

ex2: $f(P, V) = \ln(P+3V)$

(rappel: $\ln(u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$)

$$\frac{\partial f}{\partial P} = \frac{1}{P+3V}$$

$$\frac{\partial f}{\partial V} = \frac{1}{P+3V} \cdot 3 = \frac{3}{P+3V}$$

ex3: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ qd $(x, y) \neq (0, 0)$
 $(0, 0) \mapsto 0$

pour $(x, y) \neq (0, 0)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y \cdot (x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y + y^3 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$

et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - y^2x}{(x^2+y^2)^2}$

pour $(x, y) = (0, 0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = f'(t, 0) = 0' = 0$

$f(t, 0) = \begin{cases} \frac{tx \cdot 0}{t^2} = 0 & \text{qd } t \neq 0 \\ 0 & \text{qd } t = 0 \end{cases}$

de m $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$

Reque: f admet des dérivées partielles pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
et f n'est pas continue en $(0, 0)$!!

⚠ pour $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable \Rightarrow continue
pour les fonctions de plusieurs variables NOTV

ex 4: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(r, \theta) \mapsto (\underbrace{r \cos \theta}_{b_1}, \underbrace{r \sin \theta}_{b_2})$

$$\frac{\partial b_1}{\partial r} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial \theta} = -r \sin \theta$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial r} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Matrice Jacobienne de f

def: $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. Sa matrice Jacobienne se note:

$$\vec{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p} \right)$$

ex: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto 2x^2y + 3z$

$$\vec{\text{grad}}(f) = (6x^2y; 2x^2; 3)$$

IV Fonctions de classe C^1

def: $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} lorsque
 $\forall A \in \mathbb{R}^p$, les dérivées partielles $x \in A$ existent ^{et} sont continues
de f

[N₁]: Si f est de classe C^1 , alors f est continue

Taylor à l'ordre 1 ^{en a} pour $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
eq de la tge en a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Taylor à l'ordre 1 en (a, b) pour $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y-b) + o(x-a, y-b)$$

eq du plan tangent en (a, b) :

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y-b)$$



exemple: la sphère S a pour équation cartésienne:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y = 16. \text{ Centre et rayon?}$$

Le point $A(2; -1; 1) \in S$ car $4 + 1 + 1 + 4 + 6 = 16$

Quelle est l'éq du plan tangent à S en A ?

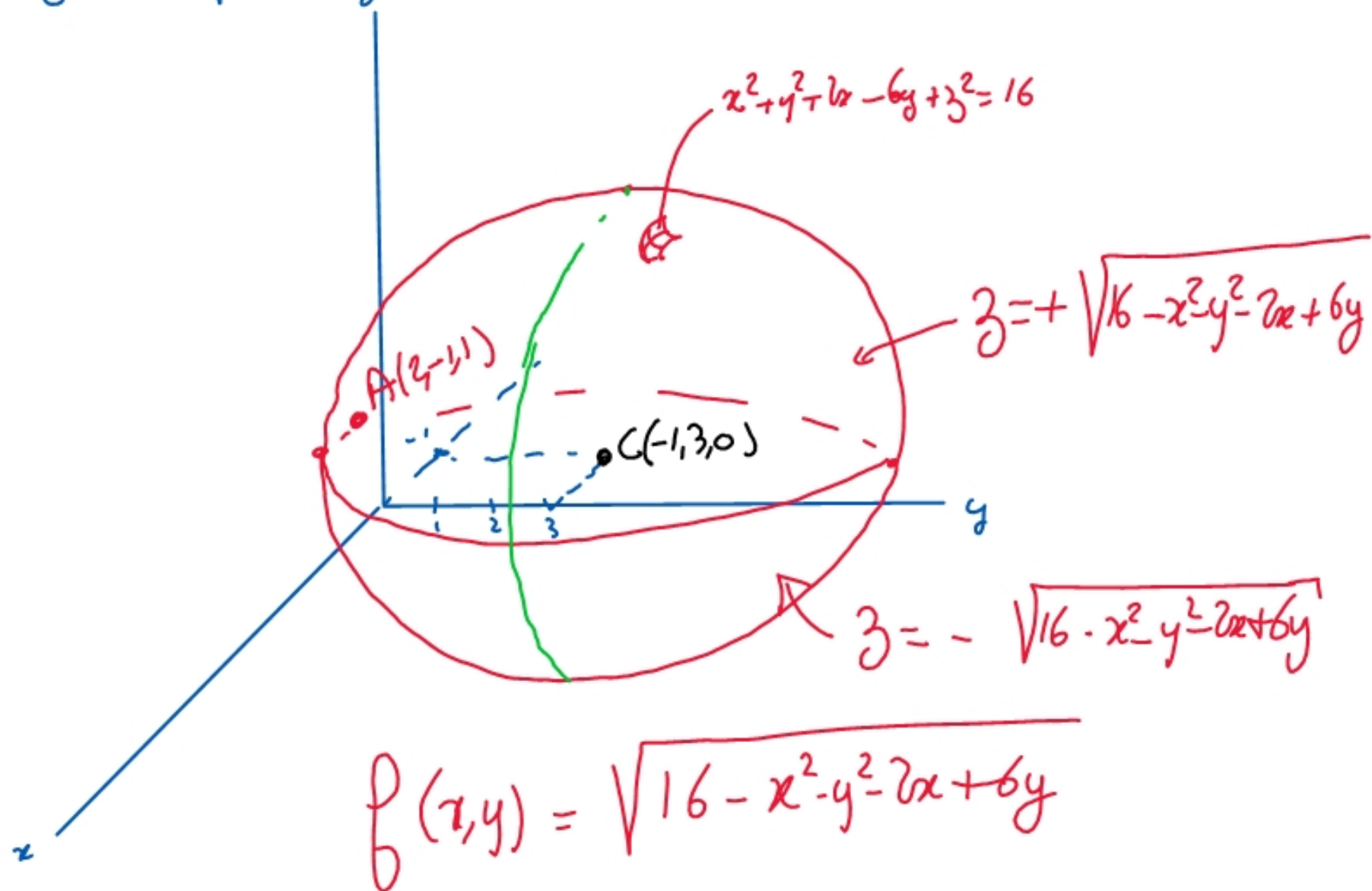
$$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \quad y^2 - 6y = (y-3)^2 - 9$$

