}. \quad (6.31)$$

De même, nous demandons que \tilde{H}_2 ne dépende que de P . Seulement, la fonction génératrice à l'ordre 2, W_2 , en dépend forcément, et *a fortiori* ça sera aussi le cas de $\{W_2, H_0\}$. Ainsi, pour ne pas avoir de dépendance en Q dans \tilde{H}_2 , il faut nécessairement que :

$$\{W_2, H_0\} = -\{W_1, H_1\} + \frac{1}{2}\{W_1, \{W_1, H_0\}\} + \left\langle \{W_1, H_1\} + \frac{1}{2}\{W_1, \{W_1, H_0\}\} \right\rangle \quad (6.32)$$

$$= -R_1 + \langle R_1 \rangle \quad (6.33)$$

$$= -\{R_1\}$$

$$(6.35)$$

où nous avons posé

$$R_1 = \{W_1, H_1\} + \frac{1}{2}\{W_1, \{W_1, H_0\}\} \quad (6.36)$$

et où pour toute fonction F , $\{F\} = F - \langle F \rangle$ désigne la partie périodique (ou autrement dit "non constante") de la fonction F . L'équation (6.32) constitue l'équation homologique d'ordre 2. Nous pouvons aussi la résoudre de façon exacte dans le cas de fonctions périodiques.

6.3 Premiers pas vers le chaos : un exemple

6.3.1 Le satellite triaxial

Dans ce paragraphe, Plüthaar vous montre que la fonction de Hamilton d'un satellite de triaxialité ε , d'angle de rotation absolu θ , a, si l'on pose $\phi = \theta - nt$ où n est la fréquence du moyen mouvement (dans la suite, nous prenons un système d'unités tel que $n = 1$), la fonction de Hamilton suivante :

$$H = \frac{J^2}{2} - \varepsilon \cos 2\phi + \frac{\varepsilon e}{2} [\cos(2\phi + t) - 7 \cos(2\phi - t)] \quad (6.37)$$

e représente l'excentricité de l'orbite.

6.3.2 Résonances spin-orbite

Ce système dynamique n'est pas intégrable. Remarquons que nous avons deux infiniments petits physiques : l'excentricité e ainsi que la triaxialité ε . Ainsi, au premier ordre, la fonction de Hamilton du satellite est celle du pendule (attention : translaté dans le temps). De portrait de phase est celui du pendule mais qui se translate de gauche à droite vers la droite. Les points d'équilibre sont situés en $J = 0$ et $\theta \equiv 0[\pi]$. En reprenant le calcul du chapitre 2, nous trouvons que la largeur des séparatrices vaut $\Delta J = 4\sqrt{\varepsilon}$.

Au voisinage de la résonance 1 : 1, c'est-à-dire $\dot{\phi} = 0$, ou encore $\theta = t$, en moyennant la perturbation sur le temps nous retrouvons le pendule. À présent, nous allons considérer la résonance dite 2 : 1, au voisinage de $\frac{d}{dt}(2\phi + t) = 0$. Nous allons avoir besoin d'effectuer un changement de

variables sur le temps. Étendons la dimension de l'espace des phases et écrivons la fonction de Hamilton étendue :

$$\tilde{H}(J, T, \phi, \tau) = H(J, \phi, \tau) + T. \quad (6.38)$$

Et à présent, posons $\theta_1 = \phi + \tau/2$, et $\theta_2 = \tau$, ou encore :

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \tau \end{pmatrix}. \quad (6.39)$$

Complétons avec les impulsions conjuguées :

$$\begin{pmatrix} J \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

La nouvelle fonction de Hamilton s'écrit :

$$H = \frac{I_1^2}{2} + \left(\frac{1}{2} I_1 + I_2 \right) - \varepsilon \cos(2\theta_1 - \theta_2) + \frac{\varepsilon e}{2} [\cos 2\theta_1 - 7 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)]. \quad (6.41)$$

Puisque nous nous plaçons au voisinage de la résonance, nous supposons que l'angle θ_1 varie lentement. Ainsi, nous pouvons effectuer une moyenne sur l'angle θ_2 (qui en réalité n'est autre que le temps). Nous obtenons :

$$\langle H \rangle_{\theta_2} = \frac{I_1^2}{2} + \left(\frac{1}{2} I_1 + I_2 \right) + \frac{e\varepsilon}{2} \cos 2\theta_1. \quad (6.42)$$

De là, nous effectuons la translation $I_1' = I_1 + 1/2$ de sorte à éliminer le terme en I_1 . Comme I_2 n'a pas sa variable conjuguée dans la fonction de Hamilton, nous pouvons l'oublier. Ainsi, la fonction de Hamilton devient :

$$\langle H \rangle_{\theta_2} = \frac{I_1'^2}{2} + \frac{e\varepsilon}{2} \cos 2\theta_1. \quad (6.43)$$

Nous savons intégrer ce problème : c'est encore un pendule. Les points d'équilibre, les points fixes du flot, sont :

$$I_1' = 0 \quad \theta_1 \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2} \right]. \quad (6.44)$$

Les points hyperboliques sont $\theta_1 \equiv 0[\pi]$ et les points elliptiques sont $\theta_1 \equiv \pi/2[\pi]$. L'extension de la zone de libration se calcule ainsi. La séparatrice est un niveau d'énergie, donc H a la même valeur sur la séparatrice en $\theta_1 = 0$ (où $I_1' = 0$) ou en $\theta_1 = \pi/2$. Cela nous donne l'équation suivante :

$$\frac{e\varepsilon}{2} = \frac{I_1'^2}{2} - \frac{e\varepsilon}{2} \Rightarrow I_1' = \pm \sqrt{2e\varepsilon}. \quad (6.45)$$

L'extension de l'île de résonance est donc de $2\sqrt{2e\varepsilon}$. Quand nous repassons dans les variables J, ϕ , ces îles sont décalées vers le bas à $J = -1/2$. De même, nous pourrions étudier la résonance au voisinage de $\frac{d}{dt}(2\phi - t) = 0$ et nous trouverions alors les points d'équilibre suivants : $J = +1/2$, $\phi \equiv t/2[\pi/2]$, avec une extension $\Delta J = 2\sqrt{14e\varepsilon}$. À un temps fixé, nous obtenons la surface de sections de Poincaré de la figure 6.1, où nous avons choisi comme plan de section $t \equiv 0[pi]$.

FIGURE 6.1 – Surface de sections de Poincaré du satellite triaxial

6.4 Système quasi-intégrable : dynamique lentement variable

Une autre classe de problèmes quasi-intégrables est ceux où le hamiltonien dépend d'un paramètre lentement variable dans le temps. Par "lentement variable" j'entends lent par rapport aux fréquences des angles, calculées en considérant le paramètre constant. Soit un système dynamique décrit par une fonction de Hamilton à un degré de liberté, suite à une transformation canonique de type action-angle : $\Phi(p, q) = (I, \alpha)$ tel que la nouvelle fonction de Hamilton ne dépende que de l'action I . Supposons que la fonction de Hamilton dépende continuellement d'un paramètre λ , ainsi que la transformation canonique. Si λ est une constante, alors le système dynamique est intégrable et nous pouvons obtenir la solution par quadrature : $I(p, q, \lambda, t) = I_0 = I(p_0, q_0, \lambda, t = 0)$ et $\alpha = \omega(\lambda, I_0)t + \alpha_0$ où $\omega(\lambda, I) = \partial H / \partial I$.

À présent supposons que λ varie lentement dans le temps par rapport à l'angle, c'est-à-dire que nous supposons que $\dot{\lambda} / \lambda \ll \omega(I)$. *A priori*, les notions d'actions et d'angle n'ont plus de raison d'être, mais localement, les variables I, α intègrent approximativement le problème. Par ailleurs, même si en général I, α ne sont plus des variables d'action et d'angle, à un instant t donné, le système peut encore être décrit par ce jeu de variables puisque la transformation Φ est bijective. Ainsi, il s'agit de voir à quel point I ne sera pas constant et à quel point l'angle ne varie pas linéairement avec le temps, le long d'une trajectoire. D'une part, nous avons :

$$\frac{dI}{dt} = \{H, I\} + \left. \frac{\partial I}{\partial t} \right|_{p,q} . \quad (6.46)$$

Le crochet de poisson est nul puisqu'à λ constant, I est une intégrale première. Attirons l'attention du lecteur que la dérivation partielle se fait à p, q constants et non I, α . Nous écrivons les variations de I le long de la trajectoire $(p(t), q(t))$. La suite du calcul donne :

$$\frac{dI}{dt} = \dot{\lambda} \left. \frac{\partial I}{\partial \lambda} \right|_{p,q} . \quad (6.47)$$

De même, nous pouvons montrer que

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega(I, \lambda) + \dot{\lambda} \left. \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \right|_{p,q} . \quad (6.48)$$

À ce stade, encore aucune approximation n'a été faite et les équations du mouvement ci-dessus sont encore exactes.

Bibliographie

- [1] W. Appel. *Mathématiques pour la physique*. H&K, 2008.
- [2] V.I. Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1989.
- [3] C. Gignoux and B. Silvestre-Brac. *Mécanique : de la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien*. Collection Grenoble sciences. EDP Sciences, 2002.
- [4] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Mécanique*. Physique théorique. Mir, 1989.
- [5] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Théorie des champs*. Physique théorique. Mir, 1989.
- [6] J. Laskar and P. Robutel. High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 80 :39–62, July 2001.

