

ÉPREUVE COMMUNE DE TIPE - Partie D

TITRE : Introduction aux plans d'expériences.

Temps de préparation :2 h 15 minutes

Temps de présentation devant le jury :10 minutes

Entretien avec le jury :10 minutes

GUIDE POUR LE CANDIDAT :

Le dossier ci-joint comporte au total : 15 pages

- Guide pour la candidat : 1 page (non numérotée)
- Document principal: 14 pages

Travail suggéré au candidat :

Après avoir lu attentivement le dossier le candidat pourra :

- Soit appliquer la méthode à un exemple de son choix.
- Soit commenter l'exemple qui est proposé dans le dossier.

CONSEILS GENERAUX POUR LA PREPARATION DE L'EPREUVE :

* Lire le dossier en entier dans un temps raisonnable (environ 30 mn pour une première lecture).

* Réserver du temps pour préparer l'exposé devant le jury.

- Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper ... mais tout sera à remettre au jury en fin d'oral.

- En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (transparents, etc.) dont vous comptez vous servir pendant l'oral, ainsi que le dossier, les transparents et les brouillons utilisés pendant la préparation. En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêt à débiter votre exposé, vous pourrez commencer par le sujet C ou le sujet D.

- A la fin de l'oral, vous devez remettre au jury le présent dossier, les transparents et les brouillons utilisés pour cette partie de l'oral, ainsi que TOUS les transparents et autres documents présentés pendant votre prestation.

INTRODUCTION AUX PLANS D'EXPERIENCES

La compétition internationale toujours plus sévère demande aux industriels une amélioration constante de leurs produits. Cette amélioration se traduit par une surveillance à tous les stades de la fabrication. A l'origine ces contrôles de qualité intervenaient essentiellement sur les produits finis. Cette approche a été modifiée : plutôt que de contrôler la qualité d'un produit ne vaudrait-il pas mieux faire directement de la qualité par la maîtrise des procédés de fabrication.

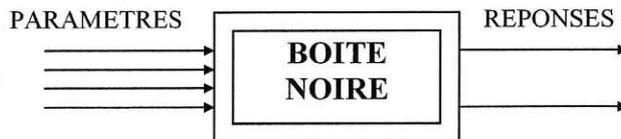
Ces contrôles s'inscrivent à tous les stades de la vie du produit c'est à dire de la conception jusqu'à son suivi en fonctionnement et la recherche de l'optimum se traduit par des expériences conduisant à mesurer les réponses du système lorsque l'on fait varier certains paramètres. Il devient donc nécessaire de mener ces essais avec rigueur de façon à aboutir à des résultats fiables en minimisant le nombre d'expériences donc le coût.

La méthode des plans d'expériences fournit à l'ingénieur et au technicien une méthodologie rigoureuse en vue d'un objectif précis et ceci avec un minimum d'essais évitant tout tâtonnement qui conduit souvent à une pléthore de résultats inexploitable.

1 - ETUDE D'UN PHENOMENE

Vous êtes confronté à un problème technique complexe, de nombreux paramètres sont susceptibles de modifier la réponse ou les réponses que vous cherchez à optimiser, il n'existe pas de loi permettant de calculer la réponse. Quelle démarche adopter?

Ce type de problème peut être schématisé de la façon suivante :



La démarche permettant d'étudier un phénomène comprend les étapes suivantes :

a) Formaliser le problème.

Il faut clairement identifier le problème et déterminer l'objectif à atteindre.

b) Sélectionner les paramètres et les interactions (facteurs) qui a priori semblent les plus influentes.

Choisir pour ces facteurs le nombre de modalités et leurs niveaux. S'assurer que l'on est capable de les maîtriser.

c) Construire un plan.

Vérifier que ce plan peut s'inscrire dans un objectif de coût et de délai compatible avec les impératifs de production.

d) Réaliser les essais.

Auparavant il devra être défini que mesure t'on ? Qui mesure? Ou et quand le fait-on? Comment le fait-on? Il faut réaliser tous les essais prévus au plan et mesurer le ou les réponses.

e) Analyser les résultats.

Il existe deux analyses complémentaires: l'analyse graphique et l'analyse statistique.

F) Conclure.

Faire la synthèse des résultats obtenus et fixer les paramètres à leur valeur optimale en fonction de la réponse souhaitée. Avant d'officialiser la solution réaliser quelques essais de confirmation.

