

$$\textcircled{8} \quad f(x,y) = \frac{\sin^2(x^2-2y)}{1-\cos(x^2-2y)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = ?$$

$$g(x,y) = x^2 - 2y$$

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2 - 2y \end{array} \right. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0.$$

$$h \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{1-\cos(t)} \end{array} \right.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + o(t^2)}{1 - [1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)]} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(1+o(1))}{t^2(\frac{1}{2} + o(1))}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$f(x,y) = h[g(x,y)]$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 2$$

$$\textcircled{13} \quad f(x,y) = \frac{\sin(2x-y)}{x^2+1} \quad \text{est-elle continue sur } \mathbb{R}^2 ?$$

f est continue sur \mathbb{R}^2 comme composée, somme et quotient (dont le dén ne s'annule pas) de fonctions continues.

(21) $f(x, y) = g(x^2 - 2y)$ où g est une fonction dérivable de \mathbb{R} vers \mathbb{R}

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(x^2 - 2y) \cdot 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = g'(x^2 - 2y) \cdot (-2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \sin(x^2 - 2y) = \cos(x^2 - 2y) \cdot 2x \right)$$

(23) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$ et $t \mapsto f(\sin(2t), \ln(t^2 + 1))$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\sin(2t), \ln(t^2 + 1)) \cdot 2\cos(2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sin(2t), \ln(t^2 + 1)) \cdot \frac{1}{t^2 + 1} \cdot 2t$$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$$

Exkama

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{x^2-y^2} + (x^2+y^2)e^{x^2-y^2} \cdot (2x) = e^{x^2-y^2} \cdot 2x \cdot (1+x^2+y^2) = e^{x^2-y^2} (2x + 2x^3 + 2xy^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y e^{x^2-y^2} + (x^2+y^2)e^{x^2-y^2} \cdot (-2y) = e^{x^2-y^2} 2y (1-x^2-y^2) = e^{x^2-y^2} (2y - 2x^2y - 2y^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 1-x^2-y^2=0 \Rightarrow 1-y^2=0 \\ y=\pm 1 \end{cases}$$

3 candidats A(0,0) B(0,1) et (0,-1)

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x^2-y^2} \cdot 2x (2x + 2x^3 + 2xy^2) + e^{x^2-y^2} (2 + 6x^2 + 2y^2) = e^{x^2-y^2} (2 + 10x^2 + 2y^2 + 4x^4 + 4x^2y^2)$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2xy e^{x^2-y^2} (2x + 2x^3 + 2xy^2) + e^{x^2-y^2} \cdot 4xy = e^{x^2-y^2} (-4x^3y - 4xy^3)$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2y e^{x^2-y^2} (2y - 2x^2y - 2y^3) + e^{x^2-y^2} (2 - 2x^2 - 6y^2) = e^{x^2-y^2} (2 - 2x^2 - 10y^2 + 4x^2y^2 + 4y^4)$$

	A(0,0)	B(0,1)	C(0,-1)
r	2	4e ⁻¹	4e ⁻¹
s	0	0	0
t	2	-4e ⁻¹	-12e ⁻¹
s ² -4t	-4	16e ⁻² > 0	> 0
	Mini	COL	COL

Exo 2. $y = \frac{1}{x}$



$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{t} \end{cases} \quad M(t, \frac{1}{t})$$

$\Omega(a, b)$ est le centre du cercle (C) qui passe par et qui est tangent à $M(t, \frac{1}{t})$

(1a) vecteur tangent $\vec{v} = (1; -\frac{1}{t^2})$

↑
les dérivées de t et de $\frac{1}{t}$

(1b) Eq de la normale $\bar{a}(H)$ au point $M(t, \frac{1}{t})$

$\vec{N}(\frac{1}{t^2}, 1)$ est \perp à la dr(H). sa pente vaut : $\frac{1}{\frac{1}{t^2}} = t^2$.