Annexe A

Géométrie hamiltonienne

A.1 Cadre géométrique

A.1.1 Espace des phases

Dans les chapitres 1 et 2, je vous ai menti. En effet, j'ai dit que les coordonnées étaient définies dans \mathbb{R}^n . C'est simplement l'aspect de n -uplet de nombres que je voulais mettre en avant. Seulement, l'espace des coordonnées n'a pas, en général, la structure d'un espace vectoriel. Par exemple, il est impossible, en général, de définir une distance entre deux points non infiniment proches, à partir du produit scalaire canonique $\langle q_1, q_2 \rangle = \sum_i q_{1,i} q_{2,i}$. Le postulat supplémentaire que nous devons faire est d'affirmer que les coordonnées évoluent dans une variété différentiable (que nous appelons *espace des configurations*), c'est-à-dire un espace dans lequel, en tout point, il est possible de définir un espace vectoriel tangent, sur lequel nous pouvons définir un produit scalaire particulier et utiliser l'algèbre linéaire au voisinage du point choisi. Nous notons $T_M(x)$ l'espace vectoriel tangent de la variété M au point $x \in M$ (figure A.1). À ce stade nous nous devons de redéfinir proprement ce que sont les vecteurs. Pour simplifier les choses, plaçons-nous directement dans *l'espace des phases*, la variété différentiable de dimension $2n$ dans laquelle évoluent les coordonnées et leurs moments

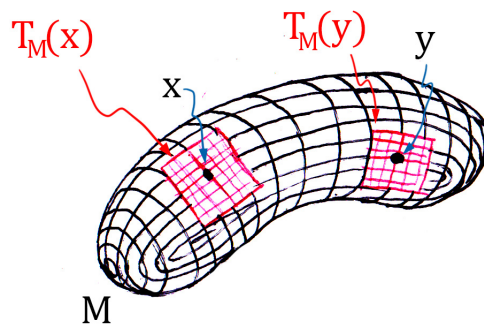


FIGURE A.1 – Variété et espaces vectoriels tangents

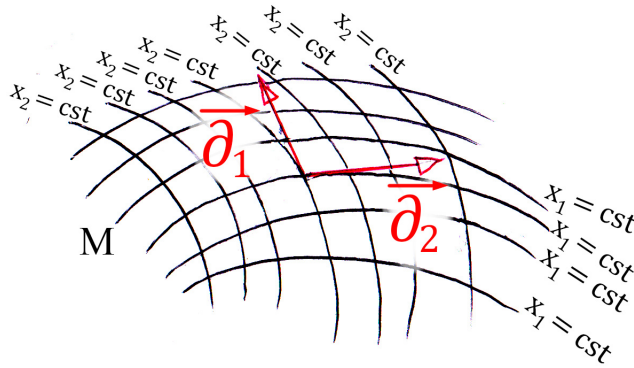


FIGURE A.2 – Vecteurs de base naturels relatifs à un système de coordonnées dans une variété

conjuguées. En différentiant localement les coordonnées ou les fonctions qui en dépendent, nous pouvons définir des vecteurs dans l'espace tangent. Mais, selon l'endroit où l'on se place, les choses sont différentes. Nous développerons dans le chapitre 4 comment passer d'un point à un autre.

A.1.2 Vecteurs, base naturelle

Dans cette partie, nous utilisons le formalisme de l'algèbre tensorielle, les coordonnées contravariantes sont indiquées par un exposant et les coordonnées covariantes avec un indice.

Considérons un système de coordonnées $(x^i)_i$ sur la variété M . Considérons un champ scalaire différentiable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Nous pouvons construire un espace vectoriel à partir d'une base construite avec les coordonnées. Nous l'appelons la base naturelle de ce système de coordonnées (figure A.2). Nous pouvons voir les vecteurs de cette base comme des applications, dans un premier temps.

Définition A.1.1. La base naturelle $(\vec{\partial}_i)_i$ au point $x \in M$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{\partial}_i : \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \vec{\partial}_i(f) = \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_x \end{aligned}$$

De là, nous pouvons définir une vitesse dans $T_M(x)$. Considérons une courbe dans la variété M , décrite paramétriquement par le temps t dans un système de coordonnées : nous notons $(x^i(t))_i$ les coordonnées au temps t de la trajectoire. Si nous considérons un champ scalaire f , la vitesse s'écrit alors :

$$\vec{v}(f) = \sum_i \dot{x}^i \vec{\partial}_i(f). \quad (\text{A.1})$$

Comme cette égalité est vraie pour tout champ scalaire, nous pouvons écrire la décomposition du vecteur \vec{v} :

$$\vec{v} = \sum_i \dot{x}^i \vec{\partial}_i. \quad (\text{A.2})$$

A.2 Formes différentielles

Nous donnons ici un tout petit peu plus que le strict minimum nécessaire à la compréhension de ce cours à propos des formes différentielles. Nous encourageons vivement le lecteur à consulter, par exemple, la bible du physicien, *Mathématiques pour la physique*, de Walter Appel [1]. Dans toute cette partie, nous considérons une variété M .

A.2.1 Algèbre extérieure

1-formes

Définition A.2.1. (*1-forme extérieure*)

Soit $x \in M$ et $T_M(x)$ un espace vectoriel tangent à M en x . Une forme linéaire, ou 1-forme extérieure, est une application linéaire définie sur $T_M(x)$, à valeurs dans \mathbb{R} . L'ensemble des formes linéaires est un espace vectoriel, l'espace dual de $T_M(x)$, noté $T_M(x)^*$.

Définition A.2.2. Soit un système de coordonnées $(x_i)_i$. Soit un point x dans la variété M . Soit l'espace vectoriel tangent $T_M(x)$, et soit $(\vec{\partial}_i)_i$ la base naturelle associée aux coordonnées x_i . Nous notons dx^i le projecteur sur la coordonnée i . C'est la forme linéaire définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} dx^i : T_M(x) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} = \sum_j v^j \vec{\partial}_j &\mapsto v^i, \end{aligned}$$

ou, de façon équivalente :

$$dx^i(\vec{\partial}_j) = \langle dx^i, \vec{\partial}_j \rangle = \delta_j^i. \quad (\text{A.3})$$

Théorème A.2.1. $(dx^i)_i$ est une base de $T_M(x)^*$.

Démonstration. $(dx^i)_i$ est une base de $T_M(x)^*$ si et seulement si c'est une famille libre et génératrice de $T_M(x)^*$; nous devons montrer ces deux propriétés pour cette famille.

Soit $\phi \in T_M(x)^*$. Comme ϕ est linéaire, en notant $\vec{v} = \sum_i v^i \vec{\partial}_i$, nous avons immédiatement $\phi = \sum_i v^i \phi(\vec{\partial}_i) = \sum_i \phi(\vec{\partial}_i) dx^i(\vec{v})$, ce qui montre que la famille $(dx^i)_i$ est génératrice.

Soient $(\lambda_i)_i$ des réels tels que $\sum_i \lambda_i dx^i = 0$. En appliquant cette forme sur $\vec{\partial}_j$, nous obtenons $\lambda_j = 0$, ce qui prouve que la famille est libre. CQFD

Ainsi, toute forme linéaire peut s'écrire

$$\omega = \sum_i \omega_i dx^i. \quad (\text{A.4})$$

Exemple : la différentielle d'un champ scalaire, $df = \sum_i \partial_i f dx^i$, est une 1-forme :

$$\begin{aligned} df : T_M(x) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{h} = \sum h^i \vec{\partial}_i &\mapsto \left(\sum_i \partial_{x^i} f dx^i \right) (\vec{h}) = \sum_i \partial_{x^i} f h^i = \langle \nabla f, \vec{h} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Ici, nous voyons que le gradient d'un champ scalaire n'est en réalité pas un vecteur, mais une forme linéaire.

2-formes extérieures

Définition A.2.3. Une forme extérieure de degré 2, ou plus simplement, une 2-forme, est une forme bilinéaire¹ antisymétrique² définie sur $T_M(x) \times T_M(x)$ à valeurs dans \mathbb{R} . Nous notons $\Lambda^{*2}(T_M(x))$ l'ensemble des deux-formes.

Exemple : le déterminant dans \mathbb{R}^2 est une 2-forme extérieure.

À présent, cherchons une base de $\Lambda^{*2}(T_M(x))$. La forme suivante :

$$\begin{aligned} dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1 : T_M(x) \times T_M(x) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto u^1 v^2 - u^2 v^1 \end{aligned} \tag{A.6}$$

est clairement dans $\Lambda^{*2}(T_M(x))$. Pour éviter les redondances du type $dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i = -(dx^j \otimes dx^i - dx^i \otimes dx^j)$ et les cas pathologiques $dx^i \otimes dx^i - dx^i \otimes dx^i = 0$ mais pour générer l'espace $\Lambda^{*2}(T_M(x))$, une base possible à partir des $dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i$ est la suivante :

Théorème A.2.2. Une base de $\Lambda^{*2}(T_M(x))$ est la famille des 2-formes :

$$dx^i \wedge dx^j \equiv dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i \tag{A.7}$$

où $1 < i < j < n$. On a donc $\dim(\Lambda^{*2}(T_M(x))) = n(n-1)/2$.

Généralisation : k-forme extérieure

Nous généralisons la notion de symétrie ou d'antisymétrie :

Définition A.2.4. Soit σ une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$). Nous notons \mathcal{P}_n l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Toute permutation peut s'écrire comme des échanges successifs de deux éléments en laissant invariants les autres. On appelle signature de σ le nombre noté $\varepsilon(\sigma)$ qui vaut 1 si σ peut s'écrire comme un nombre pair d'échanges, -1 si σ peut s'écrire comme un nombre impair d'échanges.

Définition A.2.5. On appelle forme extérieure de degré k , ou k -forme, toute forme ω qui est k -linéaire et antisymétrique sur $T_M(x)$, c'est-à-dire qui vérifie, pour toute permutation σ :

$$\omega((\mathbf{u}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}) = \varepsilon(\sigma) \omega((\mathbf{u}_{\sigma(i)})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}) \tag{A.8}$$

L'ensemble des k -formes sur $T_M(x)$ est un espace vectoriel et on le note $\Lambda^{*k}(T_M(x))$.

L'exemple que tout le monde connaît est le déterminant de n vecteurs dans \mathbb{R}^n .

À présent cherchons une base de $\Lambda^{*k}(T_M(x))$. Pour généraliser le résultat précédent, nous posons :

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \equiv \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \varepsilon(\sigma) dx^{\sigma(i_1)} \otimes dx^{\sigma(i_2)} \otimes \dots \otimes dx^{\sigma(i_k)}, \tag{A.9}$$

qui est une k -forme. Alors nous avons le théorème suivant :

-
1. Linéaire par rapport aux deux variables.
 2. Une application ω antisymétrique vérifie $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$.