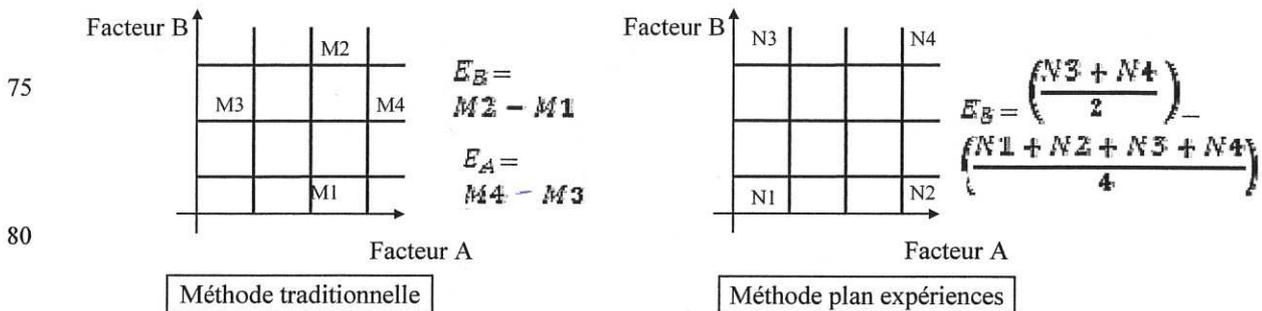
2 - LA METHODE DES PLANS D'EXPERIENCES :

Supposons que l'on ait à étudier la réponse d'un système soumis à l'influence de deux facteurs A et B qui vont évoluer entre une valeur maxi et une valeur mini. La méthode traditionnelle consisterait par exemple à fixer le paramètre A à sa valeur moyenne et d'étudier la réponse du système quand B a respectivement la valeur mini, puis maxi (2 essais) puis de faire de même pour A. Ceci nous conduira donc à 4 essais.

On sent bien que la connaissance des réponses de notre système est très incomplète. En effet qu'en est-il de la réponse de B quand A est fixé à la valeur mini? Pour pouvoir répondre à cette question il faudrait mener toutes les expériences soit $3^2 = 9$ expériences.

Si notre système avait été soumis à l'influence de 4 paramètres et que l'on ait souhaité tester pour 5 valeurs différentes le nombre d'essais correspondant à un plan complet serait de $5^4 = 625$ expériences.

Une autre méthode consisterait à prendre les mesures aux extrémités du domaine expérimental, on réaliserait également dans ce cas que 4 expériences en améliorant la précision des résultats car toutes les mesures seront utilisées pour étudier les effets des facteurs A et B comme nous le verrons plus loin dans le calcul des effets.



85 La méthode des plans d'expériences va consister à établir un plan d'expérimentation qui doit permettre :

- . De diminuer et de planifier les essais (durée, coût).
- . D'étudier un plus grand nombre de facteurs, de quantifier leurs influence sur les réponses.
- . De détecter des éventuelles interactions entre facteurs.
- . De présenter les résultats de façon lisible et de créer un modèle.

90

2.1- Définitions :

- 95 . **Facteur** : variable ou état agissant sur le système pouvant être continue (température) ou discrète (forme de l'outil utilisé).
- . **Réponse** : grandeur que l'on mesure qui peut être qualitative (aspect de surface) ou quantitative (effort maxi). Il est souhaitable de rendre mesurable une réponse qualitative (ex : la rugosité).
- . **Niveau d'un facteur** : c'est la valeur qu'aura ce facteur pour l'essai considéré.
- 100 . **Modalité d'un facteur**: c'est l'état que prendra ce facteur au cours du plan d'expérience : on dira qu'un facteur est à la modalité **A** puis à la modalité **B**.

2.2 - Objectif du plan :

105 Il existe deux objectifs de base que l'on peut rencontrer :

- 105 . Soit la recherche d'un extremum (minimum ou maximum) et dans ce cas la stratégie du plan d'expérience va consister à étudier le plus possible de facteurs en limitant le nombre de niveaux.
- 110 . Soit la recherche de nominale conduisant à une modélisation du système donc à connaître sa réponse pour une configuration quelconque des facteurs. Dans ce cas il faudra être plus fin dans l'analyse en limitant le nombre de facteurs (5 à 6 facteurs maxi) et en augmentant le nombre de niveaux. Il faudra également ne plus négliger les interactions. IL sera souvent utile de réaliser un premier plan permettant de détecter les facteurs influents.

115

PLAN COMPLET

1. DEFINITION :

120 L'étude par un plan complet consiste à exploiter toutes les combinaisons possibles des facteurs pris aux différents niveaux.

