corrigé

5a.

boucle :

```
function v = ATS(x,y,n)
a = x ; b = y ; c = b+2a ;
for i = 1 : n do
    a = b ; b = c ; c = b+2a ;
    end
v = a
endfunction
```

5b.

```
function v = G(x,y,n)
```

$v = \frac{1}{3}\left((2x-y)\left(-1\right)^n + (x+y)\,2^n\right)$

```
endfunction
```

5c. G est plus efficace car il n'y a pas d'itération.

Corrigé

1. On suit pas à pas ce que fait le programme :

qd i = 1 : rien

qd i = 2 : nb = 1

qd i = 3 à 6 : rien

qd i = 7 : nb = 1+1 = 2

qd i = 8 à 11 : rien

qd i = 12 : nb = 2+1

qd i = 13 : rien

qd i = 14 : nb = 3+1 = 4

qd i =15 : rien

... On voit que ce programme calcule le nombre de séquences de 1.

2. function T = g(t)

```
    n = length(t)
    a = 0 ; A = 0 ; B = 0 ; C = 0 ;
    for i = 1 : n-1 do
        if t(i) < t(i+1) do
        j = i+1 ; a = 0 ;
            while t(j) == 1 do
            a = a+1 ; j = j+1 ;
            end
        if a > A do
        A = a ; B = i+1 ; C = i+a ;
        end
    end
T = [B C A]
endfunction
```

Corrigé

1. On peut utiliser une boucle « tant que »

en métalangage :

a=1 ;
tant que $\frac{1}{5a^5} \geq eps$
a=a+1 ;
a

en scilab :

function fin=$F(eps)$
fin=1 ;
while $\frac{1}{5fin^5} \geq eps$
fin=fin+1 ;
end
endfunction

2. En scilab :

function somme = S(N)
somme = 0 ;
for n=1 : N
somme = somme + $\frac{1}{n^6}$;
end
endfunction

3. $\pi^6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{945}{n^6} = \sum_{n=1}^{N} \frac{945}{n^6} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{945}{n^6}$ et $\sum_{N+1}^{\infty} \frac{945}{n^6} \leq \frac{945}{5N^5} \leq eps$ On veut donc que $\frac{1}{5N^5} \leq \frac{eps}{945}$

Avec les fonctions fin=F(eps) et somme=S(N) : $N = F\left(\frac{eps}{945}\right)$ puis pi6 = S(N)*945

En scilab :

function pi6=Pi(eps)
fin=1 ;
while $\frac{1}{5fin^5} \geq \frac{eps}{945}$
fin = fin + 1 ;
end
somme = 0 ;
for n=1 : fin
somme = somme + $\frac{1}{n^6}$
end
pi6 = somme*945
endfunction

Corrigé 2019

Q1 :

On sait que $0 < \alpha < 1$; que $a \leq \alpha \leq b$; que $b - a \leq \varepsilon$ et que $sh(\alpha) = 1$

function $[a, b] = dicho(eps)$
$a = 0$
$b = 0$
while $b - a > eps$
$c = (a + b)/2$
if $sinh(c) < 1$ then $a = c$
else $b = c$
end
end
endfunction

Q 2 :

On sait que : $I_0 = \alpha$; que $\alpha \simeq 0.881$ et que $I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n$.

$I = 0.881$
for $i = 1$ to n do
$I = (sqrt(2)/2 * i + 2) - (2 * i + 1)/(2 * i + 2) * I$
end
endfunction

Corrigé 2020

Partie C – Résolution approchée d'un problème de Cauchy

1. Après calculs :

$$u_{n+2} = \frac{n^2}{N^4} - \left(\frac{1}{N^2} + 1\right) u_n + 2u_{n+1}$$

2. Pour ne pas alourdir la fonction, nous supposerons que $N \geqslant 2$ comme le suggère l'écriture du vecteur dans l'énoncé : $[u_0, u_1, \ldots, u_N]$.
   La fonction `cauchy(N)` en pseudo-code et en `Scilab` :

Fonction `cauchy(`N`)`

cauchy ← vecteur nul à $N+1$ composantes
$cauchy(1) = 0$
$cauchy(2) = 1/N$
pour i *valant de* 3 *à* $N+1$ **faire**
  $cauchy(i) \leftarrow 2 \times cauchy(i-1) - (1/N^2+1) \times cauchy(i-2) + (i-2)^2/N^4$
fin
retourner *cauchy*

```
function [cauchy]=cauchy(N)
    cauchy=zeros(1,N+1)
    cauchy(2)=1/N
    for i=3:N+1
        cauchy(i)=2*cauchy(i-1)-(1/N
^2+1)*cauchy(i-2)+(i-2)^2/N^4
    end
endfunction
```

3. En augmentant N, on échantillonne plus finement l'intervalle $[0, 1]$ et on améliore la solution approchée.
   Pour une valeur N du paramètre, on calcule un vecteur de taille $N+1 \underset{+\infty}{\sim} N$. Le temps de calcul augmente linéairement en fonction de N.

Exo 3 Partie C

① $\left(\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée

$\left|\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!^2}\right| = \frac{|x|^{2n}}{n!^2} = a_n \to 0$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^2}{(n+1)^2} < 1$ dès que $n^2 > |x|^2$ c'à d $n > |x|$

donc la suite (a_n) est décroissante et $\to 0$

② fonction FAPPROX(x, ε)

$n \leftarrow \lceil |x| - 1 \rceil$ $\quad y \leftarrow 0$ $\quad t \leftarrow 1$ $\quad n \leftarrow 0$

tant que $\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!^2} > \varepsilon$

$y \leftarrow y + t$

$n \leftarrow n+1$

$t \leftarrow -t x^2/n^2$

fin du tant que

renvoyer y

fin fonction

en effet, à la 1ère étape :

$y = 1$ (terme pour $n=0$)

$n = 1$

$t = -x^2$

2ème étape :

$y = 1 - x^2$

$n = 2$

$t = \frac{x^4}{2^2}$

3ème étape :

$y = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2^2}$

$n = 3$

$t = \frac{x^4}{2^2} \cdot \frac{x^2}{3^2} = \frac{x^6}{3!^2}$

(C4 suite) $|S_n(1) - I| \leq \left| \int_0^1 -\frac{R_n(t)}{t} dt \right| \leq \int_0^1 \left| -\frac{R_n(t)}{t} \right| dt = \int_0^1 \left| \frac{R_n(t)}{t} \right| dt$

Avec la Q C2 : $|R_n(t)| \leq \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$, donc

$$|S_n(1) - I| \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1} dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2} \right]_0^1 = \frac{1}{(2n+1)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $\lim_{n \to +\infty} S_n(1) - I = 0$, donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n(1) = I}$

(C5) pour avoir $\varepsilon = 10^{-4}$ près, il faut et il suffit $\frac{1}{(2n+1)^2} \leq 10^{-4}$

c'est $(2n+1)^2 \geq 10^4 \Leftrightarrow 2n+1 \geq 10^2 \Leftrightarrow 2n \geq 99 \Leftrightarrow n \geq 49{,}5$

On peut prendre $\boxed{N = 50}$

(C6) $S_n(1) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$

```
fonction s = S(n)
a = 1
for k = 1 : n-1 do
a = a + (-1)^k / (2k+1)^2
end
s = a
endfonction
```

(C7)

```
fonction trouve = f(e)
N = 1
while 1/(2N+1)^2 > e do N = N+1
end
trouve = N
endfonction
```

(C8)

```
e = 10^-10
N = f(e)
s = S(N)
s
```

(50 000)