

# 1 Probabilité conditionnelle

**Définition 1** Soit  $P$  une probabilité sur un univers  $E$  et  $A$  un évènement tel que  $P(A) \neq 0$ . Pour tout évènement  $B$ , on appelle **probabilité de  $B$  sachant  $A$**  le réel

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

**Théorème 1** L'application qui à tout évènement  $B$  associe le réel  $P_A(B)$  définit une probabilité sur  $E$  appelée **probabilité conditionnelle sachant  $A$**

**Démonstration 1**  $P_A$  associe à tout évènement un réel positif et  $P_A(\emptyset) = 0$ . On prend  $e$  est un évènement élémentaire dans  $E$ , si  $e \notin A$ , alors  $P_A(e) = 0$  par définition de  $P_A$

$$D'où \sum_{e \in E} P_A(e) \sum_{e \in A} P_A(e) = \frac{1}{P(A)} \sum_{e \in A} P(e) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

**Proposition 1** Si  $A$  est un évènement de probabilité non nulle et  $B$  un évènement quelconque dans l'univers  $E$ , on a :

- $P_A(A) = 1$  ;
- si  $A$  et  $B$  sont incompatibles,  $P_A(B) = 0$  ;
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$  ;
- $P_A(B) = 1 - P_A(B)$  .

## 2 Formule des probabilités totales

**Théorème 2** Soit  $A_1, A_2, \dots, A_n$  un système complet d'évènements de l'univers  $E$  et  $B$  un évènement quelconque dans  $E$ . On a :

$$P(B) = P_{A_1}(B) \cdot P(A_1) + P_{A_2}(B) \cdot P(A_2) + \dots + P_{A_n}(B) \cdot P(A_n)$$

**Démonstration 2**  $B$  est la réunion des évènements  $B \cap A_1, B \cap A_2, \dots, B \cap A_n$ , qui sont deux à deux disjoints. Ainsi :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n).$$

Or pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $P(B \cap A_i) = P(B) \times P(A_i)$ . D'où le résultat.

## 3 Indépendance

### 3.1 Rappels

**Définition 2** On appelle **expérience aléatoire**, un processus dont le résultat ne peut être déterminé à l'avance.

**Définition 3** On appelle **univers** l'ensemble des valeurs prises par le résultat d'une expérience aléatoire.

**Définition 4** On appelle **variable aléatoire** toute grandeur numérique dont la valeur dépend du résultat d'une expérience aléatoire.

**Définition 5** Soit  $P$  une probabilité sur un univers  $E$  On dit que les évènements  $A$  et  $B$  sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

**Proposition 2** Si  $P(A) \neq 0$ , on a :

$$A \text{ et } B \text{ si et seulement si, } P_A(B) = P_B(A)$$