Exemple : on désire connaître l'évolution de l'effort séparateur des cylindres dans une opération de laminage à chaud de tôles en fonction de trois facteurs :

- 125
- . L'épaisseur de la tôle : 3 niveaux (25,50, 100 mm)
 - . Le diamètre des cylindres : 3 niveaux (500, 600, 700mm)
 - . Les conditions de contact : 2 niveaux sans et avec lubrifiant.

130 Le plan factoriel complet comprendra : $3^2 \times 2^1 = 18$ essais.

↑
1 facteur à 2 niveaux

↑
2 facteurs à 3 niveaux

135

2. EXEMPLE : étude d'une opération de tournage :

140 Nous allons étudier l'influence de 3 facteurs sur la valeur d'un diamètre obtenu lors d'une opération de tournage. La réponse Y du système est l'écart-type de la dispersion mesurée sur 10 pièces consécutives exprimé en $1/100^\circ$ de mm.

- facteur A : la vitesse de coupe (100 et 1500 m/mn)
- facteur B : les différents types de plaquettes (3 types de plaquettes)
- facteur C : présence ou non d'un lubrifiant (avec ou sans)

145

Le plan factoriel complet comprendra : $2^2 \times 3^1 = 12$ essais

Tableau et résultat des mesures du plan factoriel complet.

150

ESSAIS	A	B	C	Y
1	1	1	1	2.9
2	1	2	1	2.4
3	1	3	1	1.7
4	1	1	2	1.9
5	1	2	2	1.4
6	1	3	2	0.8
7	2	1	1	3.6
8	2	2	1	2.8
9	2	3	1	2.4
10	2	1	2	4.6
11	2	2	2	3.8
12	2	3	2	3.4

. Moyenne générale des résultats : $M = 2,642$

155 - Calcul des effets :

Effet de A au niveau i : E_{Ai} = Moyenne des réponses lorsque A est au niveau i - Moyenne générale.

$$E_{A1} = \left(\frac{2,9 + 2,4 + 1,7 + 1,9 + 1,4 + 0,8}{6} \right) - 2,642 = -0,792$$

160 Nous remarquons que $E_{A1} + E_{A2} = 0$ donc il suffit de calculer 1 effets

$$E_{A2} = +0,792$$

On dira que le nombre de degrés de liberté d'un effet est égal au nombre de niveaux moins un.

165

Les effets de B et de C se calculent de la même manière.

$$E_{B1} = 0,608$$

$$E_{C1} = -0,01$$

$$E_{B2} = -0,042$$

$$E_{C2} = +0,01$$

170

$$E_{B3} = -(E_{B1} + E_{B2}) = -0,566$$

- Calcul des interactions :

175

On dira qu'il y a **interaction** entre un facteur A et un facteur B si l'effet sur la réponse de notre système lorsque A change de niveau n'est pas indépendante du niveau de B

L'interaction I_{AIBJ} est l'interaction qui existe lorsque A est au niveau I et B au niveau J.

180

. Degré de liberté de l'interaction : $ddl(AB) = ddl(A) \times ddl(B) = 1 \times 2 = 2$.

. Tableau des interactions :

185

		B		
		I	J	N
A	I	I_{AIB1}		
	J		I_{AIBJ}	
	M			

190

On montre que la somme des termes d'une ligne ou d'une colonne est nulle : $\sum_J I_{AIBj} = \sum_I I_{AiBj} = 0$

195

. Réponse de notre système lorsque :
A est à la modalité I
B à la modalité J

$$Y_{AiBj} = M + E_{Ai} + E_{Bj}$$

200

. Interaction I_{AIBj} :

$$I_{AIBj} = Y_{AiBj} - M - E_{Ai} - E_{Bj}$$

- Y_{AIBj} = valeur moyenne des réponses lorsque A=I et B=J.

- Y_{AiBj} = valeur calculée de la réponse théorique sans interactions.

205 . Interaction AB: ddl (AB) = d dl (A) x ddl (B) = 1 x 2 = 2.

$$I_{A1B1} = \frac{(2,9 + 1,9)}{2} - 2,642 - (-0,792) - 0,608 = -0,058$$

$$I_{A1B2} = \frac{(2,4 + 1,4)}{2} - 2,642 - (-0,792) - 0,042 = -0,058 + 0,492$$

Pour calculer I_{A1B3} on applique la relation relative à la somme des termes d'une même à une ligne.

210 $I_{A1B3} = -(I_{A1B1} + I_{A1B2}) = -0,034$

De même pour les interactions I_{A2Bj} on aura $I_{A2Bj} = - I_{A1Bj}$

. Interaction AC : ddl (AC) = ddl (A) x ddl (C) = 1 x 1 = 1.

