

exercice

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \times 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N_1^2 = 0$, donc N_1 est nilpotente

$$B_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{donc } B_1 \text{ est } \underline{\text{Nilpotente}}$$

$$C_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3C_1$$

$$C_1^3 = 3C_1 \times C_1 = 3 \times 3C_1 = 9C_1$$

$$C_1^4 = 9C_1 \times C_1 = 27C_1$$

\forall semble

$$\underline{C_1^n = 2^{n-1} C_1} \neq 0, \text{ donc } C_1 \text{ n'est pas nilpot}$$

$$(2) \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \Delta_1 + N_1 \quad \text{ok}$$

Δ_1 est diagonalisable car diagonale

N_1 est nilpotente

$$\Delta_1 N_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N_1 \Delta_1$$

donc (Δ_1, N_1) est une
décomposition de Dunford
de A_1

$$(3) \quad \Delta_2 \cdot N_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq$$

$$N_2 \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc (Δ_2, N_2) n'est pas
.....

$$(4) \quad A_3 = \underbrace{A_3}_{\Delta} + \underbrace{0}_{N}$$

Δ est diagonalisable
 0 est nilpotente

$$\Delta N = 0 = N \Delta$$

⑤ $A_4 = 0 + A_4$ $0 \times A_4 = A_4 \times 0 = 0$

\uparrow diagonale \nwarrow nilpotente

⑥ Si $(\Delta, N) \dots \dots A = \Delta + N$

$\Delta N = N \Delta$

$\Delta \cdot A = \Delta(\Delta + N) = \Delta^2 + \Delta N$

$A \cdot \Delta = (\Delta + N)\Delta = \Delta^2 + N\Delta$

$\Rightarrow \Delta A = A \Delta$

commute avec N

$N \cdot A = N(\Delta + N) = N\Delta + N^2 =$
 $A N = (\Delta + N)N = \Delta N + N^2 =$

⑦ $\det(\Delta) = \dots = 16 \neq 0$, donc Δ est inversible

$$\textcircled{7} \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ -1 & 3-x & 1 \\ -1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x) [(3-x)^2 - 1]$$

$$= (2-x) [(3-x-1)(3-x+1)] = (2-x)^2 (4-x)$$

J'appelle $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de \mathbb{R}^3

J'appelle f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de $\Delta = \text{Mat}_B(f)$

Espace propre $E_2 = \{ \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{u}) = 2\vec{u} \}$

$$\Delta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -x + y + z = 0 \quad \text{lin } 2$$

on choisit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par exemple

$$E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P = P_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ B & B & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = P^{-1}AP$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta = PDP^{-1} \Rightarrow \Delta^i = P D^i P^{-1}$$

$$\Delta^i = P \begin{pmatrix} \lambda^i & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^i & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^i \end{pmatrix} P^{-1} = \dots \quad \text{OK}$$

$$\textcircled{8} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N^2 = O \quad \text{OK}$$

$$\Delta N = N \Delta = \varepsilon N \quad \text{OK}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc|c} 3-x & -1 & 1 & \\ 0 & 2-x & 2 & \\ -1 & 1 & 3-x & \end{array} \begin{array}{l} L_1 + L_3 \\ L_2 \times 2 \end{array} = \begin{array}{ccc|c} 2-x & 0 & 4-x & \\ 0 & 2-x & 2 & \\ -1 & 1 & 3-x & \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccc|c} 2-x & 0 & 0 & \\ 0 & 2-x & 2 & \\ -1 & 1 & 3-x & \end{array} \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \times 2 \end{array} = \begin{array}{ccc|c} 2-x & 0 & 0 & \\ 0 & 2-x & 0 & \\ -1 & 1 & 3-x & \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \dots = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16 = P(\lambda)$$

$$P(2) = -8 + 32 - 40 + 16 = 0$$

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16 \quad | \quad \lambda - 2$$

\cdot
 \circ

second degré

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 4)$$

\uparrow \uparrow
 ? E_4 est de dim 1

Calcul de E_2 = $\left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} / A\vec{u} = 2\vec{u} \right\}$

