

alles

① D.S.E. de $\sin x$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ (rayon } \infty)$$

② DL de $\sin x$ à l'ordre 5
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

③ Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{2n}}{(2n)!} = \cos(3)$

④ def de la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}'

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \text{Coord de } \vec{u} \text{ dans } \mathcal{B} & \text{Coord de } \vec{v} \text{ dans } \mathcal{B} & \text{Coord de } \vec{w} \text{ dans } \mathcal{B} \end{pmatrix} \text{ où } \mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

⑤ dérivées de $\tan x$

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

ex 24 $\delta\omega = (e^y + ye^x)dx + (xe^y + e^z)dy$ est-elle totale exacte
 (peut-on trouver f telle que $df = \delta\omega$?)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$P = e^y + ye^x \quad Q = xe^y + e^z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y + e^z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = e^y + e^z$$

Les dérivées croisées sont égales ($\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$),
 donc on peut intégrer.

C'est une forme diff totale exacte

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = e^y + ye^x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + e^z \end{array} \right. \Rightarrow f(x,y) = xe^y + ye^x + g(y) \quad \leftarrow \uparrow \underline{g(y)} \text{ au lieu de } \underline{cte}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + e^z + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = cte$$

$$f(x,y) = xe^y + ye^x + cte$$

$$\text{ex 25: } \oint \omega = \underbrace{(x^2 + xy)}_P dx + \underbrace{(y + x^2 y)}_Q dy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{On ne peut intégrer}$$

$$\text{ex 26: } \oint \omega = \underbrace{(x^2 + xy)}_P dx + \underbrace{(y + \frac{x^2}{2})}_Q dy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = x \quad \text{On peut intégrer} \quad \oint \omega = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y + \frac{x^2}{2} \end{array} \right. \Rightarrow f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}y + \underbrace{g(y)}_{\text{(cste)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + g'(y) \Rightarrow g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2} + \text{cste}$$

$$\text{donc } \boxed{f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}y + \frac{y^2}{2} + \text{cste}}$$

VI Recherche d'extrema

Rappel: Notation de Moivre: $r = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(A)$ $s = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y}$ $t = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}$

Rappel: Taylor à l'ordre 2 pour $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + o((x-a)^2)$$

TAYLOR ORDRE 2 en (a,b) pour $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) \right. + \left. \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2 \right] + \text{reste}$$

Rappel: $z = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)$
est l'éq. du plan tangent

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dots \right]$$

] donne la position de la surface par rapport au plan tangent

On veut le signe de $\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 \right]$

$$\begin{aligned} [\dots] &= (y-b)^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(a,b) \left(\frac{x-a}{y-b} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(a,b) \frac{x-a}{y-b} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(a,b) \right] \\ &= (y-b)^2 \left[r X^2 + 2s X + t \right] \end{aligned}$$

$$\text{où } X = \frac{x-a}{y-b}$$

On veut le signe du polynôme $Q(X) = rX^2 + 2sX + t$

$$\Delta = 4s^2 - 4rt = 4(s^2 - rt)$$

Si $s^2 - rt > 0$, il y a 2 racines \neq , donc $[\dots]$ change de signe
la surface traverse le plan tangent

Si $s^2 - rt < 0$, alors, $[\dots]$ est du signe de r

si $r > 0$, alors $[\dots] > 0$, la surface est au dessus du plan tangent

si $\kappa < 0$, alors $[-] < 0$, la surface est en dessous du plan tangent

ex 1 $f(x,y) = xy$. Trouver les extrema de f (les 2 dérivées partielles)
sannubut

$$\text{on veut: } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

le seul candidat $A(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 = r$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 = s$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 = t$$

$$\Delta^2 = rt = 1$$

c'est un col
ou
un point selle

ex 2 $f(x,y) = x^2 + y^2$ Exkéma? $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

Les candidats vérifient $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ Un seul candidat: $A(0,0)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 = r$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = s$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 = t$

$\Delta = s^2 - rt = -4$ $[\dots]$ est du signe de r : $[\dots] > 0$

La surface est au dessus du plan tangent. C'est un minimum

Exkéma: les candidats sont donnés par le système $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Si $s^2 - rt > 0$, c'est un point col

Si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, c'est un minimum

Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$, c'est un maximum

ex 3 $f(x,y) = x e^y + y e^x$ Extrema?

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^y + y e^x = 0 \\ x e^y + e^x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x e^y + x y e^x = 0 \\ x e^y + e^x = 0 \end{cases} \Rightarrow x y e^x = e^x$$

$$\Downarrow$$

$$x y = 1$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$x e^{\frac{1}{x}} + e^x = 0$$

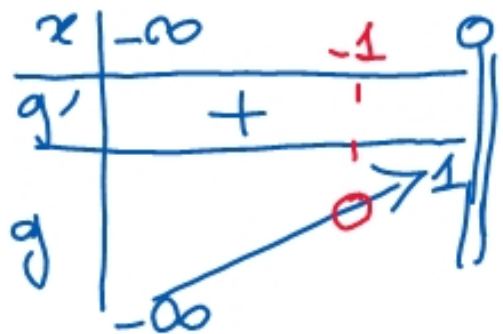
$> 0 + > 0 \Rightarrow x < 0$

$$g(x) = x e^{\frac{1}{x}} + e^x$$

on étudie g sur \mathbb{R}^{-*}

$$g'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + e^x = e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} + e^x > 0$$

$> 0 \quad > 0 \quad > 0$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} + e^x = 0 \times e^{-\infty} + 1 = 0 \times 0 + 1 = 1$$

$$g(-1) = -1 e^{-1} + e^{-1} = 0$$

g est strict^t croissante,
continue, de $-\infty$ à 1.

Elle s'annule
une seule fois

Um seul candidat $A(-1, -1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + ye^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^x$$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -e^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^y + e^x$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, -1) = e^{-1} + e^{-1} = 2e^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^y$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -1) = -e^{-1}$$

$$\Delta = r^2 - st = 4e^{-2} - e^{-2} = 3e^{-2} > 0$$

criticum point col