215 $I_{A1C1} = \frac{(2,9 + 2,4 + 1,7)}{3} - 2,642 - (-0,792) - 0,01 = 0,492$

On en déduit : $I_{A1C1} = I_{A2C1} = -0,492$ et $I_{A2C2} = 0,492$

. Interaction BC : ddl (BC) = ddl (B) x ddl (C) = 2 x 1 = 2.

220

$$I_{B1C1} = \frac{(2,9 + 3,6)}{2} - 2,642 - 0,608 + 0,01 = -0,01$$

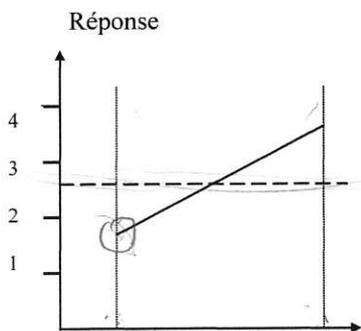
$$I_{B2C1} = \frac{(2,4 + 2,8)}{2} - 2,642 - 0,042 + 0,01 = -0,01$$

On en déduit $I_{B1C2} = I_{B2C2} = -0,01$ $I_{B3C1} = -0,02$ $I_{B3C2} = +0,02$

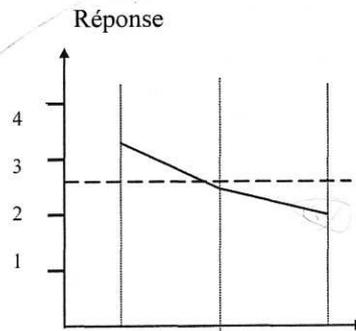
225

-Graphes des effets :

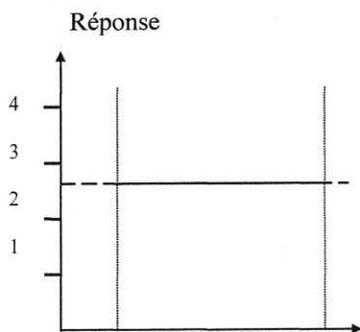
230



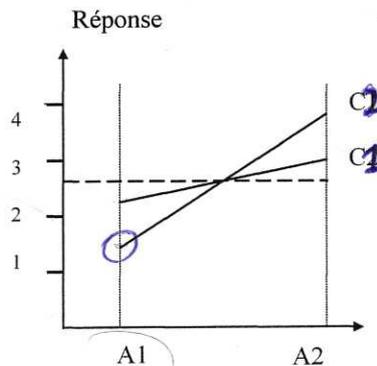
235



240



245



250

Effet du facteur C
lubrification

Interaction AC

255 . Conclusion de cette étude :

Pour diminuer l'écart type de la dispersion il faut :

- placer le facteur A dans la modalité 1
- placer le facteur B dans la modalité 3
- 260 - le facteur C n'a pas d'effet principal sur la dispersion étudié mais pour minimiser l'interaction AC quand A est à la modalité 1 il faut placer le facteur C à la modalité 2

-Modélisation du système étudié :

265

Le modèle étudié sera du type $Y^o = M + A + B + C + AB + AC + BC$

Pour faciliter l'interprétation du modèle il est préférable d'écrire le modèle sous forme matricielle :

270

$$Y^o = M + [E_{A1} E_{A2}] [A] + [E_{B1} E_{B2} E_{B3}] [B] + [E_{C1} E_{C2}] [C] +$$

$${}^t[A] \begin{vmatrix} I_{A1B1} & I_{A1B2} & I_{A1B3} \\ I_{A2B1} & I_{A2B2} & I_{A3B3} \end{vmatrix} [B] + {}^t[A] \begin{vmatrix} I_{A1C1} & I_{A1C2} \\ I_{A2C1} & I_{A2C2} \end{vmatrix} [C] + {}^t[B] \begin{vmatrix} I_{B1C1} & I_{B1C2} \\ I_{B2C1} & I_{B2C2} \\ I_{B3C1} & I_{B3C2} \end{vmatrix} [C]$$

275

. Exemple : calcul de la réponse théorique pour :

A au niveau 1 B au niveau 3 C au niveau 2

280

$$Y^o = 2.64 + [-0.792 \quad +0.792] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [0.608 \quad -0.042 \quad -0.566] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + [-0.01 \quad 0.01] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$+ [1 \quad 0] \begin{bmatrix} -0.058 & +0.092 & -0.034 \\ +0.058 & -0.092 & +0.034 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + [1 \quad 0] \begin{bmatrix} +0.492 & -0.492 \\ -0.492 & +0.492 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} +0.0083 & -0.0083 \\ +0.0083 & -0.0083 \\ -0.0166 & +0.0166 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y^o = 0.7826$$