droite : $y = t^2 x + b$. Cette droite passe par $M(t, \frac{1}{t})$

$\frac{1}{t} = t^2 \cdot t + b \Rightarrow b = \frac{1}{t} - t^3$

$$y = t^2 x + \frac{1}{t} - t^3$$

$b = t^2 a + \frac{1}{t} - t^3 \Rightarrow at^3 - bt = t^4 - 1$

$$\textcircled{2} \quad QR^2 = M \cdot R^2 \quad \vec{OR} = (a, b) \quad \|\vec{OR}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a^2 + b^2 = (a-t)^2 + (b-\frac{1}{t})^2 \quad M\vec{R} = (a-t, b-\frac{1}{t})$$

$$a^2 + b^2 = a^2 - 2at + t^2 + b^2 - 2\frac{b}{t} + \frac{1}{t^2}$$

$$0 = -2at^3 + t^4 - 2bt + 1 \quad \Rightarrow \quad at^3 + bt = \frac{1}{2}(t^4 + 1)$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} at^3 - bt = t^4 - 1 \\ at^3 + bt = \frac{1}{2}(t^4 + 1) \end{cases} \quad \begin{cases} + \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 2bt \\ -2bt \end{cases} = \frac{1}{2}(t^4 + 1) - (t^4 - 1) = -\frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{2}$$

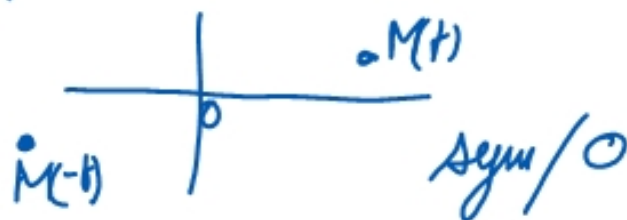
$$b = \frac{-t^4 + 3}{4t}$$

$$L, t_2: 2at^3 = t^4 - 1 + \frac{1}{2}(t^4 + 1) = \frac{3}{2}t^4 - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3t^4 - 1}{4t^3}$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{3t^4 - 1}{4t^3} \\ y(t) &= \frac{-t^4 + 3}{4t} \end{aligned} \right\}$$

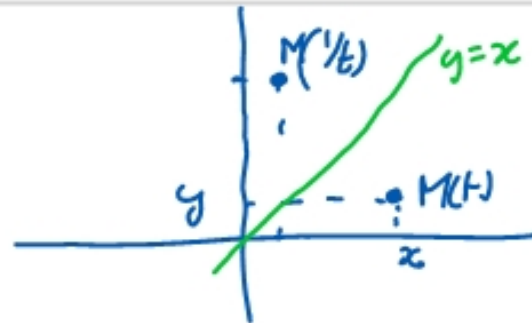
$$x(-t) = \frac{3(-t)^4 - 1}{4(-t)^3} = -\frac{3t^4 - 1}{4t^3} = -x(t)$$

$$y(-t) = -y(t)$$



$$x\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{3\left(\frac{1}{t}\right)^4 - 1}{4\frac{1}{t^3}} \cdot \frac{x t^4}{x t^4} = \frac{3 - t^4}{4t} = y(t)$$

$$y\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{-\frac{1}{t^4} + 3}{4\frac{1}{t}} \cdot \frac{x t^4}{x t^4} = \frac{3t^4 - 1}{4t^3} = x(t)$$

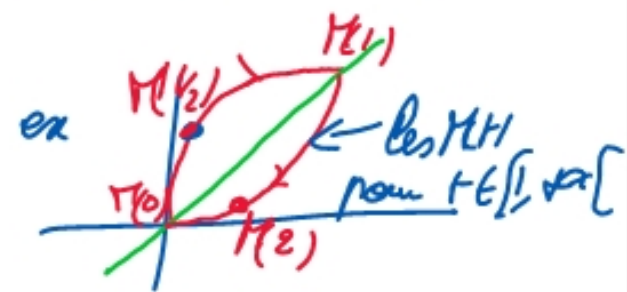


sym / $y=x$

On étudie sur $]0,1]$. On fait cette symétrie. On obtient les

points $M(t)$ pour $t \in]1; +\infty[$

On a les pts sur $]0, +\infty[$



On fait la sym / O . Si t varie de 0 à $+\infty$, alors $-t$ varie de 0 à $-\infty$

on obtient les points $M(t)$ pour $t \in]-\infty, 0[$.

