

~~10000~~

$$C_m = \sum_{k=0}^m \sum_{j=k}^m 2^j = \sum_{k=0}^m (2^k + 2^{k+1} + \dots + 2^m)$$

$$= \sum_{k=0}^m 2^k [1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-k}]$$

$$= \sum_{k=0}^m 2^k \left[\frac{2^{m-k+1} - 1}{2 - 1} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^m 2^k (2^{m-k+1} - 1) = \sum_{k=0}^m (2^{m+1} - 2^k)$$

$$= \sum_{k=0}^m 2^{m+1} - \sum_{k=0}^m 2^k = \left(2^{m+1} \cdot \sum_{k=0}^m 1 \right) - \left(\frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} \right)$$

← número de termos: m+1

$$= (m+1) \cdot 2^{m+1} - 2^{m+1} + 1 = m \cdot 2^{m+1} + 1$$

$$\textcircled{12} \quad \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{\textcircled{a}^{-1/2}}{2k+1} + \frac{\textcircled{b}^{1/2}}{2k-1}$$

$$\text{hence} \quad \frac{-1}{2k+1} + \frac{1}{2k-1} = \frac{-(2k-1) + (2k+1)}{4k^2-1} = \frac{2}{4k^2-1}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{5}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n-1}} + \frac{1}{2n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n-1}} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{-1 + (2n+1)}{2(2n+1)} = \frac{2n}{2(2n+1)} = \frac{2 \cdot n}{2(2n+1)}$$

$$= \frac{n}{2n+1}$$

VII les symboles

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ les entiers natuels

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ les entiers relatifs

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \text{ où } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$ les rationnels

\mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels

\mathbb{C} complexes ($a+ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$)

$A^* = A \setminus \{0\}$ c'est l'ensemble A privé de 0

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$ x est l'abscisse; y est l'ordonnée

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \text{ où } x, y \text{ et } z \text{ sont dans } \mathbb{R}\}$

↑ la cote

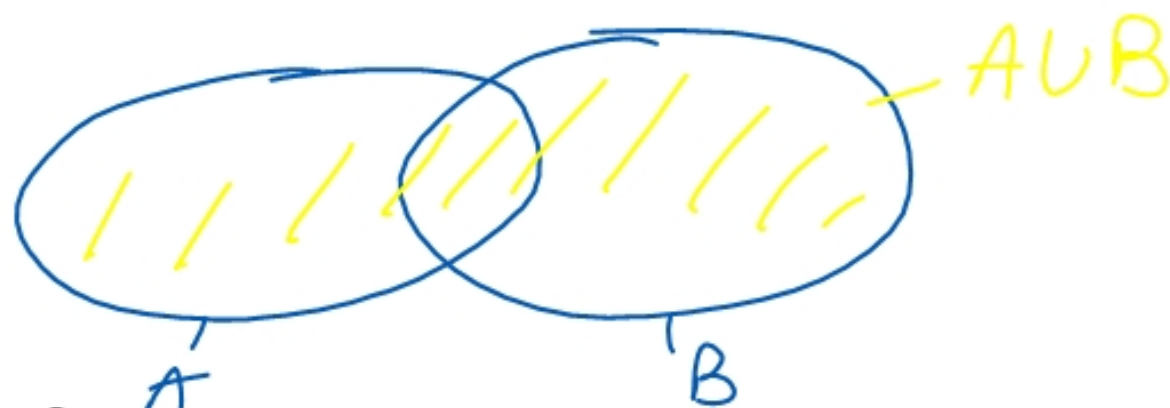
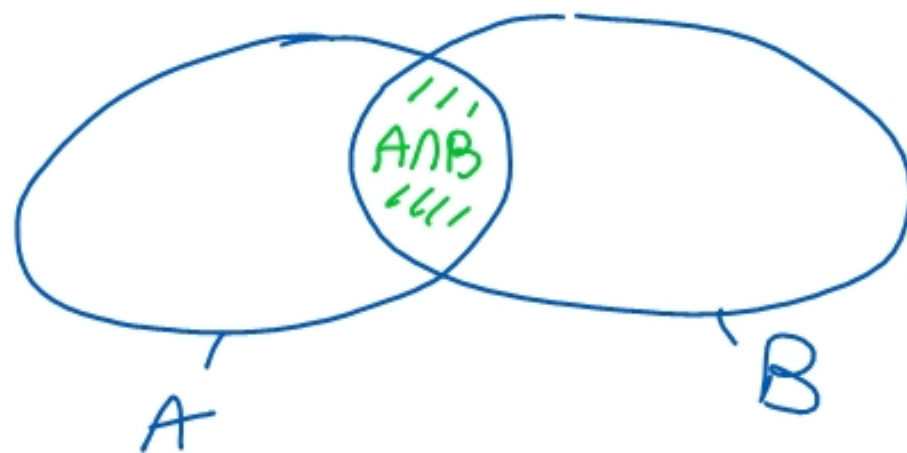
\subset inclusion ex $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (Nest inclus dans \mathbb{Z})