Théorème A.2.3. *L'ensemble*

$$\{dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$$

*est une base de $\Lambda^{*k}(T_M(x))$ dont la dimension est $\binom{n}{k}$.*

Corrolaire 2. *L'ensemble $\Lambda^{*n}(\mathbb{R}^n)$ est de dimension 1. Autrement dit, toute n -forme linéaire sur \mathbb{R}^n est proportionnelle au déterminant canonique.*

Produit extérieur

Il est possible de définir une multiplication externe avec les formes extérieures. Pour deux formes extérieures ω_1 et ω_2 , peut-on donner un sens à l'objet $\omega_1 \wedge \omega_2$? Il est immédiat que cela fonctionne avec le produit de deux 1-formes puisque cela fonctionne avec la base (dx_{i_i}) . Nous généralisons en écrivant que $\omega_1 \wedge \omega_2 \equiv \omega_1 \otimes \omega_2 - \omega_2 \otimes \omega_1$, ou encore, pour tous \mathbf{u} et \mathbf{v} de $T_M(x)$, nous notons

$$\omega_1 \wedge \omega_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \omega_1(\mathbf{u}) & \omega_2(\mathbf{u}) \\ \omega_1(\mathbf{v}) & \omega_2(\mathbf{v}) \end{vmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

De même, nous pouvons définir le produit extérieur de p formes linéaires :

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_p(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p) \equiv \begin{vmatrix} \omega_1(\mathbf{u}_1) & \dots & \omega_p(\mathbf{u}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1(\mathbf{u}_p) & \dots & \omega_p(\mathbf{u}_p) \end{vmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Il va de soi que le produit extérieur est bilinéaire et antisymétrique. À présent il est temps de généraliser.

Définition A.2.6. (*Produit extérieur*) *Soient $k, l \in \mathbb{N}$. Soit ω^k une k -forme et ω^l une l -forme. On définit la $k + l$ -forme, appelée produit extérieur de ω_k et ω_l , par son action sur $k + l$ vecteurs de $T_M(x)$:*

$$\omega^k \wedge \omega^l(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \omega^k(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(k)}) \omega^l(\mathbf{u}_{\sigma(k+1)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(k+l)}). \quad (\text{A.12})$$

Quelques propriétés. Le produit extérieur est :

1. antisymétrique : $\omega^p \wedge \omega^q = (-1)^{pq} \omega^q \wedge \omega^p$;
2. bilinéaire : $\omega_1 \wedge (\omega_2 + \lambda \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \lambda \omega_1 \wedge \omega_3$;
3. associatif : $\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 \equiv \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$.

A.2.2 Formes différentielles sur une variété différentiable

Dérivée extérieure

Définition A.2.7. (*k -forme différentielle*)

Soit M une variété différentiable de dimension n . Une k -forme différentielle de M de classe \mathcal{C}^p est une application qui à chaque point x de M associe une k -forme extérieure sur $T_M(x)$, et dont les $\binom{n}{k}$ composantes ω_{i_1, \dots, i_k} sur les vecteurs de base $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ sont p fois différentiables par rapport aux n coordonnées (x^1, \dots, x^n) .

Exemples :

1. $k = 0$: une 0-forme différentielle est un champ scalaire sur M .
2. $k = 1$: si ω^1 est une 1-forme différentielle sur M alors il existe n champs scalaires $(f_k)_k$ tels que $\omega_1 = \sum_k f_k dx^k$.
3. Si f est un champ scalaire différentiable, sa différentielle $df = \sum_k \partial_k f dx^k = \langle \nabla f, \cdot \rangle$ est une 1-forme.
4. $k = 2$: si ω^2 est une 2-forme, alors il existe $n(n-1)/2$ champs scalaires f_{ij} sur M tels que $\omega^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij} dx^i \wedge dx^j$.

Définition A.2.8. (*Dérivée extérieure*)

Soit ω une k -forme différentielle sur M dont les composantes sont des champs scalaires notés ω_{i_1, \dots, i_k} . Chaque différentielle $d\omega_{i_1, \dots, i_k}$ est une 1-forme. On appelle dérivée extérieure de ω la $k+1$ -forme différentielle

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (\text{A.13})$$

Théorème A.2.4. Soit ω une forme différentielle de classe \mathcal{C}^2 . Alors $dd\omega = 0$, autrement dit :

$$\boxed{d^2 = 0.} \quad (\text{A.14})$$

Démonstration. Nous utilisons les conventions d'Einstein³ pour ne pas devenir fous avec des \sum dans tous les sens.

Nous avons $d\omega = d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, et

$$d\omega_{i_1, \dots, i_k} = \partial_j \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^j, \quad (\text{A.15})$$

d'où

$$dd\omega = \partial_{ij} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (\text{A.16})$$

Or, ω étant au moins de classe \mathcal{C}^2 , nous avons $\partial_{ij} \omega_{i_1, \dots, i_k} = \partial_{ji} \omega_{i_1, \dots, i_k}$, mais aussi $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$; il s'ensuit que les termes se compensent tous deux à deux et que l'expression est nulle. CQFD

Application : théorème de Poincaré

Définition A.2.9. (*Formes différentielles fermées et exactes*)

On dit qu'une forme différentielle ω est fermée si sa dérivée extérieure est nulle : $d\omega = 0$.

On dit qu'une k -forme différentielle est exacte si elle dérive d'une $k-1$ -forme différentielle : une k -forme différentielle ω est fermée s'il existe une $k-1$ -forme différentielle A telle que $\omega = dA$.

Théorème A.2.5. Toute forme différentielle exacte est fermée.

Démonstration. Si ω est fermée, alors il existe A telle que $\omega = dA$. Mais alors, $d\omega = ddA = 0$. CQFD

Théorème A.2.6. Soit ω une 1-forme différentielle. Si on note $\omega = f_i dx^i$, alors les deux propositions sont équivalentes :

3. $a_i b^i \equiv \sum_i a_i b^i$.

1. $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \partial_i f_j = \partial_j f_i$.
2. ω est fermée ($d\omega = 0$).

Démonstration. 1 \Rightarrow 2 est évident.

Montrons que 2 \Rightarrow 1. Nous avons $d\omega = \sum_{i,j} \partial_i f_j dx^i \wedge dx^j$. Comme dx^{ij} est une base des 2-formes, il faut que, pour i et j fixés, chaque composante devant $dx^i \wedge dx^j$, c'est-à-dire $\partial_i f_j - \partial_j f_i$ puisque $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, soit nulle. CQFD

Définition A.2.10. (*Ouvert contractile*)

Soit E un espace vectoriel métrique de dimension finie. On appelle Ouvert contractile de E tout ouvert qui peut se déformer continument en un point. Ainsi, si Ω est un ouvert contractile, alors il existe une application $C : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \Omega$ continue et un point p de Ω tels que $\forall x \in \Omega, C(0, x) = x$ et $C(1, x) = p$.

Exemples : un ouvert étoilé est contractile ; \mathbb{R}^n est contractile ; en revanche, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ n'est pas contractile ; la surface du tore non plus.

Théorème A.2.7. (*Poincaré*)

Toute forme différentielle définie sur un sur un ouvert contractile est fermée si et seulement si elle est exacte.

Démonstration. Pas trouvée pour le moment... Priez la déesse Plüthaar. CQFD

Vérifier que nous travaillons dans un ouvert contractile n'est pas souvent chose aisée. Il existe cependant un cas particulier où le théorème s'applique sur un ouvert simplement connexe :

Théorème A.2.8. Une 1-forme différentielle sur un ouvert simplement connexe est fermée si et seulement si elle est exacte.

Démonstration. Pas encore trouvée non plus... Mais on devrait pouvoir s'en passer provisoirement pour comprendre la suite du cours. CQFD

Annexe B

Le problème à deux corps, ou de Kepler

B.1 Introduction

Si vous lisez le présent ouvrage, vous avez sans doute déjà entendu dire que les trajectoires de deux corps en interaction gravitationnelle étaient des coniques ; vous l'avez peut-être même démontré dans vos jeunes années (un peu après le bac). Les premières sections du présent chapitre reprennent le problème à deux corps à partir du début mais en formulation lagrangienne. C'est l'occasion de mettre en application les outils que nous avons développés dans le chapitre 1, en particulier le théorème de Noether. Le problème des deux corps est un grand classique de la mécanique céleste, chaque astronome connaît plusieurs méthodes et en a une qu'il préfère ; parler du problème des deux corps est un art en soi parmi les astronomes. Ici c'est le formalisme de Lagrange qui est privilégié, mais nous essayons tout de même de ne jamais perdre de vue l'aspect géométrique du problème.

Mais le problème des deux corps ne se limite pas à trouver les équations spatiales des coniques ; en effet, ces équations ne donnent pas de lien entre la position de l'astre et la date à laquelle nous pouvons l'observer. Il faut donc aller plus loin et affiner la mathématique de la mécanique céleste pour décrire plus précisément les trajectoires.

Enfin, signalons que le problème à deux corps est le pilier central de la mécanique céleste ; presque tous les grands problèmes de mécanique céleste se ramènent à étudier des problèmes de Kepler perturbés¹ où il faut, en quelque sorte, déformer lentement les trajectoires des solutions du problème des deux corps que nous allons présenter ici.

1. Le plus évident est sans doute le système solaire où chaque planète, en première approximation, tourne autour du Soleil comme si les autres planètes n'existaient pas ; le premier raffinement de ce modèle consiste à perturber ces trajectoires en implémentant astucieusement les interactions entre les planètes.

