

~~recedo~~

On sait que  $a_{n+2} = \frac{-\omega^2}{(n+2)^2} a_n \quad \forall n \geq 0$

On montre par récurrence que

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} a_0$$

• pour  $n=0$  :  $a_0 = \frac{(-1)^0 \omega^0}{2^0 (0!)^2} a_0$  OK

• Hérédité : je prend un  $n \geq 0$ . Je suppose par  $a_{2n} = \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} a_0$

$$a_{2n+2} = \frac{-\omega^2}{(2n+2)^2} a_{2n} = \frac{-\omega^2}{(2n+2)^2} \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} a_0$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \omega^{2n+2}}{2^2 \cdot (n+1)^2 \cdot 2^{2n} (n!)^2} a_0 = \frac{(-1)^{n+1} \omega^{2n+2}}{2^{2n+2} (n+1)!^2} a_0$$

FIN

On conclut

Remarque: Si  $f$  est continue en  $x$ , alors  $f(x^-) = f(x^+) = f(x)$

$$\text{et } \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{f(x) + f(x)}{2} = f(x)$$

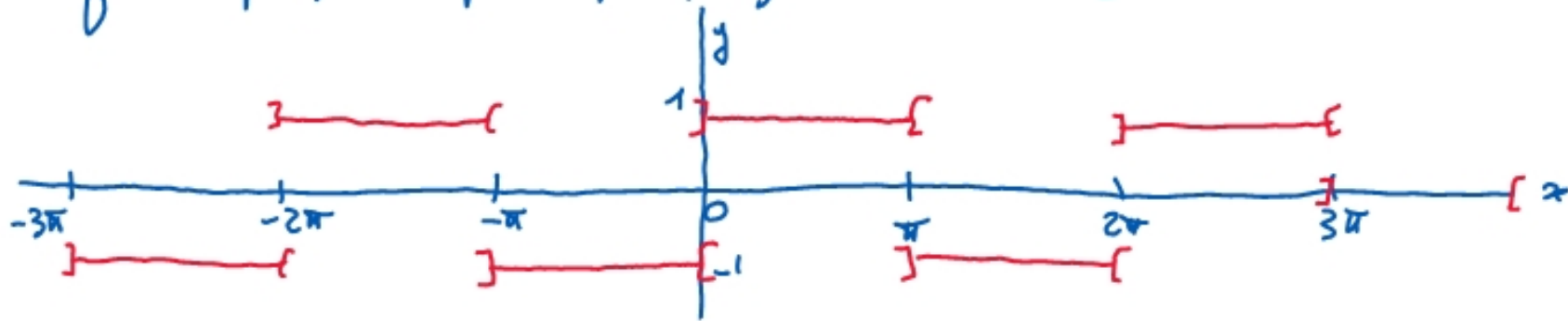
T de Dirichlet: Si  $f$  est de classe  $C'$  par morceaux sur  $[0, T]$  et  $T$ -périodique, alors  $S_p \text{ CV } \forall x \in \mathbb{R}$  et  $S_p(x) = f(x)$  là où  $f$  est continue

Formule de Parseval: Si  $f$  est continue par morceaux et  $T$ -périodique, alors

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$

La valeur efficace est  $\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f|^2}$

Ex 1:  $f$  est impair,  $2\pi$ -périodique, égale à  $1 \text{ sur } ]0, \pi[$ .



$a_n = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  car  $f$  est impair

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad \text{période } 2\pi: \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \sin(nt) dt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-\cos(n\pi) + 1}{n} \right] \quad \cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \frac{(1 - (-1)^n)}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{\pi n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$\underline{S_p(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)} \sin((2p+1)x)}$$

DIRICHLET en  $x=0$  :  $S_p(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2}$   
 $0 = \frac{-1 + 1}{2} = 0 \quad 0=0$

DIRICHLET en  $x=\frac{\pi}{2}$  :  $S_p\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  car  $f$  est continue en  $\frac{\pi}{2}$   
 $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)} \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\sin(p\pi)}_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{\cos(p\pi)}_{(-1)^p} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_1 = (-1)^p$$

$$\frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = 1$$

$$\pi = 4 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

Formule de Parseval :  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 0 + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \frac{4}{\pi(2p+1)} \right)^2$$

$$1 = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(2p+1)^2} \quad \boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

Question : Connaissant  $\sum_0^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ , calculez  $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2} = S$

$$\boxed{S = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}}$$

$$S = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4} S + \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow S - \frac{1}{4} S = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \frac{3}{4} S = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\pi^2}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

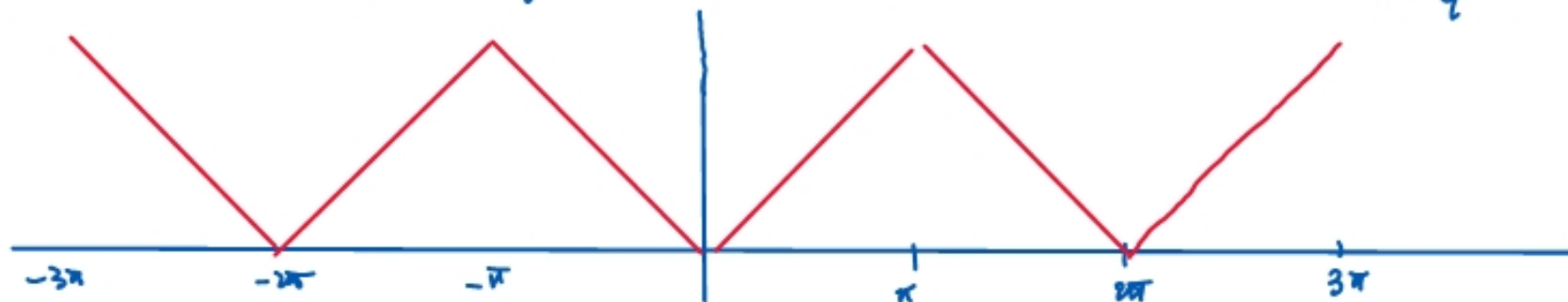
$$S = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\boxed{\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

