



ATS 2006

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(E_1) \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$J$  appelle  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  la base canonique de  $\mathbb{C}^2$   
 $J$  appelle  $f$  l'endomorphisme tel que  
 $J = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1 = (x-i)(x+i) \quad \text{2 valeurs propres } i \text{ et } -i$$

• Calcul de  $E_i = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 / f(\vec{u}) = i\vec{u} \right\}$

$$f(\vec{u}) = i\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ix \\ -x = iy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ix + y = 0 \\ -x - iy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x : \begin{cases} -ix + y = 0 \\ \underline{ix + y = 0} \end{cases}$$

$\vec{u} = (1; i)$  convient  $E_i = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right)$

• Calcul de  $E_{-i} = \left\{ \vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 / f(\vec{v}) = -i\vec{v} \right\}$

on trouve  $E_{-i} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$   
 $\uparrow$   
 $\vec{v}$

$$\textcircled{3} \quad M^2 = (aI + bJ)^2 = a^2 I^2 + abIJ + abJI + b^2 J^2$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} = a^2 I + 2ab J + b^2 (-I) \quad \leftarrow \boxed{J^2 = -I}$$

$I$  et  $J$  commutent. On peut utiliser la formule des binômes.

$$M^3 = (aI + bJ)^3 = a^3 I^3 + 3a^2 I^2 J + 3ab^2 I J^2 + b^3 J^3$$

$$= a^3 I + 3a^2 b J - 3ab^2 I - b^3 J$$

$$= (a^3 - 3ab^2)I + (3a^2 b - b^3)J$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} a^3 - 3ab^2 & 3a^2 b - b^3 \\ -3a^2 b + b^3 & a^3 - 3ab^2 \end{pmatrix}$$

(4a) Si  $X$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  pour la matrice  $J$

alors  $JX = \lambda X$

On sait que  $M = aI + bJ$

$$MX = (aI + bJ)X = aIX + bJX = aX + b\lambda X$$

$MX = (a + b\lambda)X$ . Donc  $X$  est un vecteur propre pour  $M$   
associé à la valeur propre  $a + b\lambda$

(4b) valeurs propres  $a + ib$  avec  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  le vecteur propre associé -  
 $a - ib$  —  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  —

(4c)  $M = aI + bJ = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$   $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$  est une base de  $\mathbb{C}^2$

dans  $\mathcal{B}'$ ,  $M$  devient  $\begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix} = M' = \mathcal{P}^{-1}M\mathcal{P}$

(5)  $M^n = ?$   $M = \mathcal{P}M'\mathcal{P}^{-1}$  où  $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

$$M^n = Q M'^n Q^{-1}$$

$$\text{ou } M' = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$M'^n = \begin{pmatrix} (a+ib)^n & 0 \\ 0 & (a-ib)^n \end{pmatrix} \quad Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+ib)^n & 0 \\ 0 & (a-ib)^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+ib)^n & -i(a+ib)^n \\ -i(a-ib)^n & (a-ib)^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+ib)^n + (a-ib)^n & -i(a+ib)^n + i(a-ib)^n \\ i(a+ib)^n - i(a-ib)^n & (a+ib)^n + (a-ib)^n \end{pmatrix}$$

$$\text{II(1) } \mathcal{F} = \left\{ f \mid f = d_1 f_1 + d_2 f_2, (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- avec  $d_1 = d_2 = 0$  :  $f = 0$   $0 \in \mathcal{F}$

- Je prends  $f = d_1 f_1 + d_2 f_2$  et  $g = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2$  2 fonctions de  $\mathcal{F}$



$$f+g = (d_1 f_1 + d_2 f_2) + (p_1 f_1 + p_2 f_2) = (d_1 + p_1) f_1 + (d_2 + p_2) f_2 \in \mathcal{F}$$

donc  $\mathcal{F}$  est stable pour +

• Je prends  $a \in \mathbb{R}$  et  $f = d_1 f_1 + d_2 f_2 \in \mathcal{F}$

$$af = a(d_1 f_1 + d_2 f_2) = ad_1 f_1 + ad_2 f_2 \in \mathcal{F}$$

donc  $\mathcal{F}$  est stable pour  $\cdot$

$\mathcal{F}$  est un sev de l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