\cup réunion

\cap intersection

\forall | quel que soit
ou
pour tout

\exists il existe



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Montrons que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

[On procède par l'absurde, c'à d que on suppose que $\sqrt{2}$ est un rationnel (on va aboutir à une contradiction)

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Si p et q sont pairs, alors

on a simplifié par 2 le plus possible

$$p = 2p' \quad q = 2q'$$

$$\sqrt{2} = \frac{2p'}{2q'} = \frac{p'}{q'}$$

Si p' et q' sont pairs, alors

$$\sqrt{2} = \frac{p''}{q''}$$

on simplifie encore par 2

On simplifie par 2 jusqu'à ce que l'un des deux soit

impair

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ ne sont pas tous les deux pairs}$$

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{2} b = a \Rightarrow 2b^2 = a^2$$

* a^2 est pair, donc a est pair $a = 2a'$ où $a' \in \mathbb{N}$

$$2b^2 = a^2 \Rightarrow 2b^2 = (2a')^2 \Rightarrow 2b^2 = 4a'^2 \Rightarrow b^2 = 2a'^2$$

b^2 est pair donc b est pair

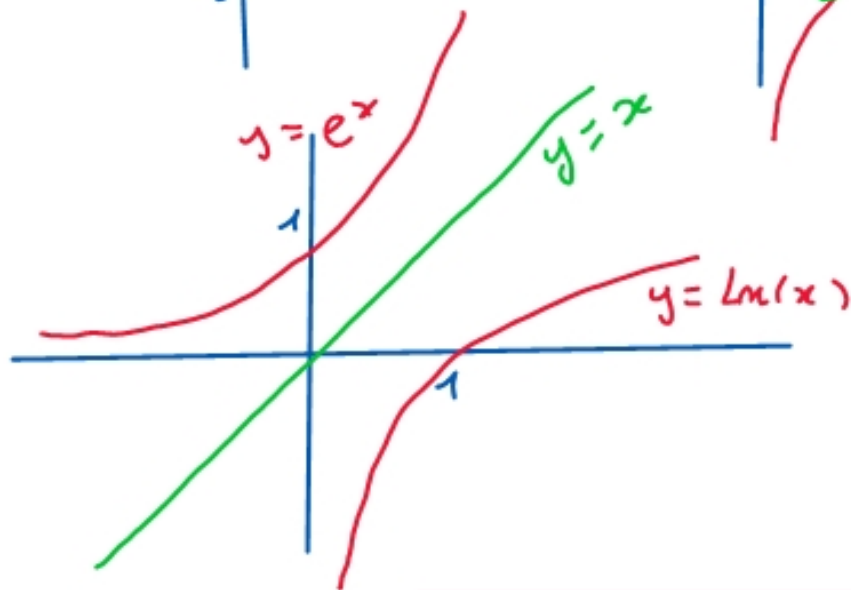
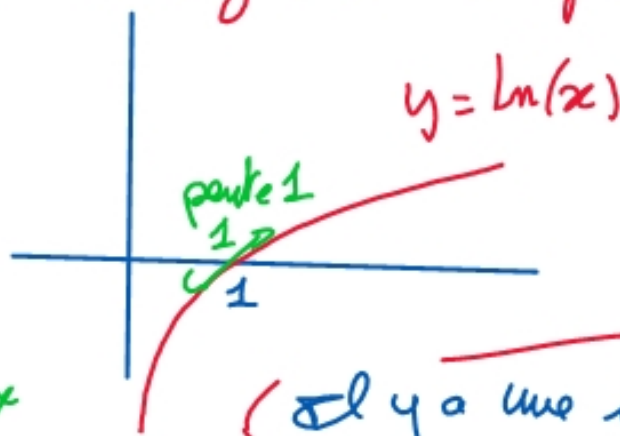
a et b sont pairs !! Contradiction.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel \square