... E_2 est une droite

$\dim(E_2) \neq$ multiplicité de 2

donc A n'est pas diagonalisable

$N\Delta = 2N$ \forall par récurrence que $N\Delta^i = 2^i N$

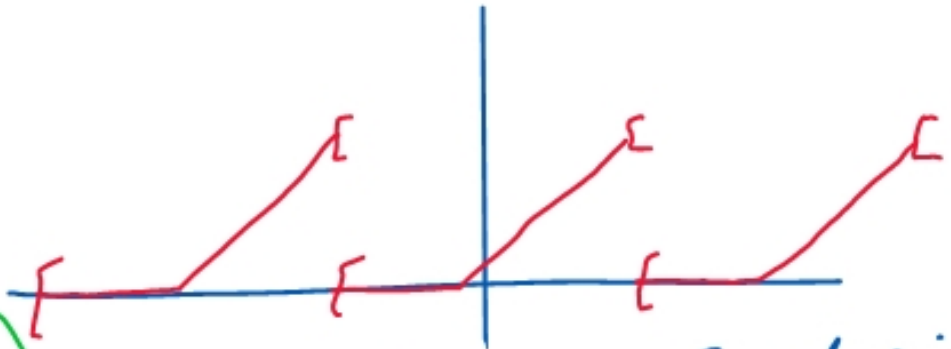
• pour $n=1$: $N\Delta = 2N$ ok

• Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que $N\Delta^i = 2^i N$

On \times par Δ : $N\Delta^{i+1} = 2^i (N\Delta) = 2^i \cdot 2N = 2^{i+1} N$

FIN

$$N\Delta^{i+1} = 2^{i+1} N$$



$$a_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} = \begin{cases} 0 & \text{qd } n \text{ pair} \\ -\frac{2}{n^2 \pi} & \text{qd } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

T de DIRICHLET : f est de classe C^1 par morceaux et positive, donc $S_f(x)$ CV vers $\frac{f(x-1) + f(x+1)}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
 (Si f est continue en x , alors $S_f(x) = f(x)$)

(3) DIRICHLET : pour $x=0$ $S_f(0) = f(0)$ (car f est continue en 0)

$$S_f(0) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n \cdot 0) + b_n \frac{\sin(n \cdot 0)}{0} \right) = f(0) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n \text{ impair}} -\frac{2}{n^2 \pi} = 0 \quad \Leftrightarrow \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ATS 2008

$$y^2 = 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x(u) = u^2 \\ y(u) = 2u \end{cases}$$

(1a) $\vec{T}(u) = \begin{pmatrix} x'(u) \\ y'(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \\ 2 \end{pmatrix}$ pente = $\frac{2}{2u} = \frac{1}{u}$

(1b) $\vec{n}(u)$ est \perp à $\vec{T}(u)$ Rappel : Un vecteur \perp à $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

ici $\vec{n}(u) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2u \end{pmatrix}$

(1c) $y = ax + b$ $T(u): y = \frac{1}{u}x + b$
 pente = $\frac{2}{2u} = \frac{1}{u}$ (Cela passe par $M(u) \begin{pmatrix} u^2 \\ 2u \end{pmatrix}$)

