

~~exercice~~

Fourier 2022

f est 2π -périodique et $f(x) = \begin{cases} 0 \sin [-\pi, 0] \\ x \sin [0, \pi] \end{cases}$

(1)



(2a)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-2\pi]} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} t dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0 dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2 \cdot 2\pi} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \dots + \int_0^{\pi} \dots \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt$$

ZPP | $u=t$ $u'=1$
 $v'=\cos(nt)$ $v = \frac{\sin(nt)}{n}$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{t \sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n} dt \right) = -\frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi n} \left[\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2} \left[\cos(n\pi) - 1 \right] = \frac{1}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right)$$

$$a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{2}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt \quad \text{ZPP} \quad \begin{cases} u=t & u'=1 \\ v'=\sin(nt) & v = -\frac{\cos(nt)}{n} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{t \cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n} dt \right) = -\frac{\pi (-1)^n}{\pi n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} = b_n$$

(2) La fonction f est de classe C^1 par morceaux et périodique, donc la série de Fourier converge $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$ (théorème DIRICHLET)
 $= f(x)$ qd f est continue en x .

(3) en 0: $S_f(0) = f(0)$ (car f est continue en 0)

$$0_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-2}{(2p+1)^2 \pi} = 0$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(5) (a) Parseval: Si f est périodique et continue par morceaux, alors

$$\frac{1}{T} \int_{[-T]} f^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

(5a)
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_1^{\infty} \left(\frac{-2}{(2p+1)^2 \pi} \right)^2}_{\sum_1^{\infty} a_n^2 \text{ pour } n \text{ impair}} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_1^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \right)^2}_{\sum b_n^2}$$

$$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \frac{4}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} + \frac{1}{2} \left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) \frac{\pi^2}{6}$$

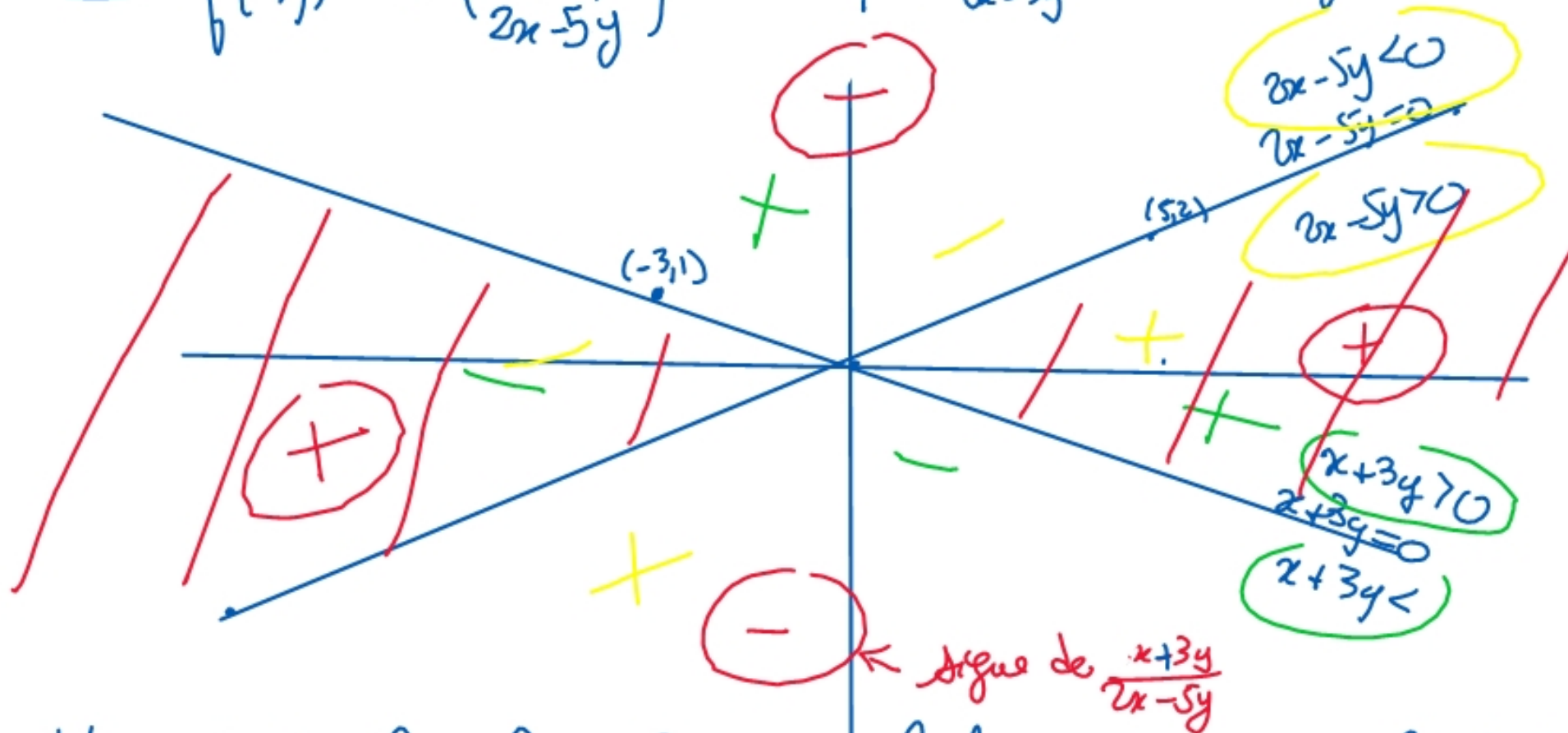
$$\frac{1}{2\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{2}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} + \frac{\pi^2}{12}$$