(* le carré d'un nombre impair est forcément impair :
 $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ · c'est impair !)

VIII Rappels sur les fonctions classiques

8.1 exponentielle et logarithme népérien



\Leftrightarrow si y a une symétrique / droite d'éq $y=x$

car \ln et exp sont réiproques

cà d

$$e^{\ln(x)} = x, \forall x > 0$$

et

$$\ln(e^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Formules: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\forall a, b > 0$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad \forall a > 0$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \forall a, b > 0$$

$$a \ln(b) = \ln(b^a)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall b > 0$$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$b^a = e^{a \ln b}$$

$$e^{a \ln b} = e^{\ln(b^a)} = b^a$$

derivées: $(e^x)' = e^x$

$$\ln(x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$\left(\int \ln(3x) dx = x \ln x - x \right)$$

$$(e^{2x})' = 2e^{2x}$$

$$(e^{x^2+x})' = (2x+1)e^{x^2+x}$$

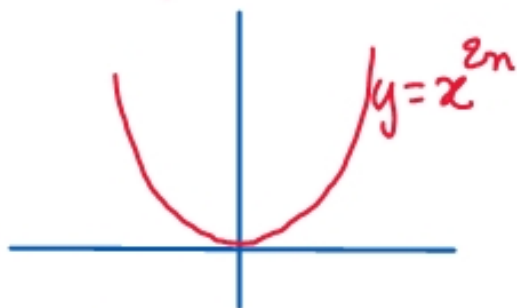
$$(e^{u(x)})' = \underline{\underline{u'(x)}} \cdot e^{u(x)}$$

⚠

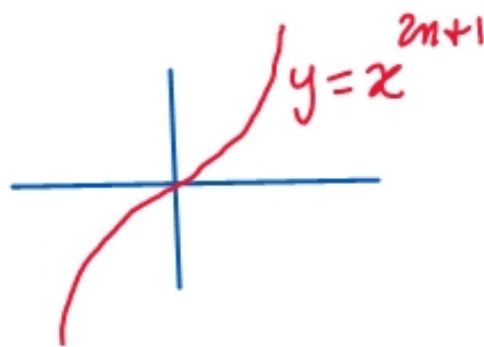
$$\begin{aligned} (\ln(3x+1))' &= 3 \cdot \frac{1}{3x+1} \\ &= \frac{3}{3x+1} \end{aligned}$$

$$\ln(u(x))' = \underline{\underline{u'(x)}} \cdot \frac{1}{u(x)} = \frac{u'}{u}$$