B.2 Équation spatiale du mouvement

B.2.1 Invariance par translation, réduction à une particule

Le problème à deux corps consiste à déterminer les trajectoires de deux corps isolés subissant seulement leurs interactions attractives gravitationnelles mutuelles. Tout d'abord, nous supposons que la fonction de Lagrange ne dépend pas du temps ; en effet, si nous observons deux corps en mouvement dans le vide maintenant et dans quelques siècles, nous supposons que la nature du mouvement sera la même². Le référentiel le plus simple pour étudier ce système est le référentiel barycentrique. La fonction de Lagrange doit contenir la somme des énergies cinétiques des deux corps, l'un de masse m_1 , l'autre de masse m_2 , mais aussi un potentiel qui traduit l'interaction gravitationnelle des deux corps : $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$. Comme l'espace est homogène (nous le supposons), il semble naturel que deux corps dont le barycentre est situé en \vec{R} aient les mêmes trajectoires que deux corps dont le barycentre est situé en $\vec{R} + \vec{a}$: la fonction de Lagrange doit être invariante par translation. La seule façon pour le potentiel d'être invariant par translation est qu'il ne dépende que de la différence $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Si de plus, l'espace est isotrope, le potentiel ne peut dépendre que de la norme $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Enfin, la loi de gravitation universelle postulée par Newton revient à postuler que le potentiel gravitationnel varie en raison de l'inverse de la distance des deux corps. La fonction de Lagrange du problème de Kepler s'exprime donc de la façon suivante :

$$L(\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 + \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (\text{B.1})$$

Cette fonction de Lagrange est invariante par translation. En effet, si nous changeons \vec{r}_1 et \vec{r}_2 en $\vec{r}_1 + s\vec{a}$ et $\vec{r}_2 + s\vec{a}$, où $s\vec{a}$ est un vecteur quelconque, la fonction de Lagrange L est inchangée. La transformation à un paramètre correspondant est :

$$T_{\vec{a}} : \quad \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^6 \\ (\vec{r}_1, \vec{r}_2, s) \mapsto (\vec{r}_1 + s\vec{a}, \vec{r}_2 + s\vec{a}).$$

Le théorème de Noether nous indique que la quantité

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial T_{\vec{a}}}{\partial s} \right|_{s=0} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_1}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_2} \right) \cdot (\vec{a}, \vec{a}) = (m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2) \cdot \vec{a} \quad (\text{B.2})$$

est une intégrale première. Comme le vecteur \vec{a} a été choisi arbitrairement, nous en déduisons que la quantité de mouvement totale

$$\vec{P} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 \quad (\text{B.3})$$

est une intégrale première. Cette conservation nous suggère d'utiliser un autre jeu de coordonnées. À cet effet, nous introduisons les coordonnées suivantes :

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \text{coordonnées du centre de masse, et} \quad (\text{B.4})$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \text{le rayon vecteur relatif des deux particules.} \quad (\text{B.5})$$

2. Ceci est très bien vérifié expérimentalement, bien que certaines théories de la relativité générale modifiée prédisent une variation de la constante universelle de gravitation \mathcal{G} dans le temps.

Les relations inverses sont :

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (\text{B.6})$$

En remplaçant dans la fonction de Lagrange, nous trouvons :

$$L(\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{R}}, \vec{r}) = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \beta \dot{\vec{r}}^2 + \frac{\mu \beta}{|\vec{r}|}, \quad (\text{B.7})$$

où $M = m_1 + m_2$ est la masse totale du système formé par les deux corps, $\beta = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ est la masse réduite du système, et $\mu = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$ est ce que nous appelons le paramètre du problème de Kepler (c'est la seule grandeur physique qui jouera un rôle important). Nous savons que

$$\vec{P} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = M \dot{\vec{R}} \quad (\text{B.8})$$

est une intégrale première, par conséquent, le terme cinétique

$$\mathcal{E}_{c,bar} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 \quad (\text{B.9})$$

de la fonction de Lagrange est une constante du mouvement, or changer la fonction de Lagrange d'une constante ne change pas les équations du mouvement, nous pouvons donc récrire la fonction de Lagrange ainsi :

$$L = \frac{1}{2} \beta \dot{\vec{r}}^2 + \frac{\mu \beta}{r}. \quad (\text{B.10})$$

Les équations d'Euler-Lagrange étant linéaires, multiplier la fonction de Lagrange par une constante ne change pas les équations du mouvement³, nous pouvons donc nous débarrasser du β et ne garder que :

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{\mu}{r}. \quad (\text{B.11})$$

D'innombrables ouvrages s'encombrent de la masse β dans tous les calculs, en donnant des interprétations physiques fumeuses de "particule fictive ayant une masse β "; personnellement, je préfère la sobriété et considérer uniquement le mouvement d'une particule fictive de coordonnée \vec{r} sans lui ajouter tout un tas de propriétés qui n'ont de toute façon aucune réalité physique et n'ont d'autre intérêt que d'encombrer et de faire augmenter le volume des ouvrages de mécanique et d'embrouiller les esprits des élèves. Si nous pouvons nous débarrasser de sa masse, nous le faisons. De plus, le fait que nous puissions nous débarrasser de cette masse illustre bien le principe d'équivalence. En effet, si nous négligeons l'autogravitation de la masse m_2 en posant $m_2 \ll m_1$ (ce qui impliquerait $\mu = \mathcal{G}m_1$, indépendant de m_2), cela revient à considérer que la masse m_2 est une particule libre plongée dans le champ de gravité créé par la masse m_1 ; dans un champ de gravité donné, tous les corps chutent de la même façon quelle que soit leur nature. Pour toutes ces raisons, j'affirme que rien ne justifie de s'encombrer de β .

3. Une autre façon encore plus directe est d'affirmer que par linéarité de l'intégration, multiplier la fonction de Lagrange par une constante a pour effet de multiplier l'action par une constante; il est évident que si une fonction de Lagrange rend l'action extrémale, la même fonction de Lagrange multipliée par une constante rend aussi l'action extrémale.

B.2.2 Invariance par rotation et moment cinétique

Soit \vec{n} un vecteur unitaire. Considérons à présent la transformation suivante :

$$\begin{aligned}\Psi_{\vec{n}} : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{r}, s) &\mapsto \vec{r} + s\vec{n} \wedge \dot{\vec{r}}.\end{aligned}$$

Cette transformation, à l'ordre un en s , correspond à une rotation de direction \vec{n} et d'angle s . La fonction de Lagrange ne dépendant que des normes de \vec{r} et $\dot{\vec{r}}$, il est clair qu'elle est invariante par rotation⁴. Une rotation de paramètre s et de direction \vec{n} , notée $R(s\vec{n})$, a pour dérivée première :

$$\left. \frac{dR(s\vec{n})}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{d\Psi_{\vec{n}}}{ds} \right|_{s=0} \quad (\text{B.12})$$

puisque ces deux transformations coïncident à l'ordre un en s . Le théorème de Noether s'applique encore, et nous trouvons que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \left. \frac{d\Psi_{\vec{n}}}{ds} \right|_{s=0} = \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{r}) \quad (\text{B.13})$$

est une intégrale première. Nous reconnaissons le produit mixte, et en effectuant les bonnes permutations circulaires nous en déduisons que la quantité suivante est une intégrale première :

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = \vec{n} \cdot \vec{l} \quad (\text{B.14})$$

où $\vec{l} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}$ est le moment cinétique massique. Comme la direction \vec{n} est choisie arbitrairement, nous en déduisons que le moment cinétique est une intégrale première, et ainsi le mouvement est plan⁵. Cela nous autorisera par la suite à utiliser des coordonnées polaires.

B.2.3 Vecteur de Lagrange-Laplace-Runge-Lenz-Hermann-Hamilton-Gibbs-Bernoulli

Ou plus simplement, vecteur excentricité...

À présent nous allons voir comment varie la fonction de Lagrange quand nous déplaçons le système sur le plan orbital. Notons que tout vecteur du plan orbital peut s'écrire $\vec{b} \wedge \vec{l}$ où $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Ainsi, considérons un vecteur \vec{b} quelconque, et la transformation suivante :

$$\begin{aligned}\psi_{\vec{b}} : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{r}, s) &\mapsto \vec{r} + s\vec{b} \wedge \vec{l}\end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$(\text{B.16})$$

Cette transformation est indépendante du temps puisque \vec{l} est une intégrale première. Ainsi, le terme cinétique est inchangé. Posons

$$\vec{r}' = \psi_{\vec{b}}(\vec{r}, s). \quad (\text{B.17})$$

4. Le lecteur peut vérifier que c'est le cas à l'ordre un par la transformation $\Psi_{\vec{n}}$ des coordonnées.

5. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que les vecteurs vitesse et position sont contenus dans le plan orthogonal à \vec{l} , qui est constant.

À l'ordre un en s , nous avons :

$$r' = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{(\dot{\vec{r}} + s\vec{b} \wedge \vec{l})^2} = r\sqrt{1 + 2s\frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{l})}{r^2} + \mathcal{O}(s^2)} = r + s\frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{l})}{r} + \mathcal{O}(s^2). \quad (\text{B.18})$$

La fonction de Lagrange se transforme ainsi :

$$= L' - L = L(\dot{\vec{r}}', \vec{r}') - L(\dot{\vec{r}}, \vec{r}) \quad (\text{B.19})$$

$$= \frac{\mu}{r'} - \frac{\mu}{r} \quad (\text{B.20})$$

$$= \frac{\mu}{r + s\frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{l})}{r} + \mathcal{O}(s^2)} - \frac{\mu}{r} \quad (\text{B.21})$$

$$= -s\frac{\mu\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{l})}{r^3} + \mathcal{O}(s^2) \quad (\text{B.22})$$

$$= s\mu\vec{b} \cdot \frac{\dot{\vec{r}} \wedge (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}})}{r^3} + \mathcal{O}(s^2) \quad (\text{B.23})$$

$$= s\mu\frac{\vec{b}}{r^3} \left((\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} - r^2\dot{\vec{r}} \right) + \mathcal{O}(s^2) \quad (\text{B.24})$$

$$= s\frac{d}{dt} \left(\vec{b} \cdot \frac{\mu\dot{\vec{r}}}{r} \right) + \mathcal{O}(s^2). \quad (\text{B.25})$$

Nous constatons que la fonction de Lagrange n'est pas invariante par cette transformation, mais varie d'une dérivée totale par rapport au temps. Nous pouvons utiliser le théorème de Noether généralisé. Le scalaire

$$\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{l}) - \vec{b} \cdot \mu\frac{\dot{\vec{r}}}{r} = \vec{b} \cdot (\dot{\vec{r}} \wedge \vec{l}) - \vec{b} \cdot \mu\frac{\dot{\vec{r}}}{r} \quad (\text{permutations circulaires dans le produit mixte}) \quad (\text{B.26})$$

est une intégrale première. Comme le vecteur \vec{b} est arbitraire, nous en déduisons que le vecteur sans dimension

$$\vec{e} = \frac{\dot{\vec{r}} \wedge \vec{l}}{\mu} - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \quad (\text{B.27})$$

est une intégrale première. Ce vecteur sera d'une importance cruciale pour comprendre de façon générale le problème à deux corps perturbé ; un exemple particulièrement important - et où, une fois de plus, le vecteur excentricité joue un rôle central - est le problème du système solaire. Nous verrons cela une prochaine fois. . .