On a tous les pts pour $t \in \mathbb{R}^*$

$$x(t) = \frac{3t^4 - 1}{4t^3}$$

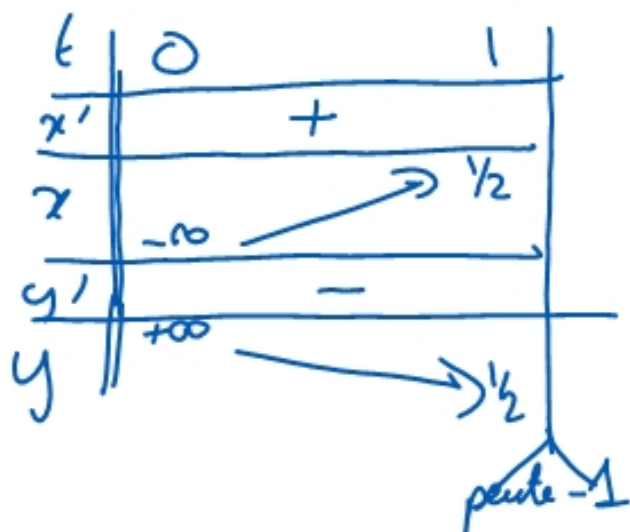
$$x'(t) = \frac{12t^3 \cdot 4t^3 - (3t^4 - 1) \cdot 12t^2}{16t^6} = \frac{48t^6 - 36t^6 + 12t^2}{16t^6}$$

$$= \frac{12t^6 + 12t^2}{16t^6} = \frac{12t^2(t^4 + 1)}{16t^2t^4} = \frac{3}{4} \frac{t^4 + 1}{t^4} > 0$$

$$y(t) = \frac{-t^4 + 3}{4t}$$

$$y'(t) = \frac{-4t^3 \cdot 4t - 4(-t^4 + 3)}{16t^2} = \frac{-16t^4 + 4t^4 - 12}{16t^2}$$

$$= \frac{-12t^4 - 12}{16t^2} = \frac{-12(t^4 + 1)}{16t^2} = -\frac{3}{4} \frac{t^4 + 1}{t^2} < 0$$

