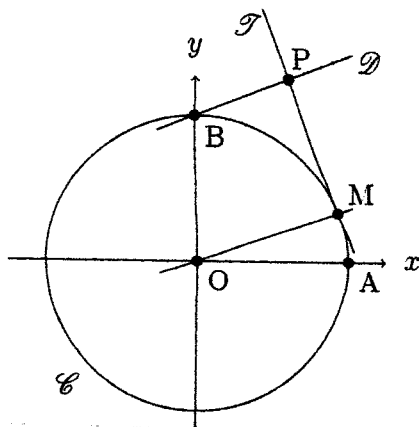


DM n°5 (Extrait du concours ATS 2022)

pour le vendredi 25 Novembre

Exercice 4

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1. Les points $A(1,0)$ et $B(0,1)$ appartiennent au cercle \mathcal{C} . Soit θ un réel appartenant à $[0, 2\pi[$. On considère le point $M(\cos \theta, \sin \theta)$ de \mathcal{C} .

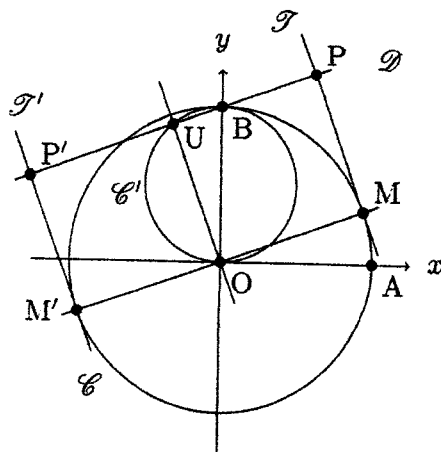


1. Donner une équation cartésienne de la tangente \mathcal{T} en M au cercle \mathcal{C} .
2. Donner une équation cartésienne de la droite \mathcal{D} passant par B et parallèle à (OM) .
3. Déterminer, en fonction du paramètre réel θ , tous les couples de réels (x, y) qui vérifient le système

$$\begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = 1 \\ -x \sin \theta + y \cos \theta = \cos \theta \end{cases}$$

4. En déduire les coordonnées du point P , intersection de la droite \mathcal{T} et de la droite \mathcal{D} .

On appelle \mathcal{K} la courbe décrite par le point P lorsque θ parcourt $[0, 2\pi[$. Sur cette même figure, on ajoute le cercle \mathcal{C}' de diamètre $[OB]$, le point M' , autre intersection de la droite (OM) et du cercle \mathcal{C} , et la tangente \mathcal{T}' au cercle \mathcal{C} en M' . La droite (BP) coupe la tangente \mathcal{T}' en P' et le cercle \mathcal{C}' en U (voir la figure ci-dessous).



5. Montrer que les droites \mathcal{T} , (OU) et \mathcal{T}' sont parallèles.
6. Montrer que $UP = UP' = 1$.
7. Montrer le point P' appartient à la courbe \mathcal{K} . Si θ est le paramètre associé à P , quel est le paramètre correspondant pour P' ?
8. Déduire de ce qui précède une nouvelle construction des points de la courbe \mathcal{K} n'utilisant que le cercle \mathcal{C}' et le point B .