

ÉNONCÉ 2020

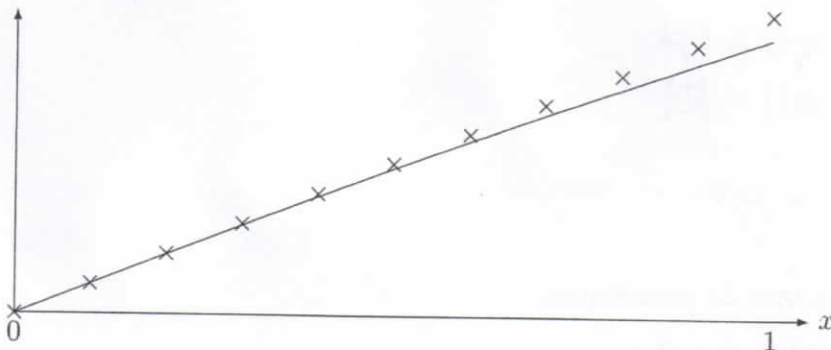
Partie C – Résolution approchée d'un problème de Cauchy

Soit N un entier naturel non nul. Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation (E_0) , avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ par la méthode d'Euler, en prenant un pas égal à $1/N$. On admet que cela revient à calculer les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1/N$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^2(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) + u_n = \frac{n^2}{N^2}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+2} en fonction de N , n , u_n et u_{n+1} .
2. Écrire une fonction **cauchy**, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel non nul N et renvoie le vecteur $[u_0, u_1, \dots, u_N]$.

Sur la figure suivante, on représente le graphe de la solution théorique du problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, 1]$, ainsi que les points de coordonnées $(k/N, u_k)$ avec $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ (ici, on a choisi $N = 10$).



3. Comment agir sur le paramètre N pour améliorer la solution approchée ? Quel est l'impact sur le temps de calcul ?