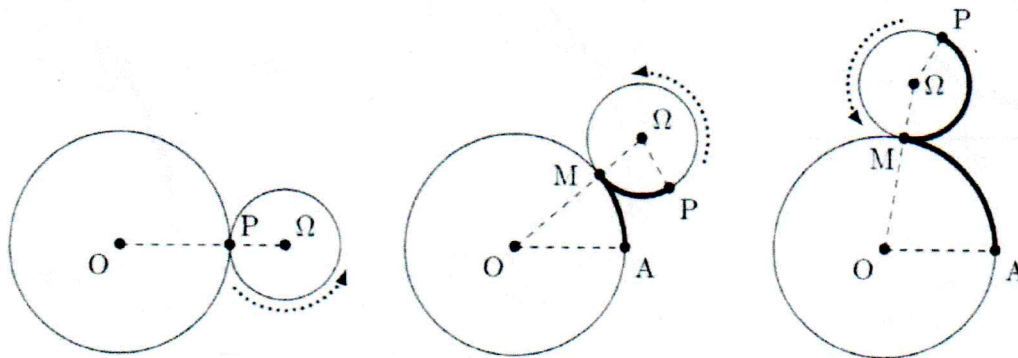


Problème 2. ATS 2019

DM 7 pour B
Vendredi 13/01

Dans cet exercice, on étudie la trajectoire d'un point P fixé sur un cercle de rayon $1/2$ qui roule sans glisser à l'extérieur d'un autre cercle de rayon 1 . La figure ci-dessous représente trois instants de ce mouvement. On remarquera que la longueur de l'arc \widehat{AM} est égale à la longueur de l'arc \widehat{MP} .



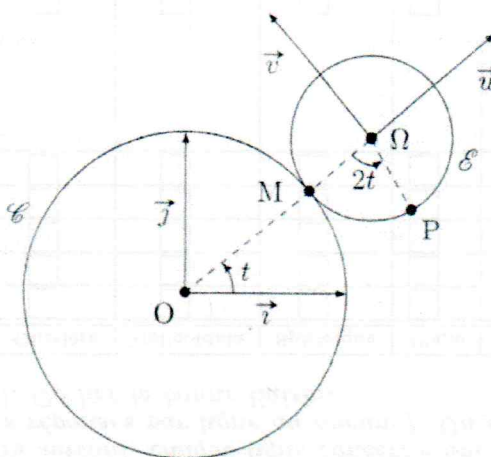
Les parties A et B peuvent se traiter de manière indépendante.

Partie A – Étude de la trajectoire du point P

- Justifier que sur les figures ci-dessus, les angles $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ satisfont l'égalité $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}) = 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

Afin d'étudier la trajectoire du point P, on munit le plan d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On note \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère le point M de coordonnées $(\cos t, \sin t)$ appartenant au cercle \mathcal{C} . On note alors \mathcal{C}' le cercle de rayon $1/2$ extérieurement tangent au cercle \mathcal{C} en M. Le centre du cercle \mathcal{C}' est noté Ω . D'après la question 1, le point P est le point du cercle \mathcal{C}' tel que $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}) = 2t$. Enfin, on considère le repère $\mathcal{P} = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ où

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} \\ \vec{v} = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} \end{cases}$$



2. Donner les coordonnées du point Ω dans le repère \mathcal{R} .
3. Démontrer que le repère \mathcal{P} est orthonormal.
4. Démontrer que les coordonnées du point P dans le repère \mathcal{P} sont

$$\left(-\frac{\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin(2t)}{2} \right).$$

5. Soit un point N du plan. On note (x, y) ses coordonnées dans le repère \mathcal{R} et (X, Y) ses coordonnées dans le repère \mathcal{P} . Démontrer que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

6. En déduire que les coordonnées du point P dans le repère \mathcal{R} sont

$$(3 \cos t - 2(\cos t)^3, 2(\sin t)^3).$$

Partie B – Tracé de la courbe décrite par le point P

Cette partie peut être traitée même si la partie A n'a pas été abordée. On souhaite à présent tracer la courbe notée \mathcal{N} et décrite par le point P. On considère donc les fonctions x et y définies sur \mathbb{R} par

$$x(t) = 3 \cos t - 2(\cos t)^3 \quad \text{et} \quad y(t) = 2(\sin t)^3$$

de sorte que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $P(t) = (x(t), y(t))$.

1. Montrer que les fonctions x et y sont périodiques et préciser leurs périodes.
2. Montrer que pour tout réel t , les points $P(t + \pi)$ et $P(-t)$ se déduisent du point $P(t)$ par des symétries à préciser. En déduire un intervalle I de longueur minimale et de la forme $[0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$ pour l'étude de la courbe \mathcal{N} .
3. Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle I . On y fera apparaître les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$.
4. Donner une représentation graphique de la courbe \mathcal{N} en y faisant apparaître pour $t \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$ les points $P(t)$ et les tangentes en ces points. On admettra que la tangente au point $P(0)$ est horizontale.