$\mathcal{F}$  est un espace vectoriel

② •  $\mathcal{F} = \text{Vect}(f_1; f_2)$  donc,  $(f_1, f_2)$  est génératrice

• Si  $a f_1 + b f_2 = 0$  alors  $a \cos(\beta x) e^{\alpha x} + b \sin(\beta x) e^{\alpha x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \cancel{e^{\alpha x}} (a \cos(\beta x) + b \sin(\beta x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

pour  $x=0$ :  $a \times 1 + b \times 0 = 0 \Rightarrow \underline{a=0}$  . En  $x = \frac{\pi}{2\beta}$   $b=0$

donc  $(f_1, f_2)$  est une base de  $\mathbb{F}$

③  $\dim(\mathbb{F}) = 2$  (def: La dimension d'un espace est le nombre de vecteurs formant une base)

④  $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$   
 $f \mapsto f'$   
 $f$  va de  $\mathbb{F}$  dans  $\mathbb{F}$ .  
Montrons que  $f$  est linéaire

Je prends  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$  et  $f$  et  $g \in \mathbb{F}$

$$f(af + bg) = (af + bg)' = af' + bg' = a f'(f) + b f'(g) \quad \underline{f \text{ est linéaire}}$$

$f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{F}$

$$f_1(x) = \cos(\beta x) e^{\alpha x} \text{ et } f_2(x) = \sin(\beta x) e^{\alpha x}$$

⑤  $M = \begin{pmatrix} f(f_1) & f(f_2) \\ \text{dans } \mathcal{B} & \text{dans } \mathcal{B} \end{pmatrix}$

$$f(f_1) = f_1' = (\cos(\beta x) e^{\alpha x})' = -\beta \sin(\beta x) e^{\alpha x} + \alpha \cos(\beta x) e^{\alpha x}$$

$$f(f_1) = \alpha f_1 - \beta f_2$$

$$f(f_2) = f_2' = \beta \cos(\beta x) e^{\alpha x} + \alpha \sin(\beta x) e^{\alpha x} = \beta f_1 + \alpha f_2$$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \text{ car } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0$$

donc  $M$  est inversible.  $f$  est bijective

$$M^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

⑩ Une primitive de  $4\cos(3x)e^{4x} - 3\sin(3x)e^{4x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$  est

$$\text{où } \mathcal{B} = (\mathcal{b}_1, \mathcal{b}_2) \\ \beta = 3 \text{ et } \alpha = 4$$

$$M^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{25} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \mathcal{b}_1 = \cos(3x)e^{4x}$$

$$\int_0^{\pi/2} (4\cos(3x)e^{4x} - 3\sin(3x)e^{4x}) dx = [\cos(3x)e^{4x}]_0^{\pi/2} = -1$$

ATS 2006  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(\*)  $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

J'appelle  $B = (i, j)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^2$   
 J'appelle  $f$  l'endomorphisme tel que  
 $J = \text{Mat}_B(f)$

(2)  $\begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$  2 valeurs propres  $i$  et  $-i$

• Calcul de  $E_i = \{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 / f(\vec{u}) = i\vec{u} \}$

$f(\vec{u}) = i\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ix \\ -x = iy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ix + y = 0 \\ -x - iy = 0 \end{cases}$

$\leftarrow i/2 \begin{cases} -ix + y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$

$\vec{u} = (1; i)$  convient  $E_i = \text{Vect}(\vec{u})$

• Calcul de  $E_{-i} = \{ \vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 / f(\vec{v}) = -i\vec{v} \}$

$\begin{cases} y = -ix \\ -x = -iy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ix + y = 0 \\ -x + iy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + iy = 0 \\ -x + iy = 0 \end{cases}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_{-i} = \text{Vect}(\vec{v})$



$$\textcircled{3} \quad M^2 = (aI + bJ)^2 = a^2 I^2 + abIJ + abJI + b^2 J^2 \quad \begin{array}{l} J^2 = -I \\ IJ = JI = J \end{array}$$

$$= a^2 I + 2abJ + b^2(-I)$$

$$= (a^2 - b^2)I + 2abJ$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

$I$  et  $J$  commutent. On peut utiliser la formule du binôme.

