

① Somme partielle géométrique  $1+x+\dots+rx^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$   $qdx \neq 1$  ( $=n+1 qdx=1$ )

② Dérivée SE de  $\frac{1}{1-x}$  Rayon 1

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

③ Dérivée SE de  $\ln(1+x)$

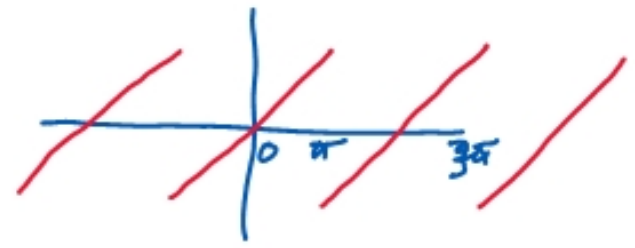
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{Rayon 1}$$

④ Que vaut  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$

⑤ Que vaut  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n} = \infty$

$f$  est  $2\pi$ -périodique, égale à  $x \sin \lfloor -\pi, \pi[$

$a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$        $\forall n \geq 1 \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$



Série de Fourier:

$$S_f(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

$\Gamma$  de DIRICHLET:  $f$  est de classe  $C'$  par morceaux, donc  $S_f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}, \forall x$

en 0:  $S_f(0) = 0$  et  $f(0) = 0$        $0 = 0$  certes!

en  $\frac{\pi}{2}$ :  $S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$

1<sup>er</sup> cas:  $n$  pair:  $n = 2p$        $\sin\left(2p \frac{\pi}{2}\right) = \sin(p\pi) = 0$

2<sup>es</sup> cas:  $n = 2p+1$        $\sin\left((2p+1) \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\sin(p\pi)}_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_1 \underbrace{\cos(p\pi)}_{(-1)^p}$

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2p+1+1}}{2p+1} (-1)^p = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{2}$$

$\uparrow S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \uparrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Formule de Parseval:  $f$  est continue par morceaux, donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dt = a^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{3} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Q: que vaut  $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$  ?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \text{''} \Rightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{(4-1)\pi^2}{24} = \frac{3\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

ATS 2013. FOURIER

$$\textcircled{1} e^{im\pi} = (e^{i\pi})^m = (-1)^m = \cos(m\pi) + i \sin(m\pi)$$

$$\textcircled{2} I_{p,n} = \int_0^\pi t^p e^{int} dt$$

$$I_{0,n} = \int_0^\pi e^{int} dt = \left[ \frac{e^{int}}{in} \right]_0^\pi = \frac{e^{i\pi n} - 1}{in} = \frac{(-1)^n - 1}{in} = -\frac{(-1)^n - 1}{n} i$$

$$\textcircled{3} \text{ M paa } I_{p,n} = \text{beuk} + \frac{ip}{n} I_{p-1,n}$$

$$I_{p,n} = \int_0^\pi t^p e^{int} dt \quad \text{I \& O} \quad \begin{cases} u = t^p & u' = p t^{p-1} \\ v' = e^{int} & v = \frac{e^{int}}{in} \end{cases}$$

$$I_{p,n} = \left[ t^p \frac{e^{int}}{in} \right]_0^\pi - \int_0^\pi p t^{p-1} \frac{e^{int}}{in} dt = \left( \frac{\pi^p e^{in\pi}}{in} - \frac{p}{in} I_{p-1,n} \right) \cdot i$$

$$I_{p,n} = \frac{\pi^p (-1)^n i}{-n} - \frac{p i}{-n} I_{p-1,n} = \frac{i (-1)^n \pi^p}{n} + \frac{p}{n} I_{p-1,n}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \quad I_{1,n} &= \frac{i(-1)^{n+1} \pi}{n} + \frac{i}{n} I_{0,n} = i(-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} + \frac{i}{n} \frac{-((-1)^n - 1)i}{n} \\
 &= \frac{(-1)^n - 1}{n^2} + i \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{C_{1,n}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{S_{1,n}}
 \end{aligned}$$

$$I_{1,n} = \int_0^{\pi} t^1 e^{int} dt = \int_0^{\pi} t \cos nt dt + i \int_0^{\pi} t \sin nt dt$$

$$I_{2,n} = \frac{i(-1)^{n+1} \pi^2}{n} + \frac{2i}{n} \left( \frac{(-1)^n - 1}{n^2} + i \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n} \right)$$

$$= \frac{2(-1)^n \pi}{n^2} + i \left( \frac{2}{n^3} ((-1)^n - 1) + \frac{(-1)^{n+1} \pi^2}{n} \right)$$