B.2.4 Trajectoires spatiales

Nous nous plaçons dans le plan de l'orbite, orthogonal au moment cinétique. Soit v l'angle entre le vecteur \vec{e} et le rayon vecteur \vec{r} . Cet angle se nomme usuellement *anomalie vraie*. Posons $|\vec{e}| = e$. Nous avons :

$$\vec{e} \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{r} = e \cos v = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\dot{\vec{r}} \wedge \vec{l})}{r\mu} - 1 = \frac{l^2}{r\mu} - 1 \quad (\text{B.28})$$

Nous en déduisons l'équation de la trajectoire :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad \text{où} \quad p = \frac{l^2}{\mu} \quad (\text{B.29})$$

Si $e < 1$, nous avons affaire à une ellipse dont le périastre est dans la direction de \vec{e} . Pour une ellipse de demi-grand axe a , nous savons que $p = a(1 - e^2)$, nous en déduisons

$$l = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}. \quad (\text{B.30})$$

Si $e = 1$ la trajectoire est une parabole et si $e > 1$ la trajectoire est une hyperbole.

B.3 Mouvement horaire sur les trajectoires

Connaître les équations spatiales du mouvement n'est pas satisfaisant car cela ne permet pas à répondre à la question de l'astronome : "telle nuit à telle heure, dans quelle direction dois-je pointer mon télescope pour observer tel astre ?" En effet les équations des coniques ne donnent aucune information la date à laquelle l'astre passe par la position \vec{r} . Dans cette section nous allons nous efforcer de répondre à cette question.

B.3.1 Loi des aires

Entre t et $t + dt$, l'aire balayée par le rayon vecteur \vec{r} vaut

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge d\vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}| dt = \frac{1}{2} l dt \quad (\text{B.31})$$

Donc

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{l}{2} = \text{constante}. \quad (\text{B.32})$$

Ceci exprime que le rayon vecteur balaie des aires égales en des temps égaux. Par conséquent, au voisinage du périastre, où la planète est la plus proche, sa vitesse est plus grande, sans quoi le rayon vecteur ne pourrait balayer autant de surface qu'à l'apoastre, où la planète est plus lente. Notons T la période de l'orbite. En une révolution, nous savons que l'aire balayée vaut la surface de l'ellipse :

$$\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{T}{2} l = \frac{T}{2} \sqrt{\mu a(1 - e^2)}. \quad (\text{B.33})$$

Si nous notons $n = 2\pi/T$ la fréquence moyenne de l'orbite de la planète, nous pouvons exprimer la troisième loi de Kepler de façon compacte :

$$\boxed{n^2 a^3 = \mu} \quad (\text{B.34})$$

La fréquence n porte aussi le nom de *moyen mouvement*. Nous pouvons noter M l'angle proportionnel à l'aire balayée par le rayon vecteur, défini par

$$\frac{dM}{dt} = n. \quad (\text{B.35})$$

Cet angle est appelé *anomalie moyenne*. En principe, cette seule loi nous permet de répondre à la question de l'astronome ; quelques calculs simples montreraient "qu'il suffit" de calculer certaines intégrales pour connaître la position de l'astre à un instant t . Mais des méthodes mathématiques plus fines et surtout exactes existent et il n'y a aucune raison de s'en priver.

B.3.2 Équation de Kepler

Nous désirons relier l'anomalie vraie au temps t , ou de façon équivalente, à l'anomalie moyenne M . Sur la figure B.1, nous avons représenté l'orbite de la planète P autour du foyer F ; le périastre est représenté par le point A . Nous avons également représenté le cercle (\mathcal{C}) de centre O (le centre de l'ellipse) et de rayon $a = OA$. Le projeté orthogonal de P sur l'axe de l'excentricité est noté H . L'intersection entre la droite (PH) et le cercle est noté P' . Nous notons l'anomalie excentrique l'angle $E = \widehat{HOP'}$.

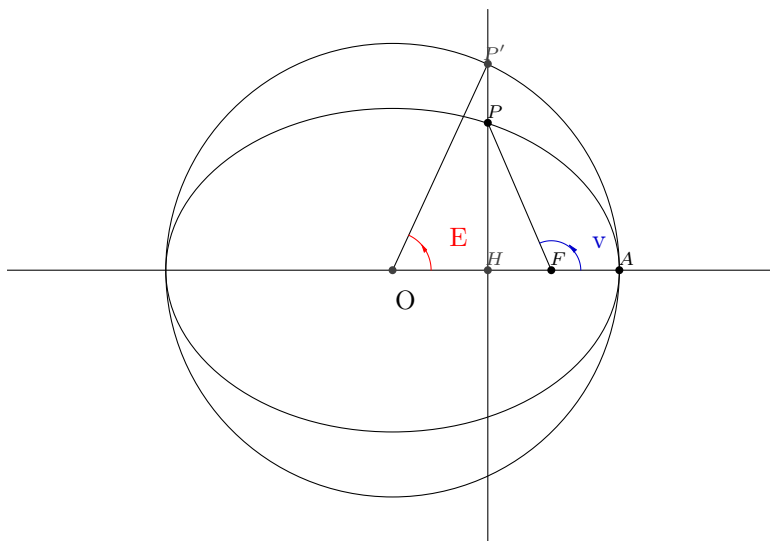


FIGURE B.1 – Liens géométriques entre les anomalies

La coordonnée naturelle qui décrit l'orbite du point P est l'aire de la portion d'ellipse délimitée par les vecteurs \vec{FA} et \vec{FP} , que nous notons $\mathcal{A}(\widehat{FAP})$; cette surface est proportionnelle à l'anomalie moyenne. Nous avons :

$$\mathcal{A}(\widehat{FAP}) = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \frac{M}{2\pi} = a^2 \sqrt{1 - e^2} \frac{M}{2}. \quad (\text{B.36})$$

L'ellipse de la trajectoire est en fait obtenue par une affinité du cercle (\mathcal{C}) de rapport $b/a = \sqrt{1 - e^2}$ sur la direction orthogonale à l'axe excentrique (OA) . Ainsi, la surface de la portion du cercle (\mathcal{C}) délimitée par les vecteurs \vec{FA} et $\vec{FP'}$ vaut

$$\mathcal{A}(\widehat{FAP'}) = \frac{\mathcal{A}(\widehat{FAP})}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{a^2 M}{2}. \quad (\text{B.37})$$

En notant $\mathcal{A}(OFP')$ la surface du triangle OFP' , nous constatons sur la figure B.1 que

$$\mathcal{A}(\widehat{OAP'}) = \mathcal{A}(OFP') + \mathcal{A}(\widehat{FAP'}), \quad (\text{B.38})$$

Il vient :

$$\mathcal{A}(OFP') = \frac{OF \times HP'}{2} = \frac{e}{2} a^2 \sin E. \quad (\text{B.39})$$

En récrivant l'équation (B.38), sachant que $\mathcal{A}(\widehat{OAP'}) = a^2 E/2$, nous obtenons l'équation de Kepler :

$$\boxed{M = E - e \sin E.} \quad (\text{B.40})$$

Cette équation donne un lien implicite entre l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne. À présent il faut relier l'anomalie vraie à l'anomalie excentrique pour boucler la boucle.

B.3.3 Position spatiale de l'astre

Dans le repère (F, x, y) (l'axe des abscisses suit la direction de \vec{e}), les coordonnées cartésiennes de P sont :

$$\begin{cases} x = r \cos v = a(\cos E - e) \\ y = r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \end{cases} \quad (\text{B.41})$$

Nous en déduisons :

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (\text{B.42})$$

En utilisant les relations (B.41), nous obtenons :

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad \text{et} \quad \sin v = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}. \quad (\text{B.43})$$

Sachant que

$$\tan^2 \frac{v}{2} = \frac{1 - \cos^2 \frac{v}{2}}{\cos^2 \frac{v}{2}} = \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}, \quad (\text{B.44})$$

un petit calcul simple montre que

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{E}{2}, \quad (\text{B.45})$$

ce qui donne un lien entre l'anomalie vraie et l'anomalie excentrique. L'anomalie excentrique étant reliée à l'anomalie moyenne, l'anomalie vraie est implicitement liée à l'anomalie moyenne, donc la position de l'astre est mathématiquement bien déterminée.