$$M^3 = (aI + bJ)^3 = a^3 I^3 + 3a^2 I^2 bJ + 3ab^2 I \underbrace{J^2}_{-I} + b^3 \underbrace{J^3}_{-J}$$

$$= a^3 I + 3a^2 b J - 3ab^2 I - b^3 J$$

$$= (a^3 - 3ab^2)I + (3a^2 b - b^3)J$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} a^3 - 3ab^2 & 3a^2 b - b^3 \\ -3a^2 b + b^3 & a^3 - 3ab^2 \end{pmatrix}$$

remarque

(4a) Si  $X$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  pour la matrice  $J$

alors  $\underline{JX = \lambda X}$

On sait que  $M = aI + bJ = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$$MX = (aI + bJ)X = aIX + bJX = aX + \underline{b\lambda X}$$

$MX = (a + b\lambda)X$ . Donc  $X$  est un vecteur propre pour  $M$   
associé à la valeur propre  $a + b\lambda$

(4b) valeurs propres  $a + ib$  avec  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  le vecteur propre associé  
et  $a - ib$  —  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  —

(4c)  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$B' = (\vec{u}, \vec{v})$  est une base de  $\mathbb{C}^2$

dans  $B'$ ,  $M$  devient  $\begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix} = M' = P^{-1}MP$

où  $P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

$$\textcircled{5} M = P M' Q^{-1}$$

$$\Rightarrow M^n = Q M'^n Q^{-1}$$

$$M' = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$M'^n = \begin{pmatrix} (a+ib)^n & 0 \\ 0 & (a-ib)^n \end{pmatrix} \quad Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+ib)^n & 0 \\ 0 & (a-ib)^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+ib)^n & -i(a+ib)^n \\ -i(a-ib)^n & (a-ib)^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+ib)^n + (a-ib)^n & -i(a+ib)^n + i(a-ib)^n \\ i(a+ib)^n - i(a-ib)^n & (a+ib)^n + (a-ib)^n \end{pmatrix}$$

$$\# \textcircled{1} \mathcal{F} = \{ f / f = d_1 f_1 + d_2 f_2, (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 \}$$

• avec  $d_1 = d_2 = 0$   $f = 0$   $0 \in \mathcal{F}$

• Je prends  $f = d_1 f_1 + d_2 f_2$  et  $g = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2$  2 fonctions de  $\mathcal{F}$ .

$$f+g = (d_1 b_1 + d_2 b_2) + (\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2) = (d_1 + \mu_1) b_1 + (d_2 + \mu_2) b_2 \in \mathcal{F}$$

donc  $\mathcal{F}$  est stable pour +

• Je prends  $a \in \mathbb{R}$  et  $f = d_1 b_1 + d_2 b_2 \in \mathcal{F}$

•  $a f = a (d_1 b_1 + d_2 b_2) = a d_1 b_1 + a d_2 b_2 \in \mathcal{F}$

donc  $\mathcal{F}$  est stable pour  $\cdot$

$\mathcal{F}$  est un s.e.v. de l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

$\mathcal{F}$  est un espace vectoriel

②



$$\textcircled{4} \quad f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} \\ b \mapsto b'$$

$f$  va de  $\mathbb{F}$  dans  $\mathbb{F}$   
 Montrons que  $f$  est linéaire

Je prends  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$  et  $f$  et  $g \in \mathbb{F}$

$$f(a f + b g) = (a f + b g)' = a f' + b g' = a f + b g \quad \text{f est linéaire}$$

$f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{F}$

$$\textcircled{5} \quad M = \begin{pmatrix} \text{coord de } f(b_1) & \text{coord de } f(b_2) \\ \text{dans } \mathcal{B} & \text{dans } \mathcal{B} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$f(b_1) = b_1' = (\cos(\beta x) e^{\alpha x})' = -\beta \sin(\beta x) e^{\alpha x} + \alpha \cos(\beta x) e^{\alpha x}$$

$$f(b_1) = \alpha b_1 - \beta b_2$$

$$f(b_2) = b_2' = \beta \cos(\beta x) e^{\alpha x} + \alpha \sin(\beta x) e^{\alpha x} = \beta b_1 + \alpha b_2$$