$$\dots \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \dots$$

Les fonctions de plusieurs variables

I. Exemples de domaines de définition de fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

ex 1 $f(x,y) = \ln\left(\frac{x+3y}{2x-5y}\right)$ Il faut $\frac{x+3y}{2x-5y} > 0$ et $2x-5y \neq 0$



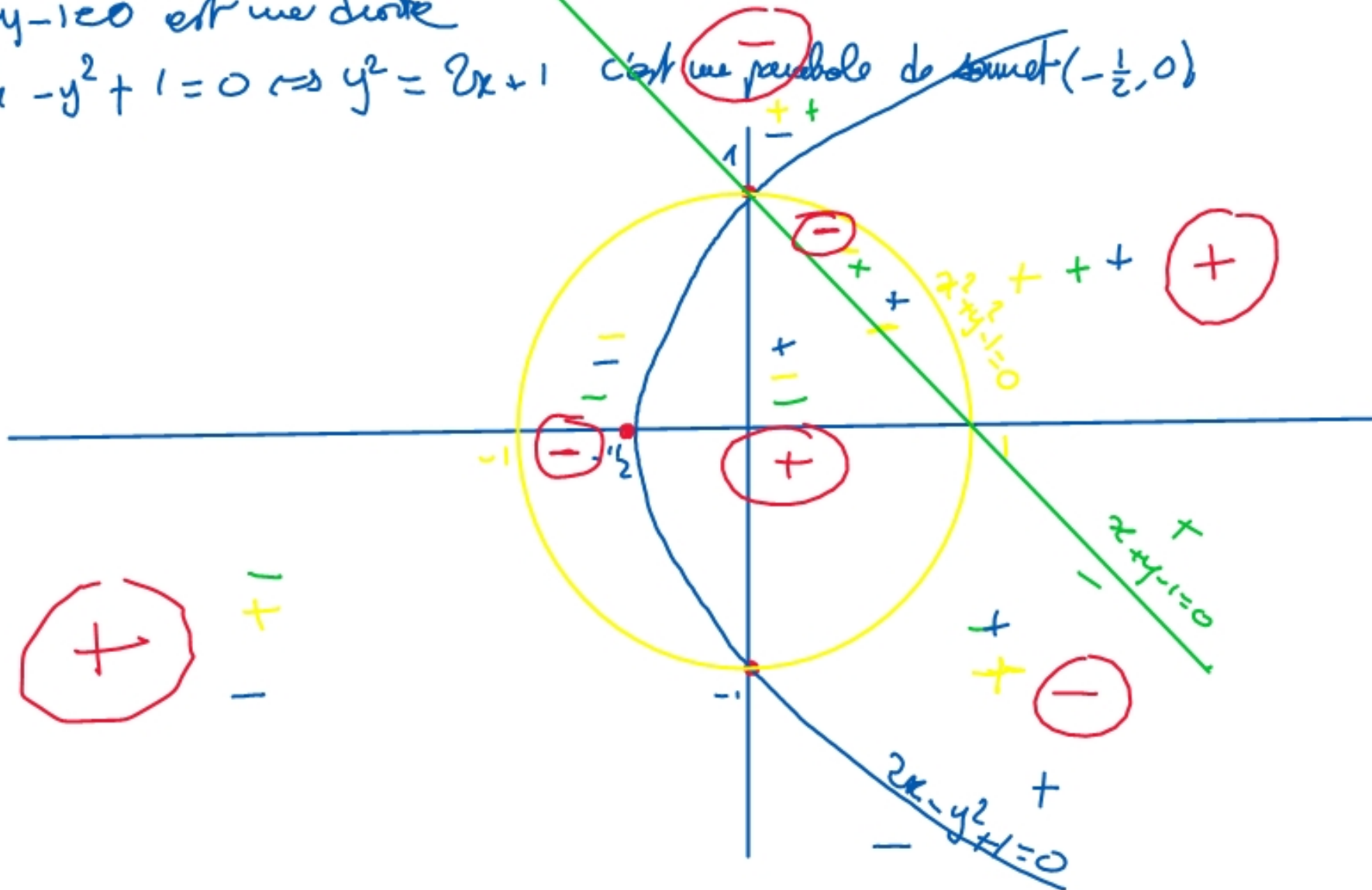
L'ensemble de def de f est la partie hachurée en rouge sous les droites

