

DM 11

pour le lundi 20 Mars

CONCOURS ATS 2022

Exercice 2

On considère la fonction 2π -périodique $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x & \text{si } x \in [0, \pi[\end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi[$.

On note

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

la série de Fourier de la fonction f .

2. (a) Calculer le coefficient a_0 .
(b) Calculer les coefficients a_n , pour tout entier naturel non nul n .
(c) Calculer les coefficients b_n , pour tout entier naturel non nul n .
(d) Montrer que la série de Fourier de f est convergente. Énoncer le théorème utilisé et préciser la fonction vers laquelle elle converge.

3. En évaluant la série de Fourier de f en un point particulier, montrer que $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

5. (a) Énoncer le théorème de Parseval.

- (b) Donner la valeur de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.