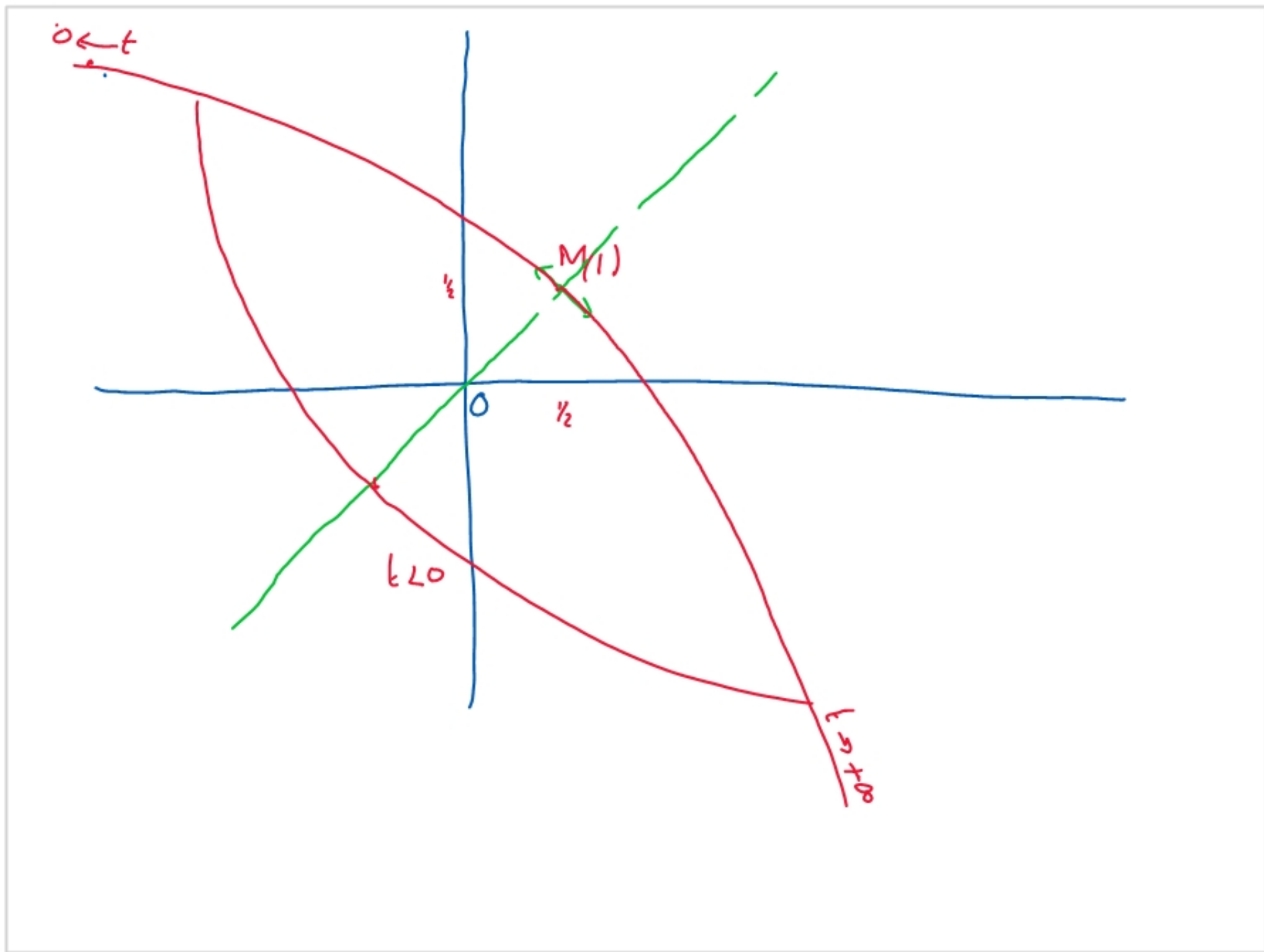


en 0: $x(0) \rightarrow \infty$ $y(t) \rightarrow \infty$ C'est une branche ∞ .
asymptote?

$$a = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^4 + 3}{4t} \cdot \frac{4t^3}{3t^4 - 1} = \frac{(-t^4 + 3)t^2}{3t^4 - 1} \rightarrow 0$$

$b = \lim_{t \rightarrow 0} y - Ox = \infty$ pas de droite asymptote

en 1: $x(1) = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$ $y(1) = \frac{1}{2}$ $x'(1) = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$ $y'(1) = -\frac{3}{4} \cdot 2 = -\frac{3}{2}$ pente = $\frac{y'(1)}{x'(1)} = -1$

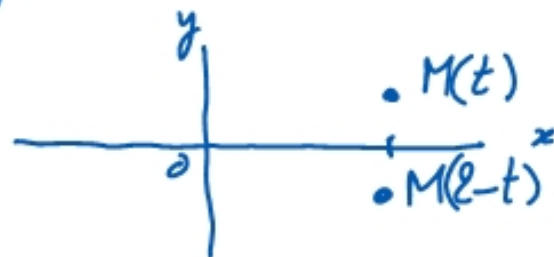


$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{t(2-t)} = \frac{1}{2t-t^2} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \\ y(t) = 2t - 2 \end{array} \right.$$

Donner les coord de $M(2-t)$

En déduire par l'étude sur $[1, +\infty[\setminus \{2\}$
+ une symétrie suffit à avoir toute la courbe

$$\left\{ \begin{array}{l} x(2-t) = \frac{1}{(2-t)(2-(2-t))} = \frac{1}{t(2+t)} = x(t) \\ y(2-t) = 2(2-t) - 2 = 4 - 2t - 2 = 2 - 2t = -y(t) \end{array} \right.$$



On étudie sur $[1, +\infty[$.

qd t varie de 1 à $+\infty$, $2-t$ varie de 1 à $-\infty$

Si on fait la symétrie / or, on obtient les pts de $-\infty$ à 1

$$x'(t) = \frac{-(2-2t)}{(2t-t^2)^2} = \frac{2t-2}{(2t-t^2)^2}$$

on a tous les points
 $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$$y'(t) = 2$$

t	1	2	$+\infty$
x'	0	+	+
x	1	$-\infty$	0
y'	2	2	2
y	0	2	$+\infty$

I
II

$y=2$
 $x=0$