B.3.4 Vitesse de l'astre

À présent nous désirons obtenir la vitesse de l'astre sur sa trajectoire en fonction des variables angulaires E ou v . En différentiant l'équation de Kepler (B.40), nous obtenons

$$dM = (1 - e \cos E)dE = \frac{r}{a}dE, \quad (\text{B.46})$$

d'où

$$\begin{cases} \dot{x} = n \frac{dx}{dE} \frac{dE}{dM} = -na \frac{\sin E}{1 - e \cos E} \\ \dot{y} = n \frac{dy}{dE} \frac{dE}{dM} = na \sqrt{1 - e^2} \frac{\cos E}{1 - e \cos E}. \end{cases} \quad (\text{B.47})$$

En utilisant les relations (B.43) nous en déduisons

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \sin v \\ \dot{y} = na\sqrt{1-e^2} \left(\frac{\cos E - e}{1 - \cos E} + \frac{e}{1 - e \cos E} \right) = na\sqrt{1-e^2} \left(\cos v + \frac{e}{1-e^2} (1 + e \cos v) \right) = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} (e + \cos v). \end{cases} \quad (\text{B.48})$$

De là, nous obtenons

$$\dot{r} = n \frac{dr}{dE} \frac{dE}{dM} = na \frac{e \sin E}{1 - e \cos E} = na \frac{e}{1 - e^2} \sin v. \quad (\text{B.49})$$

B.3.5 Énergie

Un calcul direct donne

$$\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{\mu}{2p} (1 + e^2 + 2e \cos v) = \frac{\mu}{r} - \mu \frac{1 - e^2}{2p}. \quad (\text{B.50})$$

Nous en déduisons que l'énergie massique du système des deux corps vaut :

$$\mathcal{E} = \frac{\vec{v}^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\mu \frac{1 - e^2}{2p} = -\frac{\mu}{2a}. \quad (\text{B.51})$$

Ceci est vrai dans le cas d'une ellipse. Pour une conique quelconque, il faut utiliser les coordonnées polaires. En gardant en tête que $l = r^2 \dot{v}$, nous retrouvons :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \dot{v}^2 \right) - \frac{\mu}{r} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dr}{dv} \frac{dv}{dt} \right)^2 + r^2 \dot{v}^2 \right) - \frac{\mu}{r} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dr}{dv} \right)^2 \frac{l^2}{r^4} + \frac{l^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} \\ &= \frac{l^2}{2p^2} (e^2 \sin^2 v + 1 + e^2 \sin^2 v + 2e \cos v) - \frac{\mu}{p} (1 + e \cos v) \\ &= \frac{\mu}{p} (e^2 - 1). \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

Nous voyons que selon la valeur de e , le signe de \mathcal{E} change. Si $e > 1$, alors $\mathcal{E} < 0$, la trajectoire est une ellipse et nous avons affaire à un état lié : r est borné entre $p/(1+e)$ et $P/(1+e)$. Si $e \geq 1$, alors $\mathcal{E} \geq 0$, la trajectoire est une parabole ou une hyperbole et l'état est diffus, r n'est pas borné (mais minoré par $p/(1+e)$).

B.4 Coordonnées elliptiques

B.4.1 Éllipse dans l'espace

Initialement, la fonction de Lagrange (B.11) possède six degrés de liberté : les trois coordonnées de \vec{r} et les trois coordonnées de $\dot{\vec{r}}$, autrement dit, initialement, les coordonnées généralisées sont

$(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Seulement, nous avons vu que le mouvement de l'astre est sur une ellipse fixe, il est alors naturel, au lieu d'utiliser les coordonnées rectangulaires $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, d'utiliser un autre jeu de coordonnées qui sert à positionner l'ellipse dans l'espace, et une seule coordonnée qui sert à positionner l'astre sur l'ellipse. De façon standard, ces coordonnées sont :

- a : demi-grand axe ;
 - e : excentricité ;
 - i : inclinaison par rapport au plan de référence ;
 - λ : longitude moyenne = $\varpi + M$;
 - ϖ : longitude du périhélie = $\omega + \Omega$;
 - Ω : longitude du Noeud ascendant.
- (B.53)

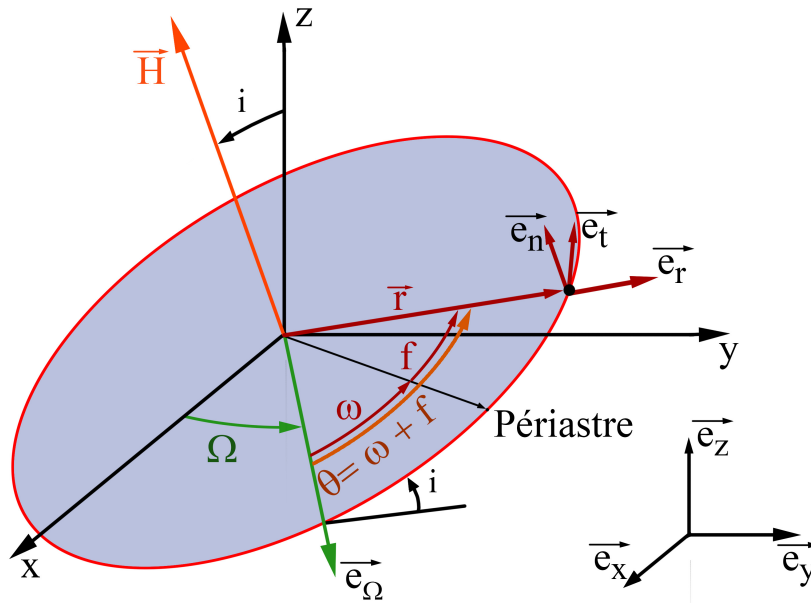


FIGURE B.2 – Éléments elliptiques

Dans ces coordonnées, la trajectoire de l'astre s'exprime très simplement puisque toutes ces variables sont constantes sauf la longitude moyenne dont le mouvement est linéaire dans le temps :

$$\lambda = \lambda_0 + nt = \varpi + M. \quad (\text{B.54})$$

B.4.2 Changement de repère

Plüthaar.

B.5 Calculs de moyennes

B.5.1 Changements de variables

Très souvent, les calculs de mécanique céleste ont un degré d'horreur tel qu'il n'y a pas d'autre choix que de développer des expressions en séries infinies qui sont tronquées, avec bien souvent une approximation très grossière des restes. Et alors c'est le festival de Mathematica ou autres boîtes noires auxquelles personne ne comprend rien. Il existe cependant quelques cas où les calculs exacts sont possibles et il n'y a aucune raison de s'en priver. L'enjeu est alors d'avoir assez d'intuition pour deviner quel jeu de variables est le plus efficace pour faire des calculs. Pour cela il est très utile de connaître les changements de variables pour jongler entre les angles v , E , et M .

$$\boxed{\frac{dE}{dM} = \frac{a}{r}; \quad \frac{dv}{dM} = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2}; \quad \frac{dv}{dE} = \frac{a}{r} \sqrt{1-e^2}.} \quad (\text{B.55})$$

La première est la différentiation de l'équation de Kepler (B.40). La seconde est la conservation du moment cinétique, ou la loi des aires. La troisième est le quotient des deux premières.

B.5.2 Quelques exemples de calculs de moyennes

Insolation moyenne

L'insolation instantanée reçue par une planète est proportionnelle à $1/r^2$. L'insolation moyenne au cours d'une révolution est :

$$\langle I \rangle = I_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} dM = I_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dv}{a^2 \sqrt{1-e^2}} = \frac{I_0}{a^2 \sqrt{1-e^2}}. \quad (\text{B.56})$$

L'insolation annuelle moyenne augmente donc quand l'excentricité augmente. Une application très récente de ceci est la corrélation entre les traces géologiques du climat terrestre et l'évolution à long terme de son orbite, c'est une problématique étudiée entre autres à l'IMCCE.

Potentiel moyen

$$\left\langle \frac{a}{r} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} dM = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dE = 1. \quad (\text{B.57})$$

B.5.3 Application

Quand nous étudions un problème de Kepler perturbé, il est très utile de savoir calculer efficacement des moyennes pour appliquer la méthode des perturbations exposée au chapitre 6.

B.6 Développements en série

Les calculs exacts sont souvent impossibles, et quand nous désirons obtenir une grandeur en fonction d'une variable précise, les développements en série sont souvent la seule solution. Nous en présentons quelques uns ici.

Quand j'aurai du temps et de la motivation...

Annexe C

Algèbre de Lie sur les variétés

C.1 Représentation continue d'un groupe sur une variété

Définition C.1.1. (*Représentation d'un groupe*)

Soit $(G, *)$ un groupe et \mathcal{V} une variété. On note représentation de G dans \mathcal{V} toute application T

$$\begin{aligned} T : G &\rightarrow GL(\mathcal{V}) \\ g \in G &\mapsto T(g) \in GL(\mathcal{V}) \end{aligned}$$

qui est un morphisme de groupe de G dans $GL(\mathcal{V})$, c'est-à-dire qui vérifie :

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad T(g_1 * g_2) = T(g_1) \circ T(g_2) \tag{C.1}$$

Définition C.1.2. (*Groupe de Lie*)

Soit $(G, *)$ un groupe contenant une infinité d'éléments, représenté dans \mathcal{V} par T (selon la définition précédente). On dit qu'un groupe muni de sa représentation T dans \mathcal{V} est de Lie lorsque la représentation de la composition et du passage à l'inverse sont continues dans \mathcal{V} .

Rappelons qu'une variété est un espace topologique tel qu'en chacun de ses points on puisse définir un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n , n étant fixé. n est la dimension de la variété. Imaginons un groupe continu qui dépend de plusieurs paramètres continus.

Définition C.1.3. Soit $(G, *, \mathcal{V}, T)$ un groupe de Lie. La dimension du groupe de Lie est la dimension de la variété $T(G)$, autrement dit, l'image de G par la représentation T du groupe $(G, *)$ dans \mathcal{V} .

Proposition C.1.1. La dimension du groupe de Lie est plus petite que $\dim(G)^2$.

Démonstration. C'est évident car $GL(\mathcal{V})$ est inclus dans $L(\mathcal{V})$.

CQFD

Les rotations dans l'espace, $SO(3)$, sont un groupe continu de dimension 3. Leur représentation dans \mathbb{R}^3 sont les matrices de rotation. Pour se convaincre de la dimension, notons que toute rotation est définie de manière unique par les trois angles d'Euler, ou bien par les trois angles (θ, ϕ, ψ) où θ

et ϕ définissent l'orientation de l'axe de la rotation selon les coordonnées sphériques, et ψ est l'angle de la rotation.

Attention ! En général, la dimension du groupe de Lie est différente de la dimension de la variété sur laquelle elle opère. Par exemple, $SO(2)$, le groupe des rotations dans le plan, est de dimension un puisque toute rotation du plan est définie de manière unique par un seul paramètre : l'angle de rotation. Le fait que $SO(3)$ soit de dimension 3 est une "coïncidence".