.Notion de résidus

285 On appelle résidu la différence entre la réponse mesurée et la réponse théorique calculée :

$$R = Y - Y^o = 0,8 - 0,7826 = 0,0174$$

290 Cette différence s'explique par le fait que seuls les paramètres qui nous semblaient les plus influents ont été introduits dans notre modèle alors qu'il existe d'autres paramètres appelés facteurs bruit. Ces paramètres plus ou moins contrôlables vont influencer la réponse et l'un des objectifs sera de rendre le modèle robuste par rapport aux bruits.

295 On pourrait calculer les réponses théoriques pour tous les essais de même que la valeur des résidus et l'on doit vérifier que la somme des résidus soit nulle.

PLAN FRACTIONNAIRE

300 Dans ce qui précède nous nous sommes aperçus que lorsque le nombre de facteurs ou le nombre de modalités augmentent le plan complet nous conduit rapidement à un nombre d'essais souvent peu compatible avec les réalités industrielles. On peut alors se poser la question : est-il nécessaire d'effectuer tous ces essais pour avoir une bonne estimation de la réponse de notre système? Les études ont montré qu'il était possible de répondre positivement à cette question à condition de respecter un certain nombre de règles.

305

1. REGLE D'ORTHOGONALITE

-Définition de l'orthogonalité :

310

Cette condition est indispensable si l'on veut calculer les effets d'un facteur indépendamment des autres. Si nous appelons action un facteur ou une interaction entre facteurs et actions disjointes deux actions ne comportant pas de facteurs en commun la règle d'orthogonalité s'exprime de la façon suivante :

315 Règle d'orthogonalité : deux actions disjointes sont orthogonales si à chaque niveau de l'une, tous les niveaux de l'autre sont associés le même nombre de fois dans le plan d'expérience.
Un plan d'expérience sera dit orthogonal si toutes les actions disjointes du modèle sont orthogonales.

	B1	.	Bj	.	Bm
A1					
.					
Ai			Cij		
.					
An					

320

Pour contrôler cette orthogonalité on établit pour chaque couple d'actions un tableau $T(A,B)$ ou dans la case C_{IJ} sera noté le nombre de fois qu'apparaîtra dans nos essais l'action A au niveau I associée au facteur B au niveau J.

Les actions A et B seront dites orthogonales si $T(A, B)$ a tous ses termes non nuls et égaux entre eux.

325 On montre que pour chaque couple d'actions respectant l'orthogonalité le plan d'expérience aura un nombre de ligne qui sera un multiple du nombre de cases du tableau d'incidence.

Comme toutes les actions du modèle doivent être orthogonales on peut établir la condition nécessaire mais non suffisante pour qu'un plan soit susceptible d'être orthogonal.

330 Pour être susceptible d'être orthogonal un plan devra comporter un nombre d'essais au moins égal au plus petit commun multiple du produit des nombres de niveaux de toutes les actions disjointes prises deux à deux.

. Appliquons cette règle à notre modèle :

335

- Modèle $Y^o = M + A + B + C + AB + AC + BC$
- Actions disjointes sont : A et B, A et C, B et C, A et BC, B et AC, C et AB.

avec A et C 2 niveaux.
B 3 niveaux.

340

condition	conséquences
A ortho à B	le plan est un multiple de $2 \times 3 = 6$
A ortho à C	« « $2 \times 2 = 4$
B ortho à C	« « $3 \times 2 = 6$
A ortho à BC	« « $2 \times 6 = 12$
B ortho à AC	« « $3 \times 4 = 12$
C ortho à AB	« « $2 \times 6 = 12$

345

Le plus petit plan orthogonal comprendra donc le même nombre d'essais qu'un plan complet, il n'existe donc pas de plan fractionnaire pour le modèle considéré.

350

. Autre exemple :

355

- modèle: $\tilde{Y} = M + A + B + C + D + BC + CD$

- actions disjointes : A et B, A et C, A et D, B et C, B et D, C et D
A et BC, A et CD, B et CD, D et BC

360

avec A B et D 3 niveaux.
C 2 niveaux.