$$S: (x+1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + z^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 26$$

centre $C = (-1, 3, 0)$ et $R = \sqrt{26}$

$$z = \pm \sqrt{16 - x^2 - y^2 - 2x + 6y}$$



$$f(x,y) = \sqrt{16-x^2-y^2-2x+6y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{16-x^2-y^2-2x+6y}} \cdot (-2x-2)$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{u})' &= (u^{1/2})' = \frac{1}{2} u^{-1/2} \cdot u' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2;-1) = \frac{-6}{2\sqrt{16-4-1-4-6}} = -3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\quad}} \cdot (-2y+6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = \frac{8}{2} = 4$$

Taylor: $f(x,y) = f(2;-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(2;-1)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2;-1)(y+1) + \mathcal{O}\left(\begin{smallmatrix} x-2 \\ y+1 \end{smallmatrix}\right)$

$$\underline{f(x,y) = 1 - 3(x-2) + 4(y+1) + \mathcal{O}(x-2, y+1)}$$

plane tangent: $z = -3x + 4y + 11$

2^{ème} méthode : $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y$

sphère : $g(x, y, z) = 16$

"on dérive" : $\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz = 0$

$$(2x+2)dx + (2y-6)dy + 2zdz = 0$$

en $A(2, -1, 1)$: $6dx - 8dy + 2dz = 0$

on relie : $6(x-2) - 8(y+1) + 2(z-1) = 0$

$$6x - 8y + 2z - 12 - 8 - 2 = 0$$

$$6x - 8y + 2z - 22 = 0$$

$$3x - 4y + z = 11$$

V Fonctions de classe C^k

def: $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ est de classe C^k sur \mathbb{R}^p lorsque $\forall A \in \mathbb{R}^p$

toutes les dérivées partielles de f à l'ordre k existent et sont continues

notions :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\partial x} = s \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial x} = r$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial y} = r \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\partial y} = t$$

) notions de Monge

\square $C^3 \Rightarrow C^2 \Rightarrow C^1 \Rightarrow$ continue

T_2 : SCHWARZ

Si f est de classe C^2 , alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

notation : La "différentielle" de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se note

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

ex : $f(x,y) = x^2 y$

$$df = \underbrace{2xy}_{\frac{\partial f}{\partial x}} dx + \underbrace{x^2}_{\frac{\partial f}{\partial y}} dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2xy) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2) = 2x$$

ex: Trouver une fonction telle que $df = 2xy dx + x^3 dy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2$$

} ≠ impossible

On ne peut pas toujours intégrer $df = P(x,y) dx + Q(x,y) dy$

def: Si on peut intégrer df , on dit que df est une forme différentielle

totale exacte
et une forme diff totale exacte

[T] $df = P(x,y) dx + Q(x,y) dy$. On peut intégrer df

lorsque $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$