$\boxed{\quad}$

ex2:  $f$  est  $2\pi$ -périodique, égale à  $|x| \sin$  sur  $]-\pi, \pi[$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{qd } x > 0 \\ -x & \text{qd } x < 0 \end{cases}$$



El y a une symétrie /  $oy$ , donc  $f$  est paire:  $\forall n \geq 1, \underline{b_n = 0}$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2} \quad \boxed{a_0 = \frac{\pi}{2}}$$

$n \geq 1$ :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{[T]} \dots = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \dots = \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos(nt) dt$$

$$\text{I II: } \begin{cases} u = t & u' = 1 \\ v = \cos(nt) & v' = -\frac{\sin(nt)}{n} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left( \left[ \cancel{t \frac{\sin(nt)}{n}} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n} dt \right) = -\frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \sin(nt) dt = -\frac{2}{\pi n} \left[ -\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2} ( (-1)^n - 1 ) = \begin{cases} 0 & \text{qd } n \text{ est pair} \\ \frac{-4}{\pi n^2} & \text{qd } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Série de Fourier:  $S_f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_1^{+\infty} a_n \cos(nx)$

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-4}{\pi(2p+1)^2} \cos((2p+1)x)$$

T de Dirichlet:  $S_f(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  ( $f$  est de classe  $C^1$  par morceaux et continue)

en 0:  $S_f(0) = \frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-4}{\pi(2p+1)^2} 1 = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \Rightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Formule de Parseval:  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

$$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \frac{-4}{\pi(2p+1)^2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \Rightarrow \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Question: En déduire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ .

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^4} + \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^4} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \end{aligned}$$

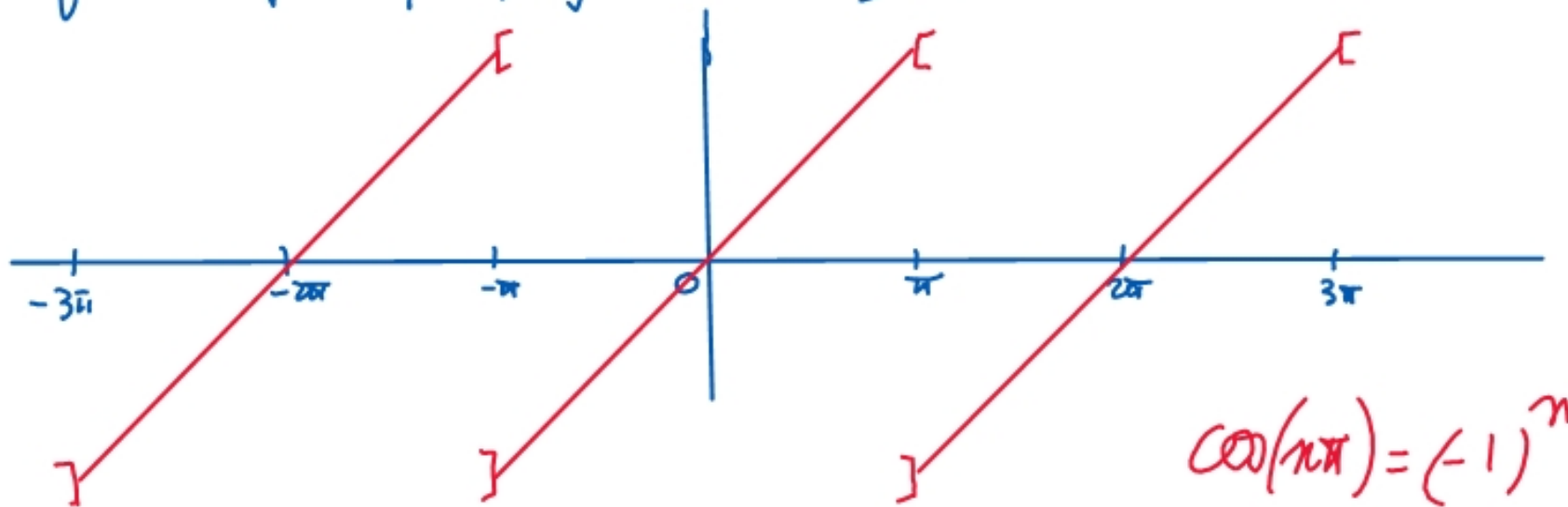
$$S = \frac{1}{16} \left( \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} \right) + \frac{\pi^4}{96} \Rightarrow S - \frac{1}{16}S = \frac{\pi^4}{96} \Rightarrow \frac{15}{16}S = \frac{\pi^4}{96}$$

$$S = \frac{\pi^4}{96} \times \frac{16}{15} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$



ex3:  $f$  est  $2\pi$ -périodique, égale à  $x \operatorname{seu} ]-\pi, \pi[$



$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

symétrique / 0.  $f$  est impaire. donc  $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt \quad \text{I\&D} \left| \begin{array}{l} u=t \quad u'=1 \\ v=\sin(nt) \quad v'=\frac{\cos(nt)}{n} \end{array} \right.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left( \left[ -\frac{t \cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n} dt \right) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{-\pi(-1)^n}{n} - 0 + \left[ \frac{\sin(nt)}{n^2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{-2(-1)^n}{n}$$

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