Le plan factoriel complet comprendrait : $3^3 \times 2^1 = 54$ essais

condition	Conséquences le plan est un multiple de
A ortho à B	$3 \times 3 = 9$
A ortho à C	$3 \times 2 = 6$
A ortho à D	$3 \times 3 = 9$
A ortho à BC	$3 \times 6 = 18$
A ortho à CD	$3 \times 6 = 18$
B ortho à C	$3 \times 2 = 6$
B ortho à D	$3 \times 3 = 9$
B ortho à CD	$3 \times 6 = 18$
C ortho à D	$3 \times 2 = 6$
D ortho à BC	$3 \times 6 = 18$

365

Pour simplifier les écritures on pourrait construire le tableau suivant qui permet de repérer rapidement les actions coûteuses en nombre d'essais.

A 3	*					
B 3	9	*				
C 2	6	6	*			
D 3	9	9	6	*		
BC 2x3	18	*	*	18	*	
CD 2x3	18	18	*	*	*	*
	3	3	2	3	2x3	2x3
	A	B	C	D	BC	CD

370

Le plan orthogonal comportera au minimum un nombre d'expériences égal au PPCM de 6, 9, 18 soit 18 essais.

Attention cette condition n'est pas suffisante car il faudra vérifier une autre condition sur le nombre de degrés de liberté.

2. CONDITION SUR LE NOMBRE DE DEGRES DE LIBERTE

375

Le nombre de degrés de liberté est le nombre de valeurs qu'il est nécessaire de calculer pour connaître l'ensemble des coefficients du modèle les valeurs introduites dans le calcul étant celles obtenues au cours des essais.

modèle	$\tilde{Y} =$	M +	A +	B +	C +	D +	BC +	CD
niveaux			3	3	2	3	6	6
ddl		1	2	2	1	2	2	2

380

En effet, pour connaître les coefficients du modèle il faut calculer :

- la moyenne.
- deux effets de A le troisième se déduit (2ddl).

385

-
- deux premières interaction de CD car les quatre suivants se déduisent (2 ddl).

Il y aura donc pour notre modèle 12 valeurs à calculer qui imposeront un minimum de 12 essais à réaliser.

390

Règle sur le nombre de degrés de liberté : le nombre d'expériences à réaliser sera au minimum égal au nombre de degrés de libertés de notre modèle.

- Conclusion :** - la règle de l'orthogonalité nous impose que le nombre d'essais devra être un multiple de 18.
- la règle sur les degrés de liberté nous impose un minimum de 12 essais.

395

Le plus petit plan respectant ces deux règles comportera donc au minimum 18 essais et au maximum 54 essais qui correspondrait à étudier le modèle complet c'est à dire à calculer toutes les interactions à tous les niveaux.

- Plan minimum et choix du nombre de ddl:

400

Nous allons montrer dans cet exemple que le nombre d'essais va dépendre d'un choix judicieux du nombre de modalités de nos facteurs (nombre de valeurs que prendront nos paramètres).

405

modèle	$Y^o = M + A + B + C + D$					
niveaux		2	3	5	7	
ddl		1	1	2	4	6

A	2				
B	3	2x3			
C	5	2x5	3x5		
D	7	2x7	3x7	5x7	
		2	3	5	7
		A	B	C	D

410

IL Faut que le plan comporte plus de 14 essais
Le plan factoriel complet aura 140 essais
Le plan minimal sera de **210 essais**

Le PPCM est : $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$

415

Cas 1 Augmentons les modalités pour D de 7 à 8, pour B de 3 à 4 et diminuons celles de C de 5 à 4

A	2				
B	2 ²	X			
C	2 ²	2 ²	2 ⁴		
D	2 ³	2 ⁴	2 ⁵	2 ⁵	X
		2	4	4	8
		A	B	C	D

420

modèle	$Y^o = M + A + B + C + D$				
niveaux		2	4	4	8
ddl		1	3	3	7

Il faut que le plan comporte plus de 15 essais

Le PPCM est de $2^5 = 32$

425 Le PPCM est de 32, le plan minimal comporte donc 32 essais .On a donc diminué sensiblement le nombre d'essais

Règle : Pour diminuer le nombre d'essais on peut augmenter le nombre de niveaux de façon à les rendre non premiers entre eux.

430

.Cas 2 Examinons maintenant le cas ou nous aurions souhaité étudier l'interaction AB et regardons la conséquence sur le nombre d'essais.

435

modèle	$\tilde{Y} = M + A + B + C + D + AB$					
niveaux	2	4	4	8	8	
ddl	1	1	3	3	7	3

440

. Il faut que le plan comporte plus de 18 essais

Le respect de l'orthogonalité des actions disjointes AB et D nous ferait apparaître à l'emplacement correspondant à ces deux interactions le terme : $8 \times 8 = 64$ essais : l'étude de l'interaction AB a conduit au doublement du nombre des essais.