ex2
 $f(x,y) = \ln \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+y-1)(2x-y^2+1)} \right)$ On veut $\frac{x^2+y^2-1}{(x+y-1)(2x-y^2+1)} > 0$

$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ cercle de centre 0, de rayon 1

$x + y - 1 = 0$ est une droite

$2x - y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2x + 1$ c'est une parabole de sommet $(-\frac{1}{2}, 0)$



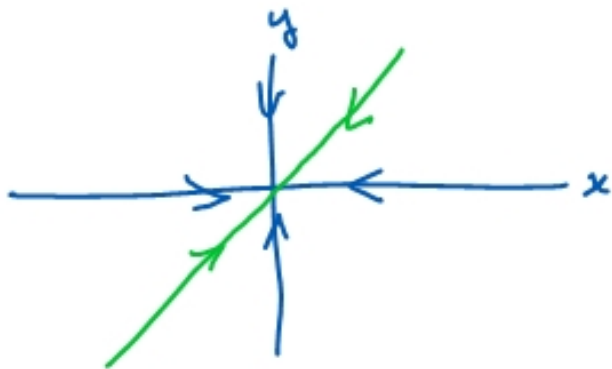
II Limites - continuité

ex: $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ Quelle est la limite en $(0,0)$?

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$



c'est le bazar

??

def: "M tend vers A" ($M \rightarrow A$) signifie que $d(A, M) \rightarrow 0$
ou $\|\vec{AM}\| \rightarrow 0$

def: "lim_{M→A} f(M) = l" signifie que "Si $d(A, M) \rightarrow 0$, alors $f(M) \rightarrow l$ "

def: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en A $\in \mathbb{R}^2$ lorsque $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A)$

$f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I lorsque

$$\forall A \in \mathbb{I}, \lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A)$$

□ La somme, le produit, le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) et la composée de fonctions continues est continue

- 3 types d'exos:
- avec la phrase magique
 - différents chemins ne donnant pas la même limite
 - avec la def. ($(x,y) \rightarrow 0$)

Remark

ex1: $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$$f(x,0) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$f(0,y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$$

$$f(x,x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

f n'est pas prolongeable par continuité en 0

ex2: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(2x-7y)}{2x-7y} & \text{quand } 2x-7y \neq 0 \\ 1 & \text{quand } 2x-7y = 0 \end{cases}$

f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

$$\text{et } h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 2x - 7y$$

$$g[h(x, y)] = g(2x - 7y) = \begin{cases} \frac{\sin(2x - 7y)}{2x - 7y} & \text{qd } 2x - 7y \neq 0 \\ 1 & \text{qd } 2x - 7y = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \underline{f = g \circ h}$$

• h est clairement continue

• si $t \neq 0$, alors g est continue comme un quotient (den $\neq 0$) de fonctions continues

• problème en 0 pour g : $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + o(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 1 + o(1) = 1$

donc g est continue aussi en 0

donc g est continue sur \mathbb{R}

$$= \underline{g(0)}$$

f est la composée de 2 fonctions continues, donc elle est continue

III Dérivées partielles

déf: $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_p)$
 $A = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) = f'_1(a_1)$$

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f(t, a_2, a_3, \dots, a_p)$$

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f(a_1, t, a_3, \dots, a_p)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(A) = f'_2(a_2)$$

ex: dérivées partielles de $\sin(2x - 7y) = f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot \cos(2x - 7y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -7 \cos(2x - 7y)$$