C.2 Générateur infinitésimal

Définition C.2.1. Soit G un groupe continu de dimension n , représenté de façon continue par n paramètres que l'on note dans un vecteur $s = (s_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. Soit $A(s)$ la représentation d'un élément de G dans \mathcal{V} . Quitte à redéfinir la paramétrisation, posons que l'élément neutre du groupe (associé à l'identité dans \mathcal{V}) est donnée pour $s = 0$, autrement dit que $A(0) = Id$. On définit alors les n générateurs de l'algèbre de Lie comme suit :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad X_i = \left. \frac{\partial A}{\partial s_i} \right|_{s=0} \quad (\text{C.2})$$

Théorème C.2.1. Soit une algèbre de Lie à un paramètre s , on a l'identité suivante :

$$\forall s \in \mathbb{R}, A(s) = \exp(sX) \quad (\text{C.3})$$

où $X = dA/ds|_{s=0}$.

Démonstration. Dérivons A par rapport à s .

$$\frac{dA}{ds} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{A(s + ds) - A(s)}{ds} = \lim_{ds \rightarrow 0} \left(\frac{A(ds) - A(0)}{ds} \right) A(s) = XA(s) \quad (\text{C.4})$$

La solution de cette équation différentielle est l'exponentielle annoncée dans le théorème. *CQFD*

C.3 Crochets de Lie

Renvoi au chapitre sur le flot.

Annexe D

Application : le problème à trois corps hiérarchique

Nous allons illustrer une utilisation des outils mis en place pour traiter un des grands classiques de la mécanique céleste : le problème à trois corps hiérarchique. Le problème est dit "hiérarchique" dans le sens où certaines approximations seront mises en place pour pouvoir obtenir des solutions analytiques approchées : nous supposons que l'un des trois corps est situé à une grande distance des deux autres. Un des exemples les plus évidents est le problème de la Lune de notre planète Terre, et l'étude de son orbite, perturbée par le Soleil.

D.1 Fonction de Hamilton

Nous choisissons le système de coordonnées barycentriques \vec{u}_i , $i \in \{0, 1, 2\}$. Les moments conjugués s'écriront $\tilde{u}_i = m_i \dot{\vec{u}}_i$. Dans ce cadre, la fonction de Hamilton s'écrit :

$$H = \sum_{i=0}^2 \frac{\tilde{u}_i^2}{2m_i} - \mathcal{G} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (\text{D.1})$$

Cette fonction de Hamilton possède 9 degrés de liberté, donc l'espace des phases est à 18 dimensions. L'aventure dans laquelle nous allons nous lancer consistera, en utilisant les meilleurs changements de variables possibles, à réduire le nombre de degrés de liberté de l'espace des phases jusqu'à obtenir un système intégrable. Commençons sans plus tarder !

D.2 Réduction du barycentre : variables de Jacobi

L'idée est d'utiliser la relation $\sum_i \vec{u}_i = 0$ pour faire chuter le nombre de degrés de liberté. Nous posons alors :

$$\delta = \frac{m_1}{m_0 + m_1} \quad (\text{D.2})$$

$$\vec{r}_0 = \vec{u}_0, \quad \vec{r}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_0 \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = \vec{u}_2 - [\delta \vec{u}_1 + (1 - \delta) \vec{u}_0]. \quad (\text{D.3})$$

De façon équivalente, nous pouvons écrire :

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -(1-\delta) & -\delta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_0 \\ \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{u}_0 \\ \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -(1-\delta) & -\delta & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.5})$$

Pour garantir la canonicité de la transformation, les moments conjugués doivent se transformer ainsi :

$$\begin{pmatrix} \tilde{r}_0 \\ \tilde{r}_1 \\ \tilde{r}_2 \end{pmatrix} = {}^t A^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.6})$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} = {}^t A \begin{pmatrix} \tilde{r}_0 \\ \tilde{r}_1 \\ \tilde{r}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.7})$$

De plus, un calcul simple (par exemple par la méthode du pivot de Gauss) montre que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \delta & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.8})$$

Grâce à l'inverse de A , nous obtenons les anciens rayons en fonction des nouveaux. En remplaçant, nous obtenons la nouvelle fonction de Hamilton :

$$\begin{aligned} H &= \frac{|\tilde{r}_0 - \tilde{r}_1 - (1-\delta)\tilde{r}_2|^2}{2m_0} + \frac{|\tilde{r}_1 - \delta\tilde{r}_2|^2}{2m_1} + \frac{|\tilde{r}_2|^2}{2m_2} \\ &\quad - \mathcal{G} \left(\frac{m_0 m_1}{|\tilde{r}_1|} + \frac{m_2 m_0}{|\tilde{r}_2 + \delta\tilde{r}_1|} + \frac{m_1 m_2}{|\tilde{r}_2 - (1-\delta)\tilde{r}_1|} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Développons le terme cinétique :

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{\tilde{r}_i^2}{2m_i} + \frac{\tilde{r}_1^2}{2m_0} + (1-\delta)^2 \frac{\tilde{r}_2^2}{2m_1} + \delta^2 \frac{\tilde{r}_2^2}{2m_1} \\ &\quad - \frac{\tilde{r}_0 \cdot \tilde{r}_1}{m_0} - (1-\delta) \frac{\tilde{r}_0 \cdot \tilde{r}_2}{m_0} + (1-\delta) \frac{\tilde{r}_1 \cdot \tilde{r}_2}{m_0} - \delta \frac{\tilde{r}_1 \cdot \tilde{r}_2}{m_1} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tilde{r}_0^2}{2m_0} + \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} \right) \frac{\tilde{r}_1^2}{2} + \left(\frac{(1-\delta)^2}{m_0} + \frac{\delta^2}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\tilde{r}_2^2}{2} \\ &\quad - \frac{\tilde{r}_0 \cdot \tilde{r}_1}{m_0} - (1-\delta) \frac{\tilde{r}_0 \cdot \tilde{r}_2}{m_0} + \left(\frac{1-\delta}{m_0} - \frac{\delta}{m_1} \right) \tilde{r}_1 \cdot \tilde{r}_2. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Le dernier terme est nul, en effet, en utilisant $\delta = m_1/(m_0 + m_1)$, un calcul direct montre que :

$$\frac{1-\delta}{m_0} - \frac{\delta}{m_1} = 0. \quad (\text{D.12})$$

À présent, posons :

$$\frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1}, \quad \frac{1}{\beta_2} = \frac{(1-\delta)^2}{m_0} + \frac{\delta^2}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_1+m_2} + \frac{1}{m_2}, \quad (\text{D.13})$$

$$\mu_1 = \mathcal{G}(m_0 + m_1) \quad \text{et} \quad \mu_1 = \mathcal{G}(m_0 + m_1 + m_2). \quad (\text{D.14})$$

Quelques calculs montrent que

$$Gm_0m_1 = \mu_1\beta_1. \quad (\text{D.15})$$

Remarquons qu'à ce stade, le potentiel

$$V = -\mathcal{G} \left(\frac{m_0m_1}{|\vec{r}_1|} + \frac{m_2m_0}{|\vec{r}_2 + \delta\vec{r}_1|} + \frac{m_1m_2}{|\vec{r}_2 - (1-\delta)\vec{r}_1|} \right) \quad (\text{D.16})$$

ne dépend pas de la variable \vec{r}_0 . Ainsi, c'est une variable cyclique et son moment conjugué est constant. D'ailleurs, en écrivant la transformation des moments, le lecteur pourra vérifier que \tilde{r}_0 représente la quantité de mouvement du barycentre. Il est licite de choisir un référentiel dans lequel $\tilde{r}_0 = \vec{0}$. Dans ce cas, la fonction de Hamilton se simplifie drastiquement :

$$H = \frac{\tilde{r}_1^2}{2\beta_1} - \frac{\mu_1\beta_1}{|\vec{r}_1|} + \frac{\tilde{r}_2^2}{2\beta_2} - \frac{\mu_2\beta_2}{|\vec{r}_2|} + \mu_2\beta_2 \left(\frac{1}{|\vec{r}_2|} - \frac{1-\delta}{|\vec{r}_2 - \delta\vec{r}_1|} - \frac{\delta}{|\vec{r}_2 - (1-\delta)\vec{r}_1|} \right) \quad (\text{D.17})$$

Les calculs intermédiaires pour passer de (D.16) à (D.17) sont les suivants :

$$\mathcal{G}m_1m_2 = \mathcal{G}(m_0 + m_1)m_2 \frac{m_1}{m_0 + m_2} = \mu_2\beta_2\delta, \quad (\text{D.18})$$

$$\mathcal{G}m_0m_2 = \mathcal{G}(m_0 + m_1)m_2 \frac{m_0}{m_0 + m_1} = \mu_2\beta_2(1-\delta) \quad \text{et} \quad (\text{D.19})$$

$$\mathcal{G}m_0m_1 = \mathcal{G}(m_0 + m_1) \frac{m_0m_1}{m_0 + m_1} = \mu_1\beta_1. \quad (\text{D.20})$$

À présent que nous avons fait huter le problème d'un degré de liberté sans faire aucune approximation, nous allons considérer la fonction de Hamilton comme une partie intégrable et une partie perturbative. En effet, dans l'expression (D.17), nous reconnaissons deux problèmes de Kepler indépendants auxquels s'ajoutent une perturbation (n'oublions pas que nous avons supposé que $r_1 \ll r_2$). Continuons toujours plus loin dans notre combat contre les degrés de liberté !

D.3 Fonction perturbatrice : développements

Utilisons les variables de Delaunay pour continuer. Nous rappelons que dans le problème à deux corps, les variables de Delaunay $(R, r) = (L, G, H, l, g, h)$ s'expriment ainsi en fonction des variables géométriques :

$$L = \beta\sqrt{\mu a} \quad l = M \quad (\text{D.21})$$

$$G = L\sqrt{1-e^2} \quad g = \omega \quad (\text{D.22})$$

$$H = G \cos i \quad h = \Omega. \quad (\text{D.23})$$

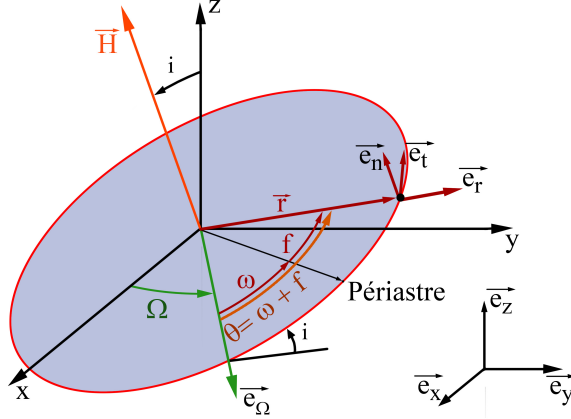


FIGURE D.1 – Éléments de l'orbite du problème à deux corps

Pour rappel : a est le demi-grand axe, M est l'anomalie moyenne¹, ω est l'argument du périastre, Ω est l'argument de la ligne des Noeuds, i est l'angle d'inclinaison de l'orgite. Ces variables sont représentées sur la figure D.1.

