

2016

Exercice 1

On considère l'ensemble U des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Pour un $u \in U$ les deux premiers termes u_0 et u_1 sont donnés. La suite nulle définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$ appartient à U .

1. Montrer que si $a \in U, b \in U$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $a + b \in U$ et $\alpha a \in U$.
En déduire que U est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .
2. Soient c et d les deux suites appartenant à U telles que $c_0 = 1, c_1 = 0, d_0 = 0, d_1 = 1$.
 - (a) Montrer que (c, d) est une base de U .
 - (b) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel U ?
3. (a) Montrer qu'il existe deux réels distincts et non nuls ρ et σ que l'on calculera, avec $\rho < 0 < \sigma$, tels que les suites géométriques $(\rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à U .
On notera r et s les suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \rho^n$ et $s_n = \sigma^n$.
 - (b) Montrer que (r, s) est une autre base de U .
4. (a) Si v est la suite de U telle que $v_0 = x, v_1 = y$, donner en fonction de x et y les composantes de v dans la base (r, s) .
 - (b) En déduire une formule générale de v_n en fonction de n (sans utiliser la formule de récurrence).

Les deux questions d'informatique suivantes peuvent être rédigées au choix en pseudo-code ou en Scilab.

5. (a) Écrire une procédure informatique F ayant pour variables d'entrée deux réels x, y et un entier naturel n et qui renvoie le terme v_n de la suite $v \in U$ telle que $v_0 = x$ et $v_1 = y$.
La fonction F utilisera la relation de récurrence $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$ dans une boucle ou de manière récursive.
- (b) Écrire une procédure informatique G ayant également pour variable d'entrée deux réels x, y et un entier naturel n et qui renvoie aussi le terme v_n de la suite $v \in U$ telle que $v_0 = x$ et $v_1 = y$, mais sans faire de boucle (en utilisant la formule établie à la question 4.b).
- (c) Expliquez quelle est, entre F et G , la fonction la plus efficace pour calculer v_n ?