445

Règle : Pour limiter le nombre d'essais on a intérêt à étudier les interactions et en particulier les interactions disjointes que lorsque cela est indispensable.

450

2 - PLAN DU TYPE 2^n - NOTION D'ALIAS

- Fractionnement d'un plan :

455

Considérons un plan factoriel 2^3 (3 facteurs, 2 modalités, 8 essais) .
En fonction de la modalité des facteurs nous définissons l'état de l'interaction de la façon suivante :

Règle :	Etat de AB	= 1	si modalité de A = modalité de B
		= 2	si modalité de A \neq modalité de B

460

465

tableau A

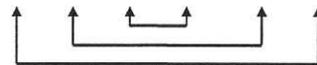
N°	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

470

475

tableau B

N°	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	2	2	2	2	1	1
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1



480

Le tableau A représente l'état des facteurs pour chaque essai dans le cas d'un plan factoriel complet.
Si l'on veut fractionner ce plan tout en conservant l'orthogonalité il faut couper ce plan en 2 au minimum en ne conservant pour une des actions qui ne sera plus pris en compte, que l'état 1 ou l'état 2.

485 Dans le tableau B nous avons négligé l'interaction du 3° ordre ABC et nous avons divisé par deux le nombre d'essais.
 Nous aurions pu choisir un autre facteur : il y a donc autant de demi-plans orthogonaux que de colonnes.

- Notions d'alias :

490 Considérons le demi-plan précédent obtenu en ne conservant que les 1 de la colonne ABC.
 En examinant les colonnes A et BC on constate qu'elles sont identiques les colonnes B et AC, ainsi que les colonnes C et AB le sont également.

495 **Définition** : Deux actions sont des alias ou dites aliassées si au cours des différents essais ces actions changent d'état simultanément.

500 Ceci nous conduit à une remarque importante concernant les plans fractionnaires : le demi-plan divisé par deux le nombre d'essais mais ce gain se traduira par des ambiguïtés dans l'estimation des actions dites aliassées.
 Par exemple lorsque l'on calculera l'effet de A on aura en réalité l'effet de A plus celui de l'interaction BC. Même si l'on peut négliger sans trop de problème les actions du 3° ordre du type ABC, il faudra prendre soin lorsque l'on choisira notre plan fractionné de ne pas trouver des actions significatives aliassées.

505 La méthode TAGUCHI partant du principe que les actions d'ordre 3 sont négligées et que les actions significatives d'ordre 2 sont parfaitement identifiées, permet à l'aide de tables et de graphes associés de construire rapidement un plan fractionnaire.

- Exemple :

510 - on recherche un plan fractionnaire capable de déterminer les coefficients du modèle suivants:

$$\tilde{Y} = M + A + B + C + D + AB + BC + AC$$

- chacun des facteurs est à 2 niveaux.

- le plan factoriel complet comprendra : $2^4 = 16$ essais.

515

modèle	$\tilde{Y} = M + A + B + C + D + AB + BC + AC$							
ddl	1	1	1	1	1	1	1	1

520

- Le nombre d'expériences devra être supérieur ou égal à 8 ($\sum \square$ des ddl).

Règle d'orthogonalité.

525

A	2	*						
B	2	4	*					
C	2	4	4	*				
D	2	4	4	4	*			
AB	4	*	*	8	8	*		
BC	4	8	*	*	8	*	*	
AC	4	*	8	*	8	*	*	*
		2	2	2	2	4	4	4
		A	B	C	D	AB	BC	AC

535

- Le nombre d'expériences devra être un multiple de 8.

540

. Plan complet :

N°	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
545	01	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	02	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
	03	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
	04	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
550	05	1	2	2	1	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2
	06	1	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	1	1
	07	1	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2	1	1
	08	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	2	2
	09	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2
555	10	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
	11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1
	12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1
	13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
	14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	2
560	15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	2
	16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	1

Nous allons couper ce plan en deux parties en ne conservant que les 1 de la colonne ABCD.

565

ABCD sera la colonne de coupure.

