

$$\textcircled{1} \vec{i}' \cdot \vec{j}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 4 + 2 = 0$$

$$\vec{i}' \cdot \vec{k}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0$$

$$\vec{j}' \cdot \vec{k}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 - 2 - 2 = 0$$

donc  $\mathcal{B}'$  est  $\perp$

$$\textcircled{2} S^2 = S \times S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I$$

$$S \times S = 9I \Rightarrow S \times \begin{pmatrix} S \\ 9 \end{pmatrix} = I$$

Inverse de  $S$

$$\textcircled{3} f(\vec{i}') = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} = -9 \vec{i}'$$

$\Rightarrow \vec{i}'$  est un vecteur propre pour  $-9$

$f(\vec{j}') = \dots = 9 \vec{j}'$  donc  $\vec{j}'$  est un vecteur propre pour  $9$

$f(\vec{k}') = \dots = 9 \vec{k}'$  donc  $\vec{k}' \xrightarrow{\quad\quad\quad} 9$

On appelle  $A'$  la matrice de  $f$  dans la base  $B'$   $A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$   
ou appelle  $S$  la matrice de passage de  $B$  à  $B'$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = S$$

$$A' = S^{-1} A S \Rightarrow A = S A' S^{-1} = S A' \frac{1}{9} S$$

$$A = S \boxed{\frac{A'}{9}} S = S \boxed{D} S \Rightarrow \boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$A^2 = A \times A = S D \boxed{S \cdot S} D S = S D \underset{9I}{9I} D S = 9 S D^2 S = 9 S I S$$

$$A^2 = 9 S^2 = 9 \times 9 I = 81 I$$

$$\boxed{A^2 = 81 I}$$

B ①

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

↳ système (SD), decouplé  $X'(t) = A X(t)$

$$\textcircled{2} U(t) = S X(t) \quad U'(t) = S X'(t) = \underbrace{S A}_{SDS} X(t)$$

$$= S^2 D S X(t)$$

$$= \underbrace{SD}_{SD} (S X(t)) = SD U(t)$$

$$U'(t) = \begin{pmatrix} -g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} U(t) \Leftrightarrow \begin{cases} u'(t) = -g u(t) \\ v'(t) = g v(t) \\ w'(t) = g w(t) \end{cases}$$

Espace propre pour  $-9$  :  $E_{-9} = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{u}) = -9\vec{u} \right\}$ .

$$f(\vec{u}) = -9\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -9 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7x - 4y - 4z = -9x \\ 4x + y - 8z = -9y \\ -4x - 8y + z = -9z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x - 4y - 4z = 0 \\ -4x + 10y - 8z = 0 \\ -4x - 8y + 10z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4l_2 + l_1 \\ 4l_3 + l_1 \end{cases} \begin{cases} 16x - 4y - 4z = 0 \\ 0x + 36y - 36z = 0 \\ 0x - 36y + 36z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y - z = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x - 4y - 4z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x - 8y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

avec  $x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow z = 2$   $\vec{v}' = (1, 2, 2)$

Espace propre pour  $9$  :