

Dans la première partie, on calcule la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et de ses copains, et on factorise dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^5 - 1$.

Dans la deuxième partie, on utilise cette factorisation pour calculer l'intégrale $I = \int_2^3 \frac{x^4+2x^3+2}{x^5-1} dx$

Première partie : Soit l'équation : (E) $z^5 - 1 = 0$.

11. Résoudre (E) dans \mathbb{C} en calculant les cinq racines de (E) sous forme trigonométrique.

En déduire une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^5 - 1$

Pour achever cette factorisation, il nous reste à calculer $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$. C'est la suite de la partie 1

12. Déterminer la fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $z^5 - 1 = (z - 1)Q(z)$.

(On pourra faire une division euclidienne)

13. Déterminer des réels a, b, c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $\frac{Q(z)}{z^2} = a(z + \frac{1}{z})^2 + b(z + \frac{1}{z}) + c$.

14. Résoudre, en exprimant les solutions par radicaux carrés, l'équation : $aZ^2 + bZ + c = 0$.

15. Pour finir, résoudre l'équation $Q(z) = 0$ en exprimant les solutions par radicaux carrés, éventuellement superposés.

16. Des questions précédentes, déduire des expressions par radicaux de :

$\cos(\frac{2\pi}{5})$; $\cos(\frac{4\pi}{5})$; $\cos(\frac{\pi}{5})$; $\sin(\frac{2\pi}{5})$; $\sin(\frac{4\pi}{5})$ et $\sin(\frac{\pi}{5})$.

17. Donner la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^5 - 1$ en produit de polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Deuxième partie

On sait désormais que $X^5 - 1 = (X - 1)(X^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}X + 1)(X^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}X + 1) = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$

et donc :

$$\frac{X^4+2X^3+2}{X^5-1} = E(X) + \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}X+1} + \frac{dX+e}{X^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}X+1} = \frac{a}{X-1} + \frac{P(X)}{X^4+X^3+X^2+X+1}$$

où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

21. Trouver a à l'aide de la méthode du cache.

22. Calculer $\frac{X^4+2X^3+2}{X^5-1} - \frac{1}{X-1}$ et en déduire la valeur de P.

23. Calcul de l'intégrale I :

Calculer dans un premier temps la primitive $K = \int \frac{1}{t^2+t-1} dt$

Ensuite, on effectue dans $K = \int \frac{1}{t^2+t-1} dt$ le changement de variable $t = x + \frac{1}{x}$.

En déduire que $K = \int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1} dx$

En déduire la valeur de $J = \int_2^3 \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1} dx$

Enfin, trouver la valeur de $I = \int_2^3 \frac{x^4+2x^3+2}{x^5-1} dx$.

FIN