8.2 les puissances

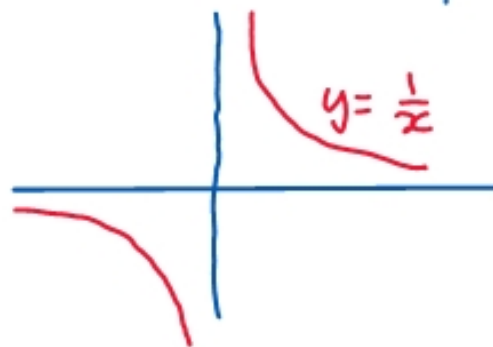
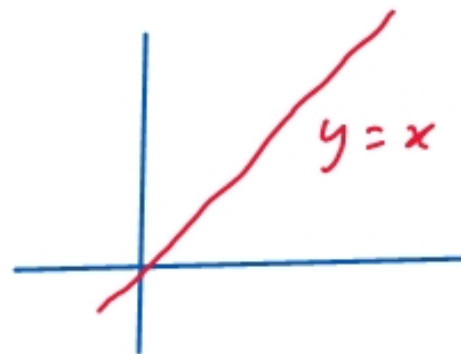


les puissances paires



les puissances impaires

Si n n'est pas un entier, alors $x^n = e^{n \ln(x)}$
donc l'ensemble de def est \mathbb{R}^{+*}

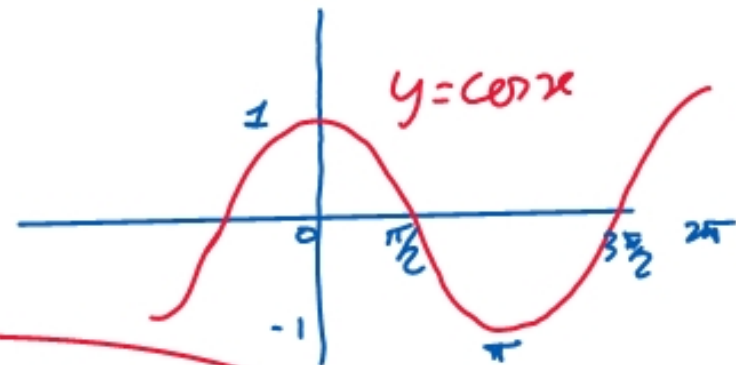
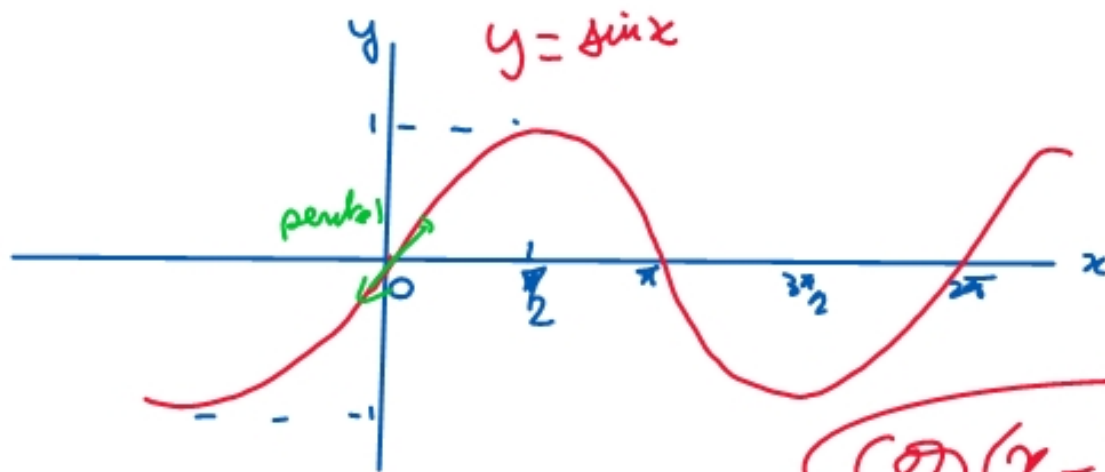


$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + cste \quad \text{qd } n \neq -1$$

$$n = -1 \cdot \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + cste$$

8.3 sinus et cosinus



$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin(ax))' = a \cdot \cos(ax)$$

$$(\sin(u(x)))' = u'(x) \cdot \cos(u(x))$$

$$(\cos(u(x)))' = -u'(x) \cdot \sin(u(x))$$

