

Dim 10 - Pour le Vendredi 17 Mars (Concours ATS 2021)

Exercice 1

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels, et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille 3×1 à coefficients réels. Pour tous réels a et b , on définit la matrice

$$P(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

On définit par ailleurs l'ensemble de matrices suivant :

$$F = \{P(a, b) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On pose enfin

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Étude de l'ensemble F et de la matrice N

- Démontrer que les matrices I_3 et N appartiennent à l'ensemble F .
- Montrer que l'ensemble F forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que (I_3, N) est une base de F .
- Donner deux réels a et b tels que $N^2 = aI_3 + bN$. Quelles sont les coordonnées de N^2 dans la base (I_3, N) ?
- (a) Montrer que N est inversible, que son inverse N^{-1} appartient à l'ensemble F et donner les coordonnées de N^{-1} dans la base (I_3, N) de F . *Indication : on pourra utiliser la question précédente.*
(b) Le réel 0 est-il valeur propre de N ?
- Justifier que N est diagonalisable. *Cette question n'exige aucun calcul.*
- (a) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice N .
(b) Montrer que N admet deux valeurs propres, que l'on notera λ_1 et λ_2 et que l'on choisira telles que $\lambda_1 < \lambda_2$. Quels sont les ordres de multiplicité de λ_1 et λ_2 ?
(c) En déduire une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telle qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible vérifiant $N = PDP^{-1}$. *On ne cherchera à calculer ni la matrice P , ni son inverse P^{-1} .*
- Montrer que pour tout entier naturel n , il existe deux réels a_n et b_n tels que $N^n = P(a_n, b_n)$ et que ces réels vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

On notera dans la suite de l'exercice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Déterminer une matrice diagonale B dont les termes diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible Q de taille 2×2 dont la deuxième ligne est $(1, 1)$, telles que $A = QBQ^{-1}$.
9. En déduire, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n .
10. En déduire, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, une expression de N^n .

Partie B – Inversibilité des matrices de F

1. Soient b un réel et (x, y) un couple de réels. Montrer que

$$P(1, b)P(x, y) = P(x + 2by, bx + y + by) = P(x, y)P(1, b).$$

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet un inverse dans F si M est inversible et $M^{-1} \in F$.

2. Déduire de la question précédente que pour tout réel b , la matrice $P(1, b)$ admet un inverse dans F si et seulement si le système

$$\begin{cases} x = 1 - 2by \\ (1 + b - 2b^2)y = -b \end{cases}$$

admet une solution (x, y) .

3. Montrer que la matrice $P(1, b)$ admet un inverse dans F si et seulement si $b \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1/2\}$.
4. Quelles sont les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(1, b)$ est inversible ?
5. Soit a un réel **non nul**. Justifier que pour tout réel b , on a $P(a, b) = aP(1, b/a)$ et en déduire les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(a, b)$ est inversible.
6. Donner les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(0, b)$ est inversible. *Indication : on pourra utiliser le fait, prouvé en partie A, que la matrice N est inversible.*
7. Conclure en donnant l'ensemble des matrices de F qui ne sont pas inversibles.

Exercice 2

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |\cos x| - |\sin x|$.

1. (a) Montrer que f est périodique de période π .
(b) Donner la parité de f .
2. Trouver la plus grande valeur de $a > 0$ pour laquelle l'égalité $f(x) = \cos x - \sin x$ est valable pour tout $x \in [0, a]$.
3. Calculer une constante C telle que

$$\cos(x) - \sin(x) = C \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

pour tout réel x . On utilisera cette écriture dans la suite.

4. En déduire la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
5. (a) Montrer que la série de Fourier Sf de la fonction f peut s'écrire sous la forme

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nx).$$