

dmg pour le Vendredi 24/02 (concours Arts 2022)

Exercice 1

On note $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 3×3 à coefficients réels. On considère les éléments suivants de E :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Réduction

1. Donner le polynôme caractéristique de la matrice A .
2. Justifier que A possède une unique valeur propre et donner son ordre de multiplicité.
3. La matrice A est-elle diagonalisable? Est-elle trigonalisable?

On considère dans la suite de cette partie l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 tel que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) &= e_1 - e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

4. Déterminer la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de l'endomorphisme f dans la base \mathcal{B} .
5. Calculer le rang de la matrice A . L'endomorphisme f est-il surjectif?
6. L'endomorphisme f est-il injectif? Est-il bijectif?
7. On pose $e'_1 = (1, 0, -1)$ et $e'_2 = (1, -1, 1)$. Montrer que la famille (e'_1, e'_2) forme une base de l'espace vectoriel $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$.
8. (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e_1)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
(b) Calculer la matrice représentative de f dans la base \mathcal{B}' .

Partie B – Étude d'une suite de matrices

1. Montrer que $A^2 = 2A - I$.
2. Montrer que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = 2I - A$.
3. Soient $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ des nombres réels vérifiant $\alpha I + \beta A = \alpha' I + \beta' A$. Montrer que $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.

On définit la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E par la condition initiale $X_0 = A$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \frac{X_n^2}{n+1} + 2I - A.$$

4. Montrer que pour tout entier naturel n , il existe un unique couple (α_n, β_n) de réels tel que

$$X_n = \alpha_n I + \beta_n A,$$

et que ce couple vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \\ \beta_{n+1} = \frac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1 \end{cases}$$

5. Déterminer $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3$ et β_3 .
6. Au vu du résultat de la question précédente, conjecturer une expression de α_n et β_n , pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, puis montrer cette conjecture. En déduire l'expression de X_n en

fonction de n .