

1 Probabilité conditionnelle

Définition 1 Soit P une probabilité sur un univers E et A un évènement tel que $P(A) \neq 0$. Pour tout évènement B , on appelle **probabilité de B sachant A** le réel

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Théorème 1 L'application qui à tout évènement B associe le réel $P_A(B)$ définit une probabilité sur E appelée **probabilité conditionnelle sachant A**

Démonstration 1 P_A associe à tout évènement un réel positif et $P_A(\emptyset) = 0$. On prend e est un évènement élémentaire dans E , si $e \notin A$, alors $P_A(e) = 0$ par définition de P_A

$$D'où \sum_{e \in E} P_A(e) \sum_{e \in A} P_A(e) = \frac{1}{P(A)} \sum_{e \in A} P(e) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Proposition 1 Si A est un évènement de probabilité non nulle et B un évènement quelconque dans l'univers E , on a :

- $P_A(A) = 1$;
- si A et B sont incompatibles, $P_A(B) = 0$;
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$;
- $P_A(B) = 1 - P_A(B)$.

2 Formule des probabilités totales

Théorème 2 Soit A_1, A_2, \dots, A_n un système complet d'évènements de l'univers E et B un évènement quelconque dans E . On a :

$$P(B) = P_{A_1}(B) \cdot P(A_1) + P_{A_2}(B) \cdot P(A_2) + \dots + P_{A_n}(B) \cdot P(A_n)$$

Démonstration 2 B est la réunion des évènements $B \cap A_1, B \cap A_2, \dots, B \cap A_n$, qui sont deux à deux disjoints. Ainsi :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n).$$

Or pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $P(B \cap A_i) = P(B) \times P(A_i)$. D'où le résultat.

3 Indépendance

3.1 Rappels

Définition 2 On appelle **expérience aléatoire**, un processus dont le résultat ne peut être déterminé à l'avance.

Définition 3 On appelle **univers** l'ensemble des valeurs prises par le résultat d'une expérience aléatoire.

Définition 4 On appelle **variable aléatoire** toute grandeur numérique dont la valeur dépend du résultat d'une expérience aléatoire.

Définition 5 Soit P une probabilité sur un univers E On dit que les évènements A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Proposition 2 Si $P(A) \neq 0$, on a :

$$A \text{ et } B \text{ si et seulement si, } P_A(B) = P_B(A)$$