

2016

Exercice 1

On considère l'ensemble U des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Pour un $u \in U$ les deux premiers termes u_0 et u_1 sont donnés. La suite nulle définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$ appartient à U .

1. Montrer que si $a \in U$, $b \in U$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $a + b \in U$ et $\alpha a \in U$.
En déduire que U est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .
2. Soient c et d les deux suites appartenant à U telles que $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $d_0 = 0$, $d_1 = 1$.
 - (a) Montrer que (c, d) est une base de U .
 - (b) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel U ?
3. (a) Montrer qu'il existe deux réels distincts et non nuls ρ et σ que l'on calculera, avec $\rho < 0 < \sigma$, tels que les suites géométriques $(\rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à U .
On notera r et s les suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = \rho^n$ et $s_n = \sigma^n$.
 - (b) Montrer que (r, s) est une autre base de U .
4. (a) Si v est la suite de U telle que $v_0 = x$, $v_1 = y$, donner en fonction de x et y les composantes de v dans la base (r, s) .
 - (b) En déduire une formule générale de v_n en fonction de n (sans utiliser la formule de récurrence).

Les deux questions d'informatique suivantes peuvent être rédigées au choix en pseudo-code ou en Scilab.

5. (a) Écrire une procédure informatique F ayant pour variables d'entrée deux réels x , y et un entier naturel n et qui renvoie le terme v_n de la suite $v \in U$ telle que $v_0 = x$ et $v_1 = y$.
La fonction F utilisera la relation de récurrence $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$ dans une boucle ou de manière récursive.
- (b) Écrire une procédure informatique G ayant également pour variable d'entrée deux réels x , y et un entier naturel n et qui renvoie aussi le terme v_n de la suite $v \in U$ telle que $v_0 = x$ et $v_1 = y$, mais sans faire de boucle (en utilisant la formule établie à la question 4.b).
- (c) Expliquez quelle est, entre F et G , la fonction la plus efficace pour calculer v_n ?

```

function nb=f(t)
    nb=0
    n=length(t)
    for i=1:(n-1)
        if t(i)<t(i+1)
            nb=nb+1
        end
    end
endfunction

```

ATS

2017

On se donne un tableau à une dimension, de longueur n dont les entrées sont indexées de 1 à n , ne contenant que des 0 et des 1, commençant et se terminant par un 0. On supposera qu'il ne contient pas que des 0.

Dans un tel tableau on appelle **séquence1** une suite de 1 consécutifs précédés et suivis d'au moins un 0. Ci-dessous, on a un exemple d'un tel tableau de longueur 16, comportant 4 **séquence1**, dont une de longueur 4 entre les numéros 8 et 11, et une en 15 de longueur 1. On se propose d'écrire des fonctions en métalangage ou en Scilab permettant de calculer le nombre, la longueur et la position de telles **séquence1**.

Index i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Tableau1(i)	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0

1. Soit la fonction f écrite en Scilab, avec en entrée un tableau t défini précédemment.

```

function nb=f(t)
    nb=0
    n=length(t)
    for i=1:(n-1)
        if t(i)<t(i+1)
            nb=nb+1
        end
    end
endfunction

```

Expliquer ce que renvoie $f(\text{Tableau1})$ et préciser le fonctionnement de f .

2. Écrire en métalangage ou en Scilab une fonction g qui détermine et renvoie la position et la longueur [début,fin,longueur] de la plus longue séquence1 du tableau (en cas d'égalité de longueur celle de la première rencontrée). Par exemple $g(\text{Tableau1})$ doit renvoyer la liste [3,6,4].

INFO 2018

On admet que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$ et $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \leq \frac{1}{5N^5}$.

1. Ecrire en métalangage ou en scilab une fonction *fin* prenant comme argument un réel *eps* avec $10^{-10} \leq eps \leq 1$, et renvoyant le plus petit entier naturel non nul *N* tel que $\frac{1}{N^5} \leq eps$.
2. Ecrire en métalangage ou en scilab une fonction *somme* prenant comme argument un réel *N* strictement positif et renvoyant une approximation décimale de $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^6}$.
3. En utilisant les deux fonctions précédentes, écrire en métalangage ou en Scilab une fonction *approxPi6* prenant comme argument un réel *eps* strictement positif et renvoyant une approximation de π^6 à *eps* près.

INFO 2019

les deux questions sont indépendantes

1. On souhaite obtenir un encadrement du réel α , solution de l'équation $\text{sh}(\alpha)-1=0$, en appliquant un procédé de dichotomie. Recopier en la complétant la fonction Scilab suivante, qui prend en argument un réel strictement positif $\varepsilon > 0$, et renvoie deux réels *a* et *b* vérifiant $a \leq \alpha \leq b$ et $b - a \leq \varepsilon$. On sait que α est compris entre 0 et 1.

```
function [a,b]=dicho(eps)
```

```
    a = ...
```

```
    b = ...
```

```
    while .....
```

```
        c = (a+b)/2
```

```
        if ..... then a = c
```

```
            else b = c
```

```
        end
```

```
    end
```

```
endfunction
```

Note : la fonction *sh* s'écrit *sinh* en Scilab

2. En utilisant la fonction précédente sur machine, on trouve 0,881 comme valeur approchée de α . On rappelle de plus que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$I_0 = \alpha, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n.$$

Ecrire une fonction en Scilab ou bien en pseudo code, qui prend en entrée un entier naturel *n* et renvoie une valeur approchée de I_n .

ÉNONCÉ 2020

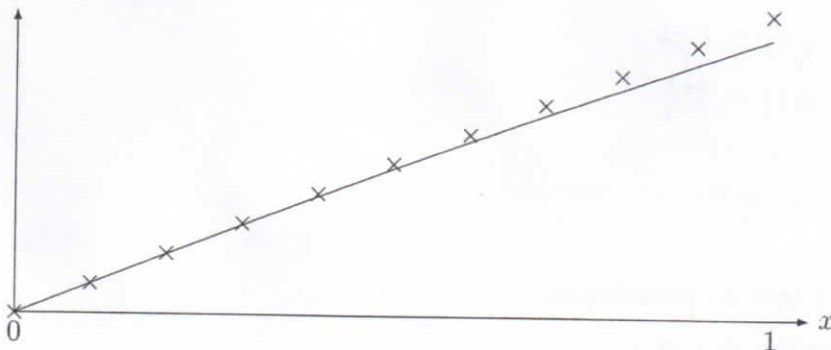
Partie C – Résolution approchée d'un problème de Cauchy

Soit N un entier naturel non nul. Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation (E_0) , avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ par la méthode d'Euler, en prenant un pas égal à $1/N$. On admet que cela revient à calculer les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1/N$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^2(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) + u_n = \frac{n^2}{N^2}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+2} en fonction de N , n , u_n et u_{n+1} .
2. Écrire une fonction **cauchy**, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel non nul N et renvoie le vecteur $[u_0, u_1, \dots, u_N]$.

Sur la figure suivante, on représente le graphe de la solution théorique du problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, 1]$, ainsi que les points de coordonnées $(k/N, u_k)$ avec $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ (ici, on a choisi $N = 10$).



3. Comment agir sur le paramètre N pour améliorer la solution approchée? Quel est l'impact sur le temps de calcul?