Dans ce cadre, la fonction de Hamilton a l'expression suivante :

$$H = H_0 + F \quad (\text{D.24})$$

où

$$H_0 = -\frac{\mu_1^2 \beta_1^3}{2L_1^2} - \frac{\mu_2^2 \beta_2^3}{2L_2^2} \quad (\text{D.25})$$

et

$$F = \mu_2 \beta_2 \left(\frac{1}{|\vec{r}_2|} - \frac{1 - \delta}{|\vec{r}_2 - \delta \vec{r}_1|} - \frac{\delta}{|\vec{r}_2 - (1 - \delta) \vec{r}_1|} \right) \quad (\text{D.26})$$

est la fonction perturbatrice. Pour développer la fonction perturbatrice, nous allons utiliser l'identité suivante :

$$x, y \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } |x| < |y|, |x - y|^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|x|^l}{|y|^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (\text{D.27})$$

où $\langle x|y \rangle = |x||y| \cos \theta$ et où les P_l sont les polynomes de Legendre d'ordre l . La fonction perturbatrice se développe ainsi :

$$F = \frac{\mu_2 \beta_2}{r_2} \left\{ 1 - (1 - \delta) \sum_{l=0}^{\infty} (-\delta r_1)^l r_2^l P_l(\cos \theta) - \delta \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[(1 - \delta) r_1]^l}{r_2} P_l(\cos \theta) \right\} \quad (\text{D.28})$$

$$= \frac{\mu_2 \beta_2}{r_2} \left\{ 1 - \sum_{l=0}^{\infty} [(1 - \delta)(-\delta)^l + \delta(1 - \delta)] \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^l P_l(\cos \theta) \right\}. \quad (\text{D.29})$$

1. L'anomalie moyenne est une variable linéaire dans le temps, qui avance de 2π à chaque période orbitale ; sa signification physique se traduit par une proportionnalité avec l'aire balayée par l'orbite.

Développons la fonction perturbatrice jusqu'à l'ordre 2 :

$$F = \frac{\mu_2 \beta_2}{r_2} \left\{ 1 - 1 - 0 - [(1 - \delta)\delta^2 + \delta(1 - \delta)] \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 P_2(\cos\theta) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3\right) \right\}. \quad (\text{D.30})$$

En se rappelant que $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z$, $P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$, il vient :

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2} \left[3 \frac{(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^2}{r_2^4} - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \right]. \quad (\text{D.31})$$

En remarquant que $\mu_2 \beta_2 \delta(1 - \delta) = \mathcal{G} m_1 m_2$, il vient :

$$F = -\mathcal{G} \frac{m_2 \beta_1}{2r_2^3} \left[3 \frac{(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^2}{r_2^4} - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3\right) \right]. \quad (\text{D.32})$$

Nous nous limitons donc à ce que nous nommons *l'approximation quadrupolaire*. À présent, nous allons utiliser le formalisme des perturbations.

D.4 Moyennisation de la fonction perturbatrice

D.4.1 Quelques vecteurs

Nous posons $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ une base orthonormée adaptée à l'orbite 1 : \vec{i}_1 pointe vers le préastre, \vec{k}_1 est parallèle à $\vec{r}_1 \wedge \dot{\vec{r}}_1$, et \vec{j}_1 complète la base selon $\vec{j}_1 = \vec{k}_1 \wedge \vec{i}_1$. De façon strictement analogue par rapport à l'orbite 2, nous posons la base $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$. Dans ce repère (indépendamment sur l'orbite 1 ou 2), nous avons :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (\text{D.33})$$

où

$$x = r \cos v = a(\cos E - e), \quad y = r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad \text{et} \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} = a(1 - e \cos E). \quad (\text{D.34})$$

où v est l'anomalie vraie et E l'anomalie excentrique. Pour rappel, les formules de changements de variables pour calculer les intégrales elliptiques sont les suivants :

D.4.2 Moyennisation de la fonction perturbatrice

$$\frac{dE}{dM} = \frac{a}{r}; \quad \frac{dv}{dM} = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1 - e^2}; \quad \frac{dv}{dE} = \frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2}. \quad (\text{D.35})$$

La suite consiste à calculer la moyenne de la fonction perturbatrice par rapport aux deux orbites. Pour rappel, la moyenne par rapport à l'orbite i se définit comme :

$$\langle \cdot \rangle_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdot dM_i. \quad (\text{D.36})$$

En vertu du théorème de Fubini, nous pouvons effectuer les moyennes dans des ordres indépendants. Des calculs très bourrins que j'ai la flemme d'écrire ce soir donnent finalement la fonction perturbatrice moyennée :

$$\langle F \rangle_{1,2} = -\frac{\mathcal{G}m_2\beta_1a_1^2}{8a_2^3(1-e_2^2)^{3/2}} \left(-1 + 6e_1 + 3(1-e^2)\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 - 15(\vec{e}_1 \cdot \vec{k}_2)^2 \right), \quad (\text{D.37})$$

où nous avons posé

$$\vec{e}_1 = e_1\vec{l}_1, \quad (\text{D.38})$$

le vecteur de Lagrange-Laplace-Runge-Lenze. En ayant moyenné sur $M_1 = l_1$ et $M_2 = l_2$, il ne reste plus que 4 degrés de liberté : (h_1, g_1, h_2, g_2) associés aux éléments d'orbite (e_1, i_1, e_2, i_2) . Continuons la guerre contre les degrés de libertés !

D.5 La fin de la guerre

D.5.1 Joyeuse coïncidence

Par un "heureux hasard", il se trouve que H est indépendant de $g_2 = \omega_2$. En effet, nous voyons dans l'expression de la fonction perturbatrice que celle-ci ne dépend que de $e_2 = 1 - G_2^2/L_2^2$. Nous venons de tuer un degré de liberté de plus ! Continuons le carnage !!

D.5.2 Réduction du noeud

Nous remarquons que le vecteur \vec{k}_1 est invariant par rotation autour de lui-même (si, si, je vous assure), donc les produits scalaires intervenant dans la fonction perturbatrices sont aussi invariants. Cette rotation a précisément pour paramètre $h_1 = \Omega_1$. Utilisons cette idée pour trouver le bon changement de variables. Nous avons :

$$H(h_1, h_2, g_1) = H(0, h_2 - h_1, g_1). \quad (\text{D.39})$$

Ainsi, nous effectuons la transformation canonique suivante :

$$h'_1 = h_1, \quad h'_2 = h_2 - h_1, \quad (\text{D.40})$$

complétée par le changement des moments conjugués :

$$H'_1 = H_1 + H_2, \quad H'_2 = H_2. \quad (\text{D.41})$$

D'après l'équation (D.39), il est clair que la fonction de Hamilton ne dépend pas de h'_1 . Ainsi, h'_1 est une variable cyclique, et $H'_1 = H_1 + H_2$ est une intégrale première. En reprenant les notations des éléments orbitaux, cela nous donne :

$$\beta_1\sqrt{\mu_1a_1(1-e_1^2)}\cos i_1 + \beta_2\sqrt{\mu_2a_2(1-e_2^2)}\cos i_2 = \text{constante}. \quad (\text{D.42})$$

Nous interprétons cette quantité comme la troisième composante du moment cinétique total $\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2$. Nous touchons au but, il ne reste plus que deux degrés de liberté !

□ ./figures/plan_laplace.jpg

FIGURE D.2 – Plan de Laplace

D.5.3 Plan de Laplace

Les vecteurs \vec{k}_1 et \vec{k}_2 sont exprimés dans une base cartésienne. En choisissant le troisième vecteur de celle-ci, \vec{k} , parallèle et dans le même sens que le moment cinétique total, il apparaît sur la figure D.2 que $h_2 - h_1 = \pi$ sur l'ensemble du mouvement. L'angle $i = i_1 - i_2$, ou encore l'angle défini par $\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 = \cos i$, est une constante du mouvement, donc elle réduit encore le nombre de degrés de liberté, qui tombe finalement à 1. Nous avons remporté la guerre!

Nous avons $G^2 = (\vec{G}_1 + \vec{G}_2)^2 = G_1^2 + G_2^2 + 2G_1G_2 \cos i = H_1'^2$ donc

$$\cos i = \frac{H_1'^2 - G_1^2 - G_2^2}{2G_1G_2}. \quad (\text{D.43})$$

De plus,

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{k}_2 = \sin i \sin g_1. \quad (\text{D.44})$$

Ainsi, nous obtenons la fonction perturbatrice en fonction uniquement de la variable g_1 :

$$F = -\kappa [(2 + 3e_1^2)(3 \cos^2 i - 1) + 15(1 - \cos^2 i)e_1^2 \cos 2g_1], \quad (\text{D.45})$$

où

$$\kappa = \frac{\mathcal{G} m_2 \beta_1 a_1^2}{16a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}}. \quad (\text{D.46})$$

D.5.4 La victoire

Maintenant que la bataille est gagnée, ramassons le butin et pillons la fonction de Hamilton jusqu'à ce qu'elle n'ait plus rien à nous donner!

Cependant, la déesse Plüthaar vint en aide au camp adverse et m'empêcha de terminer en expliquant le mécanisme de Lidov-Kozai... Priez encore notre divinité adorée, peut-être qu'un jour elle se mettra de mon côté. Pour l'instant, je sens une flemme immense m'envahir.

Annexe E

Le problème à 4 corps

...

Vous y avez vraiment cru ?