N°	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
570	01	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	04	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
	06	1	2	2	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
575	07	1	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2	1	1
	10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	2	1
	11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1
	13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
	16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	1

580

.Détermination des alias du modèle :

	Actions	Colonne de coupure	Alias
585	Moyenne	M	ABCD
	Facteurs	A	ABCD
		B	ABCD
		C	ABCD
		D	ABCD
590	Interactions	AB	ABCD
		BC	ABCD
		AC	ABCD
595			BCD
			ACD
			ABD
			ABC
			CD
			AD
			BD

Nous remarquons qu'aucune des actions du modèle $\tilde{Y} = M + A + B + C + D + AB + BC + AC$ n'est alias d'une autre action.

600 En effet, les interactions d'ordre 3 et plus (BCD, ACD, ..., ABCD) sont nulles, et les interactions avec le facteur D sont supposées inexistantes.

Le plan retenu sera donc le suivant :

605

N°	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	1	1	2	2
610	3	1	2	1
4	1	2	2	1
5	2	1	1	2
6	2	1	2	1
7	2	2	1	1
615	8	2	2	2

La méthode de TAGUCHI que nous allons étudier maintenant nous permettra de construire rapidement des plan fractionnaires orthogonaux tel que les alias ne perturbe pas les résultats. Cette recherche se fera à partir de graphes et de tables standard.

620

METHODE DE TAGUCHI

625

1 - GRAPHES LINEAIRES ET TABLES ASSOCIEES A UN MODELE

La méthode de Taguchi est basée sur la représentation graphique du modèle que l'on souhaite identifier. Dans cette représentation on repère par des ronds les différents facteurs du modèle et par des traits les interactions entre ces différents facteurs.

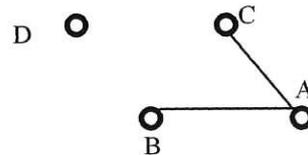
630

Exemple :

- modèle: chaque facteur comportant deux niveaux.

635

$$\tilde{Y} = M + A + B + C + D + AB + AC$$



Graphes linéaire associé

- nombre de degrés de liberté : 8.

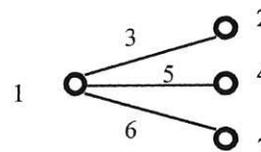
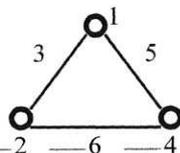
640 - le critère d'orthogonalité nous impose : $2 \times 4 = 8$ essais mini.

Les facteurs étant tous de niveau 2 on recherche parmi les tables orthogonales de TAGUCHI la plus petite compatible avec les deux critères précédents.

645 Tables disponibles : $L_4(2^3), L_8(2^7), L_{16}(2^{15}), L_{32}(2^{31})$.

On choisira donc la table $L_8(2^7)$, 8 représentant le nombre d'essais et 7 le nombre maxi de facteurs ou d'interactions. Il ne reste plus maintenant qu'à choisir parmi les graphes disponibles correspondant à cette table celui qui se superpose le mieux à notre modèle. Pour cette table deux graphes sont disponibles.

650 Graphes



655

Modèles associés

$$Y^{\circ} = M + A + B + C + D + AB + AC + BC$$

$$Y^{\circ} = M + A + B + C + D + \overset{AB \ AC \ BC}{CA + CB + CD}$$

660

Les numéros indiqués sur le graphe correspondent aux numéros de la colonne affectée à chaque facteur ou interaction. Dans notre cas nous choisirons le premier graphe et nous pourrions placer :

- A dans la colonne 1,
- B dans la colonne 2
- C dans la colonne 4

665

- D dans la colonne 7,
- AB dans la colonne 3, AC dans la colonne 5 et BC dans la colonne 6.

On remarquera que la colonne 6 nous permet pour le même nombre d'essais de connaître l'interaction BC.

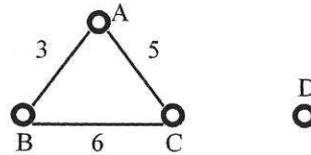
Table orthogonale

Graphe de TAGUCHI associé

670

N°	A	B	AB	C	AC	BC	D
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

675



680

Le calcul des coefficients du modèle s'effectue selon les formules définies précédemment.

L'ordre dans lequel sont effectués les essais n'intervient pas sur les résultats, tous les essais doivent être réalisés.

685

Si un facteur non pris en compte dans le modèle est susceptible de modifier les réponses il faudra si possible le rendre aléatoire par rapport aux essais.

Exemple : lors de l'optimisation d'une opération d'emboutissage si les flans ne peuvent pas être pris dans la même tôle il ne faudra pas réaliser les quatre premiers essais avec les flans de la tôle 1 et les quatre suivants avec la tôle 2 auquel cas l'effet du facteur A engloberait l'effet de la tôle: il faut aléariser les facteurs non contrôlés.

690