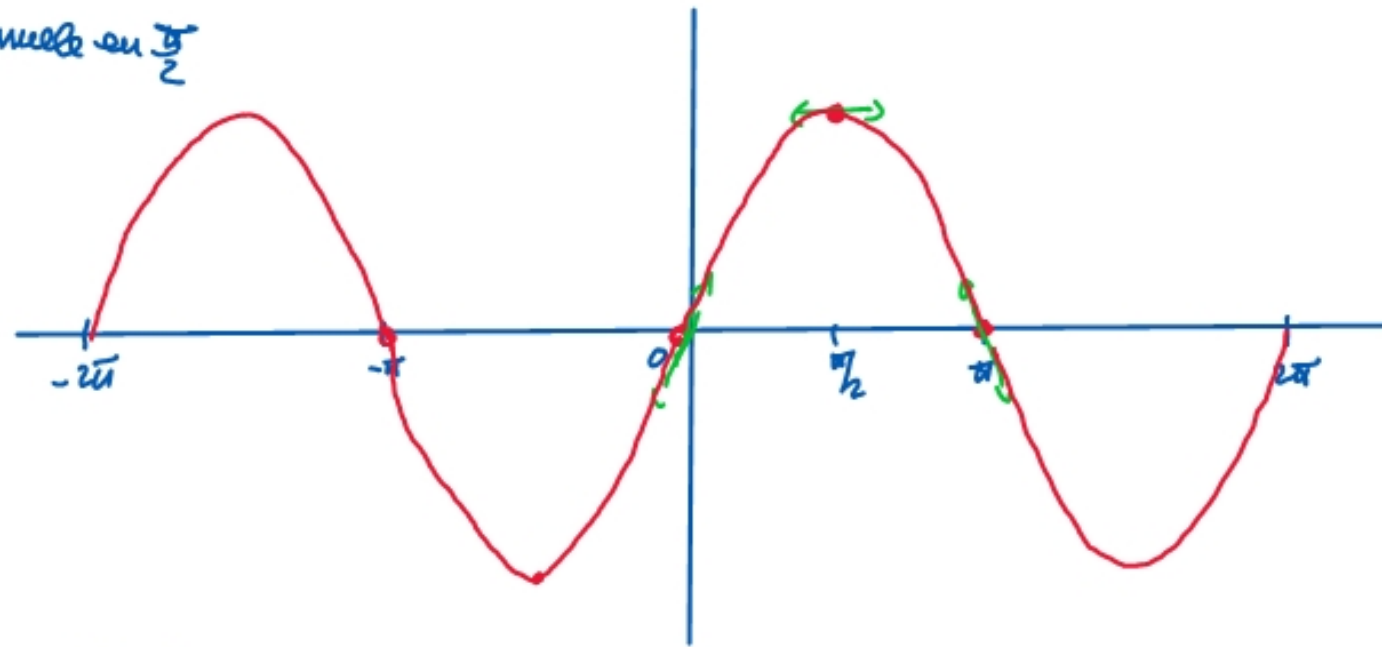
$\underbrace{\hspace{10em}}_{C_{2,n}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{S_{2,n}}$

Part 2 :  $f$  est impaire,  $2\pi$ -période et égale à  $\pi t - t^2$  sur  $]\pi/2[$

$f'(t) = \pi - 2t$   $f'$  s'annule en  $\frac{\pi}{2}$

$t$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$f'$	$\pi$	0	$-\pi$
$f$	0	$\frac{\pi^2}{4}$	0

$\underbrace{\quad}_{\text{pointe } \frac{\pi}{2}}$       $\underbrace{\quad}_{\text{pointe } -\pi}$



$f$  est impaire, donc  $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi t - t^2) \sin(nt) dt = 2 \underbrace{\int_0^{\pi} t \sin(nt) dt}_{S_{1,n}} - \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} t^2 \sin(nt) dt}_{S_{2,n}}$$

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} - \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) + \frac{2(-1)^n}{n}$$

$$b_n = \frac{-4}{\pi n^3} \left( (-1)^n - 1 \right) \begin{cases} 0 & \text{qd } n \text{ est pair} \\ \frac{8}{\pi n^3} & \text{qd } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$S_f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi(2p+1)^3} \sin((2p+1)x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(2)  $f$  est de classe  $C^1$  par morceaux, donc la série de Fourier converge vers  $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$  (DIRICHLET).

De plus,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $S_f(x) = f(x)$

(3) Parseval:  $f$  est continue par morceaux:  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$

$$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi^2 t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 t^2 - \pi t^3 + t^4) dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi t - t^2)^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{64}{\pi^2 (2p+1)^6}$$