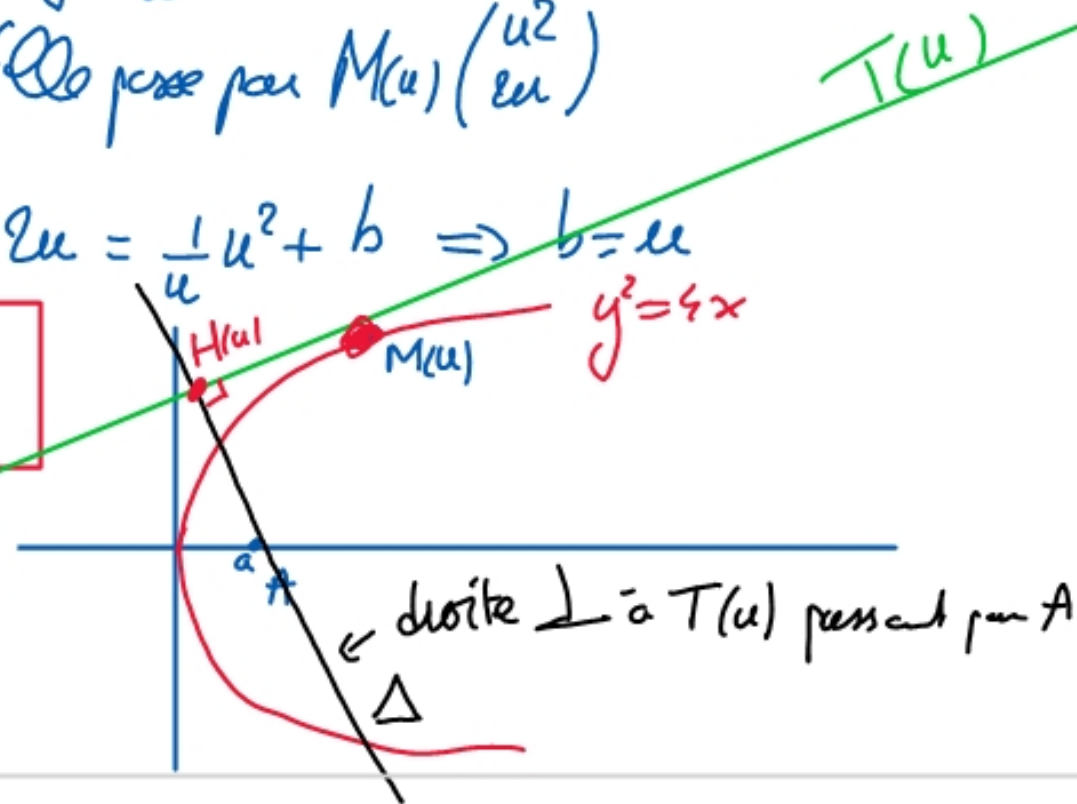
$$\Rightarrow 2u = \frac{1}{u}u^2 + b \Rightarrow b = u$$

$T(u): y = \frac{1}{u}x + u$

Un vect directeur de Δ est $\vec{n}(u) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2u \end{pmatrix}$

la pente de Δ vaut $-u$

$\Delta: y = -ux + b$



droite \perp à $T(u)$ passant par A

Δ passe par $A(a,0)$, donc $y_A = -u x_A + b$ $0 = -ua + b \Rightarrow b = ua$

$$\Delta: \boxed{y = -ux + ua}$$

H est l'intersection de Δ et $T(u)$:

$$\begin{cases} T(u) & y_H = \frac{1}{u} x_H + u \\ \Delta & y_H = -u x_H + ua \end{cases}$$

$$l_1 - l_2 \cdot 0 = \left(\frac{1}{u} + u\right) x_H + u - ua$$

$$0 = \frac{u^2 + 1}{u} x_H + u(1-a) \Rightarrow \frac{u^2 + 1}{u} x_H = u(a-1)$$

$$\boxed{x_H = \frac{u^2(a-1)}{u^2+1}}$$

$$l_2: y_H = -u \frac{u^2(a-1)}{u^2+1} + ua$$

$$= \frac{-u^3(a-1) + ua(u^2+1)}{u^2+1} = \frac{-\cancel{u^3}a + \cancel{u^3} + \cancel{u^3} + ua}{u^2+1}$$

$$\boxed{y_H = \frac{u^3 + ua}{u^2+1}} = \frac{u(u^2+a)}{u^2+1}$$

⑤ $X(u) = \frac{-u^2}{u^2+1}$ *paire* Etude

$Y(u) = \frac{u^3}{u^2+1}$ *impair*

$X'(u) = \frac{-2u(u^2+1) - (-u^2)(2u)}{(u^2+1)^2} = \frac{-2u}{(u^2+1)^2} < 0 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}$
 \rightarrow décroît en 0

$Y'(u) = \frac{3u^2(u^2+1) - u^3 \cdot 2u}{(u^2+1)^2}$



Etude sur \mathbb{R}^+ symétrie

$Y'(u) = \frac{u^4 + 3u^2}{(u^2+1)^2} = \frac{u^2(u^2+3)}{(u^2+1)^2} > 0$
 \rightarrow croît en 0

u	0	$+\infty$
$X'(u)$	0	-
$X(u)$	0	$\rightarrow -1$
$Y'(u)$	0	+
$Y(u)$	0	$\rightarrow +\infty$

asymptote $X = -1$

en 0 : $X'(0) = Y'(0) = 0$ Zet
 pt singulier

la pente vaut $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{Y'(u)}{X'(u)} = p$

$p = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2(u^2+3)}{(u^2+1)^2} \times \frac{u^2+1}{-2u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u(u^2+3)}{-2} = 0$



