

DM 1

1. Etudier la fonction $x \mapsto f_2(x) = x^2 - x - 2$ sur \mathbb{R}^+ .
Vérifier que f_2 ne s'annule qu'une seule fois sur \mathbb{R}^+ .

2. On souhaite montrer que la fonction $f_3(x) = x^3 - x^2 - 2x - 3$ ne s'annule qu'une fois sur \mathbb{R}^+ .
 21. Calculer f_3' et f_3'' .
 22. Faites le tableau de variation de f_3' .
 23. En déduire le tableau de variation de f_3 .
 24. Conclure.

3. On souhaite montrer que la fonction $x \mapsto f_4(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x - 4$ ne s'annule qu'une fois sur \mathbb{R}^+ .
 31. Calculer f_4' ; f_4'' et f_4''' .
 32. Faites le tableau de variation de f_4'' sur \mathbb{R}^+ .
(inutile de calculer la valeur précise du minimum de f_4'' . On se contente de lui donner un nom.)
 33. En déduire le tableau de variation de f_4' .
 34. En déduire le tableau de variation de f_4 .
 34. Conclure.

4. n est un entier naturel. Expliquer comment on pourrait montrer que le polynôme $g_n(x) = x^n - x^{n-1} - 2x^{n-2} - 3x^{n-3} \dots - (n-2)x^2 - (n-1)x - n$ ne s'annule qu'une fois sur \mathbb{R}^+ .

5. Une autre démonstration : On pose $h_n(x) = g_n\left(\frac{1}{x}\right)$.
 51. Ecrire $h_n(x)$ sous la forme $\frac{N(x)}{x^n}$.
 52. Etudier la fonction N sur \mathbb{R}^+ .
 53. Conclure.